Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев, Асимптотика решений нелинейных диссипативных систем уравнений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 3, 29–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/im485>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 10:50:10

УДК 517.9+535.5

Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв

Асимптотика решений нелинейных диссипативных систем уравнений

Изучено асимптотическое поведение при больших временах решений задачи Коши для системы нелинейных эволюционных уравнений с диссипацией. Используемый подход в случае малых начальных данных основан на построении решений с помощью метода сжимающих отображений. В случае больших начальных данных асимптотика решений при больших временах получена с учетом определенной симметрии нелинейных членов в системе уравнений.

Библиография: 25 наименований.

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения при больших временах решений задачи Коши для системы нелинейных нелокальных эволюционных уравнений

$$u_t + \mathcal{N}(u) + \mathcal{L}u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1)$$

с начальными данными $u(0, x) = \tilde{u}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t, x)$ – вектор, $u = \{u_j\}_{j=1, \dots, m}$. Линейная часть системы (1) – это псевдодифференциальный оператор $\mathcal{L}$, определенный с помощью обратного преобразования Фурье следующим образом:

$$\mathcal{L}u = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} L(\xi) \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u,$$

где символ $L(\xi)$ является матрицей $L = \{L_{jk}\}_{j,k=1, \dots, m}$. Нелинейная часть системы (1) – это квадратичный псевдодифференциальный оператор

$$\mathcal{N}(u) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \sum_{k,l=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} A^{kl}(t, \xi, y) \hat{u}_k(t, \xi - y) \hat{u}_l(t, y) dy;$$

здесь символы $A^{kl}(t, \xi, y)$ являются векторами $A^{kl} = \{A_j^{kl}\}_{j=1, \dots, m}$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00324) и Программы “Университеты России” – фундаментальные исследования.

Определим прямое преобразование Фурье $\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}$ как

$$\hat{u}(\xi) \equiv \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx$$

и обратное преобразование Фурье $\overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x}$ с помощью формулы

$$\check{u}(x) \equiv \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} u(\xi) d\xi.$$

Предположим, что $A^{kl}(t, \xi, y)$ – непрерывные по времени $t > 0$ вектор-функции и операторы $\mathcal{N}$ и $\mathcal{L}$ имеют конечный порядок, т. е. $A^{kl}(t, \xi, y)$ и $L(\xi)$ растут по y и ξ не быстрее некоторой степени:

$$|A^{kl}(t, \xi, y)| \leq C(\langle \xi \rangle^\kappa + \langle y \rangle^\kappa), \quad |L(\xi)| \leq C\langle \xi \rangle^\kappa.$$

Здесь и далее через C обозначены различные положительные постоянные, $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + \xi^2}$, $|A^{kl}| = \max_{j=1, \dots, m} |A_j^{kl}|$, $|L| = \max_{j,k=1, \dots, m} |L_{jk}|$.

Модельная система (1) объединяет в себе много известных систем уравнений современной математической физики и описывает различные волновые процессы. Например, если решение $u(t, x)$ – вещественная вектор-функция, $m = n$, линейная часть – лапласиан $\mathcal{L}u = -\Delta u$, нелинейная часть имеет вид

$$\mathcal{N}(u) = (u \cdot \nabla)u + \nabla(-\Delta)^{-1} \sum_{k,l=1}^n \nabla_k \nabla_l u_k u_l,$$

т. е.

$$A_j^{kl}(t, \xi, y) = i\xi_k \delta_{jl} - i\xi_j \frac{\xi_k \xi_l}{\xi^2},$$

где $\delta_{jj} = 1$ и $\delta_{jl} = 0$, если $j \neq l$, и начальные данные удовлетворяют ограничению $(\nabla \cdot \tilde{u}) = 0$, так что решение $u(t, x)$ для всех $t \geq 0$ также подчиняется тому же условию $(\nabla \cdot u) = 0$, то из (1) мы получим известную систему уравнений Навье–Стокса

$$\begin{aligned} u_t + (u \cdot \nabla)u + \nabla h - \Delta u &= 0, \\ (\nabla \cdot u) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Система (1) также содержит систему уравнений мелкой воды (см. [22])

$$\begin{aligned} \eta_t + (\nabla \cdot v\eta) &= 0, \\ v_t + (v \cdot \nabla)v + \nabla \eta &= 0, \end{aligned}$$

которая включает нелинейность, но не учитывает дисперсию. Здесь $\eta(t, x)$ описывает свободную поверхность воды и $v(t, x)$ – вектор скорости, пространственная

размерность $n = 2$. С учетом простейшей дисперсии система (1) приводит к известной системе уравнений Буссинеска (см. [23, с. 7])

$$\begin{aligned}\eta_t + (\nabla \cdot v\eta) + \frac{1}{3}\Delta(\nabla \cdot v) &= 0, \\ v_t + (v \cdot \nabla)v + \nabla\eta &= 0.\end{aligned}$$

Система (1) также обобщает систему Доброхотова [5], которая в первом приближении по нелинейности имеет вид

$$\begin{aligned}\eta_t + (\nabla \cdot v\eta) + \mathcal{B}v &= 0, \\ v_t + (v \cdot \nabla)v + \nabla\eta &= 0,\end{aligned}$$

где оператор $\mathcal{B}v = \sum_{j=1}^n \mathcal{B}_j v_j$ имеет символы $B_j(\xi) = \frac{i\xi_j}{|\xi|} \operatorname{th} |\xi|$, отвечающие точной потенциальной теории волн на воде.

Отметим, что система уравнений Буссинеска является длинноволновым приближением системы Доброхотова.

Другой частный случай системы (1) – одномерная по пространственной переменной x система уравнений, предложенная Броером [3] и Каупом [11]:

$$\begin{aligned}\eta_t + (\eta v)_x - \beta\eta_{xx} - \alpha v_{xxx} &= 0, \\ v_t + vv_x + \eta_x + \beta v_{xx} &= 0,\end{aligned}$$

а также ряд других систем (см. [15]). Заметим также, что в одномерном случае $n = m = 1$ система (1) переходит, в частности, в уравнение Уизема (см. [22])

$$u_t + uu_x + \mathcal{L}u = 0$$

и, в свою очередь, включает много важных одномерных уравнений таких, как знаменитые уравнения Кортевега–де Фриза, Бюргерса, Бенджамена–Оно и др. Таким образом, мы видим, что система (1) содержит много важных с физической точки зрения уравнений и заслуживает серьезного исследования.

Значительный успех в изучении асимптотического поведения при больших временах решений консервативных нелинейных уравнений был достигнут благодаря методу обратной задачи рассеяния (см. книгу [1] и в ней список литературы).

Настоящая работа посвящена исследованию асимптотики при больших временах решений задачи Коши для системы нелинейных эволюционных уравнений (1) с диссипацией. Другие функционально-аналитические методы применялись к диссипативным уравнениям (в основном, скалярным) в работах [4], [9], [15], [17], [18], [25].

Введем некоторые обозначения. Пространство Лебега обозначим, как обычно, через

$$\mathbf{L}^p = \{\varphi \in \mathbf{S}'; \|\varphi\|_p < \infty\},$$

где

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \quad \text{при } p = \infty.$$

Весовое пространство Соболева определим следующим образом:

$$\mathbf{H}^{s,r} = \{\varphi \in \mathbf{S}' : \|\langle x \rangle^r \langle i\partial_x \rangle^s \varphi\|_{\mathbf{L}^2} < \infty\}$$

для любых $s, r \in \mathbb{R}$. Введем норму

$$\|\varphi\|_{\mathbf{B}^{\omega,q}} = \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{-n-\omega} \|\varphi(\cdot - y) - \varphi(\cdot)\|_{\mathbf{L}^q} dy$$

однородного пространства Бесова порядка $\omega \in (0, 1)$. Через $\mathbf{C}(\mathbf{I}; \mathbf{B})$ обозначим пространство непрерывных по времени функций со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}$. Различные положительные постоянные будем обозначать одной и той же буквой C .

Сначала мы рассмотрим достаточно общий случай задачи Коши (1) с малыми начальными данными. Предположим, что символы нелинейного оператора $\mathcal{N}$ удовлетворяют условию

$$|\partial_\xi^r A^{kl}(t, \xi, y)| \leq C \{\xi - y\}^{\alpha-|r|} \langle \xi - y \rangle^\sigma + C \{y\}^{\alpha-|r|} \langle y \rangle^\sigma \quad (3)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, где $\sigma \geq 0$, $\alpha \geq 1$, $|r| = 0, 1$. Здесь и далее обозначим $\{\xi\} = \frac{|\xi|}{\langle \xi \rangle}$, $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + \xi^2}$. Отметим, что условие (3) достаточно общее, перечисленные выше примеры систем подчиняются этому требованию. Предположим, что собственные значения $\lambda_j(\xi)$ матрицы $L(\xi)$ являются различными для всех $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, и упорядочим их в соответствии с возрастанием вещественной части. Пусть $(m \times m)$ -матрица

$$Q(\xi) = \|Q_{jk}(\xi)\|_{j,k=1,\dots,m}$$

диагонализует матрицу $L(\xi)$, т. е.

$$Q^{-1}(\xi) L(\xi) Q(\xi) = \|\lambda_j(\xi) \delta_{jk}\|_{j,k=1,\dots,m},$$

где $\delta_{jk} = 1$, если $j = k$, и $\delta_{jk} = 0$ в противном случае. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящую от $\xi \in \mathbb{R}^n$ как от параметра:

$$\frac{d}{dt} \hat{u}(t, \xi) + L(\xi) \hat{u}(t, \xi) = 0. \quad (4)$$

Умножив систему (4) слева на $Q^{-1}(\xi)$ и сделав замену $\widehat{u}(t, \xi) = Q(\xi)v(t, \xi)$, преобразуем систему (4) к диагональному виду:

$$\frac{d}{dt}v_j(t, \xi) = -\lambda_j(\xi)v_j(t, \xi),$$

откуда, интегрируя по времени $t \geq 0$, получим $v_j(t, \xi) = e^{-t\lambda_j(\xi)}v_j(0, \xi)$. Возвращаясь к решению $\widehat{u}(t, \xi)$, найдем

$$\widehat{u}_k(t, \xi) = \sum_{j=1}^m e^{-t\lambda_j(\xi)} \sum_{l=1}^m Q_{kj}(\xi)(Q^{-1}(\xi))_{jl} \widehat{u}_l(0, \xi),$$

следовательно,

$$\widehat{u}(t, \xi) = e^{-tL(\xi)} \widehat{u}(0, \xi),$$

где фундаментальная матрица Коши (см. [6]) имеет вид

$$e^{-tL(\xi)} = \sum_{j=1}^m e^{-t\lambda_j(\xi)} P_j(\xi),$$

$$P_j(\xi) = \|Q_{kj}(\xi)(Q^{-1}(\xi))_{jl}\|_{k,l=1,\dots,m}.$$

Перепишем задачу Коши (1) в форме интегрального уравнения

$$u(t) = \mathcal{G}(t)\widetilde{u} - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u)(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где $\mathcal{G}(t)\psi = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x}(e^{-tL(\xi)}\widehat{\psi}(\xi))$ – оператор Грина. Под решением задачи Коши (1) далее будем понимать решение $u(t, x)$ соответствующего интегрального уравнения (5), принадлежащее $C^0([0, \infty); \mathbf{X})$ при подходящем выборе функционального пространства $\mathbf{X}$.

Пусть линейный оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию диссипации, которое в терминах собственных значений матрицы $L(\xi)$ имеет вид

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \geq \mu \{\xi\}^\delta \langle \xi \rangle^\nu \quad (6)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $\mu > 0$, $\nu \geq 0$, $\delta > 0$.

Для того чтобы получить асимптотические формулы для решения, предположим, что собственные значения $L(\xi)$ имеют следующее асимптотическое представление в нуле:

$$\lambda_j(\xi) = \mu_j |\xi|^\delta + O(|\xi|^{\delta+\gamma}) \quad (7)$$

для всех $|\xi| \leq 1$, где $\mu_j > 0$, $\gamma > 0$. Также будем предполагать, что $L(\xi) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и справедливы оценка

$$|\partial_\xi^r \lambda_j(\xi)| \leq C \{\xi\}^{\delta-|r|} \langle \xi \rangle^\nu \quad (8)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $|r| = 0, 1$ и оценка

$$\sum_{|r|=0}^1 |\partial_\xi^r P_j(\xi)| \leq C \quad (9)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Сначала рассмотрим довольно общий класс нелинейности в уравнении (1), однако нам придется наложить условие малости на начальные данные для того, чтобы доказать существование решений в целом по времени.

