Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Буаве, П. М. Готье, П. В. Парамонов, О равномерной аппроксимации n -аналитическими функциями на замкнутых множествах в $\mathbb{C}$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 3, 15–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/im484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 06:36:18

УДК 517.538.5+517.956.2

А. Буаве, П. М. Готье, П. В. Парамонов

О равномерной аппроксимации n -аналитическими функциями на замкнутых множествах в $\mathbb{C}$

Приведены условия на замкнутое множество $F \subset \mathbb{C}$, необходимые и (или) достаточные для того, чтобы всякая функция f , непрерывная на F и n -аналитическая на F^0 , являлась равномерным на F пределом некоторой последовательности n -аналитических целых или n -аналитических мероморфных функций.

Библиография: 15 наименований.

§ 1. Введение

Пусть $n \in \mathbb{N}$ – фиксированное натуральное число, и пусть $\bar{\partial} = \partial/\partial\bar{z}$ – оператор Коши–Римана. Функция f называется n -аналитической (или *полианалитической порядка n*) на открытом множестве $G \subset \mathbb{C}$, если f является n раз непрерывно дифференцируемой ($f \in C^n(G)$) и удовлетворяет условию $\bar{\partial}^n f = 0$ в G . Нетрудно показать, что f может быть записана в виде

$$f(z) = f_0(z) + \bar{z}f_1(z) + \cdots + \bar{z}^{n-1}f_{n-1}(z), \quad (1)$$

где $f_0, \dots, f_{n-1}$ – голоморфные функции в G , причем указанное представление единственно.

Функция f называется n -аналитической мероморфной в G , если ее можно представить в виде (1) с функциями f_j , мероморфными в G . Если все функции f_j из (1) одновременно являются полиномами или рациональными функциями комплексного переменного z , то f называется n -аналитическим полиномом или n -аналитической рациональной функцией соответственно. Заметим, что n -аналитические рациональные функции не определяются как отношения n -аналитических полиномов при $n \geq 2$ и n -аналитические мероморфные функции могут быть непрерывны в своих особых точках, как, например, 3-аналитическая мероморфная функция

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

в точке $z = 0$.

Работа первого и второго авторов выполнена при частичной поддержке грантами фонда NSERC (Канада). Работа третьего автора выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 04-01-00720), программы Ведущие научные школы Российской Федерации (грант НШ-2040.2003.1) и фонда SAB (проект 98-0049, Испания).

Пусть F – замкнутое подмножество в $\mathbb{C}$ и F° – его внутренность. Через $C(F)$ обозначим пространство всех непрерывных функций на F , а при $f \in C(F)$ положим $\|f\|_F = \sup_{z \in F} |f(z)|$. Введем классы функций

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n(F) &= \{f \in C(F) \cap C^n(F^\circ) \mid \bar{\partial}^n f = 0 \text{ на } F^\circ\}, \\ \mathcal{E}_n(F) &= \{f \in C(F) \mid \forall \varepsilon > 0 \exists g \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C}): \|f - g\|_F < \varepsilon\},\end{aligned}$$

а также $\mathcal{M}_n(F) = \{f \in C(F) \mid \forall \varepsilon > 0 \text{ найдется } n\text{-аналитическая мероморфная функция } h \text{ в } \mathbb{C}, \text{ не имеющая особенностей на } F \text{ и удовлетворяющая условию } \|f - h\|_F < \varepsilon\}$.

Таким образом, $\mathcal{E}_n(F)$ (соответственно, $\mathcal{M}_n(F)$) представляет собой класс функций из $C(F)$, каждая из которых равномерно на F приближается *n-аналитическими целыми* функциями (соответственно, *n-аналитическими мероморфными* функциями в $\mathbb{C}$, не имеющими особенностей на F).

Для компактного множества X в $\mathbb{C}$ положим $\mathcal{P}_n(X) = \{f \in C(X) \mid \forall \varepsilon > 0 \text{ найдется } n\text{-аналитический полином } p \text{ такой, что } \|f - p\|_X < \varepsilon\}$.

Для компактов X и Y в $\mathbb{C}$ с условием $X \subseteq Y$ через $\mathcal{R}_n^Y$ обозначим класс всех *n-аналитических рациональных функций*, не имеющих особенностей на Y , и определим

$$\mathcal{R}_n^Y(X) = \{f \in C(X) \mid \forall \varepsilon > 0 \exists r \in \mathcal{R}_n^Y: \|f - r\|_X < \varepsilon\}.$$

Отметим, что

$$\mathcal{P}_n(X) \subseteq \mathcal{R}_n^X(X) \subseteq \mathcal{A}_n(X), \quad \mathcal{E}_n(F) \subseteq \mathcal{M}_n(F) \subseteq \mathcal{A}_n(F)$$

и $\mathcal{E}_n(X) = \mathcal{P}_n(X)$.

В настоящей работе для случая $n \geq 2$ приводится ряд необходимых и достаточных условий на X или F (как мы увидим, эти условия не зависят от n), при которых возникают равенства в некоторых из только что упомянутых включений. В частности, для компактных множеств X наши результаты существенно усиливают основные результаты работы [1] (см. § 2).

Введем несколько определений и понятий, необходимых для формулировки наших результатов. Для произвольного собственного подмножества $S \subset \mathbb{C}$ обозначим через S° его внутренность, через ∂S – границу, а через $\bar{S}$ – его замыкание. Риманову сферу $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ и открытый единичный круг $\{t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1\}$ обозначим через $\bar{\mathbb{C}}$ и Δ соответственно. Для компакта X из $\mathbb{C}$ через $\hat{X}$ обозначим топологическую (или полиномиальную) *оболочку* множества X , т. е. объединение X со всеми ограниченными компонентами множества $\mathbb{C} \setminus X$ (“дырами” этого X).

Пусть f – ограниченная голоморфная функция на Δ . По теореме Фату *угловые граничные значения* $f(t)$ существуют $|dt|$ -почти всюду ($|dt|$ -п. в.) на $\partial\Delta$. Следующее понятие было введено в [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ограниченная односвязная область $\Omega \subset \mathbb{C}$ называется *неванлинновской*, если найдутся конформное отображение $k: \Delta \rightarrow \Omega$ круга Δ на Ω и две ограниченные голоморфные функции u, v в Ω (причем $v \not\equiv 0$) такие, что $|dt|$ -п. в. на $\partial\Delta$ выполнено равенство

$$\overline{k(t)} = \frac{u(k(t))}{v(k(t))}. \quad (2)$$

Как указано в [1], это определение корректно, т. е. не зависит от выбора k . Если k_1, u, v удовлетворяют (2) и k_2 – какое-либо другое конформное отображение Δ на Ω , то, записывая $k_2 = k_1 \circ k_1^{-1} \circ k_2$, мы видим, что k_2, u, v также удовлетворяют (2). Более того, отношение u/v (для неванлинновских областей) определено однозначно в Ω . Действительно, если k_1, u_1, v_1 и k_2, u_2, v_2 удовлетворяют (2), то, как мы только что заметили, k_1, u_2, v_2 тоже удовлетворяют (2). По теореме Лузина–Привалова (см. [2, гл. 4, § 2.5], [3, гл. 3, § D3]) имеем

$$\left(\frac{u_1}{v_1}\right) \circ k_1 = \left(\frac{u_2}{v_2}\right) \circ k_1,$$

откуда $u_1/v_1 = u_2/v_2$.

