Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Шур, Ю. В. Гамзова, Частичные слова и свойство взаимодействия периодов,
Изв. РАН. Сер. матем., 2004, том 68, выпуск 2, 191–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/im480>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:41:52

УДК 512.532.2+519.11

А. М. Шур, Ю. В. Гамзова

Частичные слова и свойство взаимодействия периодов

Теорема Файна–Вильфа выражает фундаментальное свойство периодических слов – свойство взаимодействия периодов. Произвольное слово с периодами p и q имеет произвольный период, равный НОД(p, q), если длина слова больше критической величины, называемой длиной взаимодействия. В настоящей работе рассмотрено аналогичное свойство для произвольных периодических частичных слов и получена точная линейная оценка длины взаимодействия.

Библиография: 7 наименований.

§ 1. Введение

Частичное слово представляет собой комбинаторный объект, получаемый естественным обобщением понятия обычного конечного слова. Слово, т. е. конечную последовательность элементов фиксированного множества (алфавита), можно рассматривать как функцию из множества $\{1, \dots, n\}$ в алфавит. Тогда частичное слово длины n над алфавитом A может быть определено (см. [1]) как *частичная* функция

$$W: \{1, \dots, n\} \rightarrow A.$$

Интерес к комбинаторным свойствам частичных слов возник совсем недавно и продиктован потребностями компьютерных наук и молекулярной биологии. Систематическое исследование частичных слов только начинается.

Задачи, в которых возникают частичные слова, можно разделить на два типа. В задачах первого типа некоторая часть информации нам не важна (вне зависимости от того, доступна она или нет). Примером может служить задача поиска в тексте по шаблону, когда шаблон содержит символ (или символы) со значением “что угодно”. В задачах второго типа некоторая часть информации для нас важна, но по каким-либо причинам недоступна. По имеющейся части информации и некоторым дополнительным условиям необходимо полностью восстановить информацию. Примером является задача восстановления фрагментов файлов, поврежденных при передаче или в результате порчи носителя. Очень интересными представляются также задачи молекулярной биологии (см. [7]), в частности задача реконструкции нуклеотидных цепочек ДНК по частично расшифрованным фрагментам.

В последние годы начато изучение периодических частичных слов (см. [1], [4], [5]), но пока только в связи с одним известным комбинаторным свойством – свойством взаимодействия периодов, выражаемым для обычных слов хорошо известной теоремой Файна–Вильфа (см. [2], а также [3]). Анализ этого свойства посвящена

и данная работа. Однако представляет интерес обобщение на случай частичных слов и других свойств периодических слов, например, теоремы о критическом разбиении [3].

Отметим еще два направления в комбинаторике слов, рамки которых разумно расширить, включив частичные слова в объекты исследования. Первое из них связано с теорией избегаемости. Можно заметить, что избегаемые слова (“шаблоны”) представляют собой частичные слова в несколько завуалированном виде. Соответственно, изучение свойств частичных слов в этом направлении позволит переосмыслить и расширить существующую теорию. Второе направление связано с изучением структуры и свойств множества подслов (“делителей”) данного слова и содержит некоторые задачи молекулярной биологии (см., например, [6]). В работе [1] упоминается проблема “наложения” частичных слов, лежащая в рамках этого направления.

Приведем необходимые определения для обычных слов. *Длина* слова W есть количество символов в этом слове (обозначается через $|W|$). Порядковый номер символа в слове называется его *позицией*. Натуральное число p , не превосходящее $|W|$, называется *периодом* слова W , если

$$W(i) = W(i + p), \quad i = 1, \dots, |W| - p.$$

В частности, любое слово имеет тривиальный период, равный его длине.

Далее будем рассматривать слова, имеющие по крайней мере два различных периода. Для периодических слов одним из основных свойств является свойство взаимодействия периодов: достаточно длинное слово с периодами p и q имеет также “производный” период $\text{НОД}(p, q)$. Точная формулировка приводится в теореме Файна–Вильфа [2], которую мы сформулируем здесь в удобных для нас обозначениях.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть p и q – натуральные числа. Тогда каждое слово длины не менее чем $p + q - \text{НОД}(p, q)$ с периодами p и q имеет период $\text{НОД}(p, q)$. Указанная оценка является точной.

Через $D(W)$ обозначим область определения частичной функции $W(i)$. Каждому частичному слову W над алфавитом A можно поставить в соответствие обычное слово $W_\diamond$ над расширенным алфавитом $A_\diamond = A \cup \{\diamond\}$ следующим образом:

$$W_\diamond(i) = \begin{cases} W(i), & i \in D(W), \\ \diamond, & i \notin D(W). \end{cases}$$

Отображение $W \rightarrow W_\diamond$ является биекцией. Далее под частичным словом будем понимать именно конечную последовательность символов над алфавитом $A \cup \{\diamond\}$, используя, в частности, те же определения длины и позиции, что и для обычных слов.

Значение символа $\diamond$ таково: “на этой позиции должен находиться алфавитный символ, неизвестно какой”. (При рассмотрении некоторых задач, например задачи поиска в тексте, “неизвестно” заменяется на “безразлично”, но наша задача к таким не относится, как станет ясно из определений.) В статье [1] символ $\diamond$ назывался *дырой*. Мы используем термин *джокер*, который кажется нам более уместным. Отличные от джокера символы алфавита будем, как обычно, называть *буквами*.

В работе [1] рассмотрены две естественные возможности обобщения свойства периодичности на частичные слова. Приведем соответствующие определения.

Частичное слово W имеет *период* p , если

$$i \equiv j \pmod{p} \implies W(i) = W(j), \quad i, j \in D(W).$$

Например, слово $W = ab \diamond a \diamond cab c$ имеет период 3.

Частичное слово W имеет *локальный период* p , если

$$W(i) = W(i + p), \quad i, i + p \in D(W).$$

Для обычных слов наличие локального периода p всегда влечет наличие периода p , но это свойство не выполняется для частичных слов. Например, частичное слово $W = abc \diamond bcd$ имеет локальный период 3, но не имеет периода 3. Заметим, что частичное слово имеет период p тогда и только тогда, когда в нем все джокеры можно заменить буквами так, что полученное обычное слово будет иметь период p .

В [1] был доказан аналог теоремы 1.1 для локально периодических частичных слов с одним джокером.

ТЕОРЕМА 1.2 [1]. Пусть p и q – натуральные числа. Тогда любое частичное слово длины не менее чем $p+q$ с одним джокером и локальными периодами p и q имеет период $\text{НОД}(p, q)$. Указанная оценка является точной.

Однако если частичное слово содержит более одного джокера, то свойство взаимодействия локальных периодов может вообще не выполняться. Например, частичное слово U с периодами p и q может иметь два джокера в позициях $q+1$ и $p+1$ и различные буквы в позициях 1 и $\text{НОД}(p, q)+1$. Следовательно, для локально периодических слов с более чем одним джокером можно доказывать лишь “условные” теоремы. Соответствующие оценки для случаев двух и трех джокеров приведены в [5].

Таким образом, чтобы получить результаты, аналогичные теореме 1.1, для произвольных частичных слов следует использовать условия, связанные с периодами, а не с локальными периодами.

Итак, в связи с частичными словами и свойством взаимодействия периодов интерес представляют следующие вопросы.

1. Верно ли, что частичное слово достаточно большой длины, имеющее периоды p и q и фиксированное число джокеров k , обязательно имеет период $\text{НОД}(p, q)$?
2. Если ответ на первый вопрос – утвердительный, то какой длины должно быть частичное слово, имеющее периоды p , q и содержащее k джокеров, чтобы оно также гарантированно имело период $\text{НОД}(p, q)$? (Тривиальный случай длины $k+1$ исключим из рассмотрения.)

Наименьшую такую длину будем называть *длиной взаимодействия периодов* p и q при наличии k джокеров и обозначать $L(k, p, q)$. Длину взаимодействия естественно рассматривать как функцию от k с параметрами p и q .

В работе [4] был получен утвердительный ответ на первый вопрос и частичный ответ на второй. Полный ответ на второй вопрос является целью настоящей работы.

§ 2. Основной результат работы

Как отмечалось в некоторых работах (см. [1], [3], [4]), утверждения о взаимодействии произвольных периодов p и q тривиально следуют из аналогичных утверждений для взаимно простых периодов ввиду следующего наблюдения.

НАБЛЮДЕНИЕ. В случае, когда $\text{НОД}(p, q) = d > 1$, можно заменить (частичное) слово U набором, состоящим из d (частичных) слов $U_1, \dots, U_d$, где $U_i = U(i)U(d+i)U(2d+i)\dots$. Каждое из этих слов будет иметь взаимно простые периоды p/d , q/d . При этом слово U будет иметь период d тогда и только тогда, когда все U_i имеют период 1.