Обозначим через $S = \frac{1}{2}(\sigma - \nu)$ критический порядок для локального существования решения и через $\delta_c = n + \alpha$ – критический порядок, связанный с поведением решения при больших временах. Пусть

$$\begin{aligned} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}} &= \|\{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \varphi(t)\|_{\mathbf{L}_\xi^1}, \\ \|\varphi(t)\|_{\mathbf{B}_{s,\rho,\omega}} &= \|(1 + |\partial_\xi|^\omega) \{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \varphi(t)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty}, \end{aligned}$$

где $s > S$, $\rho \geq 0$, $\omega \geq 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть линейный оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям (6)–(9), в которых $\delta < n + \alpha$. Предположим, что нелинейный оператор $\mathcal{N}$ удовлетворяет оценке (3), где $\sigma \in [0, \nu)$, если $\nu > 0$, либо $\sigma = 0 = \nu$. Пусть начальные данные $\tilde{u} \in \mathbf{H}^{s',0} \cap \mathbf{H}^{s-, \omega'}$ достаточно малы, где $s' > \frac{n}{2} + s$, $s > S$, $\omega' > \frac{n}{2} + \omega$, $\omega \in (0, 1)$, $s_- = \min(s, 0)$. Тогда существует единственное решение $u(t, x) \in C^0([0, \infty); \mathbf{A}_{s,0} \cap \mathbf{B}_{0,0,\omega})$ задачи Коши (1). В случае $\nu > 0$ выполнено сглаживающее свойство $u(t, x) \in C^1((0, \infty); \mathbf{H}^{\infty,0})$. Кроме того, существует единственный постоянный вектор U такой, что справедлива следующая асимптотика:

$$u(t, x) = t^{-\frac{n}{\delta}} G(xt^{-\frac{1}{\delta}}) U + O(t^{-\frac{n}{\delta} - \gamma}) \quad (10)$$

для больших $t > 0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, где $\gamma > 0$,

$$G(x) = \sum_{j=1}^m P_j(0) \overline{\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}} e^{-\mu_j |\xi|^\delta}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если нелинейный член имеет нулевое среднее значение:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{N}(u) dx = 0,$$

то $U = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x) dx$, т. е. главный член асимптотики такой же, как и в линейном случае. Можно гарантировать, что коэффициент U в асимптотической формуле (10) отличен от нуля, если начальные данные малы и имеют ненулевое среднее

значение: $\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x) dx \neq 0$. Если $\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x) dx = 0$, то возможно, что $U = 0$, в этом случае решение убывает быстрее, чем указано в формуле (10).

В качестве примера применим теорему 1 к системе уравнений поверхностных волн с диссипацией:

$$\begin{aligned} \eta_t + (\nabla \cdot v \eta) - \Delta \eta + \frac{1}{3} \Delta(\nabla \cdot v) &= 0, \\ v_t + (v \cdot \nabla) v + \nabla \eta - \Delta v &= 0, \end{aligned}$$

и к системе уравнений Доброхотова, также содержащих диссипацию:

$$\begin{aligned} \eta_t + (\nabla \cdot v \eta) - \Delta \eta + \mathcal{B}v &= 0, \\ v_t + (v \cdot \nabla) v + \nabla \eta - \Delta v &= 0. \end{aligned}$$

Тогда для малых начальных данных $(\tilde{\eta}, \tilde{v}) \in (\mathbf{H}^{s,0} \cap \mathbf{H}^{0,\omega})^3$, где $s > \frac{1}{2}$, $\omega > 1$, получим существование единственного решения

$$(\eta(t, x), v(t, x)) \in (C^\infty((0, \infty); \mathbf{H}^{\infty,0}) \cap C^0([0, \infty); \mathbf{H}^{s,0} \cap \mathbf{H}^{0,\omega}))^3$$

задачи Коши, которое при больших временах имеет асимптотику (10), где $G(x)$ – функция Грина уравнения теплопроводности.

Хотя нелинейный оператор в теореме 1 и является достаточно общим, однако применение теоремы 1 к конкретным системам приводит к довольно грубым результатам, поскольку не был учтен специальный характер нелинейности и фактически применены методы линейной теории. Далее мы избавимся от требования малости начальных данных. Как известно, условие сильной диссипации (6) предотвращает эффект разрушения решений (см. [15], [16]), так что сколь угодно большое по величине классическое решение может существовать в целом по времени. Отчасти это свойство обязано своим происхождением некой специальной симметрии нелинейности этих уравнений, позволяющей легко оценить $\mathbf{L}^2$ -норму решения. Запишем это свойство симметрии в следующей форме:

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} (v \cdot \mathcal{N}(v)) dx = 0 \quad (11)$$

для любой вектор-функции $v \in C_0^\infty$. Отметим, что свойство симметрии (11) выполнено, например, для системы Навье–Стокса.

Сформулируем результат, аналогичный теореме 1, в котором отсутствуют ограничения на величину начальных данных, однако критическое значение δ_c теперь сдвинуто на $\frac{n}{2}$. Предположим, что символы нелинейного оператора $\mathcal{N}$ удовлетворяют условию

$$|\partial_\xi^r A^{kl}(t, \xi, y)| \leq C \{\xi\}^{\alpha - |r|} \langle \xi \rangle^\sigma \quad (12)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, где $\sigma \geq 0$, $\alpha \geq 1$, $|r| = 0, 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть линейный оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям (6)–(9), в которых $\delta \leq \alpha + \frac{n}{2}$. Предположим, что для нелинейного оператора $\mathcal{N}$ выполнены оценки (12), где $\sigma \in [0, \nu)$, $\nu > 0$, и свойство симметрии (11). Пусть начальные данные $\tilde{u} \in \mathbf{H}^{s',0} \cap \mathbf{H}^{s-, \omega'}$, где $s' > \frac{n}{2} + s$, $s > S$, $\omega' > \frac{n}{2}$, $s_- = \min(s, 0)$, $\nu > \frac{n}{3} + \frac{2\sigma}{3}$. Тогда существует единственное глобальное по времени решение $u(t, x) \in C^0([0, \infty); \mathbf{A}_{s,0} \cap \mathbf{B}_{0,0,\omega}) \cap C^1((0, \infty); \mathbf{H}^{\infty,0})$ задачи Коши (1). Более того, это решение имеет асимптотику (10).

В качестве примера применим теорему 2 к системе Навье–Стокса с большими значениями начальных данных при $n = 2$. Существование в целом по времени не малых решений системы Навье–Стокса изучалось многими авторами (см. [13], [14], [21] и цитированную там литературу). Оценки убывания решений по времени в нормах различных пространств были получены в работах [12], [7], [19], [20], [24]. Теорема 2 дает следующую асимптотику решений системы Навье–Стокса при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^2$:

$$u(t, x) = t^{-1} G(xt^{-\frac{1}{2}}) \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}(x) dx + O(t^{-1-\gamma}),$$

где $\gamma > 0$ и $G(x)$ – функция Грина уравнения теплопроводности. Отметим, что главный член асимптотики имеет тот же вид, что и для линейного случая.

В §2 с помощью метода сжимающих отображений мы построим локальные по времени решения системы (1) и докажем для них сглаживающее свойство. В леммах 1, 2 получим некоторые предварительные оценки для линейного и нелинейного операторов в уравнении (1). В §3 будет изучаться поведение решений в целом по времени. В леммах 3, 5 мы оценим убывание по времени линейного и нелинейного операторов, из леммы 4 получим асимптотические формулы при больших временах для линейной задачи Коши. В конце §3 приведем доказательство теоремы 1. В §4 докажем теорему 2.

§2. Локальное существование и сглаживание решений

Рассмотрим фундаментальную матрицу Коши

$$e^{-tL(\xi)} = \sum_{j=1}^m e^{-t\lambda_j(\xi)} P_j(\xi)$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящую от параметра $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{d}{dt} \hat{u}(t, \xi) + L(\xi) \hat{u}(t, \xi) = 0,$$

где $P_j(\xi)$ – $(m \times m)$ -матрицы, $\lambda_j(\xi)$ – собственные значения матрицы $L(\xi)$. Предположим, что все $\lambda_j(\xi)$ различны при $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и упорядочены по возрастанию их вещественной части.

Пусть линейный оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию диссипации, которое в терминах собственных значений матрицы $L(\xi)$ имеет вид

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \geq \mu |\xi|^\nu \quad (13)$$

для всех $|\xi| \geq 1$, где $\mu > 0$, $\nu \geq 0$, и выполнены неравенства

$$|\partial_\xi^r \lambda_j(\xi)| \leq C \{\xi\}^{\delta-|r|} \langle \xi \rangle^\nu, \quad |\partial_\xi^r P_j(\xi)| \leq C \quad (14)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|r| = 0, 1$, где $\delta > 0$. Предположим, что символы нелинейного оператора $\mathcal{N}$ таковы, что

$$\sum_{|r|=0}^1 |\partial_\xi^r A^{kl}(t, \xi, y)| \leq C \langle \xi - y \rangle^\sigma + C \langle y \rangle^\sigma \quad (15)$$

для всех $\xi, y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, $k, l = 1, \dots, m$, где $\sigma \in [0, \nu]$. Обозначим

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\mathbf{X}_1} &= \sup_{1 \leq p \leq \infty} \|\langle \xi \rangle^{s+\frac{\nu}{p}} E(t, \xi) \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \varphi\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^p}, \\ \|\varphi\|_{\mathbf{X}_2} &= \sup_{1 \leq p \leq \infty} \|(1 + |\partial_\xi|^\omega) \langle \xi \rangle^{s-\frac{\nu}{p}} E(t, \xi) \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \varphi\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p}, \end{aligned}$$

где $E(t, \xi) = e^{\frac{\mu}{2} t \langle \xi \rangle^{\nu_1}}$, $\nu_1 = \min(1, \nu)$, $\omega \in [0, 1]$, $s > S = \frac{1}{2}(\sigma - \nu)$, $s_- = \min(s, 0)$, $\mathbf{L}_\xi^q \mathbf{L}_t^p \equiv \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n; \mathbf{L}^p(0, T))$ при $T \in (0, 1]$, $1 \leq p, q \leq \infty$, мажоранта дробной производной порядка $\omega \in (0, 1)$ определена следующим образом:

$$|\partial_\xi|^\omega \phi(\xi) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(\xi - y) - \phi(\xi)| |y|^{-n-\omega} dy.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть линейный оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям диссипации (13) и (14), в которых $\nu \geq 0$, а нелинейный оператор $\mathcal{N}$ имеет оценку (15) с $\sigma \in [0, \nu]$. Пусть начальные данные $\tilde{u} \in \mathbf{H}^{s', 0} \cap \mathbf{H}^{s_-, \omega'}$, где $s' > \frac{n}{2} + s$, $s > S$, $\omega' > \frac{n}{2} + \omega$. При $\sigma = \nu > 0$ предположим дополнительно, что норма $\|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^{\frac{n}{2}+s', 0}}$ мала. Тогда для некоторого времени $T > 0$ существует единственное решение $u(t, x)$ задачи Коши (1) такое, что $u(t, x) \in C^0([0, T]; \mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2)$. В случае $\nu > 0$ мы также имеем сглаживающее свойство $u(t, x) \in C^1((0, T]; \mathbf{H}^{\infty, 0})$.

Теорему 3 можно применить, например, к системе Навье–Стокса.

2.1 Предварительные леммы. Определим оператор Грина $\mathcal{G}$ для линейной задачи Коши

$$\begin{aligned} u_t + \mathcal{L}u &= f, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) &= \tilde{u}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя преобразование Фурье, можно формально представить оператор Грина в виде

$$\mathcal{G}(t)\psi = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x}(e^{-tL(\xi)}\widehat{\psi}(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x-y) \psi(y) dy,$$

где

$$G(t, x) = \sum_{j=1}^m \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} e^{-t\lambda_j(\xi)} P_j(\xi).$$

Таким образом, для решения задачи (16) получаем формулу Дюамеля

$$u(t) = \mathcal{G}(t)\tilde{u} + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)f(\tau) d\tau.$$

В следующей лемме мы докажем сглаживающее свойство для оператора Грина $\mathcal{G}(t)$. Докажем локальное существование решения в нормах

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\mathbf{X}_1} &= \sup_{1 \leq p \leq \infty} \|\langle \xi \rangle^{s+\frac{\nu}{p}} E(t, \xi) \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \varphi\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^p}, \\ \|\varphi\|_{\mathbf{X}_2} &= \sup_{1 \leq p \leq \infty} \|(1 + |\partial_\xi|^\omega) \langle \xi \rangle^{s-\frac{\nu}{p}} E(t, \xi) \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \varphi\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p}, \\ \|\varphi\|_{\mathbf{Y}_1} &= \|\langle \xi \rangle^s E(t, \xi) \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \varphi\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^1}, \\ \|\varphi\|_{\mathbf{Y}_2} &= \|(1 + |\partial_\xi|^\omega) \langle \xi \rangle^{s-} E(t, \xi) \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \varphi\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^1}, \end{aligned}$$

где $E(t, \xi) = e^{\frac{\mu}{2}t\langle \xi \rangle^{\nu_1}}$, $\nu_1 = \min(1, \nu)$, $\omega \in [0, 1)$, $s > S = \frac{1}{2}(\sigma - \nu)$, $\mathbf{L}_\xi^q \mathbf{L}_t^p \equiv \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n; \mathbf{L}^p(0, T))$, $1 \leq p, q \leq \infty$.