Класс всех неванлинновских областей будем обозначать через $\mathcal{N}$. Характеристика областей Ω класса $\mathcal{N}$ в терминах конформных отображений Δ на Ω приведена в [1, § 3]; там же можно найти ряд содержательных примеров таких областей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Область $\Omega \subset \mathbb{C}$ называется *областью Каратеодори*, если Ω ограничена и $\partial\Omega = \partial\Omega_\infty$, где Ω_∞ – неограниченная компонента множества $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$.

В примере 3 (см. § 4 далее) приведена конструкция неванлинновских областей, не являющихся областями Каратеодори.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть A – подмножество $\mathbb{C}$. Непустое подмножество $I \subset A$ назовем *гранью* множества A (или *A -гранью*), если каждая точка $a \in I$ имеет окрестность V в $\mathbb{C}$ такую, что найдется гомеоморфизм h из $V \cap A$ на относительно открытое подмножество замкнутой верхней полуплоскости, удовлетворяющий условию $V \cap I = \{z \in V \mid \operatorname{Im} h(z) = 0\}$ (таким образом, всякая грань локально является жордановой дугой); кроме того, мы всегда требуем, чтобы грань I *являлась локально спрямляемой*.

Заметим, что если Ω – открытое множество в $\mathbb{C}$, грань I является $\overline{\Omega}$ -гранью, а f ограничена и голоморфна в Ω , то угловые граничные значения $f(\zeta)$ существуют для почти всех ζ на I относительно длины (на I) [2, гл. 3, § 1.7].

Для произвольной ограниченной области Ω и относительно открытого подмножества I на $\partial\Omega$ при $\varepsilon > 0$ определим множества

$$\begin{aligned}\Omega_\varepsilon(I) &= \{z \in \Omega \mid \operatorname{dist}(z, \partial\Omega \setminus I) > \varepsilon\}, \\ I_\varepsilon(\Omega) &= \{z \in I \mid \operatorname{dist}(z, \partial\Omega \setminus I) > \varepsilon\}.\end{aligned}$$

При $I = \partial\Omega$ полагаем $\Omega_\varepsilon(I) = \Omega$ и $I_\varepsilon(\Omega) = \partial\Omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{C}$, и пусть I – ее $\overline{\Omega}$ -грань. Скажем, что Ω является *I -неванлинновской* (обозначим $\Omega \in \mathcal{N}(I)$), если найдется мероморфная в Ω функция $\varphi = \varphi_\Omega^I$, имеющая п. в. на I угловые (из Ω) граничные значения $\varphi(\zeta)$ с условиями $\varphi(\zeta) = \zeta$ п. в. на I , причем для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют ограниченные голоморфные в $\Omega_\varepsilon(I)$ функции u_ε и v_ε ($v_\varepsilon \not\equiv 0$) такие, что $\varphi(\zeta) = u_\varepsilon(\zeta)/v_\varepsilon(\zeta)$ в $\Omega_\varepsilon(I)$.

Из упомянутой выше теоремы Лузина–Привалова следует, что если указанная в определении 4 функция φ существует, то она единственна. Однако не ясно, всегда

ли можно представить φ как отношение ограниченных голоморфных функций во всем Ω (см. [4]).

Нетрудно видеть, что для жордановых областей Ω со спрямляемой границей $\partial\Omega$ имеет место соотношение

$$\Omega \in \mathcal{N} \iff \Omega \in \mathcal{N}(\partial\Omega).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{C}$, γ_1 и γ_2 – две жордановы (открытые) дуги, являющиеся $\overline{\Omega}$ -гранями. Предположим, что при $\ell = 1, 2$ существуют окрестности U_ℓ множеств γ_ℓ в $\mathbb{C}$ такие, что $\Omega_\ell = \Omega \cap U_\ell \in \mathcal{N}(\gamma_\ell)$. Пусть φ_ℓ – мероморфная функция из определения 4 для пары $(\Omega_\ell, \gamma_\ell)$, $\ell = 1, 2$. Назовем γ_1 и γ_2 *неванлинновски Ω -независимыми*, если не существует пути в Ω , вдоль которого два мероморфных элемента $(\Omega_\ell, \varphi_\ell)$, $\ell = 1, 2$, были бы мероморфными продолжениями друг друга.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из теоремы Лузина–Привалова следует, что если γ_1 и γ_2 неванлинновски Ω -независимы, то $\Omega \notin \mathcal{N}(I)$ для всякой Ω -границы I , содержащей $\gamma_1 \cup \gamma_2$. В частности, если γ_1 и γ_2 – *аналитически независимые* Ω -границы на $\partial\Omega$ (см. [1, § 3], [5]), то γ_1 и γ_2 также неванлинновски Ω -независимы. Так, в каждом многоугольнике Ω любые две его стороны, не лежащие на одной прямой, неванлинновски Ω -независимы.

Приведем еще два простых, но полезных примера.

Во-первых, пусть $\Omega_0 \in \mathcal{N}$ и I_0 является $\overline{\Omega}_0$ -гранью (например, Ω_0 – открытый круг, а I_0 – какое-либо непустое открытое подмножество его границы). Если Ω – произвольная подобласть в Ω_0 , а $I \subset I_0$ – $\overline{\Omega}$ -грань, то $\Omega \in \mathcal{N}(I)$.

Во-вторых, согласно [1, предложение 3.1] образ Ω круга Δ при конформном отображении $z = ((t+1)^2 - 4)^2$ является неванлинновской областью, для которой Ω -границы

$$\gamma_1 = \{z \in \partial\Omega \mid \operatorname{Re}(z) < 0\} \cup \{0\}, \quad \gamma_2 = \{z \in \partial\Omega \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

неванлинновски Ω -зависимы (т. е. *не* независимы). При этом γ_1 и γ_2 даже не являются гладкими (а тем более, аналитическими) кривыми.