Таким образом, в настоящей работе мы исследуем длину взаимодействия взаимно простых периодов. Перечислим известные ранее оценки длины взаимодействия в предположении, что $p > q$ (знак $\lfloor \cdot \rfloor$ здесь и далее обозначает нижнее целое):

$$1) L(0, p, q) = p + q - 1 \quad (\text{см. [2]}); \quad (2.1)$$

$$2) L(1, p, q) = p + q \quad (\text{см. [1]}); \quad (2.2)$$

$$3) L(2, p, q) = p + 2q - 1 \quad (\text{см. [4]}); \quad (2.3)$$

$$4) L(k, p, 2) = (2p + 1)\lfloor k/p \rfloor + k \bmod p \quad (\text{см. [4]}); \quad (2.4)$$

$$5) L(k, p, q) \leq qk + p + q - 1 \quad (\text{см. [4]}). \quad (2.5)$$

Кроме того, в работе [4] было доказано, что оценка (2.5) является точной при $k \neq 0$ только в случае, когда $q = 2$ и p делит k ; во всех остальных случаях эта оценка может быть улучшена. Из этого доказательства немедленно следовало и не отмеченное явно в [4] равенство (2.4).

Таким образом, длина взаимодействия известна точно в нескольких простейших случаях и оценена сверху в общем случае линейной по k функцией с коэффициентом q . Эти результаты, на наш взгляд, исчерпали возможности использовавшейся комбинаторной техники, основанной на графах бинарных отношений. В настоящей работе предложена иная техника, позволяющая найти оптимальную линейную оценку в общем случае. С учетом (2.4) можно предполагать, что $q \geq 3$. Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть p и q – взаимно простые периоды слова с k джокерами, $p > q \geq 3$, $k \geq \lfloor 2p/3 \rfloor - 1$ при $q = 3$ и $k \geq \lfloor 3p/q \rfloor + 3$ при $q \geq 4$, $L(k, p, q)$ – длина взаимодействия периодов p и q при наличии k джокеров. Тогда:

$$a) \frac{pq}{p+q-2} (k+1) \leq L(k, p, q) < \frac{pq}{p+q-2} k + 4(q-1);$$

$$b) \text{ функция } \Delta(k, p, q) = L(k, p, q) - \frac{pq}{p+q-2} k \text{ является периодической по } k \text{ с периодом } p+q-2;$$

$$c) \text{ для любого } \varepsilon > 0 \text{ и любого } q \text{ найдется } p \text{ такое, что}$$

$$\max \Delta(k, p, q) > 4(q-1) - \varepsilon;$$

$$d) \text{ для любых } p \text{ и } q$$

$$\min \Delta(k, p, q) = \frac{pq}{p+q-2};$$

$$e) \text{ для любых } p \text{ и } q$$

$$\max \Delta(k, p, q) \geq 2q.$$

ПРИМЕР 2.1. График зависимости длины взаимодействия от числа джокеров при $p = 13$, $q = 3$ вместе с графиками верхней и нижней оценок из теоремы 2.1 приведены на рис. 1. Отметим, что согласно теореме 2.1 эти оценки верны при $k \geq 7$.

Рис. 1. График зависимости длины взаимодействия от числа джокеров

§ 3. Обратная задача. Бланки и расстановки джокеров

Далее под *словом* мы всюду понимаем частичное слово, а p и q считаем взаимно простыми числами такими, что $p > q \geq 3$. Для доказательства основной теоремы рассмотрим обратную задачу: заданы длина слова L и его периоды p , q , необходимо найти минимальное количество джокеров, при котором слово может не иметь периода 1.

Заметим, что для каждого периода p произвольного слова U и для любого i , $1 \leq i \leq p$, все буквы, находящиеся в позициях $i, i + p, i + 2p, \dots$, равны независимо от расположения джокеров в этих позициях. Указанное множество позиций мы будем называть *P-классом*; оно содержится в i -м классе вычетов по модулю p .

Рассмотрим случай двух различных периодов p , q слова U , и, соответственно, будем рассматривать P - и Q -классы. Заметим, что если две позиции из разных Q -классов, занятые буквами, принадлежат одному P -классу (т. е. “связаны” при

помощи периода p), то в этих Q -классах содержится одна и та же буква. Если же любая пара позиций из данных Q -классов, принадлежащая одному P -классу, содержит хотя бы один джокер, то эти Q -классы могут содержать различные буквы.

Таким образом, чтобы построить слово U длины L с периодами p и q , содержащее m различных букв ($m \leq q$), нужно разбить Q -классы (их количество равно q) на m групп и разместить джокеры так, чтобы период p связывал между собой только такие позиции, не занятые джокерами, которые принадлежат Q -классам из одной группы.

Чтобы решить поставленную обратную задачу, необходимо найти наиболее экономный способ размещения джокеров для случая $m = 2$. Процедура построения слова U в этом случае будет выглядеть следующим образом. Разделим Q -классы на 2 группы: T и S , содержащие соответственно t и s классов ($0 < t \leq s$, $t + s = q$). Для каждого P -класса выберем одну из групп T или S и разместим джокеры во всех позициях этого P -класса, принадлежащих к Q -классам из выбранной группы. Если мы хотя бы по разу выбрали каждую из групп, то в Q -классах как из T , так и из S останутся позиции, не занятые джокерами. В них мы разместим буквы (одну для T , другую для S) и тем самым получим слово U , не имеющее периода 1. Несложно заметить, что число джокеров в U , которое мы стремимся минимизировать, зависит от t и способа выбора групп для Q -классов.

Опуская детали, рассмотренную выше процедуру можно представить следующим образом: имеется некоторый “шаблон” слова U , в котором мы по определенным правилам размещаем алфавитные символы (вначале – джокеры, а затем – буквы). Интуитивное понятие “шаблона” мы сейчас оформим в виде специальной числовой таблицы (*бланка*), играющей ключевую роль в дальнейших рассуждениях.

Запишем позиции слова U в таблицу, как показано на рис. 2, *a*.

Занумеруем Q -классы числами от 0 до $q - 1$ (так, что i -й класс содержит позиции с номерами вида $i + nq$) и заменим в приведенной таблице каждую позицию на номер содержащего ее Q -класса. Полученную таблицу будем называть *бланком*. Она имеет вид, изображенный на рис. 2, *б* (знак $\oplus$ обозначает сложение по модулю q).

1	$p + 1$	$2p + 1$	...	1	$1 \oplus (p \bmod q)$	$1 \oplus (2p \bmod q)$	...
2	$p + 2$	$2p + 2$	...	2	$2 \oplus (p \bmod q)$	$2 \oplus (2p \bmod q)$	...
.....							
p	$2p$	$3p$	...	$p \bmod q$	$2p \bmod q$	$3p \bmod q$	...
<i>a</i>				<i>б</i>			

Рис. 2. Построение бланка

Для построения слова U мы заменяем некоторые номера в строках (строки соответствуют P -классам) джокерами так, чтобы в любой строке оставались номера классов только из группы S или только из группы T .

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим слово длины 15, имеющее периоды 5 и 7. Минимальное количество джокеров, при котором такое слово может не быть унарным, равно 2 (это следует из оценки (2.3)). Бланк для этого слова выглядит так, как показано на рис. 3, а.

1 3 0	1 3 0
2 4	2 4
3 0	3 0
4 1	◇ 1
0 2	◇ 2
1 3	1 3
2 4	2 4
<i>a</i>	<i>b</i>

Рис. 3. Пример бланка и расстановки джокеров в нем

Легко убедиться, что наименьшее количество джокеров достигается при $T = \{2, 4\}$ и $S = \{0, 1, 3\}$. Тогда необходимо поставить по одному джокеру в 4-ю и 5-ю строки, например в позиции 4 и 5 (рис. 3, б). Теперь в каждой строке находятся номера Q -классов, принадлежащих одной группе. Заменяя номера из S на a , номера из T на b и записав буквы в обычном порядке, получим бинарное слово $aba\Diamond ababaababa$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В связи с рассматриваемой задачей нас интересует только стадия размещения джокеров в бланке (и последующий подсчет джокеров). Стадию размещения букв мы будем опускать.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Договоримся отождествлять номера Q -классов и сами Q -классы. В частности, будет удобнее рассматривать элементы множеств S и T как номера.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Параметры L, p, q ($L > p > q > 1$, $\text{НОД}(p, q) = 1$) однозначно задают бланк. Поэтому бланк будем обозначать тройкой (L, p, q) .

Расстановкой джокеров в слове (бланке), или просто *расстановкой*, будем называть множество позиций в слове или в бланке, на которых стоят джокеры.

Пусть заданы периоды p, q и длина L . Расстановку джокеров в бланке (L, p, q) будем называть *допустимой*, если слово длины L с периодами p, q и указанной расстановкой джокеров может не иметь периода 1 (т.е. содержать две различные буквы). Допустимую расстановку с минимальным количеством джокеров будем называть *оптимальной*, а число джокеров в ней обозначать через k^* . Рассматриваемая нами обратная задача состоит, таким образом, в вычислении k^* .