ЛЕММА 1. Пусть линейный оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям диссипации (13), (14) при $\nu \geq 0$. Тогда справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{X}_1} &\leq C\|\phi\|_{\mathbf{H}^{s',0}}, \quad \|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{X}_2} \leq C\|\phi\|_{\mathbf{H}^{s-, \omega'}}, \\ \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\psi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{X}_j} &\leq C\|\psi\|_{\mathbf{Y}_j}, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

в предположении того, что правые части этих неравенств ограничены; здесь $s' > \frac{n}{2} + s$, $\omega' > \omega + \frac{n}{2}$, $s_- = \min(s, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий диссипации (13) и (14) получим

$$\begin{aligned} &\sum_{|r|=0}^1 \left\| \partial_\xi^r \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} e^{-L(\xi)t} E(t, \xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \\ &\leq \sum_{|r|=0}^1 \sum_{j=1}^m \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left\| \partial_\xi^r \left(\langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} e^{-t\lambda_j(\xi) + \frac{\mu}{2}t\langle \xi \rangle^{\nu_1}} P_j(\xi) \right) \right\|_{\mathbf{L}_t^p} \\ &\leq C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left\| \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} e^{-\frac{\mu}{2}t|\xi|^\nu} \right\|_{\mathbf{L}_t^p} \leq C, \end{aligned} \tag{17}$$

где $1 \leq p \leq \infty$. Ввиду (17) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{X}_1} &\leq C \sup_{1 \leq p \leq \infty} \left\| \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} e^{-L(\xi)t} E(t, \xi) \langle \xi \rangle^s \widehat{\phi}(\xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^p} \\ &\leq C \sup_{1 \leq p \leq \infty} \left\| \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} e^{-L(\xi)t} E(t, \xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \|\phi\|_{\mathbf{H}^{s',0}} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{H}^{s',0}}, \end{aligned}$$

откуда следует первая оценка леммы.

Имеет место аналог формулы Лейбница

$$\begin{aligned} |\partial_x|^\omega(\varphi\phi) &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)\phi(x-y) - \varphi(x)\phi(x)| |y|^{-n-\omega} dy \\ &\leq |\varphi(x)| |\partial_x|^\omega \phi + [|\partial_x|^\omega, \varphi]\phi, \end{aligned} \tag{18}$$

где мы ввели коммутатор

$$[|\partial_x|^\omega, \varphi]\phi = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y) - \varphi(x)| |\phi(x-y)| |y|^{-n-\omega} dy.$$

Для норм в пространстве Бесова справедливы оценки (см. [2])

$$\|\varphi\|_{\mathbf{B}^{\omega,q}} \equiv \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{-n-\omega} \|\varphi(\cdot - y) - \varphi(\cdot)\|_{\mathbf{L}^q} dy \leq C \sum_{|r|=0}^1 \|\partial_x^r \varphi\|_{\mathbf{L}^q}.$$

С помощью неравенства Гёльдера получим

$$\begin{aligned} &\left\| [|\partial_\xi|^\omega, \varphi(t, \xi)] \phi(t, \xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \\ &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}^n} |\eta|^{-n-\omega} |\phi(t, \xi - \eta)| |\varphi(t, \xi - \eta) - \varphi(t, \xi)| d\eta \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \\ &\leq \|\varphi\|_{\mathbf{B}_\xi^{\omega,\infty} \mathbf{L}_t^p} \|\phi\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^\infty} \leq C \sum_{|r|=0}^1 \|\partial_x^r \varphi\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \|\phi\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^\infty}. \end{aligned}$$

Поэтому, используя формулу Лейбница, имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{X}_2} &= \sup_{1 \leq p \leq \infty} \left\| (1 + |\partial_\xi|^\omega) \langle \xi \rangle^{s-+\frac{\nu}{p}} E(t, \xi) e^{-L(\xi)t} \widehat{\phi}(\xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \\ &\leq \sup_{1 \leq p \leq \infty} \left\| \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} e^{-L(\xi)t} E(t, \xi) (1 + |\partial_\xi|^\omega) \langle \xi \rangle^{s-} \widehat{\phi}(\xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \\ &\quad + \sup_{1 \leq p \leq \infty} \left\| [|\partial_\xi|^\omega, \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} e^{-L(\xi)t} E(t, \xi)] \langle \xi \rangle^{s-} \widehat{\phi}(\xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p}, \end{aligned}$$

откуда ввиду (17) получим

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{X}_2} &\leq C \sup_{1 \leq p \leq \infty} \left\| \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} e^{-L(\xi)t} E(t, \xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \left\| (1 + |\partial_\xi|^\omega) \langle \xi \rangle^{s-} \widehat{\phi}(\xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\
&\quad + C \sum_{|r|=0}^1 \sup_{1 \leq p \leq \infty} \left\| \partial_\xi^r \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} e^{-L(\xi)t} E(t, \xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \left\| \langle \xi \rangle^{s-} \widehat{\phi}(\xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\
&\leq C \left\| (1 + |\partial_\xi|^{\omega'}) \langle \xi \rangle^{s-} \widehat{\phi}(\xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^2} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{H}^{s-, \omega'}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, вторая оценка леммы доказана.

Пользуясь тождеством

$$E(t, \xi) = E(t - \tau, \xi) E(\tau, \xi),$$

с помощью (17) и неравенства Юнга имеем

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau) \psi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{X}_1} \\
&= \sup_{1 \leq p \leq \infty} \left\| \int_0^t \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} E(t - \tau, \xi) e^{-L(\xi)(t-\tau)} \langle \xi \rangle^s E(\tau, \xi) \widehat{\psi}(\tau, \xi) d\tau \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^p} \\
&\leq C \sup_{1 \leq p \leq \infty} \left\| \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} E(t, \xi) e^{-L(\xi)t} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \left\| \langle \xi \rangle^s E(t, \xi) \widehat{\psi}(t, \xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^1} \\
&\leq C \left\| \langle \xi \rangle^s E(t, \xi) \widehat{\psi}(t, \xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^1} = C \|\psi\|_{\mathbf{Y}_1}.
\end{aligned}$$

Обозначив $\phi(\tau, \xi) = \langle \xi \rangle^{s-} E(\tau, \xi) \widehat{\psi}(\tau, \xi)$ и применив формулу Лейбница, получим

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau) \psi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{X}_2} \\
&= \sup_{1 \leq p \leq \infty} \left\| (1 + |\partial_\xi|^\omega) \int_0^t \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} E(t - \tau, \xi) e^{-L(\xi)(t-\tau)} \phi(\tau, \xi) d\tau \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \\
&\leq C \sup_{1 \leq p \leq \infty} \left\| \int_0^t \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} E(t - \tau, \xi) e^{-L(\xi)(t-\tau)} (1 + |\partial_\xi|^\omega) \phi(\tau, \xi) d\tau \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \\
&\quad + C \sup_{1 \leq p \leq \infty} \left\| \int_0^t [|\partial_\xi|^\omega, \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} E(t - \tau, \xi) e^{-L(\xi)(t-\tau)}] \phi(\tau, \xi) d\tau \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p}.
\end{aligned}$$

Как и выше, имеем оценку

$$\|\psi(t, \xi)\|_{\mathbf{B}_\xi^{\omega, q} \mathbf{L}_t^p} \leq C \sum_{|r|=0}^1 \|\partial_\xi^r \psi(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^q \mathbf{L}_t^p}$$

для $1 \leq p, q \leq \infty$. Тогда по неравенству Юнга оценим коммутатор:

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t [|\partial_\xi|^\omega, \varphi(t-\tau, \xi)] \phi(\tau, \xi) d\tau \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \\ & \leq \left\| \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\eta}{|\eta|^{n+\omega}} |\varphi(t-\tau, \xi-\eta) - \varphi(t-\tau, \xi)| |\phi(\tau, \xi-\eta)| \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \\ & \leq C \|\varphi(t, \xi)\|_{\mathbf{B}_\xi^{\omega, \infty} \mathbf{L}_t^p} \|\phi(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^1} \leq C \sum_{|r|=0}^1 \|\partial_\xi^r \varphi(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \|\phi\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^1}, \end{aligned}$$

откуда ввиду (17), взяв $\varphi(t, \xi) = \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} E(t, \xi) e^{-L(\xi)t}$ и $\phi(t, \xi) = \langle \xi \rangle^{s-} E(t, \xi) \widehat{\psi}(t, \xi)$, получим

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \psi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{X}_2} \\ & \leq C \sup_{1 \leq p \leq \infty} \left\| \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} E(t, \xi) e^{-L(\xi)t} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \|(1 + |\partial_\xi|^\omega) \phi(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^1} \\ & \quad + C \sum_{|r|=0}^1 \sup_{1 \leq p \leq \infty} \left\| \partial_\xi^r \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{p}} E(t, \xi) e^{-L(\xi)t} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \|\phi(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^1} \leq C \|\psi\|_{\mathbf{Y}_2}. \end{aligned}$$

Таким образом, последняя оценка леммы также справедлива. Лемма доказана.

В следующей лемме мы оценим нелинейность в нормах $\mathbf{Y}_j$, $j = 1, 2$. Обозначим

$$\mathcal{N}(\varphi, \phi) \equiv \sum_{k,l=1}^m \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \int_{\mathbb{R}^n} A^{kl}(t, \xi, y) \widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y) dy.$$

ЛЕММА 2. Пусть символы $A^{kl}(t, \xi, y)$ нелинейного оператора $\mathcal{N}(\varphi, \phi)$ удовлетворяют условию (15), в котором $0 \leq \sigma \leq \nu$, $\nu \geq 0$. Тогда выполнены неравенства

$$\|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{Y}_j} \leq CT^\vartheta \|\varphi\|_{\mathbf{X}_j} \|\phi\|_{\mathbf{X}_1}, \quad j = 1, 2,$$

для любых функций $\varphi, \phi \in \mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2$ при $s > S = \frac{1}{2}(\sigma - \nu)$, где $\vartheta = 1$, если $\nu = 0$, и $\vartheta = \min(1 - \frac{\sigma}{\nu}, \frac{s-S}{\nu})$, если $\nu > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $\nu = 0$. Имеем $\sigma = 0$ и $s > 0$. Тогда, используя оценку

$$\begin{aligned} \|\psi(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^q \mathbf{L}_t^1} &= \left\| \int_0^T |\psi(t, \xi)| dt \right\|_{\mathbf{L}_\xi^q} \\ &\leq CT \|\psi(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_t^\infty} \left\| \cdot \right\|_{\mathbf{L}_\xi^q} \leq CT \|\psi(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^q \mathbf{L}_t^\infty}, \end{aligned}$$

с помощью неравенства Юнга получим

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{Y}_1} &\leq C \sum_{k,l=1}^m \left\| \langle \xi \rangle^s \int_{\mathbb{R}^n} A^{kl}(t, \xi, y) \widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^1} \\
&\leq CT \sum_{k,l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (\langle \xi - y \rangle^s + \langle y \rangle^s) |\widehat{\varphi}_k(t, \xi - y)| |\widehat{\phi}_l(t, y)| dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^\infty} \\
&\leq CT \|\langle \xi \rangle^s \widehat{\varphi}(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^\infty} \|\widehat{\phi}(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^\infty} \\
&\quad + CT \|\langle \xi \rangle^s \widehat{\phi}(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^\infty} \|\widehat{\varphi}(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^\infty} \\
&\leq CT \|\varphi\|_{\mathbf{X}_1} \|\phi\|_{\mathbf{X}_1}.
\end{aligned}$$

Аналогично, с помощью формулы Лейбница имеем

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{Y}_2} &\leq C \sum_{k,l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} A^{kl}(t, \xi, y) (1 + |\partial_\xi|^\omega) \widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^1} \\
&\quad + C \sum_{k,l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} [|\partial_\xi|^\omega, A^{kl}(t, \xi, y)] \widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^1} \\
&\leq CT \|(1 + |\partial_\xi|^\omega) \varphi\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^\infty} \|\phi\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^\infty} + CT \|\varphi\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^\infty} \|\phi\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^\infty} \\
&\leq CT \|\varphi\|_{\mathbf{X}_2} \|\phi\|_{\mathbf{X}_1},
\end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{\mathbb{R}^n} [|\partial_\xi|^\omega, A^{kl}(t, \xi, y)] \widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^\infty} \\
&\leq C \|A^{kl}(t, \xi, y)\|_{\mathbf{B}_\xi^{\omega, \infty} \mathbf{L}_y^\infty \mathbf{L}_t^\infty} \|\varphi(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^\infty} \|\phi(t, y)\|_{\mathbf{L}_y^1 \mathbf{L}_t^\infty} \\
&\leq C \sum_{|r|=0}^1 \|\partial_\xi^r A^{kl}(t, \xi, y)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_y^\infty \mathbf{L}_t^\infty} \|\varphi\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^\infty} \|\phi\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^\infty}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к результату леммы в случае $\nu = 0$.