Замечание 1 и последние примеры показывают, что определения 4 и 5 существенно расширяют понятия неванлинновской области, функции Шварца аналитической кривой [5] и понятие аналитической независимости аналитических дуг.

§ 2. Основные результаты

Следующие две теоремы дают весьма полезные “редуктивные” условия для выполнения равенств $\mathcal{A}_n(F) = \mathcal{E}_n(F)$ и $\mathcal{A}_n(F) = \mathcal{M}_n(F)$: они позволяют свести к соответствующим проблемам на *компактных* множествах проблемы аппроксимации функций на *замкнутых* множествах n -аналитическими целыми функциями (теорема 1, которая устанавливает только необходимые условия) и n -аналитическими мероморфными функциями (теорема 2). Отметим, что (при $n = 1$) полные характеристики замкнутых множеств F , удовлетворяющих условию $\mathcal{A}_1(F) = \mathcal{E}_1(F)$ или $\mathcal{A}_1(F) = \mathcal{M}_1(F)$, получены Н. У. Аракелян [6] и А. Х. Нерсисяном [7] соответственно.

ТЕОРЕМА 1. Пусть F – замкнутое подмножество в $\mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$ фиксировано. Если $\mathcal{A}_n(F) = \mathcal{E}_n(F)$, то для всякой области Каратеодори Ω имеют место равенства

$$\mathcal{A}_n(F \cap \overline{\Omega}) = \mathcal{R}_n^{\overline{\Omega}}(F \cap \overline{\Omega}), \quad (3)$$

$$\mathcal{A}_n(\overline{F \cap \Omega}) = \mathcal{R}_n^{\overline{\Omega}}(\overline{F \cap \Omega}). \quad (3')$$

В частности, при дополнительном условии связности множества $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ справедливы равенства

$$\mathcal{A}_n(F \cap \overline{\Omega}) = \mathcal{P}_n(F \cap \overline{\Omega}), \quad (4)$$

$$\mathcal{A}_n(\overline{F \cap \Omega}) = \mathcal{P}_n(\overline{F \cap \Omega}). \quad (4')$$

ПРОБЛЕМА 1. Верно ли, что при $n \geq 2$ (необходимые) условия (3) (или (3')) являются также достаточными для выполнения равенства $\mathcal{A}_n(F) = \mathcal{E}_n(F)$?

ТЕОРЕМА 2. Пусть F – замкнутое множество в $\mathbb{C}$, а $n \in \mathbb{N}$ фиксировано. Для выполнения равенства $\mathcal{A}_n(F) = \mathcal{M}_n(F)$ необходимо и достаточно, чтобы для любой области Каратеодори Ω выполнялось равенство

$$\mathcal{A}_n(F \cap \overline{\Omega}) = \mathcal{R}_n^{F \cap \overline{\Omega}}(F \cap \overline{\Omega}). \quad (5)$$

При $n = 1$ из теоремы Аракеяна (см. [8, гл. IV, § 2C]) непосредственно вытекает, что условия (3) (и (3')) не являются достаточными для того, чтобы $\mathcal{A}_1(F) = \mathcal{E}_1(F)$. Аналогичные условия не являются достаточными также в задаче аппроксимации целыми гармоническими функциями (см. [9, гл. 3, § 10]). Теорема 2 при $n = 1$ приведена, например, в [8, гл. IV, § 1D]. Отметим, однако, что данная там формулировка должна быть исправлена: следует сказать “для любой области Каратеодори g ”, иначе утверждение не верно.

В § 4 приведены примеры, иллюстрирующие теоремы 1 и 2 и показывающие, что в определенных ситуациях аппроксимация целыми n -аналитическими функциями (при $n \geq 2$) устроена проще, чем аппроксимация целыми голоморфными ($n = 1$) или целыми гармоническими функциями. Например, при $n \geq 2$ условие локальной связности множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ в точке ∞ уже не является необходимым (полезно сравнить последнее замечание с утверждениями теорем Аракеяна [8, гл. IV, § 2C] и Гардинера [9, следствие 3.21]).

Следующая теорема является локальной по характеру, хотя, безусловно, задача о совпадении пространств $\mathcal{A}_n(X)$ и $\mathcal{P}_n(X)$ не локальна в стандартном смысле (см. [10, гл. 2, § 10]). Эта теорема значительно усиливает результат [1, теорема 2.2].

ТЕОРЕМА 3. Фиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$. Пусть X – компактное множество в $\mathbb{C}$, а $\{\Omega_\ell\}_{\ell \in L}$ – компоненты (связности) множества $(\hat{X})^\circ$, не содержащиеся в X . Равенство

$$\mathcal{A}_n(X) = \mathcal{P}_n(X) \quad (6)$$

справедливо, если и только если равенства

$$\mathcal{A}_n(X \cap \overline{\Omega}_\ell) = \mathcal{R}_n^{\overline{\Omega}_\ell}(X \cap \overline{\Omega}_\ell) \quad (7)$$

верны для всех $\ell \in L$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $n = 1$, то непосредственно из теоремы Мергеляна (см. [8, гл. III, § 2]) получаем, что $(6) \iff (X = \widehat{X}) \iff (7)$, откуда вытекает справедливость теоремы 3 в этом случае.

Отметим также, что если X является *компактом Каратеодори* (т.е. когда $\partial X = \partial \widehat{X}$), то $\{\Omega_\ell\}_{\ell \in L}$ – ограниченные компоненты множества $\mathbb{C} \setminus X$, так что с помощью теорем 3 и 1 получается теорема 2.2 из [1].

При использовании теоремы 3 важно уметь отвечать на следующий вопрос.

ПРОБЛЕМА 2. Пусть Ω – область Каратеодори и X – компактное подмножество в $\overline{\Omega}$ с условием $\mathcal{A}_n(X) = \mathcal{R}_n^\Omega(X)$, $n \geq 2$. При каких дополнительных условиях справедливо равенство $\mathcal{A}_n(X \cup \partial\Omega) = \mathcal{R}_n^\Omega(X \cup \partial\Omega)$?