Для данного t (напомним, что $t = |T|$) рассмотрим все допустимые расстановки джокеров и выберем расстановку с минимальным количеством джокеров. Эту расстановку будем называть *оптимальной при t* , а количество джокеров в ней обозначать через $k^*(t)$.

Будем называть *специальной* расстановку следующего вида: $|T| = 1$, во всех строках, кроме одной, джокерами заменяются все вхождения элемента из T и только они, а в оставшейся строке – все вхождения элементов из S и только они. Специальная расстановка, очевидно, является допустимой.

ЛЕММА 3.1. *При $q \geq 3$ и $L \geq 2p - 2$ существует специальная расстановка в бланке (L, p, q) , оптимальная при $t = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В бланке (L, p, q) не более двух одноэлементных строк. Если такие строки существуют, поместим в множество T Q -класс, в них не встречающийся (такой найдется, поскольку Q -классов не менее трех); если таких строк нет, поместим в T любой Q -класс. Теперь в каждой строке элементов из T содержится не больше, чем элементов из S . Для фиксированного одноэлементного T рассмотрим допустимую расстановку, в которой джокеры заменяют элементы S более чем в одной строке. Заменяя в одной из строк джокерами элементы T вместо элементов S , вновь получим допустимую расстановку; количество джокеров при этом может лишь уменьшиться. Таким образом, при каждом фиксированном одноэлементном T некоторая специальная расстановка содержит минимальное количество джокеров. Следовательно, найдется специальная расстановка, которая является оптимальной при $t = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Для любого бланка $(L, p, 3)$ такого, что $L \geq 2p - 2$, существует оптимальная специальная расстановка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $q = 3$ необходимо влечет $t = 1$. Таким образом, специальная расстановка, оптимальная при $t = 1$ (такая существует по лемме 3.1), является оптимальной.

Следующее предложение, позволяющее решить обратную задачу, является ключевым в настоящей работе. Его доказательство связано с рядом технических трудностей, для преодоления которых использовались и нетрадиционные для комбинаторики методы: так, лемма 4.3 доказывается с использованием определенных интегралов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для любого бланка (L, p, q) такого, что $q \geq 4$, $L \geq 3p + q$, существует оптимальная специальная расстановка.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. В примере 3.1 выполняется $k^*(1) = 3$, и, таким образом, никакая специальная расстановка не оптимальна (но длина бланка в этом примере не удовлетворяет приводимым в предложении 3.1 ограничениям).

§ 4. Решение обратной задачи

Этот параграф посвящен доказательству предложения 3.1, а также предложения 4.1, позволяющего получить решение обратной задачи на основе подсчета джокеров в оптимальной специальной расстановке.

Для доказательства предложения 3.1 разделим бланк на части так, как показано на рис. 4.

Часть бланка, соответствующую префиксу слова длины $pq \left\lfloor \frac{L}{pq} \right\rfloor$, будем называть *телом*, а оставшуюся часть – *хвостом*. Тело состоит из $\left\lfloor \frac{L}{pq} \right\rfloor$ блоков – прямоугольников высоты p и ширины q – это части **1**.

В хвосте выделим части **2** – это прямоугольники высоты q , ширина которых равна $\left\lfloor \frac{L \bmod pq}{p} \right\rfloor$ или $\left\lceil \frac{L \bmod pq}{p} \right\rceil$. Таких частей $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$ штук. Кроме того, в бланке

Рис. 4. Бланк

присутствуют одна часть **3** и одна часть **4**. Часть **3** – прямоугольник ширины $\left\lfloor \frac{L \bmod pq}{p} \right\rfloor$ и высоты $p \bmod q$. Часть **4** – прямоугольник ширины 1 и высоты $L \bmod q$, соответствующий суффиксу слова длины $L \bmod q$.

Определим *расстановку для части i* , $i = 1, \dots, 4$, как пересечение части i и расстановки в данном бланке. Определения допустимой и оптимальной (при t) расстановок для части i аналогичны соответствующим определениям для расстановок. Количество джокеров в оптимальной при t для части i расстановке будем обозначать через $k_i^*(t)$. Очевидно, что сумма значений $k_i^*(t)$ по всем частям бланка не превосходит $k^*(t)$.

Для доказательства предложения 3.1 рассмотрим отдельно количество джокеров в расстановках, оптимальных для каждой части. Лемма 4.2 посвящена исследованию части **1**, леммы 4.2–4.4 – части **2**, лемма 4.5 – части **3**. Рассмотрение расстановок для части **4** не представляет интереса: любая строка в этой части содержит только один элемент, а значит, оптимальная расстановка при любом t вообще не содержит джокеров.

ЛЕММА 4.1. Для любого $2 \leq t \leq \lfloor q/2 \rfloor$ справедливо равенство

$$k_1^*(t) - k_1^*(1) = (p - 2)(t - 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим часть **1**. Каждая строка блока является перестановкой множества $\{1, \dots, q\}$. В самом деле, последовательность элементов первой строки имеет вид

$$\pi = (1, 1 \oplus (p \bmod q), 1 \oplus (2p \bmod q), \dots, 1 \oplus ((q - 1)p \bmod q));$$

все элементы π различны, так как $\text{НОД}(p, q) = 1$, а значит, π является перестановкой множества $\{1, \dots, q\}$. Остальные же строки являются циклическими перестановками π . Итак, в каждой строке блока номер каждого Q -класса встречается только один раз. Таким образом, каждая строка содержит t элементов из T и s элементов из S .

Хотя бы в одной строке мы должны разместить t джокеров, хотя бы в одной – s джокеров, и в каждой из оставшихся – либо t , либо s джокеров. Поскольку $t \leq s$, то оптимальная расстановка для части **1** следующая: по t джокеров в $p - 1$ строке и $s = q - t$ джокеров в оставшейся строке. Тогда общее количество джокеров в части **1** при оптимальной для нее расстановке равно

$$k_1^*(t) = (p - 1)t + (q - t).$$

При $t \geq 2$ в части **1** необходимо поставить на $k_1^*(t) - k_1^*(1) = (p - 2)(t - 1)$ джокеров больше, чем при $t = 1$.

Перейдем к рассмотрению части **2**.

Отличительная особенность частей, принадлежащих хвосту бланка, состоит в том, что они пересекают не все строки бланка (т. е. не все P -классы). Это значит, что в расстановке, оптимальной для такой части, джокеры могут во всех строках заменять только элементы из T : строки, в которых джокерами заменяются элементы из S , обязательно присутствуют в бланке, но могут не пересекать данную часть. Наличие таких строк будет учтено ниже, в доказательстве предложения 3.1.

Обозначим ширину части **2** через w , $1 \leq w \leq q$. Для удобства рассмотрения дополним эту часть бланка до квадрата $q \times q$ (см. рис. 5). Тогда в первой строке полученной таблицы будет находиться рассмотренная выше перестановка π , а в остальных строках – все ее различные циклические перестановки (ср. доказательство леммы 4.1). Заштрихованные клетки на рис. 5 содержат элементы из T . Ясно, что для произвольного бланка перестановкой строк можно добиться того, чтобы эти элементы размещались “лесенкой”, как в примере, показанном на рис. 5. Ниже мы будем считать, что в рассматриваемой части вида **2** такая перестановка строк произведена.

Рис. 5. Пример “дополненной” части **2** (номера Q -классов не проставлены). Элементы T соответствуют заштрихованным клеткам, элементы S – пустым. Слева указаны характеристические числа строк

Множеству T поставим в соответствие слово Z_T длины q над алфавитом $\{0, 1\}$, которое получается из первой строки “дополненной” части **2** заменой элементов T на 1 и элементов S на 0. Обозначим через $Z_T(w, j)$ префикс длины w циклической перестановки слова Z_T , начинающейся с j -го символа. Слова $Z_T(w, j)$ соответствуют всем q строкам рассматриваемой части **2**. *Характеристическим числом j -й строки* назовем величину

$$\chi(j) = \min\{|Z_T(w, j)|_0, |Z_T(w, j)|_1\},$$

где $|Z_T(w, j)|_0$, $|Z_T(w, j)|_1$ – соответственно число нулей и единиц в слове $Z_T(w, j)$. Для j -й строки части **2** $\chi(j)$ равно минимальному количеству джокеров, необходимому в этой строке для того, чтобы расстановка была допустимой. *Характеристическим числом множества T* назовем величину

$$\chi(T) = \sum_{j=1}^q \chi(j).$$

Таким образом, $\chi(T)$ равно минимальному числу джокеров в части **2** в допустимой расстановке при данном множестве T .

ЛЕММА 4.2. 1) Если $t \leq \lfloor w/2 \rfloor$, то $\chi(T) = tw$ для любого множества T .

2) Если $t > \lfloor w/2 \rfloor$, то $\chi(T) = \lfloor w^2/2 \rfloor$ для любого множества T такого, что Z_T – циклическая перестановка слова $1 \dots 10 \dots 0$.