Если $\nu > 0$, положим $\vartheta = \min\left(1 - \frac{\sigma}{\nu}, \frac{s-S}{\nu}\right)$. По неравенству Гёльдера имеем

$$\|\psi(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^q \mathbf{L}_t^1} \leq CT^\vartheta \|\psi(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^q \mathbf{L}_t^p},$$

где $p = \frac{1}{1-\vartheta}$. Обозначим

$$\begin{aligned}
\widetilde{\widehat{\varphi}}_k(t, \xi - y) &= E(t, \xi - y) \widehat{\varphi}_k(t, \xi - y), \\
\widetilde{\widehat{\phi}}_l(t, y) &= E(t, y) \widehat{\phi}_l(t, y).
\end{aligned}$$

Заметим, что $E(t, \xi) \leq E(t, \xi - y)E(t, y)$. Ввиду условия (15), обозначив $s_+ = \max(s, 0)$, $s_- = \min(s, 0)$, получим

$$\langle \xi \rangle^s |A^{kl}(t, \xi, y)| \leq C(\langle \xi - y \rangle^{\sigma+s_+} + \langle y \rangle^{\sigma+s_+}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{Y}_1} &\leq \sum_{k,l=1}^m \left\| \langle \xi \rangle^s E(t, \xi) \int_{\mathbb{R}^n} A^{kl}(t, \xi, y) \widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^1} \\ &\leq CT^\vartheta \sum_{k,l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^s |A^{kl}(t, \xi, y)| E(t, \xi - y) |\widehat{\varphi}_k(t, \xi - y)| \right. \\ &\quad \times E(t, y) |\widehat{\phi}_l(t, y)| dy \left. \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^p} \\ &\leq CT^\vartheta \sum_{k,l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi - y \rangle^{\sigma+s_+} |\widetilde{\varphi}_k(t, \xi - y)| |\widetilde{\phi}_l(t, y)| dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^p} \\ &\quad + CT^\vartheta \sum_{k,l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{\varphi}_k(t, \xi - y)| \langle y \rangle^{\sigma+s_+} |\widetilde{\phi}_l(t, y)| dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^p}, \end{aligned}$$

откуда, применив неравенство Гёльдера с $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}$, $1 \leq p, q, q' \leq \infty$, получим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{Y}_1} &\leq CT^\vartheta \sum_{k,l=1}^m \|\langle \xi \rangle^{\sigma+s_+} \widetilde{\varphi}_k(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^q} \|\widetilde{\phi}_l(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^{q'}} \\ &\quad + CT^\vartheta \sum_{k,l=1}^m \|\langle \xi \rangle^{\sigma+s_+} \widetilde{\phi}_l(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^q} \|\widetilde{\varphi}_k(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^{q'}}. \end{aligned}$$

Поскольку $s + s_- > \sigma - \nu$, $\vartheta = \min(1 - \frac{\sigma}{\nu}, \frac{s_-}{\nu})$, имеем $-\frac{s}{\nu} \leq 1 - \vartheta$, $\frac{\sigma - s_-}{\nu} \leq 1 - \vartheta$ и $-\frac{s}{\nu} + \frac{\sigma - s_-}{\nu} \leq 1 - \vartheta = \frac{1}{p}$. Следовательно, можно выбрать $q, q' \in [1, \infty]$ такие, что

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}, \quad s + \frac{\nu}{q} \geq \sigma + s_+, \quad s + \frac{\nu}{q'} \geq 0.$$

Тогда получаем оценку

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{Y}_1} &\leq CT^\vartheta \|\langle \xi \rangle^{s+\frac{\nu}{q}} E(t, \xi) \varphi(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^q} \|\langle \xi \rangle^{s+\frac{\nu}{q'}} E(t, \xi) \phi(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^{q'}} \\ &\quad + CT^\vartheta \|\langle \xi \rangle^{s+\frac{\nu}{q}} E(t, \xi) \phi(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^q} \|\langle \xi \rangle^{s+\frac{\nu}{q'}} E(t, \xi) \varphi(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^{q'}} \\ &\leq CT^\vartheta \|\varphi\|_{\mathbf{X}_1} \|\phi\|_{\mathbf{X}_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, первая оценка леммы справедлива.

Докажем вторую оценку в случае $\nu > 0$. Обозначим

$$\begin{aligned}\widetilde{A}^{kl}(t, \xi, y) &= \frac{\langle \xi \rangle^{s-} A^{kl}(t, \xi, y)}{\langle \xi - y \rangle^\sigma + \langle y \rangle^\sigma} E(t, \xi) E^{-1}(t, \xi - y) E^{-1}(t, y), \\ \widetilde{\varphi}_k(t, \xi) &= \langle \xi \rangle^\sigma \widetilde{\varphi}_k(t, \xi), \quad \widetilde{\phi}_l(t, \xi) = \langle \xi \rangle^\sigma \widetilde{\phi}_l(t, \xi)\end{aligned}$$

и с помощью условия (15) получим

$$\sup_{\xi, y \in \mathbb{R}^n, t \geq 0} \sum_{|r|=0}^1 |\partial_\xi^r \widetilde{A}^{kl}(t, \xi, y)| \leq C.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{Y}_2} &= \sum_{k,l=1}^m \left\| (1 + |\partial_\xi|^\omega) \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{s-} E(t, \xi) A^{kl}(t, \xi, y) \right. \\ &\quad \times \widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y) dy \left. \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^1} \\ &\leq CT^\vartheta \sum_{k,l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{A}^{kl}(t, \xi, y) (1 + |\partial_\xi|^\omega) \widetilde{\varphi}_k(t, \xi - y) \widetilde{\phi}_l(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \\ &\quad + CT^\vartheta \sum_{k,l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{A}^{kl}(t, \xi, y) (1 + |\partial_\xi|^\omega) \widetilde{\varphi}_k(t, \xi - y) \widetilde{\phi}_l(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \\ &\quad + CT^\vartheta \sum_{k,l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} [|\partial_\xi|^\omega, \widetilde{A}^{kl}(t, \xi, y)] \widetilde{\varphi}_k(t, \xi - y) \widetilde{\phi}_l(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \\ &\quad + CT^\vartheta \sum_{k,l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} [|\partial_\xi|^\omega, \widetilde{A}^{kl}(t, \xi, y)] \widetilde{\varphi}_k(t, \xi - y) \widetilde{\phi}_l(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p}.\end{aligned}$$

Имеем оценку коммутатора:

$$\begin{aligned}&\left\| \int_{\mathbb{R}^n} [|\partial_\xi|^\omega, \widetilde{A}^{kl}(t, \xi, y)] f(t, \xi - y) g(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \\ &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\eta|^{-n-\omega} |\widetilde{A}^{kl}(t, \xi - \eta, y) - \widetilde{A}^{kl}(t, \xi, y)| \right. \\ &\quad \times |f(t, \xi - \eta - y)| |g(t, y)| d\eta dy \left. \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \\ &\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n: |\eta| \leq 1} |\eta|^{1-n-\omega} |f(t, \xi - \eta - y)| |g(t, y)| d\eta dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \\ &\quad + C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n: |\eta| > 1} |\eta|^{-n-\omega} |f(t, \xi - \eta - y)| |g(t, y)| d\eta dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^p} \\ &\leq C \|f\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^q} \|g\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^{q'}},\end{aligned}$$

где $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{p}$. Поскольку $s + s_- > \sigma - \nu$, $\vartheta = \min(1 - \frac{\sigma}{\nu}, \frac{s-S}{\nu})$, имеем $-\frac{s_-}{\nu} \leq 1 - \vartheta$, $\frac{\sigma-s}{\nu} \leq 1 - \vartheta$ и $-\frac{s_-}{\nu} + \frac{\sigma-s}{\nu} \leq 1 - \vartheta = \frac{1}{p}$. Значит, можно выбрать $q, q' \in [1, \infty]$ такие, что

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}, \quad s + \frac{\nu}{q} \geq \sigma, \quad \frac{\nu}{q'} + s_- \geq 0.$$

Как и выше, убедимся, что существуют $q, q' \in [1, \infty]$, удовлетворяющие неравенствам

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}, \quad s + \frac{\nu}{q} \geq 0, \quad \frac{\nu}{q'} + s_- \geq \sigma.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{Y}_2} &\leq CT^\vartheta \left\| (1 + |\partial_\xi|^\omega) \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{q} + s_-} E\varphi \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^q} \left\| \langle \xi \rangle^{s + \frac{\nu}{q'}} E\phi \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^{q'}} \\ &\quad + CT^\vartheta \left\| \langle \xi \rangle^{\frac{\nu}{q} + s_-} E\varphi \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_t^q} \left\| \langle \xi \rangle^{s + \frac{\nu}{q'}} E\phi \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1 \mathbf{L}_t^{q'}} \\ &\leq CT^\vartheta \|\varphi\|_{\mathbf{X}_2} \|\phi\|_{\mathbf{X}_1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

2.2. Доказательство теоремы 3. Пользуясь оператором Грина $\mathcal{G}(t)$ линейной задачи Коши (16), перепишем задачу Коши для нелинейной системы (1) в виде интегрального уравнения

$$u(t) = \mathcal{G}(t)\tilde{u} - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{N}(u)(\tau) d\tau, \quad (19)$$

которое будем решать, используя метод сжимающих отображений в пространстве $\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2$. Определим отображение

$$\mathcal{A}v(t) = \mathcal{G}(t)\tilde{u} - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{N}(v)(\tau) d\tau$$

в пространстве $\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2$. В силу лемм 1 и 2 найдем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}v\|_{\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2} &\leq \|\mathcal{G}\tilde{u}\|_{\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2} + \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{N}(v)(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2} \\ &\leq C\|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^{s',0} \cap \mathbf{H}^{s_-,\omega'}} + C\|\mathcal{N}(v)\|_{\mathbf{Y}_1 \cap \mathbf{Y}_2} \\ &\leq C\|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^{s',0} \cap \mathbf{H}^{s_-,\omega'}} + CT^\vartheta \|v\|_{\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2} \|v\|_{\mathbf{X}_1}, \end{aligned}$$

где введено обозначение $\|v\|_{\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2} = \|v\|_{\mathbf{X}_1} + \|v\|_{\mathbf{X}_2}$ и также определяются нормы $\|v\|_{\mathbf{Y}_1 \cap \mathbf{Y}_2}$ и $\|v\|_{\mathbf{H}^{s',0} \cap \mathbf{H}^{s_-,\omega'}}$. Здесь $s > S = \frac{1}{2}(\sigma - \nu)$, $s_- = \min(0, s)$, $\omega \in [0, 1)$, $\vartheta = 1$, если $\nu = 0$, и $\vartheta = \min(1 - \frac{\sigma}{\nu}, \frac{s-S}{\nu})$, если $\nu > 0$. Следовательно, мы видим, что в случае $\vartheta > 0$ можно выбрать достаточно малое время $T = T(\|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^{s',0}})$, либо

в противном случае, если $\vartheta = 0$, можно выбрать достаточно малую норму $\|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^{s',0}}$ так, чтобы была справедлива оценка

$$\|\mathcal{A}v\|_{\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2} \leq C \|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^{s',0} \cap \mathbf{H}^{s-, \omega'} }.$$

В случае малой нормы $\|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^{s',0}}$ время существования решения T можно считать большим единицы. Аналогично оценим разность

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}v(t) - \mathcal{A}\tilde{v}(t)\|_{\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2} &\leq \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(v) - \mathcal{N}(\tilde{v})) d\tau \right\|_{\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2} \\ &\leq C \|\mathcal{N}(v) - \mathcal{N}(\tilde{v})\|_{\mathbf{Y}_1 \cap \mathbf{Y}_2} \leq CT^\vartheta \|v\|_{\mathbf{X}_1} \|v - \tilde{v}\|_{\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|v - \tilde{v}\|_{\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2}. \end{aligned}$$

Таким образом, преобразование $\mathcal{A}$ является сжимающим отображением в шаре радиуса $C\|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^{s',0}}$ в пространстве $\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2$. Следовательно, существует единственное решение $u(t, x) \in C^0([0, T]; \mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2)$ задачи Коши (1). В случае $\nu > 0$ по определению нормы $\mathbf{X}_1$ получаем сглаживающее свойство:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [T_0, T]} \|v(t)\|_{\mathbf{H}^{k,0}} &= \sup_{t \in [T_0, T]} \|\langle \xi \rangle^{2k} |\widehat{v}(t, \xi)|^2\|_{\mathbf{L}_\xi^2} \\ &\leq C(k, T_0) \left\| \sup_{t \in [T_0, T]} E(t, \xi) \langle \xi \rangle^s |\widehat{v}(t, \xi)| \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \leq C \|v\|_{\mathbf{X}_1} \end{aligned}$$

для всех $k \geq 0$, где $T_0 \in (0, T]$. Производные по времени $t > 0$ могут быть оценены прямо из уравнения (1), поскольку символы $A^{kl}(t, \xi, y)$ являются непрерывными по времени. Таким образом, в случае $\nu > 0$ решение $u(t, x) \in C^1((0, T]; \mathbf{H}^{\infty,0})$. Теорема доказана.

§ 3. Существование решения в целом и его асимптотика

3.1. Предварительные леммы. В следующей лемме докажем оценки убывания по времени для функции Грина $\mathcal{G}(t)$ в нормах

$$\begin{aligned} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}} &= \|\{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s \widehat{\varphi}(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1}, \\ \|\varphi(t)\|_{\mathbf{B}_{s,\rho,\omega}} &= \|(1 + |\partial_\xi|^\omega) \{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s \widehat{\varphi}(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty}, \end{aligned}$$

где $s \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$, $\omega \geq 0$.

ЛЕММА 3. Пусть линейный оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям диссипации (6), (8) и (9). Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(t)\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}} &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho}{\delta}} \{t\}^{-\frac{s}{\nu}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}}, \\ \|\mathcal{G}(t)\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}} &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho+n}{\delta}} \{t\}^{-\frac{s}{\nu}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}}, \\ \|\mathcal{G}(t)\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{s,\rho,\omega}} &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho}{\delta}} \{t\}^{-\frac{s}{\nu}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}} \\ &\quad + C \langle t \rangle^{\frac{\omega-\rho}{\delta}} \{t\}^{-\frac{s}{\nu}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}} \end{aligned}$$

для всех $0 \leq \tau \leq t$, где $s \geq 0$, $\rho \geq 0$, $\delta > 0$, $\omega \in [0, 1)$ таково, что $\omega < \delta$, если $\rho = 0$, и $\omega < \min(\rho, \delta)$, если $\rho > 0$. В случае $\nu = 0$ мы полагаем $s = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий диссипации (6), (8) и (9) имеем

$$\{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s |e^{-t\lambda_j(\xi)}| \leq C \{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s e^{-t\mu\{\xi\}^\delta \langle \xi \rangle^\nu} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho}{\delta}} \{t\}^{-\frac{s}{\nu}}$$

для всех $t > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $s \geq 0$, $\rho \geq 0$. Таким образом, найдем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(t)\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}} &= \|\{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s e^{-tL(\xi)} \widehat{\psi}(\tau, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \\ &\leq C \sum_{j=1}^m \|\{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s e^{-t\lambda_j(\xi)}\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \|P_j(\xi) \widehat{\psi}(\tau, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \\ &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho}{\delta}} \{t\}^{-\frac{s}{\nu}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(t)\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}} &\leq C \sum_{j=1}^m \|\{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s e^{-t\lambda_j(\xi)}\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \|P_j(\xi) \widehat{\psi}(\tau, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\ &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho+n}{\delta}} \{t\}^{-\frac{s}{\nu}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}}. \end{aligned}$$

Значит, выполнены первые две оценки леммы.