В работе [1] проблема 2 изучалась для случая, когда Ω – жорданова область, а X строго содержится в Ω (см. [1, теорема 4.3]). Мы установим следующий более сильный результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $n \geq 2$ фиксировано, Ω – область Каратеодори, а X – компакт в $\overline{\Omega}$ с условием

$$\mathcal{A}_n(X) = \mathcal{R}_n^\Omega(X), \quad (8)$$

причем множество $E := \partial\Omega \setminus X$ является $\overline{\Omega}$ -гранью. Пусть $\{D_\ell\}_{\ell \in L}$ – все компоненты множества $\Omega \setminus X$, для которых $E_\ell := \partial D_\ell \setminus X \neq \emptyset$. Если $D_\ell \notin \mathcal{N}(E_\ell)$ для каждого $\ell \in L$, то

$$\mathcal{A}_n(X \cup \partial\Omega) = \mathcal{R}_n^\Omega(X \cup \partial\Omega). \quad (9)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Фиксируем $n \geq 2$. Пусть Ω – область Каратеодори, $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ связно и $\partial\Omega$ содержит две неванлинновски Ω -независимые дуги γ_1 и γ_2 . Пусть X – компакт в Ω с условием $\mathcal{A}_n(X) = \mathcal{P}_n(X)$. Тогда $\mathcal{A}_n(K) = \mathcal{P}_n(K)$, где $K = X \cup \partial\Omega$.

Отметим, что следствие 1 и, в частности, теорема 4 не верны при $n = 1$.

§ 3. Доказательства

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Мы установим только условие (3), доказательство (3') аналогично. Более того, по теореме Рунге равенства (4) и (4') вытекают из (3) и (3') соответственно.

Предположим, что $n \in \mathbb{N}$ фиксировано, $\mathcal{A}_n(F) = \mathcal{E}_n(F)$, Ω – область Каратеодори, $f \in \mathcal{A}_n(F \cap \overline{\Omega})$. Сначала по теореме Брауэра продолжим f до функции, снова обозначаемой через f , которая непрерывна на $\mathbb{C}$ и имеет компактный носитель. Теперь применим аппроксимационную схему Витушкина [11], надлежащим образом адаптированную к рассматриваемой ситуации. Кратко опишем этот метод. Детали можно найти в [1, доказательство предложения 2.5].

Положим $\mathcal{L} = \bar{\partial}^n$, и пусть $\Phi(z) = \bar{z}^{n-1}((n-1)!\pi z)^{-1}$ – фундаментальное решение для $\mathcal{L}$. Пусть $\partial := \partial/\partial z$, а $B(a, r)$ – открытый круг радиуса $r > 0$ с центром в точке a . Фиксируем произвольное $\delta \in (0, 1)$ и построим δ -разбиение

единицы следующим образом. Для каждого $j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$ положим $a_j = j_1\delta + ij_2\delta$, $B_j = B(a_j, \delta)$ и выберем $\varphi_j \in C_0^\infty(B(a_j, \delta))$ так, что $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $\sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1$ и $\|\bar{\partial}^r \partial^s \varphi_j\| \leq A\delta^{-(r+s)}$, $1 \leq r + s \leq n$, где A зависит только от n .

Определим $f_j = \Phi * (\varphi_j \mathcal{L}f)$. Ясно, что $f_j \in \mathcal{A}_n(F)$. Положим

$$J = \{j \in \mathbb{Z}^2 \mid B(a_j, \delta) \cap \text{supp } f \neq \emptyset\}$$

и отметим, что множество J конечно. Имеем $\mathcal{L}f_j = \varphi_j \mathcal{L}f$ (в обобщенном смысле) и $f = \sum_{j \in J} f_j$. Пусть

$$J_1 = \{j \in J \mid B_j \subset \Omega\}, \quad J_2 = \{j \in J \mid B_j \cap \bar{\Omega} = \emptyset\}, \quad J_3 = \{j \in J \mid B_j \cap \partial\Omega \neq \emptyset\}.$$

Ясно, что $J = J_1 \cup J_2 \cup J_3$.

Если $j \in J_1$, то $f_j \in \mathcal{A}_n(F) = \mathcal{E}_n(F) \subset \mathcal{R}_n^\Omega(F \cap \bar{\Omega})$. При $j \in J_2$ имеем $f_j \in \mathcal{R}_n^\Omega(F \cap \bar{\Omega})$ по теореме Рунге.

Остается рассмотреть случай $j \in J_3$. Пусть $\delta < \text{diam}(\Omega)/2$. Поскольку Ω – область Каратеодори, то для каждого $j \in J_3$ можно найти $a_j^* \in B(a_j, \delta) \setminus \bar{\Omega}$ и жорданову кривую γ_j в $\overline{B(a_j^*, \delta)} \setminus \bar{\Omega}$ с начальной точкой a_j^* и конечной точкой на $\partial B(a_j^*, \delta)$. Но тогда можно построить (см. [1, доказательство предложения 2.5]) функции g_j , n -аналитические вне γ_j и, следовательно, принадлежащие $\mathcal{R}_n^\Omega(F \cap \bar{\Omega})$, такие, что

$$\left\| \sum_{j \in J_3} (f_j - g_j) \right\|_{F \cap \bar{\Omega}} \longrightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Нужная аппроксиманта имеет вид $g = \sum_{j \in J_1 \cup J_2} f_j + \sum_{j \in J_3} g_j$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В предположении, что $\mathcal{A}_n(F) = \mathcal{M}_n(F)$ и $f \in \mathcal{A}_n(F \cap \bar{\Omega})$, доказательство необходимости практически дословно повторяет доказательство теоремы 1. Утверждение достаточности новым результатом не является, оно может быть получено аналогично [12, § 1 и § 2] (см. также [12, теорема 3]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Заметим, что все Ω_ℓ , $\ell \in L$, являются областями Каратеодори, так что по теореме 1 из равенства (6) вытекает (7).

Для доказательства достаточности условий (7) рассмотрим произвольную конечную комплексную борелевскую меру μ с носителем на X и условием $\mu \perp \mathcal{P}_n(X)$. Установим, что $\mu \perp \mathcal{A}_n(X)$ при условии выполнения (7).

Сначала отметим, что если множество индексов L пусто, т.е. X имеет связное дополнение, то условие (7) отсутствует и равенство (6) следует из [13, теорема 2] и теоремы Рунге. Теперь предположим, что $L \neq \emptyset$, и фиксируем $\ell \in L$. Согласно [1, лемма 2.4] найдется последовательность полиномов комплексного переменного $\{q_j\}_{j=1}^\infty$ со следующими свойствами: $\|q_j\|_{\hat{X}} \leq C$ (C – некоторая абсолютная константа), $q_j \rightarrow 1$ равномерно на компактах в Ω_ℓ , $q_j \rightarrow 0$ равномерно на компактах в $(\hat{X})^0 \setminus \Omega_\ell$ при $j \rightarrow \infty$. Пусть $\mathcal{F}$ – некоторое счетное всюду плотное семейство в $C(X)$. Применяя диагональный процесс для выделения нужной подпоследовательности, можно дополнительно считать, что последовательность $\int f q_j d\mu$ сходится при всех $f \in \mathcal{F}$. Из свойства плотности $\mathcal{F}$ в $C(X)$ вытекает,

что последовательность $\int f q_j d\mu$ сходится также и при всех $f \in C(X)$. Последнее условие определяет непрерывный линейный функционал в $C(X)$. Пусть μ_{Ω_ℓ} – мера, представляющая этот функционал. По определению $q_j \mu \rightarrow \mu_{\Omega_\ell}$ в $*$ -слабой топологии при $j \rightarrow \infty$. Следовательно, $\text{supp } \mu_{\Omega_\ell} \subset (X \cap \overline{\Omega_\ell}) \cup \partial \hat{X}$ и $\mu_{\Omega_\ell} \perp \mathcal{P}_n(X)$.