Множество T такое, что Z_T – циклическая перестановка слова $1 \dots 10 \dots 0$, обозначим через $\bar{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы очевидно. В самом деле, при $t \leq \lfloor w/2 \rfloor$ в каждом слове $Z_T(w, j)$ единиц не более $\lfloor w/2 \rfloor$, т.е. не больше, чем нулей. Следовательно, $\chi(j) = |Z_T(w, j)|_1$ для всякого j . Каждая единица из Z_T встречается в w словах $Z_T(w, j)$, а значит, всего в этих словах содержится tw единиц, откуда $\chi(T) = tw$.

Докажем второе утверждение. “Дополненная” часть **2** в случае множества $\bar{T}$ перестановкой строк приводится к виду, показанному на рис. 6.

Строки, в которых содержатся элементы как из S , так и из T , т.е. такие строки, в которых надо ставить джокеры, пересекаются с выделенными на рис. 6 частями **a**, **b**, **c**, **d**. Для строк, пересекающих часть **a** или часть **d**, $\chi(j) = |Z_T(w, j)|_1$, т.е. джокерами необходимо заменять элементы множества $\bar{T}$ (это клетки частей **a** и **d**). Для строк, пересекающих часть **b** и (или) часть **c**, $\chi(j) = |Z_T(w, j)|_0$ и джокерами необходимо заменять элементы множества S (это клетки частей **b** и **c**). Таким образом, $\chi(\bar{T})$ – суммарное число клеток в частях **a**, **b**, **c** и **d**. Первое слагаемое приводимой формулы соответствует части **a**, второе – **b**, третье – **c**, четвертое – **d**:

$$\chi(\bar{T}) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{w}{2} \rfloor} j + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{w-1}{2} \rfloor} j + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{w-1}{2} \rfloor} j + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{w}{2} \rfloor} j.$$

Вычисляя значение суммы при нечетном w , получаем

$$\chi(\bar{T}) = 4 \cdot \frac{(1 + \frac{w-1}{2})(\frac{w-1}{2})}{2} = \frac{w^2 - 1}{2} = \left\lfloor \frac{w^2}{2} \right\rfloor,$$

Рис. 6. Дополненная часть **2** для множества $\overline{T}$. Элементы $\overline{T}$ соответствуют заштрихованным клеткам. Слева указаны характеристические числа строк

а при четном w имеем

$$\chi(\overline{T}) = 2 \cdot \frac{(1 + \frac{w-2}{2})(\frac{w-2}{2})}{2} + 2 \cdot \frac{(1 + \frac{w}{2})(\frac{w}{2})}{2} = \frac{w^2}{2} = \left\lfloor \frac{w^2}{2} \right\rfloor.$$

ЛЕММА 4.3. При любом фиксированном $t > \lfloor w/2 \rfloor$ выполнено равенство

$$\min_{|T|=t} \chi(T) = \chi(\overline{T}),$$

где $\overline{T}$ таково, что $Z_{\overline{T}}$ – циклическая перестановка слова $1 \dots 10 \dots 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале распространим определение слова $Z_T(w, j)$ на случай произвольного целого j , а именно определим $Z_T(w, j)$ как префикс длины w циклической перестановки слова Z_T , начинающейся с позиции $j \bmod q$, а если $j \bmod q = 0$, то с q -й позиции. Данное определение можно наглядно представить следующим образом: слово Z_T – “циклическое”, т. е. за его последней буквой снова следует первая и т. д. Тогда j -я позиция как раз и совпадает с позицией $j \bmod q$. Величину $\chi(j)$ при таком определении можно рассматривать как функцию $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, периодическую с периодом q . Рассмотрим также вспомогательную функцию $\varphi(j) = |Z_T(w, j)|_1$ (это тоже периодическая с периодом q функция $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$). Заметим, что для произвольного $m \in \mathbb{Z}$

$$\chi(j) = \begin{cases} \varphi(j), & \varphi(j) \leq \frac{w}{2}, \\ w - \varphi(j), & \varphi(j) > \frac{w}{2}, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\sum_{j=m}^{m+q-1} \chi(j) = \chi(T), \quad \sum_{j=m}^{m+q-1} \varphi(j) = tw.$$

 Рис. 7. Графики $\bar{\chi}(x)$ (сплошная линия) и $\bar{\varphi}(x)$ (штриховая линия) на периоде

Будет удобно доопределить функции φ и χ на всей числовой прямой. Функцию $\varphi(x)$ определим как кусочно линейную, построенную по точкам $\varphi(j)$, а функцию $\chi(x)$ – заменив j на x в равенстве (4.1). Рассмотрим свойства и график функций $\varphi(x)$, $\chi(x)$ (пример приведен на рис. 7).

1) Поскольку число единиц (как и число нулей) в соседних словах $Z_T(w, j)$ отличается не более чем на единицу, имеем для любого $j \in \mathbb{Z}$

$$(\varphi(j+1) - \varphi(j)), (\chi(j+1) - \chi(j)) \in \{1, 0, -1\},$$

откуда следует, что любой линейный участок графика $\varphi(x)$ или $\chi(x)$ имеет угловой коэффициент -1 , 0 или 1 .

2) Из (4.1) следует, что график $\chi(x)$ получается из графика $\varphi(x)$ отражением относительно прямой $y = w/2$ той его части, которая выше этой прямой.

3) Для любых $m \in \mathbb{Z}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+q} \varphi(x) dx &= \int_m^{m+q} \varphi(x) dx = \sum_{j=m}^{m+q-1} \varphi(j) = tw, \\ \int_{x_0}^{x_0+q} \chi(x) dx &= \int_m^{m+q} \chi(x) dx = \sum_{j=m}^{m+q-1} \chi(j) = \chi(T). \end{aligned}$$

Таким образом, при фиксированном t константа $\int_{x_0}^{x_0+q} \varphi(x) dx$ не зависит от выбора множества T . Необходимо доказать, что константа $\int_{x_0}^{x_0+q} \chi(x) dx$, принимающая, вообще говоря, различные значения при различных T , минимальное значение принимает на множестве $\bar{T}$, указанном в условии леммы.

Рассмотрим функции $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\chi}(x)$, соответствующие множеству $\bar{T}$. Тогда график функции $\bar{\varphi}(x)$ на некотором периоде будет иметь вид, приведенный на рис. 7 (штриховая линия). Константный промежуток со значением $\bar{\varphi}(x) = n_2$ соответствует максимальному количеству единиц в слове $Z_{\bar{T}}(w, j)$ (или максимальному количеству элементов T в строке части **2**), а константный промежуток со значением $\bar{\varphi}(x) = n_1$ соответствует минимальному количеству единиц в слове $Z_{\bar{T}}(w, j)$ (или минимальному количеству элементов T в строке части **2**). Согласно свойству 2) график $\bar{\chi}(x)$ будет иметь вид, изображенный на рис. 7 сплошной линией.

Оценим константы n_1 и n_2 . Пользуясь тем, что $Z_{\overline{T}}$ – циклическая перестановка слова $1 \dots 10 \dots 0$, выберем j_0 такое, что $Z_{\overline{T}}(w, j_0)$ является префиксом этого слова. Тогда $Z_{\overline{T}}(w, j_0)$ содержит максимальное количество (т. е. n_2) единиц. Если $w \leq t$, то слово $Z_{\overline{T}}(w, j_0)$ целиком состоит из единиц, откуда $n_2 = w$. Если же $t < w$, то данное слово содержит все t единиц, имеющихся в $Z_{\overline{T}}$, откуда $n_2 = t$. В итоге $n_2 = \min\{w, t\}$. Рассуждая аналогично, получаем $n_1 = \max\{0, w - s\}$. Заметим, что для любого множества T ($|T| = t$) всякое слово $Z_T(w, j)$ содержит не более чем t и не более чем w единиц. Следовательно, $\varphi(x) \leq n_2$ для любого рассматриваемого T и для любого $x \in \mathbb{R}$. Аналогично приходим к выводу, что $\varphi(x) \geq n_1$.

Кроме того, из условия $t \leq s$ следует, что $n_1 \leq w - n_2$, т. е. левый (на рис. 7) локальный минимум функции $\overline{\chi}(x)$ находится выше правого. В самом деле, если $n_2 = w$, то $t \geq w$, откуда $s \geq w$ и $n_1 = 0$. Если же $n_2 = t < w$, то $w - t \geq w - s$ и $w - t > 0$, откуда $w - t \geq n_1$.