Для доказательства третьей оценки с помощью формулы Лейбница (18) запишем

$$\begin{aligned} &|\partial_\xi|^\omega (\{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s e^{-L(\xi)t} \widehat{\psi}(\tau, \xi)) \\ &= \sum_{j=1}^m |\partial_\xi|^\omega (\{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s e^{-t\lambda_j(\xi)} P_j(\xi) \widehat{\psi}(\tau, \xi)) \\ &\leq \sum_{j=1}^m \{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s e^{-t\lambda_j(\xi)} |\partial_\xi|^\omega (P_j(\xi) \widehat{\psi}(\tau, \xi)) \\ &\quad + C \sum_{j=1}^m [|\partial_\xi|^\omega, \{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s e^{-t\lambda_j(\xi)}] P_j(\xi) \widehat{\psi}(\tau, \xi), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} &[|\partial_\xi|^\omega, \{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s e^{-t\lambda_j(\xi)}] P_j(\xi) \widehat{\psi}(\tau, \xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K_j(t, \xi, \eta) P_j(\xi - \eta) \widehat{\psi}(\tau, \xi - \eta) \frac{d\eta}{|\eta|^{n+\omega}}. \end{aligned}$$

Здесь мы ввели обозначение

$$K_j(t, \xi, \eta) \equiv \{\xi - \eta\}^\rho \langle \xi - \eta \rangle^s e^{-t\lambda_j(\xi - \eta)} - \{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s e^{-t\lambda_j(\xi)}.$$

Вследствие второй оценки леммы имеем

$$\|\{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s e^{-t\lambda_j(\xi)} |\partial_\xi|^\omega P_j(\xi) \widehat{\psi}(\tau, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \leq \langle t \rangle^{-\frac{\rho}{\delta}} \{t\}^{-\frac{s}{\nu}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}}, \quad (20)$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{G}(t)\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{s,\rho,\omega}} \leq \langle t \rangle^{-\frac{\rho}{\delta}} \{t\}^{-\frac{s}{\nu}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}} \\
& + C \sum_{j=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n: |\eta| > \langle t \rangle^{-\frac{1}{\delta}}} P_j(\xi - \eta) \widehat{\psi}(\tau, \xi - \eta) K_j(t, \xi, \eta) \frac{d\eta}{|\eta|^{n+\omega}} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\
& + C \sum_{j=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n: |\eta| \leq \frac{|\xi|}{2}} P_j(\xi - \eta) \widehat{\psi}(\tau, \xi - \eta) K_j(t, \xi, \eta) \frac{d\eta}{|\eta|^{n+\omega}} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\
& + C \sum_{j=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n: \frac{|\xi|}{2} \leq |\eta| \leq \langle t \rangle^{-\frac{1}{\delta}}} P_j(\xi - \eta) \widehat{\psi}(\tau, \xi - \eta) K_j(t, \xi, \eta) \frac{d\eta}{|\eta|^{n+\omega}} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty}. \quad (21)
\end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое в (21) с помощью условий (6)–(9):

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{\mathbb{R}^n: |\eta| > \langle t \rangle^{-\frac{1}{\delta}}} P_j(\xi - \eta) \widehat{\psi}(\tau, \xi - \eta) K_j(t, \xi, \eta) \frac{d\eta}{|\eta|^{n+\omega}} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\
& \leq C \|\{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s e^{-t \operatorname{Re} L(\xi)}\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \|\widehat{\psi}(\tau, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \int_{\mathbb{R}^n: |\eta| > \langle t \rangle^{-\frac{1}{\delta}}} \frac{d\eta}{|\eta|^{n+\omega}} \\
& \leq C \langle t \rangle^{\frac{\omega-\rho}{\delta} - \frac{1}{2\delta}} \{t\}^{-\frac{s}{\nu}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}}. \quad (22)
\end{aligned}$$

В случае $|\eta| \leq \frac{|\xi|}{2}$ найдем

$$\begin{aligned}
|K_j(t, \xi, \eta)| &= \left| \int_0^1 \partial_h (\{\xi - h\eta\}^\rho \langle \xi - h\eta \rangle^s e^{-t\lambda_j(\xi - h\eta)}) dh \right| \\
&\leq C |\eta| \left\| \left(t \sum_{|r|=1} |\partial_\zeta^r \lambda_j(\zeta)| + \rho \{\zeta\}^{-1} + s \right) \{\zeta\}^\rho \langle \zeta \rangle^s e^{-\operatorname{Re} \lambda_j(\zeta)t} \right\|_{\mathbf{L}_\zeta^\infty (|\zeta| \geq \frac{|\xi|}{2})} \\
&\leq C |\eta| \|(t \{\zeta\}^{\delta-1} \langle \zeta \rangle^\nu + \rho \{\zeta\}^{-1} + s) \{\zeta\}^\rho \langle \zeta \rangle^s e^{-\mu_j t \{\zeta\}^\delta \langle \zeta \rangle^\nu}\|_{\mathbf{L}_\zeta^\infty (|\zeta| \geq \frac{|\xi|}{2})} \\
&\leq C |\eta| \{\xi\}^{\omega-1} \|(1 + t \{\zeta\}^\delta \langle \zeta \rangle^\nu) \{\zeta\}^{\rho-\omega} \langle \zeta \rangle^s e^{-Ct \{\zeta\}^\delta \langle \zeta \rangle^\nu}\|_{\mathbf{L}_\zeta^\infty} \\
&\leq C |\eta| \{\xi\}^{\omega-1} \{t\}^{-\frac{s}{\nu}} \langle t \rangle^{\frac{\omega-\rho}{\delta}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
& \langle t \rangle^{\frac{\rho-\omega}{\delta}} \{t\}^{\frac{s}{\nu}} \left\| \int_{\mathbb{R}^n: |\eta| \leq \frac{|\xi|}{2}} P_j(\xi - \eta) \widehat{\psi}(\tau, \xi - \eta) K_j(t, \xi, \eta) \frac{d\eta}{|\eta|^{n+\omega}} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\
& \leq C \left\| \int_{\mathbb{R}^n: |\eta| \leq \frac{|\xi|}{2}} |\widehat{\psi}(\tau, \xi - \eta)| \{\xi\}^{\omega-1} \frac{d\eta}{|\eta|^{n+\omega-1}} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\
& \leq C \|\widehat{\psi}(\tau, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \left\| \{\xi\}^{\omega-1} \int_{\mathbb{R}^n: |\eta| \leq \frac{|\xi|}{2}} \frac{d\eta}{|\eta|^{n+\omega-1}} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\
& \leq C \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}}. \quad (23)
\end{aligned}$$

В случае $\frac{|\xi|}{2} \leq |\eta| \leq \langle t \rangle^{-\frac{1}{\delta}}$ в силу оценки

$$\begin{aligned} |K_j(t, \xi, \eta)| &\leq C|\eta|^\rho (|t\lambda_j(\xi - \eta)| + |t\lambda_j(\xi)|) \\ &\leq C|\eta|^\rho (t|\eta|^\delta + \rho) \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{\mathbb{R}^n: \frac{|\xi|}{2} \leq |\eta| \leq \langle t \rangle^{-\frac{1}{\delta}}} P_j(\xi - \eta) \widehat{\psi}(\tau, \xi - \eta) K_j(t, \xi, \eta) \frac{d\eta}{|\eta|^{n+\omega}} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\ &\leq C \|\widehat{\psi}(\tau, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \int_{\mathbb{R}^n: |\eta| \leq \langle t \rangle^{-\frac{1}{\delta}}} (t|\eta|^\delta + \rho) |\eta|^{\rho-\omega-n} d\eta \\ &\leq C \langle t \rangle^{\frac{\omega-\rho}{\delta}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $0 < \omega < \delta$, если $\rho = 0$, и $0 < \omega < \rho$, если $\rho > 0$. Подставив (22)–(24) в неравенство (21), получим третью оценку леммы. Лемма доказана.

В следующей лемме мы выведем асимптотические формулы для линейной задачи Коши (16).

ЛЕММА 4. Пусть линейный оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям диссипации (6) и (9) и имеет асимптотическое представление (7). Тогда для любых $\phi(x) \in \mathbf{A}_{s,0} \cap \mathbf{B}_{0,0,\omega}$ и $\psi(t, x) \in C^0((0, \infty); \mathbf{A}_{s,0} \cap \mathbf{B}_{0,0,\omega})$ при $s > \frac{n}{2}$, $\omega \in (0, \delta)$ имеют место следующие асимптотические представления для $t \geq 1$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{G}(t)\phi = t^{-\frac{n}{\delta}} G(xt^{-\frac{1}{\delta}}) \widehat{\phi}(0) + O(t^{-\frac{n+\gamma_1}{\delta}} (\|\phi\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}})),$$

где $\gamma_1 = \min(\gamma, \omega) > 0$, и

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \psi(\tau) d\tau &= t^{-\frac{n}{\delta}} G(xt^{-\frac{1}{\delta}}) \int_0^\infty \widehat{\psi}(\tau, 0) d\tau \\ &\quad + O\left(t^{-\frac{n+\gamma_2}{\delta}} \sup_{\tau \in (0,t)} \langle \tau \rangle^\theta (\langle \tau \rangle^{\frac{n}{\delta}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}})\right) \end{aligned}$$

при $\theta \in (1, 2)$, $\gamma_2 = \min(\gamma_1, (\theta - 1)\delta)$, а матрица-функция $G(x)$ имеет вид

$$G(x) = \sum_{j=1}^m \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} e^{-\mu_j |\xi|^\delta} P_j(0).$$

Доказательство. Запишем представление

$$\mathcal{G}(t)\phi = \mathfrak{G}(t)\phi + \mathcal{R}_1(t)\phi,$$

где

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(t)\phi &= \sum_{j=1}^m \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} (e^{-t\mu_j |\xi|^\delta} P_j(0) \widehat{\phi}(\xi)), \\ \mathcal{R}_1(t)\phi &= \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \left(\sum_{j=1}^m (e^{-t\lambda_j(\xi)} P_j(\xi) - e^{-t\mu_j |\xi|^\delta} P_j(0)) \widehat{\phi}(\xi) \right),\end{aligned}$$

числа μ_j взяты из асимптотического представления (7). Поскольку

$$\sum_{j=1}^m \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} e^{-t\mu_j |\xi|^\delta} P_j(0) = t^{-\frac{n}{\delta}} G(xt^{-\frac{1}{\delta}}),$$

получаем

$$\mathfrak{G}(t)\phi = t^{-\frac{n}{\delta}} G(xt^{-\frac{1}{\delta}}) \widehat{\phi}(0) + \mathcal{R}_2(t)\phi,$$

где

$$\mathcal{R}_2(t)\phi = \sum_{j=1}^m \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \left(e^{-t\mu_j |\xi|^\delta} (\widehat{\phi}(\xi) - \widehat{\phi}(0)) \right).$$

Таким образом, имеем

$$\mathcal{G}(t)\phi = t^{-\frac{n}{\delta}} G(xt^{-\frac{1}{\delta}}) \widehat{\phi}(0) + \mathcal{R}_1(t)\phi + \mathcal{R}_2(t)\phi. \quad (25)$$

Благодаря условиям (6)–(9) найдем оценку остатка $\mathcal{R}_1(t)\phi$:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_1(t)\phi\|_{\mathbf{L}_x^\infty} &\leq C \sum_{j=1}^m \left\| (e^{-t\lambda_j(\xi)} P_j(\xi) - e^{-t\mu_j |\xi|^\delta} P_j(0)) \widehat{\phi}(\xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \\ &\leq C \|\widehat{\phi}\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \int_{\mathbb{R}^n: |\xi| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^m |e^{-t\lambda_j(\xi)} - e^{-t\mu_j |\xi|^\delta}| + e^{-\mu |\xi|^\delta t} |\xi| \right) d\xi \\ &\quad + C e^{-\mu t} \|\widehat{\phi}\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \\ &\leq C e^{-\mu t} \|\widehat{\phi}\|_{\mathbf{L}_\xi^1} + C \|\widehat{\phi}\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \int_{\mathbb{R}^n: |\xi| \leq 1} e^{-t\mu |\xi|^\delta} (t|\xi|^{\delta+\gamma} + |\xi|) d\xi \\ &\leq C t^{-\frac{n+\gamma}{\delta}} (\|\phi\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}}) \quad (26)\end{aligned}$$

для всех $t \geq 1$, где $\mu > 0$ взято из условия (6).