Напомним, что

$$\hat{\nu}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\nu(z)}{z - \zeta}$$

есть преобразование Коши (конечной) меры ν . Мы утверждаем, что

$$\widehat{\bar{z}^s \mu}(z_0) = 0 \quad \forall z_0 \in \Omega_\ell \setminus X, \quad s = 0, \dots, n-1. \quad (10)$$

Действительно, поскольку $\widehat{\bar{z}^s \mu}(z_0) = \widehat{\bar{z}^s \mu_{\Omega_\ell}}(z_0)$ при $z_0 \in \Omega_\ell \setminus X$ (см. [1, доказательство теоремы 2.2, (2)]), можно (без потери общности) с самого начала считать, что

$$\text{supp } \mu \subset (X \cap \overline{\Omega_\ell}) \cup \partial \hat{X}. \quad (11)$$

Однако если (11) выполнено для меры μ , то справедливо включение $\text{supp } \mu_{\Omega_\ell} \subset X \cap \overline{\Omega_\ell}$. В самом деле, так как $q_j \rightarrow 0$ на $(\hat{X})^0 \setminus \Omega_\ell$, то

$$\widehat{\bar{z}^s \mu_{\Omega_\ell}}(w) = 0 \quad \forall w \in [(\hat{X})^0 \setminus \Omega_\ell] \cup [\mathbb{C} \setminus \hat{X}], \quad s = 0, \dots, n-1. \quad (12)$$

Поскольку μ не имеет атомов на $\partial \hat{X}$ (см. [14, доказательство леммы 9]), функция

$$f_{\Omega_\ell}(w) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\bar{z} - \bar{w}}{z - w} d\mu_{\Omega_\ell}(z)$$

непрерывна на $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega_\ell}$, и ввиду условий (12) она равна нулю вне $\overline{\Omega_\ell}$. Отсюда вытекает, что $\mu_{\Omega_\ell}|_{\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega_\ell}} = 0$, так как $\bar{\partial}^2 f_{\Omega_\ell} = \mu_{\Omega_\ell}$ в обобщенном смысле. Таким образом,

$$\mu_{\Omega_\ell} \perp \mathcal{R}_n^{\overline{\Omega_\ell}}(X \cap \overline{\Omega_\ell}) = \mathcal{A}_n(X \cap \overline{\Omega_\ell}),$$

и соотношение (10) имеет место.

Теперь, поскольку ℓ было произвольным в условии (10), имеем

$$\widehat{\bar{z}^s \mu}(z_0) = 0 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus X, \quad s = 0, \dots, n-1,$$

так что $\mu \perp \mathcal{R}_n^X(X)$.

В завершение доказательства остается показать, что $\mathcal{R}_n^X(X) = \mathcal{A}_n(X)$. Для этой цели снова применим технику Витушкина, используя обозначения из приведенного выше доказательства теоремы 1.

Возьмем произвольную $f \in \mathcal{A}_n(X)$ и продолжим ее до функции (снова обозначаемой через f), непрерывной на всем $\mathbb{C}$ и имеющей компактный носитель. Пусть $\{f_j\}$ – локализованные функции, соответствующие разбиению единицы $\{B_j, \varphi_j\}$. Если $B_j \cap \hat{X} = \emptyset$ или $B_j \cap \partial \hat{X} \neq \emptyset$, то соответствующие функции f_j в приближении не нужны (см. доказательство теоремы 1). Остается рассмотреть случай, когда $B_j \subset (\hat{X})^\circ$. В этой ситуации B_j лежит в некоторой компоненте (связности) Ω

множества $(\widehat{X})^\circ$. Отметим, что если $\Omega \subset X^\circ$, то $f_j \equiv 0$. Если же $\Omega \not\subset X^\circ$, то $\Omega = \Omega_\ell$ для некоторого $\ell \in L$. Поскольку

$$f \in \mathcal{A}_n(X \cap \overline{\Omega}_\ell) = \mathcal{R}_n^{\overline{\Omega}_\ell}(X \cap \overline{\Omega}_\ell),$$

то можно найти последовательность $\{g_m\}_{m=1}^\infty$, где каждая g_m является n -аналитической в некоторой окрестности U_m множества $X \cap \overline{\Omega}_\ell$, такую, что после надлежащего продолжения функции g_m до непрерывной функции (которая снова обозначается через g_m) на всем $\overline{\Omega}_\ell$ имеет место $\|f - g_m\|_{\overline{\Omega}_\ell} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Используя хорошо известные свойства оператора Витушкина, получаем

$$\|\Phi * (\varphi_j \mathcal{L} g_m) - f_j\|_X = \|\Phi * (\varphi_j (\mathcal{L} g_m - \mathcal{L} f))\|_X \leq C \|g_m - f\|_{\overline{B}_j} \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty$. Ясно, что $\Phi * (\varphi_j \mathcal{L} g_m) \in \mathcal{R}_n^X(X)$. Доказательство теоремы завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Будем доказывать от противного. Пусть $K = X \cup \partial\Omega$, и предположим, что

$$\mathcal{A}_n(K) \neq \mathcal{R}_n^{\overline{\Omega}}(K). \quad (13)$$

Покажем, что обязательно найдется $\ell \in L$ такое, что $D_\ell \in \mathcal{N}(E_\ell)$.