Обозначим $\overline{X}_{\geq} = \{x \mid \overline{\varphi}(x) \geq w/2\}$, $\overline{X}_{<} = \{x \mid \overline{\varphi}(x) < w/2\}$. Тогда

$$\int_{x_0}^{x_0+q} \overline{\chi}(x) dx = \int_{\overline{X}_{\geq}} \overline{\chi}(x) dx + \int_{\overline{X}_{<}} \overline{\chi}(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \overline{\chi}(x) dx + \int_{x_1}^{x_0+q} \overline{\chi}(x) dx.$$

Теперь рассмотрим произвольное слово Z_T с условием $|T| = t$, а также соответствующие ему функции $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ и докажем, что

$$\int_{x_0}^{x_0+q} \overline{\chi}(x) dx \leq \int_{x_0}^{x_0+q} \chi(x) dx.$$

Обозначим $X_{\geq} = \{x \mid \varphi(x) \geq w/2\}$, $X_{<} = \{x \mid \varphi(x) < w/2\}$. Условимся также обозначать через $\rho(M)$ длину (или *меру*) множества M , где M – объединение конечного числа непересекающихся промежутков из отрезка $[x_0, x_0 + q]$.

Как показано выше, $n_1 \leq \varphi(x) \leq n_2$. Если $\varphi(x) \leq w/2$ всегда, то

$$\int_{x_0}^{x_0+q} \chi(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+q} \varphi(x) dx = tw > \left\lfloor \frac{w^2}{2} \right\rfloor = \int_{x_0}^{x_0+q} \overline{\chi}(x) dx.$$

Пусть существует точка, где $\varphi(x) > w/2$. Если для любого y выполнено неравенство

$$\rho(\{x \mid \chi(x) \geq y\}) \geq \rho(\{x \mid \overline{\chi}(x) \geq y\}),$$

то тривиально

$$\int_{x_0}^{x_0+q} \chi(x) dx \geq \int_{x_0}^{x_0+q} \overline{\chi}(x) dx.$$

Предположим, что $\int_{x_0}^{x_0+q} \chi(x) dx < \int_{x_0}^{x_0+q} \overline{\chi}(x) dx$. Тогда существует y_0 такое, что $\rho(\{x \mid \chi(x) < y_0\}) > \rho(\{x \mid \overline{\chi}(x) < y_0\})$.

Оценим значение y_0 . Из непрерывности функции $\varphi(x)$ следует, что она по крайней мере дважды на периоде принимает значение $w/2$; в тех же точках $\chi(x) = w/2$, т. е. $\chi(x)$ на периоде хотя бы дважды достигает максимального значения. Заметим, что функция $\overline{\chi}(x)$ достигает значения $w/2$ ровно дважды на периоде (в точках x_0 и x_1) и опускается до локальных минимумов с наибольшей возможной скоростью –

с постоянным угловым коэффициентом, равным -1 . Следовательно, для любого $y \geq w - n_2$ (как было доказано, это больший локальный минимум функции $\bar{\chi}(x)$) имеем

$$\rho(\{x \mid \chi(x) < y\}) \leq \rho(\{x \mid \bar{\chi}(x) < y\}).$$

Таким образом, $y_0 < w - n_2$. Но в этом случае значения, не превосходящие y_0 , функция $\chi(x)$ принимает только в области $X_{<}$, а функция $\bar{\chi}(x)$ – в области $\bar{X}_{<}$. В силу свойств функции $\bar{\chi}(x)$ в области $\bar{X}_{<} = (x_1; x_0 + q)$ (см. рис. 7) из неравенства

$$\rho(\{x \mid \chi(x) < y_0\} \cap X_{<}) > \rho(\{x \mid \bar{\chi}(x) < y_0\} \cap \bar{X}_{<})$$

следует неравенство

$$\rho(\{x \mid \chi(x) < y\} \cap X_{<}) > \rho(\{x \mid \bar{\chi}(x) < y\} \cap \bar{X}_{<})$$

для любого $y \leq w/2$. Таким образом, $\rho(X_{<}) > \rho(\bar{X}_{<})$. Но тогда $\rho(\bar{X}_{\geq}) > \rho(X_{\geq})$, и из свойств функции $\varphi(x)$ в области $\bar{X}_{\geq}$ (см. рис. 7) имеем

$$\int_{\bar{X}_{\geq}} \left(\bar{\varphi}(x) - \frac{w}{2} \right) dx \geq \int_{X_{\geq}} \left(\varphi(x) - \frac{w}{2} \right) dx.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} tw &= \int_{x_0}^{x_0+q} \varphi(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+q} \chi(x) dx + 2 \int_{X_{\geq}} \left(\varphi(x) - \frac{w}{2} \right) dx \\ &< \int_{x_0}^{x_0+q} \bar{\chi}(x) dx + 2 \int_{\bar{X}_{\geq}} \left(\bar{\varphi}(x) - \frac{w}{2} \right) dx = \int_{x_0}^{x_0+q} \bar{\varphi}(x) dx = tw. \end{aligned}$$

Итак, предположение $\int_{x_0}^{x_0+q} \chi(x) dx < \int_{x_0}^{x_0+q} \bar{\chi}(x) dx$ привело нас к противоречию. Таким образом, лемма 4.3 доказана.

Из лемм 4.2, 4.3 вытекает, что

$$k_2^*(t) = \begin{cases} tw, & t \leq \left\lfloor \frac{w}{2} \right\rfloor, \\ \left\lfloor \frac{w^2}{2} \right\rfloor, & t > \left\lfloor \frac{w}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

т. е. график функции $k_2^*(t)$ выглядит так, как показано на рис. 8.

Рис. 8. График функции $k_2^*(t)$

ЛЕММА 4.4. Для любого $2 \leq t \leq \lfloor q/2 \rfloor$ справедливо:

- а) $w \geq 4 \implies k_2^*(t) - k_2^*(1) \geq w$;
 б) $w = 3 \implies k_2^*(t) - k_2^*(1) = 1$;
 в) $w \leq 2 \implies k_2^*(t) - k_2^*(1) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) $w \geq 4$. Поскольку $k_2^*(t)$ не убывает, то

$$k_2^*(t) - k_2^*(1) \geq k_2^*(2) - k_2^*(1) = 2w - w = w.$$

б) $w = 3$. Тогда $\lceil w/2 \rceil = 2$ и

$$k_2^*(t) - k_2^*(1) = k_2^*(2) - k_2^*(1) = \left\lfloor \frac{3^2}{2} \right\rfloor - 3 = 1.$$

в) $w = 1$ или $w = 2$. Тогда $\lceil w/2 \rceil = 1$, откуда $k_2^*(2) = k_2^*(1)$.

ЛЕММА 4.5. Для любого $2 \leq t \leq \lfloor q/2 \rfloor$ справедливо $k_3^*(1) - k_3^*(t) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим часть **3** (см. рис. 4). При любом одноэлементном множестве T в каждой строке находится не более одного элемента из T , а значит, в ней можно обойтись не более чем одним джокером. В некоторых строках оптимальной для части **3** расстановки при $t > 1$ может не быть джокеров; мы укажем допустимую расстановку при $t = 1$, в которой джокер стоит только в одной из таких строк. Тем самым лемма будет доказана.

Пусть значение $k_3^*(t)$, $t > 1$, достигается на множестве T' . Если j -я строка не содержит джокеров при соответствующей расстановке, то $Z_{T'}(w, j) = 1 \dots 1$ или $Z_{T'}(w, j) = 0 \dots 0$. Выберем в $Z_{T'}$ какую-нибудь единицу, входящую в подслово 01 или 10. Среди строк, в которые попадает Q -класс, соответствующий этой единице, не более чем в одной нет джокеров. Для $t = 1$ возьмем множество T , состоящее из выбранного Q -класса. Соответствующая ему расстановка является искомой.

ПРИМЕР 4.1. Для бланка (40,11,8) $k_3^*(1) = 1$, $k_3^*(3) = 0$ (достигается при $T = \{0, 2, 5\}$; см. рис. 9, а). Более того, заметим, что при указанном T минимальное количество джокеров в частях **3** и **4** в сумме равно нулю, в то время как при $t = 1$ в частях **3** и **4** в совокупности нужно разместить два джокера.

1 4 7 2	1 4 7
2 5 0 3	2 5 0
3 6 1 4	3 6 1
4 7 2 5	4 7 2
5 0 3 6	5 0 3
6 1 4 7	6 1 4
7 2 5 0	7 2 5
0 3 6	0 3 6
1 4 7	1 4 7
2 5 0	2 5 0
3 6 1	3 6 1

а
б

Рис. 9. Бланки (40,11,8) и (33,11,8)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.1. Для любого фиксированного бланка (L, p, q) и любого $t > 1$ выполнено неравенство

$$k^*(t) \geq \lfloor L/(pq) \rfloor k_1^*(t) + k_{2,1}^*(t) + \cdots + k_{2, \lfloor p/q \rfloor}^*(t) + k_3^*(t),$$

где $k_{2,1}^*(t), \dots, k_{2, \lfloor p/q \rfloor}^*(t)$ – количества джокеров в оптимальных при t расстановках для соответствующих частей **2**. Обозначим сумму в правой части выписанного неравенства через $\sigma(t)$. Построим в бланке специальную расстановку (назовем ее *оптимизированной*), количество джокеров в которой не превосходит $\sigma(t)$. Тем самым, с учетом леммы 3.1, предложение будет доказано.