Оценим остаточный член $\mathcal{R}_2(t)\phi$:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_2(t)\phi\|_{\mathbf{L}_x^\infty} &\leq \sum_{j=1}^m \left\| e^{-t\mu_j |\xi|^\delta} (\widehat{\phi}(\xi) - \widehat{\phi}(0)) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \\ &\leq C \left\| |\xi|^{n+\omega} e^{-t\mu |\xi|^\delta} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}(\xi) - \widehat{\phi}(0)| |\xi|^{-n-\omega} d\xi \\ &\leq C t^{-\frac{n+\omega}{\delta}} \left\| |\partial_\xi|^\omega \widehat{\phi}(\xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \leq C t^{-\frac{n+\omega}{\delta}} \|\phi\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}}. \quad (27)\end{aligned}$$

Подставив (26) и (27) в соотношение (25), получим первую асимптотическую формулу леммы. Чтобы доказать вторую формулу, выпишем оценку

$$\begin{aligned}
& \left\| (\mathcal{G}(t - \tau) - \mathcal{G}(t)) \psi(\tau) \right\|_{\mathbf{L}_x^\infty} \\
& \leq C \sum_{j=1}^m \left\| (e^{-(t-\tau)\lambda_j(\xi)} - e^{-t\lambda_j(\xi)}) P_j(\xi) \widehat{\psi}(\tau, \xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \\
& \leq C \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n: |\xi| \leq 1} |e^{-(t-\tau)\lambda_j(\xi)} - e^{-t\lambda_j(\xi)}| d\xi \|P_j(\xi) \widehat{\psi}(\tau)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\
& \quad + C \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n: |\xi| > 1} |P_j(\xi) \widehat{\psi}(\tau)| d\xi \|e^{-(t-\tau)\lambda_j(\xi)} - e^{-t\lambda_j(\xi)}\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty(|\xi| > 1)},
\end{aligned}$$

откуда получим

$$\begin{aligned}
& \left\| (\mathcal{G}(t - \tau) - \mathcal{G}(t)) \psi(\tau) \right\|_{\mathbf{L}_x^\infty} \\
& \leq C \|\widehat{\psi}(\tau)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n: |\xi| \leq 1} |e^{-(t-\tau)\lambda_j(\xi)} - e^{-t\lambda_j(\xi)}| d\xi \\
& \quad + C e^{-C(t-\tau)} \|\widehat{\psi}(\tau)\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \\
& \leq C \|\widehat{\psi}(\tau)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \int_{\mathbb{R}^n: |\xi| \leq 1} \tau |\xi|^\delta e^{-\mu|\xi|^\delta(t-\tau)} d\xi + C e^{-C(t-\tau)} \|\widehat{\psi}(\tau)\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \\
& \leq C \langle \tau \rangle \langle t \rangle^{-1-\frac{n}{\delta}} (\|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}})
\end{aligned}$$

для всех $0 < \tau < \frac{t}{2}$ и

$$\begin{aligned}
& \left\| (\mathcal{G}(t - \tau) - \mathcal{G}(t)) \psi(\tau) \right\|_{\mathbf{L}_x^\infty} \\
& \leq C \sum_{j=1}^m \left\| (e^{-(t-\tau)\lambda_j(\xi)} - e^{-t\lambda_j(\xi)}) P_j(\xi) \widehat{\psi}(\tau, \xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \\
& \leq C \|\widehat{\psi}(\tau)\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \leq C \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}}
\end{aligned}$$

для $\frac{t}{2} \leq \tau \leq t$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t (\mathcal{G}(t - \tau) - \mathcal{G}(t)) \psi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}_x^\infty} \\
& \leq C t^{-1-\frac{n}{\delta}} \int_0^{\frac{t}{2}} \langle \tau \rangle^{1-\theta} d\tau \sup_{\tau \in (0, t)} \langle \tau \rangle^\theta (\|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}}) \\
& \quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle \tau \rangle^{-\theta-\frac{n}{\delta}} d\tau \sup_{\tau \in (0, t)} \langle \tau \rangle^{\theta+\frac{n}{\delta}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} \\
& \leq C t^{1-\theta-\frac{n}{\delta}} \sup_{\tau \in (0, t)} \langle \tau \rangle^\theta (\langle \tau \rangle^{\frac{n}{\delta}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}})
\end{aligned}$$

для всех $t \geq 1$, где $\theta \in (1, 2)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \psi(\tau) d\tau &= \mathcal{G}(t) \int_0^t \psi(\tau) d\tau \\ &+ O\left(t^{1-\theta-\frac{n}{\delta}} \sup_{\tau \in (0,t)} \langle \tau \rangle^\theta (\langle \tau \rangle^{\frac{n}{\delta}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}})\right). \end{aligned} \quad (28)$$

Теперь, используя соотношения (25)–(27), найдем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) \int_0^t \psi(\tau) d\tau &= t^{-\frac{n}{\delta}} G(xt^{-\frac{1}{\delta}}) \int_0^t \widehat{\psi}(\tau, 0) d\tau \\ &+ O\left(t^{-\frac{n+\gamma_1}{\delta}} \int_0^t (\|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}}) d\tau\right). \end{aligned} \quad (29)$$

Вторая оценка леммы следует из соотношений (28) и (29). Лемма доказана.

В следующей лемме мы оценим нелинейные операторы в нормах $\mathbf{A}_{s,\rho}$ и $\mathbf{B}_{s,\rho,\omega}$.

ЛЕММА 5. Пусть нелинейный оператор $\mathcal{N}$ удовлетворяет условию (3). Тогда выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} &\leq C\|\varphi\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha}}\|\phi\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + C\|\varphi\|_{\mathbf{A}_{0,0}}\|\phi\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha}}, \\ \|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}} &\leq C\|\varphi\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}}\|\phi\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha}} + C\|\phi\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}}\|\varphi\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha}}, \\ \|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}} &\leq C\|\varphi\|_{\mathbf{B}_{\sigma,\alpha,\omega}}\|\phi\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + C\|\varphi\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}}\|\phi\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha}} \\ &\quad + C\|\varphi\|_{\mathbf{B}_{\sigma,\alpha-\omega_1,0}}\|\phi\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + C\|\varphi\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}}\|\phi\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha-\omega_1}} \end{aligned}$$

в предположении, что правые части ограничены, где $\omega \in (0, 1)$, $\alpha \geq \omega_1 > \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия (3) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} &\leq C \sum_{k,l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} A^{kl}(t, \xi, y) \widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \\ &\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (\{\xi - y\}^\alpha \langle \xi - y \rangle^\sigma + \{y\}^\alpha \langle y \rangle^\sigma) |\widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y)| dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \\ &\leq C \|\{\xi\}^\alpha \langle \xi \rangle^\sigma \widehat{\varphi}_k\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \|\widehat{\phi}_l\|_{\mathbf{L}_\xi^1} + C \|\widehat{\varphi}_k\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \|\{\xi\}^\alpha \langle \xi \rangle^\sigma \widehat{\phi}_l\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \\ &\leq C\|\varphi\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha}}\|\phi\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + C\|\varphi\|_{\mathbf{A}_{0,0}}\|\phi\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha}}. \end{aligned}$$

Аналогично, для второй оценки запишем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}} &\leq C \sum_{k,l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} A^{kl}(t, \xi, y) \widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\ &\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (\{\xi - y\}^\alpha \langle \xi - y \rangle^\sigma + \{y\}^\alpha \langle y \rangle^\sigma) |\widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y)| dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\ &\leq C \|\{\xi\}^\alpha \langle \xi \rangle^\sigma \widehat{\varphi}_k\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \|\widehat{\phi}_l\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} + C \|\widehat{\varphi}_k\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \|\{\xi\}^\alpha \langle \xi \rangle^\sigma \widehat{\phi}_l\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \\ &\leq C\|\varphi\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}}\|\phi\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha}} + C\|\phi\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}}\|\varphi\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha}}. \end{aligned}$$

Теперь докажем третью оценку леммы. Обозначим

$$\widetilde{A}^{kl}(t, \xi, y) = A^{kl}(t, \xi, y)(\{\xi - y\}^\alpha \langle \xi - y \rangle^\sigma + \{y\}^\alpha \langle y \rangle^\sigma)^{-1}$$

и положим $\mathcal{D}_1 = \{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta| > \frac{1}{2}(\{\xi - y\} + \{y\})\}$, $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}_1$. Тогда имеем неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| [|\partial_\xi|^\omega, \widetilde{A}^{kl}(t, \xi, y)] \Phi(t, \xi, y) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\ & \leq \left\| \int_{\mathcal{D}_1} \frac{d\eta}{|\eta|^{n+\omega}} (|\widetilde{A}^{kl}(t, \xi - \eta, y)| + |\widetilde{A}^{kl}(t, \xi, y)|) |\Phi(t, \xi - \eta, y)| \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\ & \quad + \left\| \int_{\mathcal{D}_2} \frac{d\eta}{|\eta|^{n+\omega}} |\widetilde{A}^{kl}(t, \xi - \eta, y) - \widetilde{A}^{kl}(t, \xi, y)| |\Phi(t, \xi - \eta, y)| \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty}. \end{aligned}$$

В области $\mathcal{D}_1$ справедливо неравенство $\{\eta\}^{\omega_1} (\{\xi - y - \eta\} + \{y\})^{-\omega_1} \geq C$, а в области $\mathcal{D}_2$ имеем

$$\{\xi - y - \eta\} + \{y\} \leq \{\xi - y\} + \{\eta\} + \{y\} \leq C(\{\xi - y\} + \{y\}).$$

Поэтому, используя условие (3), получаем

$$\begin{aligned} |\widetilde{A}^{kl}(t, \xi - \eta, y) - \widetilde{A}^{kl}(t, \xi, y)| & \leq C|\eta|(\{\xi - y\} + \{y\})^{-1} \\ & \leq C \frac{|\eta|(\{\xi - y\} + \{y\})^{\omega-1}}{(\{\xi - y - \eta\} + \{y\})^\omega}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left\| [|\partial_\xi|^\omega, \widetilde{A}^{kl}(t, \xi, y)] \Phi(t, \xi, y) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\ & \leq C \left\| \int_{\mathcal{D}_1} |\eta|^{-n-\omega} \{\eta\}^{\omega_1} (\{\xi - y - \eta\} + \{y\})^{-\omega_1} |\Phi(t, \xi - \eta, y)| d\eta \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\ & \quad + C \left\| \int_{\mathcal{D}_2} |\eta|^{1-n-\omega} \frac{(\{\xi - y\} + \{y\})^{\omega-1}}{(\{\xi - y - \eta\} + \{y\})^\omega} |\Phi(t, \xi - \eta, y)| d\eta \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\ & \leq C \|(\{\xi - y\} + \{y\})^{-\omega_1} \Phi(t, \xi, y)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\ & \quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} \{\eta\}^{\omega_1} \frac{d\eta}{|\eta|^{n+\omega}} + (\{\xi - y\} + \{y\})^{\omega-1} \int_{\mathcal{D}_2} \frac{d\eta}{|\eta|^{n+\omega-1}} \right) \\ & \leq C \|(\{\xi - y\} + \{y\})^{-\omega_1} \Phi(t, \xi, y)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \end{aligned}$$

для всех $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Таким образом, положив

$$\Phi(t, \xi, y) = (\{\xi - y\}^\alpha \langle \xi - y \rangle^\sigma + \{y\}^\alpha \langle y \rangle^\sigma) \widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y),$$

найдем

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}} &\leq C \sum_{k,l=1}^m \left\| (1 + |\partial_\xi|^\omega) \int_{\mathbb{R}^n} A^{kl}(t, \xi, y) \widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\
&\leq C \sum_{k,l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{A}^{kl}(t, \xi, y) (1 + |\partial_\xi|^\omega) \Phi(t, \xi, y) dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty} \\
&\quad + C \sum_{k,l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} [|\partial_\xi|^\omega, \widetilde{A}^{kl}(t, \xi, y)] \Phi(t, \xi, y) dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty}.
\end{aligned}$$

Итак, приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}} &\leq C \sum_{k,l=1}^m \|(1 + |\partial_\xi|^\omega) \Phi(t, \xi, y)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_y^1} \\
&\quad + C \sum_{k,l=1}^m C \|(\{\xi - y\} + \{y\})^{-\omega_1} \Phi(t, \xi, y)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty \mathbf{L}_y^1} \\
&\leq C \|\varphi\|_{\mathbf{B}_{\sigma,\alpha,\omega}} \|\phi\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + C \|\varphi\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}} \|\phi\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha}} \\
&\quad + C \|\varphi\|_{\mathbf{B}_{\sigma,\alpha-\omega_1,0}} \|\phi\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + C \|\varphi\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}} \|\phi\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha-\omega_1}},
\end{aligned}$$

откуда следует вторая оценка леммы. Лемма доказана.