Из (13) следует, что найдется мера σ с носителем на K такая, что $\sigma \perp \mathcal{R}_n^{\overline{\Omega}}(K)$, но $\sigma \not\perp \mathcal{A}_n(K)$. Заметим, что мера $\sigma|_E$ не является нулевой, так как в противном случае мы бы имели $\text{supp } \sigma \subset X$, что противоречит (8). Поскольку $E = \bigcup_{\ell \in L} E_\ell$ и L не более чем счетно, можно выбрать ℓ такое, что $\sigma|_{E_\ell}$ также не является нулевой. Фиксируем это ℓ . Докажем, что $D_\ell \in \mathcal{N}(E_\ell)$. Пусть $X_\ell = \overline{\Omega} \setminus (D_\ell \cup E_\ell)$, так что $\partial X_\ell \subset \partial\Omega \cup \partial D_\ell$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $E_\ell^\varepsilon := \{z \in E_\ell \mid \text{dist}(z, X_\ell) \geq \varepsilon\} \neq \emptyset$ и $\sigma|_{E_\ell^\varepsilon} \neq 0$. По определению E_ℓ является (локально спрямляемой) $\overline{D}_\ell$ -гранью, поэтому найдется не более чем счетное семейство попарно не пересекающихся (открытых) жордановых дуг $\{\gamma_j\}_{j \in J_\ell}$ такое, что $E_\ell = \bigcup_{j \in J_\ell} \gamma_j$. Более того, так как E_ℓ^ε — компакт в ∂D_ℓ , а каждая γ_j открыта в ∂D_ℓ , найдется конечное подмножество $J \subset J_\ell$ с условием $E_\ell^\varepsilon \subset \bigcup_{j \in J} \gamma_j$.

Для каждого $j \in J$ выберем точки a_j и b_j на γ_j со следующими условиями: γ_j имеет касательные в a_j и b_j . Путь $\tilde{\gamma}_j$, представляющий собой часть пути γ_j строго между a_j и b_j и направленный от a_j к b_j , имеет положительную ориентацию по отношению к Ω ; кроме того, $E_\ell^\varepsilon \subset \bigcup_{j \in J} \tilde{\gamma}_j =: \Gamma_1$ и $\sigma|_{\Gamma_1} \neq 0$. Заметим, что

$$\text{dist}(z, X_\ell) < \varepsilon, \quad z \in E_\ell \setminus \Gamma_1.$$

Пусть Ω_∞ — неограниченная компонента (связности) множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$. Тогда Ω_∞ односвязна, так как $\partial\Omega_\infty = \partial\Omega$ связна, причем каждая $\tilde{\gamma}_j$ является $\overline{\Omega}_\infty$ -гранью (здесь мы естественным образом расширяем определение 3 на области в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащие точку ∞). Будем считать, что $J = \{1, 2, \dots, N\}$ и $\tilde{\gamma}_j$ идут в последовательном порядке на $\partial\Omega_\infty$. Отметим, что $\tilde{\gamma}_j$ имеют отрицательную ориентацию относительно Ω_∞ . Следовательно, для каждого $j \in J$ можно найти жордановы спрямляемые дуги β_j в Ω_∞ , начинающиеся в b_j и заканчивающиеся в a_{j+1} , ортогональные к γ_j в b_j и ортогональные к γ_{j+1} в a_{j+1} (где $a_{N+1} := a_1$ и $\gamma_{N+1} = \gamma_1$).

Кроме того, можно дополнительно требовать, чтобы кривая $\Gamma = \bigcup_{j \in J} (\tilde{\gamma}_j \cup \beta_j)$ была спрямляемой жордановой кривой, которая окружает и пересекает некасательно компакт

$$Y = X_\ell \cup \left(E_\ell \setminus \left(\bigcup_{j \in J} \tilde{\gamma}_j \right) \right),$$

а также имеет положительную ориентацию относительно области G , ограниченной Γ . Отметим, что $Y \subset G \cup (\bigcup_{j \in J} \{a_j, b_j\})$, $\text{supp } \sigma \subset Y \cup \Gamma_1$, $\Gamma_1 \subset \Gamma$, и напомним, что $\sigma|_{\Gamma_1} \neq 0$. Более того, так как Γ пересекает Y некасательно, то при любом $z \in Y$ имеем

$$\text{dist}(z, \Gamma) \asymp \text{dist}\left(z, \bigcup_{j \in J} \{a_j, b_j\}\right). \quad (14)$$

Положим $\sigma_0 = (\prod_{j \in J} (z - a_j)(z - b_j))\sigma$. Имеем $\sigma_0 \perp \mathcal{P}_n(Y \cup \Gamma)$, поскольку последнее свойство справедливо для σ . Далее необходима следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть μ — мера с условием, что $(\prod_{j \in J} |z - a_j||z - b_j|)^{-1}\mu$ — конечная мера на Y . Тогда мера $\hat{\mu}(\zeta) d\zeta|_\Gamma$ конечна и

$$(\mu + \hat{\mu}(\zeta) d\zeta|_\Gamma) \perp \mathcal{P}_1(Y \cup \Gamma). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала конечность меры $\hat{\mu}(\zeta) d\zeta|_\Gamma$:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma |\hat{\mu}(\zeta)| |d\zeta| &= \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left| \int_Y \frac{d\mu(z)}{z - \zeta} \right| |d\zeta| \leq \int_Y \left(\int_\Gamma \frac{|d\zeta|}{|z - \zeta|} \right) |d\mu(z)| \\ &\leq c \int_Y \frac{|\Gamma|}{\prod_{j \in J} |z - a_j| |z - b_j|} |d\mu(z)| < \infty, \end{aligned}$$

где $c > 0$ — постоянная, $|\Gamma|$ — длина контура Γ и предпоследнее неравенство вытекает из (14).

Последняя оценка позволяет воспользоваться теоремой Фубини для доказательства (15). Действительно, если p — полином комплексного переменного, то

$$\begin{aligned} \int_Y p(z) d\mu(z) + \int_\Gamma p(\zeta) \hat{\mu}(\zeta) d\zeta &= \int_Y p(z) d\mu(z) + \int_\Gamma p(\zeta) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_Y \frac{d\mu(z)}{z - \zeta} \right) d\zeta \\ &= \int_Y p(z) d\mu(z) + \int_Y \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{p(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta \right) d\mu(z) = 0 \end{aligned}$$

по формуле Коши. Лемма доказана.