Любую специальную расстановку в бланке можно построить по следующему алгоритму:

- 1) выбрать некоторый Q -класс в качестве единственного элемента T ;
- 2) заменить джокерами все вхождения выбранного элемента в бланк;
- 3) выбрать в бланке некоторую строку;
- 4) в выбранной строке удалить все джокеры, поставленные ранее, и поставить джокеры во всех оставшихся позициях.

Заметим, что пересечение расстановки, полученной на шаге 2), с любой частью **2** бланка является расстановкой для этой части, оптимальной при $t = 1$, а ее пересечение с частью **4** бланка содержит не более одного джокера. Пересечение итоговой специальной расстановки с любой частью **1** бланка также является расстановкой для этой части, оптимальной при $t = 1$.

Оптимизированную расстановку построим следующим образом: Q -класс выберем так, чтобы минимизировать число джокеров в части **3**, а строку – так, чтобы увеличение числа джокеров на шаге 4) в бланке было минимальным. Отметим, что выбор в каждом из случаев может быть не единственным, т. е. для данного бланка может существовать несколько оптимизированных расстановок; зафиксируем одну из них. Количество джокеров в построенной расстановке обозначим через k .

Количество джокеров в каждой части **1** оптимизированной расстановки равно $k_1^*(1)$. Количество джокеров в хвосте оптимизированной расстановки есть $k_{2,1}^*(1) + \cdots + k_{2, \lfloor p/q \rfloor}^*(1) + k_3^*(1) + k_4 + \delta$, где k_4 – количество джокеров, поставленных на шаге 2) в части **4**, а δ – минимальная разность между количеством элементов из S и элементов из T в одной строке в хвосте бланка.

Заметим, что специальная расстановка, не являющаяся оптимизированной, не может содержать менее k джокеров: в ней может быть на джокер меньше только в части **4**, но обязательно имеется дополнительный джокер в части **3** и (или) дополнительный джокер за счет увеличения δ .

Необходимо доказать, что

$$\begin{aligned} k - \sigma(t) &= \\ &= \underbrace{\left\lfloor \frac{L}{pq} \right\rfloor (k_1^*(1) - k_1^*(t)) + (k_{2,1}^*(1) - k_{2,1}^*(t)) + \cdots + (k_{2, \lfloor p/q \rfloor}^*(1) - k_{2, \lfloor p/q \rfloor}^*(t))}_{\Delta_1} \\ &\quad + \underbrace{(k_3^*(1) - k_3^*(t)) + k_4 + \delta}_{\Delta_2} \leq 0. \end{aligned}$$

Величина Δ_1 является суммой неположительных слагаемых согласно леммам 4.1 и 4.4. Поэтому вначале оценим величину Δ_2 . Если в хвосте бланка нет элементов из T , то $k_3^*(1) = k_4 = \delta = 0$, т.е. $\Delta_2 \leq 0$ и требуемое неравенство доказано. Предположим, что в хвосте есть элементы из T , а значит, на шаге 2) построения специальной расстановки в хвосте были поставлены джокеры. По построению $k_4 \leq 1$, а по лемме 4.5 $(k_3^*(1) - k_3^*(t)) \leq 1$. Оценим δ . В хвосте бланка есть “длинные” строки, состоящие из $\lceil (L \bmod pq)/p \rceil$ позиций, и “короткие” – из $\lfloor (L \bmod pq)/p \rfloor$ позиций. Если на шаге 2) был поставлен джокер в “короткой” строке, то $\delta = \lfloor (L \bmod pq)/p \rfloor - 2$ и, таким образом, $\Delta_2 \leq \lfloor (L \bmod pq)/p \rfloor$. Если же на шаге 2) в “коротких” строках не появилось джокеров, то $\delta = \lfloor (L \bmod pq)/p \rfloor - 1$; но в этом случае $k_3^*(1) = 0$ (часть **3** состоит только из “коротких” строк). Следовательно, и в этом случае $\Delta_2 \leq \lfloor (L \bmod pq)/p \rfloor$.

Теперь оценим Δ_1 , используя условие $L \geq 3p + q$. Если в бланке есть часть **1**, то по лемме 4.1

$$\Delta_1 \leq k_1^*(1) - k_1^*(t) \leq 2 - p.$$

Поскольку $\Delta_2 \leq q - 1$, получаем, что требуемое условие $\Delta_1 + \Delta_2 \leq 0$ выполнено.

Если же в бланке нет части **1**, то в нем должна присутствовать часть **2** ширины не менее 4. Тогда по лемме 4.4 имеем

$$\Delta_1 \leq k_{2,1}^*(1) - k_{2,1}^*(t) \leq -w,$$

где $w = \lceil (L \bmod pq)/p \rceil$. Условие $\Delta_1 + \Delta_2 \leq 0$ снова выполнено. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Оценка для L , приводимая в условии предложения 3.1, может быть незначительно понижена. Однако точная оценка сильно зависит от соотношения между конкретными p и q . Отметим, что при $p > 2q$ условие $L \geq 2(p + q)$ является достаточным для существования специальной оптимальной расстановки (такая длина бланка обеспечивает наличие либо части **1**, либо части **2** ширины не менее 4, либо двух частей **2** ширины 3; в последнем случае применение леммы 4.4 также позволяет доказать предложение 3.1). В то же время в бланке (33,11,8) (см. рис. 9, б) любая специальная расстановка содержит не менее пяти джокеров, а оптимальная (при $T = \{0, 2, 5\}$) – четыре джокера, поставленные вместо номеров, выделенных жирным прифтом, т.е. условие $L \geq 3p$ в общем случае не является достаточным.

Из следующего предложения получим решение обратной задачи. Через L' обозначим длину хвоста бланка (L, p, q) , равную $L \bmod pq$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Для произвольного бланка (L, p, q) такого, что $q = 3$, $L \geq 2p - 2$ или $q \geq 4$, $L \geq 3p + q$, выполнено:

а) если $L' < q$, то $k^* = (p + q - 2) \left\lfloor \frac{L}{pq} \right\rfloor$;

б) если $q \leq L' < p$, то $k^* = (p + q - 2) \left\lfloor \frac{L}{pq} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L'}{q} \right\rfloor - 1$;

в) если $L' \geq p$, то

$$(p+q-2) \left\lfloor \frac{L}{pq} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L'}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L'}{p} \right\rfloor - 2 \leq k^* \leq (p+q-2) \left\lfloor \frac{L}{pq} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L'(p+q)}{pq} \right\rfloor - 2.$$

Доказательство. Согласно предложению 3.1 и следствию 3.1 достаточно подсчитать джокеры в оптимальной специальной расстановке; сделаем это в предположении того, что такая расстановка построена по алгоритму, указанному в доказательстве предложения 3.1. Каждая часть 1 бланка содержит $p + q - 2$ джокеров при любой специальной расстановке. Минимальное количество джокеров во всем бланке, таким образом, достигается при минимуме джокеров в его хвосте.

В случае а) выберем элемент множества T так, чтобы он не встречался в хвосте бланка, а строку, в которой джокерами заменяются элементы из S , так, чтобы она не пересекала хвост бланка (и то, и другое возможно, поскольку хвост содержит менее q символов). Тогда в хвосте не будет ни одного джокера и мы получим указанную в случае а) оценку.

Поскольку всякий номер Q -класса встречается в бланке один раз в каждых последовательных q позициях, в случае б) выберем элемент множества T так, что на шаге 2) построения расстановки в хвосте будет поставлено $\lfloor L'/q \rfloor$ джокеров. Все они находятся в разных строках (каждая строка пересекается с хвостом бланка не более чем по одному символу). На шаге 3) выберем строку, содержащую джокер в хвосте, после чего на шаге 4) количество джокеров в хвосте уменьшится на 1. Отсюда следует требуемая оценка.

В случае с) заметим, что оценки снизу и сверху для k^* , в зависимости от параметров бланка, либо равны, либо различаются на 1. Первое слагаемое в обеих оценках есть количество джокеров в теле бланка, одинаковое для всех специальных расстановок. Аналогично случаю б) выберем элемент из T так, что в хвосте бланка на шаге 2) ставится $\lfloor L'/q \rfloor$ джокеров. Далее, на шаге 3) выберем строку, имеющую джокер в хвосте (тогда количество джокеров, добавляемых на шаге 4), будет меньше, чем если выбрать строку без джокеров в хвосте). При этом на шаге 4) в хвост бланка будет добавлено $\lfloor L'/p \rfloor - 2$ или $\lfloor L'/p \rfloor - 1$ джокеров в зависимости от того, “короткая” или “длинная” строка выбрана. В итоге если найдется номер Q -класса, который встречается в хвосте бланка только $\lfloor L'/q \rfloor$ раз и при этом хотя бы один раз – в “короткой” строке, то k^* совпадает со значением левой части; если же всякий такой номер встречается только в “длинных” строках, то k^* больше на единицу. Докажем, что в последнем случае

$$\left\lfloor \frac{L'(p+q)}{pq} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{L'}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L'}{p} \right\rfloor + 1;$$

тем самым будет завершено доказательство случая с) и всего предложения.