3.2. Доказательство теоремы 1. В силу сглаживающего свойства, описываемого теоремой 3 при $\nu > 0$, во всех случаях $\nu \geq 0$ можно рассматривать задачу Коши (1) для $t > t_1 > 0$ с начальными данными $\tilde{u} = u(t_1) \in \mathbf{H}^{s',0} \cap \mathbf{H}^{0,\omega'}$ при $s' > \frac{n}{2} + s$, $\omega' > \frac{n}{2} + \omega$. С помощью оператора Грина $\mathcal{G}(t)$ линейной задачи Коши (16) мы запишем нелинейную задачу Коши (1) в виде интегрального уравнения (заменяя $t - t_1 \rightarrow t$, если это необходимо)

$$u(t) = \mathcal{G}(t)\tilde{u} - \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{N}(u)(\tau) d\tau. \quad (30)$$

Рассмотрим шар $\mathbf{X}_\varepsilon = \{\phi \in \mathbf{S}' : \|\phi\|_{\mathbf{X}} \leq \varepsilon\}$, где норма имеет вид

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{\mathbf{X}} &= \sup_{s \in [0, \sigma]} \sup_{\rho \in [0, \alpha]} \sup_{t > 0} \{t\}^{\frac{s}{\nu}} \langle t \rangle^{\frac{\rho}{\delta}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}} \\
&\quad + \sup_{s \in [0, \sigma]} \sup_{\rho \in [0, \alpha]} \sup_{t > 0} \{t\}^{\frac{s}{\nu}} \langle t \rangle^{\frac{\rho - \omega}{\delta}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{B}_{s,\rho,\omega}},
\end{aligned}$$

и определим преобразование

$$\mathcal{A}(v) = \mathcal{G}(t)\tilde{u} - \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{N}(v)(\tau) d\tau \quad (31)$$

для $v \in \mathbf{X}_\varepsilon$, где $\mathcal{N}(v) \equiv \mathcal{N}(v, v)$. Докажем, что $\mathcal{A}$ является сжимающим отображением в $\mathbf{X}_\varepsilon$. Для $s \in [0, \sigma]$, $\rho \in [0, \alpha]$ имеем

$$\|u(t)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}} \leq \|\mathcal{G}(t)\tilde{u}\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}} + \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(v)(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}},$$

откуда ввиду леммы 3 получим

$$\|u(t)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}} \leq C\{t\}^{-\frac{s}{\nu}}\|\tilde{u}\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + C \int_0^t \{t-\tau\}^{-\frac{s}{\nu}} \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} d\tau$$

для $t \in [0, 1]$. Далее имеем неравенства

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}} &\leq C\langle t \rangle^{-\frac{n+\rho}{\delta}} \|\tilde{u}\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}} \\ &\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{\rho+n}{\delta}} \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}} d\tau \\ &\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{\rho}{\delta}} \{t-\tau\}^{-\frac{s}{\nu}} \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} d\tau, \\ \|u(t)\|_{\mathbf{B}_{s,\rho,\omega}} &\leq C\langle t \rangle^{\frac{\omega-\rho}{\delta}} \|\tilde{u}\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}} \\ &\quad + C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{\frac{\omega-\rho}{\delta}} \{t-\tau\}^{-\frac{s}{\nu}} \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}} d\tau \\ &\quad + C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{\rho}{\delta}} \{t-\tau\}^{-\frac{s}{\nu}} \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}} d\tau \end{aligned}$$

для $t \geq 1$. В силу леммы 5 получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} &\leq C\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha}}\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} \leq C\varepsilon^2\{\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}}\langle \tau \rangle^{-\frac{\alpha}{\delta}-\frac{2n}{\delta}}, \\ \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}} &\leq C\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha}}\|v(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}} \leq C\varepsilon^2\{\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}}\langle \tau \rangle^{-\frac{n+\alpha}{\delta}}, \\ \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}} &\leq C\|v(\tau)\|_{\mathbf{B}_{\sigma,\alpha,\omega}}\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} \\ &\quad + C\|v(\tau)\|_{\mathbf{B}_{\sigma,\alpha-\omega_1,0}}\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} \\ &\quad + C\|v(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}}\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha}} + C\|v(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}}\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha-\omega_1}} \\ &\leq C\varepsilon^2\{\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}}\langle \tau \rangle^{\frac{\omega_1-n-\alpha}{\delta}}, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}} &\leq C\{t\}^{-\frac{s}{\nu}}\|\tilde{u}\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + C\varepsilon^2 \int_0^t d\tau \{t-\tau\}^{-\frac{s}{\nu}} \{\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}} \\ &\leq C\varepsilon\{t\}^{-\frac{s}{\nu}} \end{aligned}$$

для всех $t \in [0, 1]$. А для всех $t \geq 1$ запишем

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}} &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{n+\rho}{\delta}} \|\tilde{u}\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}} \\ &\quad + C\varepsilon^2 \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{\rho+n}{\delta}} \{\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}} \langle \tau \rangle^{-\frac{n+\alpha}{\delta}} d\tau \\ &\quad + C\varepsilon^2 \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{\rho}{\delta}} \{t-\tau\}^{-\frac{s}{\nu}} \langle \tau \rangle^{-\frac{\alpha}{\delta}-\frac{2n}{\delta}} d\tau \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{-\frac{n+\rho}{\delta}}, \\ \|u(t)\|_{\mathbf{B}_{s,\rho,\omega}} &\leq C \langle t \rangle^{\frac{\omega-\rho}{\delta}} \|\tilde{u}\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}} \\ &\quad + C\varepsilon^2 \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{\frac{\omega-\rho}{\delta}} \{t-\tau\}^{-\frac{s}{\nu}} \{\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}} \langle \tau \rangle^{-\frac{n+\alpha}{\delta}} d\tau \\ &\quad + C\varepsilon^2 \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{\rho}{\delta}} \{t-\tau\}^{-\frac{s}{\nu}} \{\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}} \langle \tau \rangle^{\frac{\omega_1-n-\alpha}{\delta}} d\tau \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{\frac{\omega-\rho}{\delta}}, \end{aligned}$$

поскольку $0 < \delta < n + \alpha$ и $\omega_1 > \omega$ можно взять достаточно близким к ω . Аналогично оценивается разность

$$\|u_1 - u_2\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{X}}.$$

Таким образом, преобразование $\mathcal{A}$ является сжимающим отображением в $\mathbf{X}_\varepsilon$. Следовательно, существует единственное решение $u(t, x) \in C^0([t_1, \infty), \mathbf{A}_{s,0} \cap \mathbf{B}_{0,0,\omega})$. Теперь, применяя лемму 4 к интегральному уравнению (30), найдем асимптотику (10) с коэффициентом

$$U = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x) dx - (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{N}(u)(\tau, x) dx d\tau.$$

Заметим, что ввиду оценки для решения $u(t, x)$ коэффициент U может быть вычислен приближенно с любой желаемой точностью при использовании интегрального уравнения (30). Теорема доказана.

§ 4. Большие начальные данные

Предположим, что символы нелинейного оператора $\mathcal{N}$ таковы, что

$$|\partial_\xi^r A^{kl}(t, \xi, y)| \leq C \{\xi\}^{\alpha-|r|} \langle \xi \rangle^\sigma \quad (32)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, где $\sigma \geq 0$, $\alpha \geq 1$, $|r| = 0, 1$. Напомним, что $\{\xi\} = \frac{|\xi|}{\langle \xi \rangle}$, $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + \xi^2}$. Будем использовать норму

$$\|\varphi(t)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}^p} = \|\{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s \widehat{\varphi}(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^p}.$$

Заметим, что $\|\cdot\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}} = \|\cdot\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}^1}$.

ЛЕММА 6. Пусть нелинейный оператор $\mathcal{N}$ удовлетворяет условию (32). Тогда справедлива оценка

$$\|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}^p} \leq C \|\varphi\|_{\mathbf{A}_{s+\sigma,\rho+\alpha}^q} \|\phi\|_{\mathbf{A}_{0,0}^r} + C \|\varphi\|_{\mathbf{A}_{0,0}^q} \|\phi\|_{\mathbf{A}_{s+\sigma,\rho+\alpha}^r}$$

при условии, что правая часть ограничена,

$$s \geq -\sigma, \quad \rho \geq -\alpha, \quad 1 \leq p, q, r \leq \infty, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия (32), применяя неравенство Юнга при $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$, получаем

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}^p} &\leq C \sum_{k,l=1}^m \left\| \{\xi\}^\rho \langle \xi \rangle^s \int_{\mathbb{R}^n} A^{kl}(t, \xi, y) \widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p} \\
&\leq C \sum_{k,l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \{\xi\}^{\rho+\alpha} \langle \xi \rangle^{s+\sigma} |\widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y)| dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p} \\
&\leq C \sum_{k,l=1}^m (\|\{\xi\}^{\rho+\alpha} \langle \xi \rangle^{s+\sigma} \widehat{\varphi}_k\|_{\mathbf{L}_\xi^q} \|\widehat{\phi}_l\|_{\mathbf{L}_\xi^r} \\
&\quad + \|\widehat{\varphi}_k\|_{\mathbf{L}_\xi^q} \|\{\xi\}^{\rho+\alpha} \langle \xi \rangle^{s+\sigma} \widehat{\phi}_l\|_{\mathbf{L}_\xi^r}) \\
&= C \|\varphi\|_{\mathbf{A}_{s+\sigma,\rho+\alpha}^q} \|\phi\|_{\mathbf{A}_{0,0}^r} + C \|\varphi\|_{\mathbf{A}_{0,0}^q} \|\phi\|_{\mathbf{A}_{s+\sigma,\rho+\alpha}^r}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Отметим, что ввиду сглаживающего свойства (см. теорему 3) можно рассматривать задачу Коши (1) с момента времени $t = t_1 > 0$ с начальными данными $\tilde{u} \in \mathbf{L}^2$. Рассмотрим априорную оценку в норме $\mathbf{L}^2$.

Умножая уравнение (1) на u , затем интегрируя по $x \in \mathbb{R}^n$ и используя свойство (11), находим

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|u\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= -2\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} (u \cdot \mathcal{N}(u) + u \cdot \mathcal{L}u) dx \\
&= -2 \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re} L(\xi) |\widehat{u}(t, \xi)|^2 d\xi \leq 0,
\end{aligned} \tag{33}$$

откуда видно, что норма $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}$ ограничена и монотонно убывает для всех $t \geq 0$. Теперь докажем, что $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Допустим от противного, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2} \geq \varepsilon_1$ для всех $t > 0$. Возьмем $\varrho \in (0, 1)$ и, следуя идее статьи [19], запишем оценку

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re} L(\xi) |\widehat{u}(t, \xi)|^2 d\xi &\geq \mu \int_{\mathbb{R}^n: |\xi| \geq \varrho} \{\xi\}^\delta \langle \xi \rangle^\nu |\widehat{u}(t, \xi)|^2 d\xi \\
&\geq \mu \varrho^\delta \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - \mu \varrho^{\delta+n} \sup_{|\xi| < \varrho} |\widehat{u}(t, \xi)|^2 \\
&\geq \mu \varrho^\delta \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - \mu \varrho^{\delta+n} \|u(t)\|_{\mathbf{A}_{0,0}^\infty}^2.
\end{aligned}$$

Поскольку норма $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2} = \|u(t)\|_{\mathbf{A}_{0,0}^2}$ ограничена, с помощью леммы 6 получим

$$\|\mathcal{N}(u)(\tau)\|_{\mathbf{A}_{-\sigma,-\alpha}^\infty} \leq C \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C,$$

откуда

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{\mathbf{A}_{0,0}^\infty} &\leq \|\mathcal{G}(t)\tilde{u}\|_{\mathbf{A}_{0,0}^\infty} + \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u)(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{A}_{0,0}^\infty} \\
&\leq C + C \int_0^t \{t-\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{\alpha}{\delta}} \|\mathcal{N}(u)(\tau)\|_{\mathbf{A}_{-\sigma,-\alpha}^\infty} d\tau \\
&\leq C + C \int_0^t \{t-\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{\alpha}{\delta}} d\tau \leq C \langle t \rangle^{1-\frac{\alpha}{\delta}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем оценки

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re} L(\xi) |\widehat{u}(t, \xi)|^2 d\xi &\geq \mu \varrho^\delta (\varepsilon_1 - C \varrho^n \langle t \rangle^{2-\frac{2\alpha}{\delta}}), \\
\frac{d}{dt} \|u\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq -\mu \varrho^\delta (\varepsilon_1 - C \varrho^n \langle t \rangle^{2-\frac{2\alpha}{\delta}}).
\end{aligned} \tag{34}$$

Выберем теперь $\varrho = \varrho(t)$ так, чтобы $\varrho(t) = o(\langle t \rangle^{\frac{2\alpha}{\delta n} - \frac{2}{n}})$ при $t \rightarrow \infty$ и чтобы $\int_0^\infty \varrho^\delta(t) dt = \infty$. Например, можно взять $\varrho(t) = \langle t \rangle^{\frac{2\alpha}{\delta n} - \frac{2}{n}} (\ln(2+t))^{-\frac{1}{\delta}}$, поскольку $\delta \leq \alpha + \frac{n}{2}$ по условию теоремы 2. Из неравенства (34) имеем

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq -\frac{\mu}{2} \varrho^\delta \varepsilon_1$$

для всех $t \geq T_1 > 0$, где $T_1 > 0$ достаточно велико. Интегрируя последнее неравенство по $t > T_1$, мы видим, что норма $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2$ становится отрицательной после некоторого промежутка времени. Полученное противоречие доказывает, что $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Интегрируя (33) по $t \geq 0$, получим

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2\mu \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \{\xi\}^\delta \langle \xi \rangle^\nu |\widehat{u}(\tau, \xi)|^2 d\xi d\tau \leq \|\tilde{u}\|_{\mathbf{L}^2}^2,$$

откуда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T_\varepsilon > 0$ такое, что $\|u(T_\varepsilon)\|_{\mathbf{H}^{\nu/2}} < \varepsilon$. Возьмем $T_\varepsilon > 0$ в качестве начального момента времени. Рассмотрим задачу Коши (1) с начальными данными $\tilde{u} = u(T_\varepsilon)$ такими, что норма

$$\|\tilde{u}\|_{\mathbf{A}_{s,0}} \leq C \|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^{\nu/2}}$$

достаточно мала, где мы считаем, что $\frac{\nu}{2} > \frac{n}{2} + s$ и $s > S = \frac{1}{2}(\sigma - \nu)$.