Теперь применим лемму 1 к мерам $\mu_s := \bar{z}^s \sigma_0|_Y$, $s = 0, \dots, n-1$. Имеем

$$(\bar{z}^s \sigma_0 - (\mu_s + \hat{\mu}_s(\zeta) d\zeta|_\Gamma)) \perp \mathcal{P}_1(\Gamma),$$

откуда по теореме Привалова [2, гл. 3, § 7] (аналог известной теоремы Риссов для жордановых областей со спрямляемой границей) для каждого $s \in \{0, \dots, n-1\}$ найдется функция h_s из класса Смирнова $E_1(G)$ такая, что

$$\bar{z}^s \sigma_0 = \mu_s + \hat{\mu}_s(\zeta) d\zeta|_\Gamma + h_s(\zeta) d\zeta|_\Gamma. \quad (16)$$

Полагая $s = 0$ в (16), умножая полученное уравнение на $\bar{z}^s$, $s = 0, \dots, n-1$, и учитывая, что $\mu_s = \bar{z}^s \mu_0$, имеем

$$\bar{z}^s \sigma_0 = \bar{z}^s \mu_0 + \bar{\zeta}^s \hat{\mu}_0(\zeta) d\zeta|_{\Gamma} + \bar{\zeta}^s h_0(\zeta) d\zeta|_{\Gamma}.$$

Вычитая последнее равенство из (16), при $s = 0, \dots, n-1$ получаем

$$\bar{\zeta}^s (\hat{\mu}_0(\zeta) + h_0(\zeta)) d\zeta|_{\Gamma} = (\hat{\mu}_s(\zeta) + h_s(\zeta)) d\zeta|_{\Gamma}.$$

Поскольку $\sigma_0|_{\Gamma_1} = (\hat{\mu}_0(\zeta) + h_0(\zeta)) d\zeta|_{\Gamma_1} \neq 0$, то по теореме Лузина–Привалова получаем, что $\hat{\mu}_0(z) + h_0(z) \neq 0$ в D_ℓ , так что угловые граничные значения $\hat{\mu}_0(\zeta) + h_0(\zeta)$ отличны от нуля для почти всех $\zeta \in \Gamma_1$, откуда

$$\bar{\zeta}^s = \frac{\hat{\mu}_s(\zeta) + h_s(\zeta)}{\hat{\mu}_0(\zeta) + h_0(\zeta)}$$

п. в. на Γ_1 . Так как каждая функция $\hat{\mu}_s$ ограничена вне ε -окрестности множества Y , а каждая h_s есть отношение двух ограниченных голоморфных функций в G , то, используя простые вычисления, получаем (полагая $s = 1$), что $\bar{\zeta} = u_\varepsilon(\zeta)/v_\varepsilon(\zeta)$ п. в. на Γ_1 для некоторых функций u_ε и v_ε , ограниченных и голоморфных на $\{z \in D_\ell \mid \text{dist}(z, K) > \varepsilon\}$. Последнее означает, что $D_\ell \in \mathcal{N}(E_\ell)$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Из условия ясно, что $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$. Пусть

$$X_1 = X \cup (\partial\Omega \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)).$$

Следствие вытекает непосредственно из теоремы 4, примененной к X_1 . Таким образом, остается проверить, что условия теоремы 4 выполнены в указанном случае.

Поскольку $\mathcal{A}_n(X) = \mathcal{P}_n(X)$, $\hat{X}$ содержится в Ω и $\partial\Omega \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$ имеет связное дополнение, то по теореме Рунге имеем

$$\mathcal{A}_n(X_1) = \mathcal{P}_n(X_1).$$

Кроме того, в указанном случае $E := \partial\Omega \setminus X_1 = \gamma_1 \cup \gamma_2$ и совокупность $\{D_\ell\}_{\ell \in L}$ состоит всего из одной области $D_1 = \Omega \setminus \hat{X}$. Из замечания 1 следует, что $D_1 \notin \mathcal{N}(\gamma_1 \cup \gamma_2)$. Таким образом, теорема 4 применима и следствие доказано.

§ 4. Примеры

ПРИМЕР 1. Сначала приведем пример, показывающий, что теорема 1 перестает быть верной, если мы заменим $\mathcal{R}_n^\Omega(F \cap \bar{\Omega})$ или $\mathcal{R}_n^\Omega(\overline{F \cap \bar{\Omega}})$ на $\mathcal{P}_n(F \cap \bar{\Omega})$ или $\mathcal{P}_n(\overline{F \cap \bar{\Omega}})$ в (3) или (3') соответственно.

Пусть U_1 – открытая ограниченная “лента”, которая накручивается на окружность $\{|z| = 1\}$ и аккумулируется к ней извне. Говорят, что U_1 – “рог изобилия” (см. [10, гл. VI, § 5, рис. 4] или [1, § 3]). Заметим, что U_1 является областью Каратеодори с тем условием, что $\mathbb{C} \setminus \bar{U}_1$ не связно.

Пусть $F = \{|z| \leq 1\} \cup \bar{U}_1$ и $\Omega = U_1$. Отметим, что F – компакт Каратеодори, т. е. $\partial F = \partial \hat{F}$, и что $F \cap \bar{\Omega} = \overline{F \cap \bar{\Omega}} = \bar{\Omega}$. Для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место $\mathcal{A}_n(F) = \mathcal{P}_n(F)$ согласно [13, теорема 2], а также $\mathcal{A}_n(F \cap \bar{\Omega}) = \mathcal{R}_n^\Omega(F \cap \bar{\Omega})$ согласно [1, предложение 2.5], однако $\mathcal{A}_n(F \cap \bar{\Omega}) \neq \mathcal{P}_n(F \cap \bar{\Omega})$ ввиду [1, теорема 2.2, (2)].

ПРИМЕР 2. Следующий пример применения теоремы 3 не может быть получен с помощью [1, теорема 2.2, (2)].

Рассмотрим опять “рог изобилия”. Однако теперь открытая “лента” U_2 наматывается снаружи эллипса $\{x^2 + 2y^2 = 1\}$ и аккумулируется к этому эллипсу. Пусть X – объединение $\bar{U}_2$ и сегмента $[-a, a]$, где $a > 0$ и указанный сегмент не содержит фокусы эллипса. Пусть $\Omega = \{x^2 + 2y^2 < 1\}$ – внутренняя область рассматриваемого эллипса. Отметим, что $\Omega \notin \mathcal{N}$ (см. [1, § 3]), Ω – единственная компонента множества $(\hat{X})^\circ$, которая не содержится в X , и X не является компактом Каратеодори (т. е. теорема 2.2, (2) из [1] не применима в этой ситуации), причем $X \cap \bar{\Omega} = \partial\Omega \cup [-a, a]$. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Из [1, теорема 4.3, (2)] следует, что

$$\mathcal{A}_n(X \cap \bar{\Omega}) = \mathcal{P}_n(X \cap \bar{\Omega}) = \mathcal{R}_n^{\bar{\Omega}}(X \cap \bar{\Omega}),$$

откуда по теореме 3 получаем $\mathcal{A}_n(X) = \mathcal{P}_n(X)$.

ПРИМЕР 3. Приведем примеры неванлинновских областей, не являющихся областями Каратеодори, и обсудим важный в приложениях результат [1, теорема 2.2, (1)].