Пусть $L' \bmod q = r$. Тогда $q - r$ символов встречаются в хвосте “редко”, т. е. $\lfloor L'/q \rfloor$ раз. Поскольку эти символы встречаются только в “длинных” строках, то количество “коротких” строк не превосходит r (первые символы нижних r строк в хвосте бланка, очевидно, различны). С другой стороны, $L' \bmod p$ равно количеству “длинных” строк, т. е. $p - r$. (Случай $r = 0$ невозможен, так как при этом число L' , меньшее pq по определению, оказывается общим кратным взаимно простых p и q .) В итоге получаем

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{L'(p+q)}{pq} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{L'}{q} + \frac{L'}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{L'}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L'}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L' \bmod q}{q} + \frac{L' \bmod p}{p} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{L'}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L'}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{q} + \frac{p-r}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{L'}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L'}{p} \right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

§ 5. Доказательство теоремы 2.1

Прежде всего, отметим, что функция $k^* = k^*(L, p, q)$, которую мы умеем вычислять (предложение 4.1), и длина взаимодействия $L(k, p, q)$ связаны следующим соотношением:

$$L(k, p, q) = \min\{L \mid k^*(L, p, q) = k + 1\}. \quad (5.1)$$

Поскольку утверждение предложения 4.1 справедливо при некоторых ограничениях на L , необходимо проверить, что эти ограничения выполнены при имеющихся в теореме условиях, налагаемых на k . Для удобства изложения эта проверка будет проведена в конце доказательства.

Докажем утверждение п. b) теоремы. Покажем, что

$$k^*(L + pq, p, q) = k^*(L, p, q) + (p + q - 2).$$

В самом деле, бланки $(L + pq, p, q)$ и (L, p, q) имеют одинаковые хвосты, а значит, в них при оптимальной специальной расстановке размещается одно и то же количество джокеров. Тело первого из бланков содержит на один блок больше – в этом блоке будет размещено $p + q - 2$ джокеров, что и требовалось. Отсюда следует, что

$$\min\{L \mid k^*(L, p, q) = k + 1\} = \min\{L \mid k^*(L + pq, p, q) = k + p + q - 1\}.$$

Из соотношения (5.1) получаем

$$L(k + p + q - 2, p, q) = L(k, p, q) + pq,$$

откуда

$$\begin{aligned} \Delta(k + p + q - 2, p, q) &= L(k + p + q - 2, p, q) - \frac{pq}{p + q - 2}(k + p + q - 2) \\ &= L(k, p, q) + pq - \frac{pq}{p + q - 2}k - pq = L(k, p, q) - \frac{pq}{p + q - 2}k = \Delta(k, p, q). \end{aligned}$$

Далее через L' обозначим длину хвоста бланка, а через k' – количество джокеров в хвосте, т. е. предположим, что для некоторого β выполнено

$$\begin{aligned} L &= \beta pq + L', & L' &< pq, \\ k &= \beta(p + q - 2) + k', & k' &< p + q - 2. \end{aligned}$$

Докажем утверждение основного пункта теоремы – п. а). Вначале докажем более простое неравенство.

Получим оценку снизу. С учетом (5.1) достаточно показать, что в хвосте бланка длины $L' = \left\lfloor \frac{pq(k' + 1)}{p + q - 2} - 1 \right\rfloor$ оптимальная расстановка содержит не более k' джокеров. Согласно п. 3) предложения 4.1 эта расстановка содержит в хвосте не более $\left\lfloor \frac{L'(p + q)}{pq} \right\rfloor - 2$ джокеров. Осталось заметить, что

$$\left\lfloor \frac{L'(p + q)}{pq} \right\rfloor - 2 = k' + 1 + \left\lfloor \frac{2k' + 1}{p + q - 2} \right\rfloor - 2 \leq k'.$$

Оценка снизу доказана.

Получим оценку сверху. Вначале докажем, что данное неравенство справедливо в трех частных случаях, после чего покажем, что при любом значении k применим один из этих частных случаев. Параметры w , α и γ являются натуральными числами.

1. Пусть $L' = \alpha q$, а $w \geq 2$ таково, что $wp = \alpha q + \gamma$, $\gamma < p$. Тогда имеем $k' \geq \alpha + (w - 1) - 2 = \alpha + w - 3$ по предложению 4.1. Из соотношения (5.1) следует, что для любого β

$$L(\beta(p + q - 2) + \alpha + w - 4, p, q) \leq \beta pq + \alpha q.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \Delta(\beta(p + q - 2) + \alpha + w - 4, p, q) \\ & \leq \beta pq + \alpha q - \frac{pq}{p + q - 2}(\beta(p + q - 2) + \alpha + w - 4) \\ & = \alpha q - \frac{pq}{p + q - 2}(\alpha + w - 4) = \alpha q - \frac{(q\alpha + \gamma)q}{q\alpha + (\gamma + (q - 2)w)}(\alpha + w - 4) \\ & = \alpha q - q \frac{q\alpha^2 + (qw - 4q + \gamma)\alpha + (w - 4)\gamma}{q\alpha + (\gamma + (q - 2)w)} = q \frac{(4q - 2w)\alpha - (w - 4)\gamma}{q\alpha + (\gamma + (q - 2)w)} \\ & = 4q - 2w - \frac{(4q - 2w)((q - 2)w + \gamma) + (w - 4)q\gamma}{q\alpha + (\gamma + (q - 2)w)}. \end{aligned}$$

Знаменатель последней дроби положителен; докажем, что положителен и числитель. Числитель является квадратным трехчленом относительно q , после раскрытия скобок приводящимся к виду

$$4wq^2 + (\gamma w - 8w - 2w^2)q + (4w^2 - 2\gamma w).$$

Его дискриминант после упрощений оказывается равен

$$D = w^2(2w - (\gamma + 8))^2,$$

что позволяет вычислить корни $q_1 = (2w - \gamma)/4$ и $q_2 = 2$. Поскольку $q_1 < q$ по определению w и γ , $q_2 < q$ по условию теоремы и коэффициент при q^2 положителен, то квадратный трехчлен при допустимых значениях q положителен, а значит, положительна и вся дробь. Таким образом,

$$\Delta(\beta(p + q - 2) + \alpha + w - 4, p, q) < 4q - 2w \leq 4(q - 1). \quad (5.2)$$

2. Пусть $L' = wp$, $w \geq 2$, а α таково, что $wp = \alpha q + \gamma$, $\gamma < q$. Тогда $k' \geq \alpha + w - 2$ по предложению 4.1. Воспользовавшись (5.1), получаем для любого β

$$L(\beta(p + q - 2) + \alpha + w - 3, p, q) \leq \beta pq + wp$$

и производим аналогичные выкладки для Δ :

$$\begin{aligned}
& \Delta(\beta(p+q-2) + \alpha + w - 3, p, q) \\
& \leq \beta pq + wp - \frac{pq}{p+q-2}(\beta(p+q-2) + \alpha + w - 3) \\
& = \alpha q + \gamma - \frac{pq}{p+q-2}(\alpha + w - 3) = \alpha q + \gamma - \frac{(q\alpha + \gamma)q}{q\alpha + (\gamma + (q-2)w)}(\alpha + w - 3) \\
& = \alpha q + \gamma - q \frac{q\alpha^2 + (qw - 3q + \gamma)\alpha + (w-3)\gamma}{q\alpha + (\gamma + (q-2)w)} = \gamma + q \frac{(3q-2w)\alpha - (w-3)\gamma}{q\alpha + (\gamma + (q-2)w)} \\
& = \gamma + 3q - 2w - \frac{(3q-2w)((q-2)w + \gamma) + (w-3)q\gamma}{q\alpha + (\gamma + (q-2)w)}.
\end{aligned}$$

Снова знаменатель последней дроби положителен, а числитель является квадратным трехчленом относительно q ; после раскрытия скобок он приводится к виду

$$3wq^2 + (\gamma w - 6w - 2w^2)q + (4w^2 - 2\gamma w).$$

Вычисляя дискриминант, получаем

$$D = w^2(2w - (\gamma + 6))^2,$$

отсюда находим корни $q_1 = (2w - \gamma)/3$ и $q_2 = 2$. Как и в случае 1, при допустимых значениях q квадратный трехчлен положителен, а значит, положительна и вся дробь. Таким образом,

$$\Delta(\beta(p+q-2) + \alpha + w - 3, p, q) < \gamma + 3q - 2w \leq 4(q-1). \quad (5.3)$$