Применим теперь метод доказательства теоремы 1 с некоторыми изменениями. Пользуясь оператором Грина $\mathcal{G}(t)$ линейной задачи Коши (16), запишем нелинейную задачу Коши (1) в виде интегрального уравнения (30) с начальными данными $\tilde{u}$. Зададим шар

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y} = \Big\{ \phi \in \mathbf{S}' : & \sup_{s \in [0, \sigma]} \sup_{\rho \in [0, \alpha]} \sup_{p \in [1, 2]} \sup_{t > 0} \{t\}^{\frac{s}{\nu}} \langle t \rangle^{\frac{\rho}{\delta} + \frac{n}{\delta p} - \frac{n}{2\delta}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}^p} \leq \varepsilon; \\
& \sup_{s \in [0, \sigma]} \sup_{\rho \in [0, \alpha]} \sup_{p \in [1, \infty]} \sup_{t > 0} \{t\}^{\frac{s}{\nu}} \langle t \rangle^{\frac{\rho}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}^p} \\
& + \sup_{s \in [0, \sigma]} \sup_{\rho \in [0, \alpha]} \sup_{t > 0} \{t\}^{\frac{s}{\nu}} \langle t \rangle^{\frac{\rho - \omega}{\delta}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{B}_{s,\rho,\omega}} \leq C \Big\}.
\end{aligned}$$

Определим преобразование (31) для $v \in \mathbf{Y}$ и докажем, что $\mathcal{A}$ является сжимающим отображением в $\mathbf{Y}$. В силу леммы 3 для $s \in [0, \sigma]$, $\rho \in [0, \alpha]$, $p \in [1, 2]$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(v)(t)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}^p} &\leq \|\mathcal{G}(t)\tilde{u}\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}^p} + \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(v)(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}^p} \\ &\leq C\{t\}^{-\frac{s}{\nu}}\langle t \rangle^{-\frac{\rho}{\delta} + \frac{n}{\delta}(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|\tilde{u}\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{\rho+\alpha}{\delta} - \frac{n}{p\delta} + \frac{n}{2\delta}} \{t-\tau\}^{-\frac{s+\sigma}{\nu}} \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{A}_{-\sigma,-\alpha}^2} d\tau \\ &\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \{t-\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}} \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{A}_{s-\sigma,\rho}^p} d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку $v \in \mathbf{Y}$, используя лемму 5, получим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{A}_{-\sigma,-\alpha}^2} &\leq C\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}^1} \|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}^2} \\ &\leq C\varepsilon^2 \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2\delta}}, \\ \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{A}_{s-\sigma,\rho}^p} &\leq C\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho+\alpha}^1} \|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}^p} \\ &\leq C\varepsilon^2 \{\tau\}^{-\frac{s}{\nu}} \langle \tau \rangle^{-\frac{\rho+\alpha}{\delta} - \frac{n}{\delta p}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(v)(t)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}^p} &\leq C\varepsilon\{t\}^{-\frac{s}{\nu}}\langle t \rangle^{-\frac{\rho}{\delta} - \frac{n}{\delta p} + \frac{n}{2\delta}} \\ &\quad + C\varepsilon^2 \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{\rho+\alpha}{\delta} - \frac{n}{p\delta} + \frac{n}{2\delta}} \{t-\tau\}^{-\frac{s+\sigma}{\nu}} \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2\delta}} d\tau \\ &\quad + C\varepsilon^2 \int_{\frac{t}{2}}^t \{t-\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}} \{\tau\}^{-\frac{s}{\nu}} \langle \tau \rangle^{-\frac{\rho+\alpha}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} d\tau \\ &\leq C\varepsilon\{t\}^{-\frac{s}{\nu}}\langle t \rangle^{-\frac{\rho}{\delta} - \frac{n}{\delta p} + \frac{n}{2\delta}}. \end{aligned}$$

Аналогично, для $s \in [0, \sigma]$, $\rho \in [0, \alpha]$, $p \in [1, \infty]$ найдем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(v)(t)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}^p} &\leq \|\mathcal{G}(t)\tilde{u}\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}^p} + \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(v)(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}^p} \\ &\leq C\{t\}^{-\frac{s}{\nu}}\langle t \rangle^{-\frac{\rho}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \|\tilde{u}\|_{\mathbf{A}_{0,0}^\infty} \\ &\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{\rho+\alpha}{\delta} - \frac{n}{p\delta}} \{t-\tau\}^{-\frac{s+\sigma}{\nu}} \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{A}_{-\sigma,-\alpha}^\infty} d\tau \\ &\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \{t-\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}} \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{A}_{s-\sigma,\rho}^p} d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку $v \in \mathbf{Y}$ и $\delta \leq \alpha + \frac{n}{2}$, ввиду леммы 5 имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{A}_{-\sigma,-\alpha}^\infty} &\leq C\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}^2}\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}^2} \leq C\varepsilon\langle\tau\rangle^{-\frac{n}{2\delta}}, \\ \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{A}_{s-\sigma,\rho}^p} &\leq C\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho+\alpha}^1}\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}^p} \\ &\leq C\varepsilon\{\tau\}^{-\frac{s}{\nu}}\langle\tau\rangle^{-\frac{\rho+\alpha}{\delta}-\frac{n}{\delta p}-\frac{n}{2\delta}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(v)(t)\|_{\mathbf{A}_{s,\rho}^p} &\leq C\{t\}^{-\frac{s}{\nu}}\langle t\rangle^{-\frac{\rho}{\delta}-\frac{n}{\delta p}} \\ &\quad + C\varepsilon\int_0^{\frac{t}{2}}\langle t-\tau\rangle^{-\frac{\rho+\alpha}{\delta}-\frac{n}{\delta p}}\{t-\tau\}^{-\frac{s+\sigma}{\nu}}\langle\tau\rangle^{-\frac{n}{2\delta}}d\tau \\ &\quad + C\varepsilon\int_{\frac{t}{2}}^t\{t-\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}}\{\tau\}^{-\frac{s}{\nu}}\langle\tau\rangle^{-\frac{\rho+\alpha}{\delta}-\frac{n}{\delta p}-\frac{n}{2\delta}}d\tau \\ &\leq C\{t\}^{-\frac{s}{\nu}}\langle t\rangle^{-\frac{\rho}{\delta}-\frac{n}{\delta p}}. \end{aligned}$$

Наконец, для $s \in [0, \sigma]$, $\rho \in [0, \alpha]$ найдем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(v)(t)\|_{\mathbf{B}_{s,\rho,\omega}} &\leq \|\mathcal{G}(t)\tilde{u}\|_{\mathbf{B}_{s,\rho,\omega}} \\ &\quad + \left\|\int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(v)(\tau)d\tau\right\|_{\mathbf{B}_{s,\rho,\omega}} \\ &\leq C\{t\}^{-\frac{s}{\nu}}\langle t\rangle^{\frac{\omega-\rho}{\delta}}\|\tilde{u}\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}} \\ &\quad + C\int_0^t\langle t-\tau\rangle^{\frac{\omega-\rho}{\delta}}\{t-\tau\}^{-\frac{s}{\nu}}\|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}^\infty}d\tau \\ &\quad + C\int_0^t\langle t-\tau\rangle^{-\frac{\rho}{\delta}}\{t-\tau\}^{-\frac{s}{\nu}}\|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}}d\tau. \end{aligned}$$

Далее, применяя лемму 5, получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}^\infty} &\leq C\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{s,\sigma}^2}\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}^2} \\ &\leq C\sqrt{\varepsilon}\{\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}}\langle\tau\rangle^{-\frac{\alpha}{\delta}-\frac{3n}{4\delta}}, \\ \|\mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}} &\leq C\|v(\tau)\|_{\mathbf{B}_{\sigma,\alpha,\omega}}\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} + C\|v(\tau)\|_{\mathbf{B}_{\sigma,\alpha-\omega_1,0}}\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{0,0}} \\ &\quad + C\|v(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,\omega}}\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha}} + C\|v(\tau)\|_{\mathbf{B}_{0,0,0}}\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}_{\sigma,\alpha-\omega_1}} \\ &\leq C\sqrt{\varepsilon}\{\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}}\langle\tau\rangle^{\frac{\omega-\alpha}{\delta}-\frac{n}{2\delta}}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(v)(t)\|_{\mathbf{B}_{s,\rho,\omega}} &\leq C\{t\}^{-\frac{s}{\nu}}\langle t\rangle^{\frac{\omega-\rho}{\delta}} + C\sqrt{\varepsilon}\int_0^t\langle t-\tau\rangle^{\frac{\omega-\rho}{\delta}}\{t-\tau\}^{-\frac{s}{\nu}}\{\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}}\langle\tau\rangle^{-\frac{\alpha}{\delta}-\frac{3n}{4\delta}}d\tau \\ &\quad + C\sqrt{\varepsilon}\int_0^t\langle t-\tau\rangle^{-\frac{\rho}{\delta}}\{t-\tau\}^{-\frac{s}{\nu}}\{\tau\}^{-\frac{\sigma}{\nu}}\langle\tau\rangle^{\frac{\omega-\alpha}{\delta}-\frac{n}{2\delta}}d\tau \\ &\leq C\{t\}^{-\frac{s}{\nu}}\langle t\rangle^{\frac{\omega-\rho}{\delta}}. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается разность

$$\|u_1 - u_2\|_{\mathbf{Y}} \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{Y}}.$$

Таким образом, преобразование $\mathcal{A}$ является сжимающим отображением в $\mathbf{Y}$. Значит, существует единственное решение $u(t, x) \in C^0([t_1, \infty), \mathbf{A}_{s,0} \cap \mathbf{B}_{0,0,\omega})$. Применяя лемму 4 к интегральному уравнению (30), находим асимптотику (10) для решения. Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
2. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1978.
3. Broer L. J. F. Approximate equations for long water waves // Appl. Sci. Res. 1975. V. 31. P. 377–395.
4. Dix D. B. Large-Time Behavior of Solutions of Linear Dispersive Equations // Lect. Notes in Math. V. 1668. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1997.
5. Доброхотов С. Ю. Нелокальные аналоги нелинейного уравнения Буссинеска для поверхностных волн над неровным дном и их асимптотические решения // ДАН СССР. 1987. Т. 292. №1. С. 63–67.
6. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции. Теория дифференциальных уравнений. Т. 3. М.: Наука, 1967.
7. Giga Y., Kambe T. Large time behavior of the vorticity of two-dimensional viscous flow and its application to vortex formation // Commun. Math. Phys. 1988. V. 117. P. 549–568.
8. Gmira A., Veron L. Large time behavior of the solutions of a semilinear parabolic equation in $\mathbb{R}^n$ // J. Diff. Eqs. 1984. V. 53. P. 258–276.
9. Ильин А. М., Олейник О. А. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при больших значениях времени // Матем. сб. 1960. Т. 51. С. 191–216.
10. Kato T. Strong L^p solutions of the Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^n$ with applications to weak solutions // Math. Zeit. 1984. V. 187. P. 471–480.
11. Kaup D. J. A higher-order water-wave equation and the method for solving it // Prog. Theoret. Phys. 1975. V. 54. P. 396–408.
12. Ладыженская О. А. Математическая теория вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961.
13. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Л.: Физматгиз, 1968.
14. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1969.
15. Naumkin P. I., Shishmarev I. A. Nonlinear Nonlocal Equations in the Theory of Waves. V. 133. Providence: AMS, 1994.
16. Наумкин П. И., Шишмарёв И. А. Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решений нелинейных уравнений с немалыми начальными возмущениями // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №6. С. 855–864.
17. Наумкин П. И., Шишмарёв И. А. Асимптотика при больших временах решений системы уравнений поверхностных волн // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. №3. С. 537–559.
18. Наумкин П. И., Шишмарёв И. А. Асимптотическое представление поверхностных волн в виде двух бегущих волн Бюргерса // Функцион. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. №3. С. 25–40.

19. *Schonbek M. E.* Uniform decay rates for parabolic conservation laws // Nonlinear Anal. T.M.A. 1986. V. 10. № 9. P. 943–953.
20. *Schonbek M. E.* Lower bounds of rates of decay for solutions to the Navier–Stokes equations // J. Amer. Math. Soc. 1991. V. 4. № 3. P. 423–449.
21. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса: Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
22. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
23. *Уизем Дж. Б.* Нелинейная теория распределения волн. М.: Мир, 1970. С. 12–39.
24. *Wiegner M.* Decay results for weak solutions of the Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^n$ // London Math. Soc. 1987. V. 35. № 2. P. 363–313.
25. *Zuazua E.* Some recent results on the large time behavior for scalar parabolic conservation laws // Elliptic and Parabolic Problems. Proc. 2nd European Conference. 1995. V. 325. P. 251–263.

МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: pavelni@matmor.unam.mx, shish@voxnet.ru

Поступило в редакцию

20.05.2003