Пусть Ω_1 – образ круга Δ при конформном отображении $z = k_1(t) = (t + \sqrt{2})^4$. Очевидно, что Ω_1 не является областью Каратеодори. С другой стороны, Ω_1 является неванлинновской областью согласно [1, предложение 3.1] (в обозначениях последнего утверждения достаточно взять $u_1(t) = k_1(t)/t^4$ и $v_1(t) = 1/t^4$, $|t| > 1$). Аналогично, чтобы получить пример неванлинновской области с m ограниченными компонентами дополнения ($m \in \mathbb{N}$, $m > 1$), достаточно рассмотреть образ Ω_m круга Δ при конформном отображении

$$z = k_m(t) = (a_m + k_{m-1}(t))^2,$$

где положительные константы a_m подбираются по индукции надлежащим образом.

В [1, теорема 2.2, (1)] доказано, что для областей Каратеодори Ω при $n > 1$ выполнено

$$C(\partial\Omega) \neq \mathcal{R}_n^{\bar{\Omega}}(\partial\Omega) \iff \Omega \in \mathcal{N}. \quad (17)$$

Возникает естественный вопрос: насколько важно требование, чтобы область Ω была каратеодориевской? Из доказательства теоремы 2.2, (1) работы [1] видно, что в части $\Leftarrow$ формулы (17) это требование излишне. Приведенный только что пример показывает, что данное замечание существенно. С другой стороны, пример $\Omega = \Delta \setminus [0, 1]$ (неневанлинновской и некаратеодориевской области) показывает, что $C(\partial\Omega) \neq \mathcal{R}_n^{\bar{\Omega}}(\partial\Omega)$, так что указанная теорема без условия каратеодориевности в части $\Rightarrow$ формулы (17) не верна.

ПРИМЕР 4. Приведем пример нигде не плотного замкнутого множества F в $\mathbb{C}$ такого, что $\bar{\mathbb{C}} \setminus F$ связно, *не является* локально связным в ∞ , однако, тем не менее, F есть множество карлемановской аппроксимации (см. [8, гл. IV, § 3]) посредством n -аналитических функций при (любом фиксированном) $n \geq 2$. В частности, $\mathcal{A}_n(F) = C(F) = \mathcal{E}_n(F)$. Это утверждение по существу противоположно соответствующему утверждению (случай $n = 1$) теоремы Аракеяна [8, гл. IV, § 2],

а также результатам о гармонических карлемановских аппроксимациях [9, теорема 4.6].

При $k = 2, 3, 4, \dots$ положим

$$\begin{aligned} A_k &= \left\{ x = \frac{1}{k}, 0 \leq y \leq k \right\}, \\ B_k &= \left\{ x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} \right), 0 \leq y \leq k \right\}, \\ C_k &= \left\{ \frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} \right), y = k \right\}, \end{aligned}$$

и пусть

$$F = \left(\bigcup_{k=2}^{\infty} (A_k \cup B_k \cup C_k) \right) \cup \{x = 0, 0 \leq y < \infty\}.$$

Множество F часто называют *перчаткой Аракеяна*. Ясно, что $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ связно, но не является локально связным в точке ∞ . Согласно [15, предложение 5] для доказательства того, что F есть n -аналитическое карлемановское множество, достаточно установить существование так называемого “подходящего исчерпания” $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$. С этой целью положим $K_1 = \emptyset$,

$$K_j = \{|x| \leq j, |y| \leq j\} \text{ при } j \geq 2,$$

и пусть $X_j = K_j \cup (K_{j+2} \cap F)$. Остается проверить (см. [15, равенство (10)]), что

$$\mathcal{A}_n(X_j) = \mathcal{P}_n(X_j). \quad (18)$$

При $j = 1$ это следует из [13, теорема 2] и теоремы Рунге. Фиксируем теперь $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$, и пусть Ω – жорданова область с замыканием

$$\begin{aligned} \overline{\Omega} = X_j \setminus \left[\left(\bigcup_{k=j+3}^{\infty} \left(\left\{ x = \frac{1}{k}, k < y < \infty \right\} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \cup \left\{ x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} \right), k < y < \infty \right\} \right) \right) \right) \cup \{x = 0, y > k\} \right]. \end{aligned}$$

Теперь применим теорему 4 с указанным Ω и $X = K_j$. Поскольку в этом случае $\Omega \setminus X$ состоит из двух прямоугольников $D_{j,1}$ и $D_{j,2}$, причем $D_{j,i} \notin \mathcal{N}(\partial D_{j,i} \setminus X)$ при $i = 1, 2$ ($\partial D_{j,i}$ имеет четыре попарно аналитически независимые стороны), имеет место равенство

$$\mathcal{A}_n(X \cup \partial\Omega) = \mathcal{R}_n^{\overline{\Omega}}(X \cup \partial\Omega) = \mathcal{P}_n(X \cup \partial\Omega).$$

Теперь, применяя теорему 3, получаем (18), что завершает описание примера.

Список литературы

1. Кармона Х. Х., Парамонов П. В., Федоровский К. Ю. О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 10. С. 75–98.
2. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
3. Кусис П. Введение в теорию пространств H_p . М.: Мир, 1984.
4. Gauthier P. M., Hengartner W. Local harmonic majorants of functions subharmonic in the unit disc // J. Anal. Math. 1973. V. 26. P. 405–412.
5. Shapiro H. S. The Schwarz Function and its Generalization to Higher Dimensions. Wiley – N.Y.: Univ. of Arkansas, 1992.
6. Аракелян Н. У. Равномерная аппроксимация на замкнутых множествах целыми функциями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 6. С. 1187–1206.
7. Нерсисян А. А. Равномерная и касательная аппроксимация мероморфными функциями // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1972. Т. 7. С. 405–412.
8. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М.: Мир, 1986.
9. Gardiner S. J. Harmonic Approximation // LMS. Lecture Notes Series. V. 221. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
10. Гамелин Т. В. Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.
11. Витушкин А. Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22. № 6. С. 141–199.
12. Paramonov P. V., Verdera J. Approximation by solutions of elliptic equations on closed subsets of euclidean space // Math. Scand. 1994. V. 74. P. 249–259.
13. Carmona J. J. Mergelyan approximation theorem for rational modules // J. Approx. Theory. 1985. V. 44. P. 113–126.
14. Бишоп Э. Граничные меры аналитических дифференциалов // Некоторые вопросы теории приближений. М.: ИЛ, 1963. С. 87–100.
15. Boivin A., Gauthier P. M., Paramonov P. V. Approximation on closed sets by analytic or meromorphic solutions of elliptic equations and applications // Canad. J. Math. 2002. V. 54. № 5. P. 945–969.

Университет Западного Онтарио (Канада)

Университет Монреаля (Канада)

МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: boivin@uwo.ca

gauthier@dms.umontreal.ca

petr@paramonov.msk.ru

Поступило в редакцию

25.12.2003