3. Пусть $L' = \alpha q$ и $p = \alpha q + \gamma$ (т.е. $w = 1$). В этом случае в хвост бланка необходимо поставить $\alpha - 1$ джокеров согласно п. 2) предложения 4.1. Снова пользуясь (5.1), для любого β имеем

$$L(\beta(p+q-2) + \alpha - 2, p, q) \leq \beta pq + \alpha q$$

и проводим вычисления для Δ :

$$\begin{aligned}
& \Delta(\beta(p+q-2) + \alpha - 2, p, q) \leq \beta pq + \alpha q - \frac{pq}{p+q-2}(\beta(p+q-2) + \alpha - 2) \\
& = \alpha q - \frac{pq}{p+q-2}(\alpha - 2) = \alpha q - \frac{(q\alpha + \gamma)q}{q\alpha + (q + \gamma - 2)}(\alpha - 2) \\
& = \alpha q - q \frac{q\alpha^2 + (\gamma - 2q)\alpha - 2\gamma}{q\alpha + (q + \gamma - 2)} = q \frac{(3q-2)\alpha + 2\gamma}{q\alpha + (q + \gamma - 2)} \\
& = 3q - 2 - \frac{(3q-2)(q + \gamma - 2) - 2q\gamma}{q\alpha + (q + \gamma - 2)}.
\end{aligned}$$

Знаменатель последней дроби положителен, числитель приводится к виду $3q^2 + (\gamma - 8)q - 2\gamma + 4$ с корнями $q_1 = (2 - \gamma)/3$, $q_2 = 2$. Снова при всех допустимых значениях q дробь положительна, откуда

$$\Delta(\beta(p+q-2) + \alpha - 2, p, q) < 3q - 2 < 4(q-1). \quad (5.4)$$

Теперь возьмем произвольное $k = \beta(p + q - 2) + k'$, $k' < p + q - 2$. Докажем, что $\Delta(k, p, q) < 4(q - 1)$. Если $k' + 2 < p/q$, положим $\alpha = k' + 2$, $\gamma = p - \alpha q$ и применим случай 3, получая неравенство (5.4).

Пусть $k' + 2 > p/q$. Предположим, что найдется такое α , что $k' + 4 = \alpha + \left\lceil \frac{\alpha q}{p} \right\rceil$. Тогда, положив $w = \left\lceil \frac{\alpha q}{p} \right\rceil$ и $\gamma = wp - \alpha q$, можно применить случай 1 и вывести неравенство (5.2).

Предположим теперь, что указанное выше значение α не существует. Поскольку значения выражения $\alpha + \left\lceil \frac{\alpha q}{p} \right\rceil$ с ростом α на единицу увеличивается не более чем на 2, то существует такое α , что

$$\alpha + \left\lceil \frac{\alpha q}{p} \right\rceil = k' + 3, \quad (5.5)$$

$$(\alpha + 1) + \left\lceil \frac{(\alpha + 1)q}{p} \right\rceil = k' + 5. \quad (5.6)$$

Положим $w = \left\lceil \frac{\alpha q}{p} \right\rceil$ и $\gamma = wp - \alpha q$ и убедимся в применимости случая 2. В самом деле, если $w = \left\lceil \frac{\alpha q}{p} \right\rceil = 1$, получаем $k' + 2 = \alpha < p/q$. Противоречие. Отсюда имеем $w \geq 2$. Из соотношений (5.5) и (5.6) следует, что $\left\lceil \frac{(\alpha + 1)q}{p} \right\rceil > \left\lceil \frac{\alpha q}{p} \right\rceil$, откуда $\gamma < q$. Итак, случай 2 применим. Получаем неравенство (5.3). Доказательство п. а) завершено.

с) Произведем выкладки, аналогичные приведенным в п. а). Пусть $p = \alpha q + 1$ и $L' = 2\alpha q$. Тогда всякий Q -класс встречается в хвосте ровно 2α раз, т. е. на шаге 2) построения специальной расстановки в хвосте будет поставлено 2α джокеров. В качестве T можно выбрать класс, встречающийся в строке длины 1, после чего на шаге 3) выбрать эту строку. Тогда на шаге 4) количество джокеров уменьшится на 1. В итоге получим $k' = 2\alpha - 1$. Если же $L' = 2\alpha q - 1$, то выберем $T = \{0\}$ (этот класс встречается в хвосте $2\alpha - 1$ раз, в том числе в одноэлементной строке, а именно в предпоследней, в силу выбора p). Таким образом, можно ограничиться $2\alpha - 2$ джокерами. Из (5.1) следует, что для любого β

$$L(\beta(p + q - 2) + (2\alpha - 2), p, q) = \beta pq + 2\alpha q.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta(\beta(p + q - 2) + 2\alpha - 2, p, q) &= \beta pq + 2\alpha q - \frac{pq}{p + q - 2}(\beta(p + q - 2) + 2\alpha - 2) \\ &= 2\alpha q - \frac{pq}{p + q - 2}(2\alpha - 2) = 2\alpha q - \frac{(q\alpha + 1)q}{q\alpha + 1 + q - 2}(2\alpha - 2) \\ &= 2\alpha q - 2q \frac{q\alpha^2 - (q - 1)\alpha - 1}{q\alpha + (q - 1)} = 2q \frac{2(q - 1)\alpha + 1}{q\alpha + (q - 1)} = 4(q - 1) - \frac{4(q - 1)^2 - 2q}{q\alpha + (q - 1)}. \end{aligned}$$

Последняя дробь положительна, а при увеличении α она стремится к нулю. Таким образом, при любом заданном $\varepsilon > 0$ и заданном q можно указанным способом выбрать p и k так, чтобы

$$4(q - 1) - \varepsilon < \Delta(k, p, q) < 4(q - 1).$$

д) Из предложения 4.1 имеем $k^*(\beta pq - 1, p, q) = \beta(p + q - 2) - 1$ и $k^*(\beta pq, p, q) = \beta(p + q - 2)$. Из соотношения (5.1) получаем, что если $k = \beta(p + q - 2) - 1$, то $L(k, p, q) = \beta pq$. Тогда $\Delta(k, p, q) = pq/(p + q - 2)$ и с учетом оценки снизу из п. а), утверждение д) доказано.

е) Пусть $k = \beta(p + q - 2)$. Из предложения 4.1 получаем $L(k, p, q) = \beta pq + 2q$ и $\Delta(k, p, q) = \beta pq + 2q - \beta pq = 2q$.

Мы доказали все пункты теоремы. Осталось доказать правомерность применения предложения 4.1, т. е. выполнение приведенных в нем ограничений на L при заданных в теореме ограничениях на k . Пусть вначале $q = 3$. Тогда

$$k^*(2p - 2, p, 3) \leq \left\lfloor \frac{(2p - 2)(p + 3)}{3p} \right\rfloor - 2 = \left\lfloor \frac{2p + 1}{3} - \frac{2}{p} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{2p}{3} \right\rfloor - 1.$$

Это означает, что

$$L\left(\left\lfloor \frac{2p}{3} \right\rfloor - 1, p, q\right) \geq 2p - 2,$$

что и требовалось. Если же $q \geq 4$, то

$$k^*(3p + q, p, q) \leq \left\lfloor \frac{(3p + q)(p + q)}{pq} \right\rfloor - 2 \leq \left\lfloor \frac{3p}{q} \right\rfloor + 3.$$

Отсюда получаем требуемое условие

$$L\left(\left\lfloor \frac{3p}{q} \right\rfloor + 3, p, q\right) \geq 3p + q.$$

Доказательство теоремы завершено.

Авторы благодарны Е. В. Суханову и В. Ю. Попову за многочисленные ценные замечания.

Список литературы

1. *Berstel J., Boasson L.* Partial words and a theorem of Fine and Wilf // *Theor. Comp. Sci.* 1999. V. 218. P. 135–141.
2. *Fine N. J., Wilf H. S.* Uniqueness theorem for periodic functions // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1965. V. 16. P. 109–114.
3. *Choffrut C., Karhumäki J.* Combinatorics on words // *Handbook of formal languages.* V. 1. Ch.6. Berlin: Springer, 1997. P. 329–438.
4. *Shur A. M., Konovalova Yu. V.* On the periods of partial words // *Lect. Notes Comp. Sci.* 2001. V. 2136. P. 657–665.
5. *Blanchet-Sadri F., Hegstrom R. A.* Partial words and a theorem of Fine and Wilf revisited // *Theor. Comp. Sci.* 2002. V. 270. P. 401–419.
6. *Colosimo A., De Luca A.* Special factors in biological strings // *J. Theor. Biol.* 2000. V. 204. P. 29–46.
7. *Head T., Păun G., Pixton D.* Language Theory and Molecular Genetics // *Handbook of formal languages.* V. 2. Ch.7. Berlin: Springer, 1997. P. 295–360.

Поступило в редакцию
08.01.2003