Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Лукашов, Неравенства для производных рациональных функций на нескольких отрезках, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 3, 115–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/im488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:10:28

УДК 517.5

А. Л. Лукашов

Неравенства для производных рациональных функций на нескольких отрезках

Описано решение задачи о рациональной тригонометрической функции с фиксированным знаменателем, наименее уклоняющейся от нуля на нескольких отрезках на периоде. Полученное представление применяется для доказательства неравенств, позволяющих оценить производные рациональных тригонометрических и алгебраических функций с фиксированным знаменателем через их значения на нескольких отрезках. Эти неравенства включают как частные случаи известные неравенства В. С. Виденского, В. Н. Русака, В. Тотика и др.

Библиография: 74 наименования.

§ 1. Введение

Хорошо известно, что многочлены Чебышева являются экстремальными не только в задаче о наименьшем отклонении от нуля, но и в ряде задач об оценках производных многочленов, на решение которых существенно опирается доказательство обратных теорем теории приближений. Во многих книгах рассмотрены решения этих задач и их многочисленных обобщений (см., например, [1]–[5]). Точнее, многочлены Чебышева $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$ доставляют минимум в экстремальной задаче

$$\|x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n\|_{C[-1,1]} \rightarrow \min_{c_i \in \mathbb{R}}, \quad (1)$$

а также преобразуют неравенство Бернштейна–Сегё

$$|P'_n(x)| \leq \frac{n\sqrt{1 - P_n^2(x)}}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (2)$$

справедливое для любого $x \in (-1, 1)$ и многочлена $P_n(x)$ степени не выше n , в тождество.

Цель настоящей работы – найти решение соответствующих задач для рациональных функций с фиксированным знаменателем на нескольких отрезках действительной оси, точнее, рассмотреть “рациональные тригонометрические” функции вида

$$r(\varphi) = \frac{A \cos N\varphi + B \sin N\varphi + a_1 \cos(N-1)\varphi + \dots + b_{[N]} \sin(N-[N])\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}, \quad (3)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-01-00060), Министерства образования РФ (Программа “Университеты России” УР.04.01.040), гранта Президента Российской Федерации НШ-1295.2003.1 и Австрийского научного фонда FWF (проект P16390-N04).

где N – полуполое, $N \in \mathbb{N}/2$; $A, B \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 \neq 0$, – фиксированные числа; $\mathcal{A}(\varphi)$ – фиксированный действительный тригонометрический полином порядка a , $a \leq 2N$, положительный на заданной конечной системе отрезков

$$\mathcal{E} = [\varphi_1, \varphi_2] \cup \dots \cup [\varphi_{2l-1}, \varphi_{2l}], \quad b \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{2l} < b + 2\pi.$$

Предположим, что $\varphi_{2l+1} = \varphi_1 + 2\pi$. Исследование именно такого класса функций позволяет рассматривать как частные случаи следующие результаты:

1) оценки производных тригонометрических полиномов целого и полуполого порядков на отрезке короче периода (задача, поставленная И. И. Приваловым и решенная В. С. Виденским);

2) наименее уклоняющиеся от нуля “рациональные тригонометрические” функции, найденные Г. Сегё;

3) неравенства для производных алгебраических многочленов и рациональных функций на одном и нескольких отрезках; замена $x = \cos(\varphi/2)$ переводит произвольную систему отрезков $E \subset [-1, 1]$ в некоторую систему отрезков $\mathcal{E}$, а алгебраические дроби вида

$$\frac{x^{2N} + c_1 x^{2N-1} + \dots + c_{2N}}{\sqrt{A(x)}}, \quad (4)$$

где $A(x)$ – фиксированный действительный многочлен степени $2a \leq 4N$, положительный на E , – в дроби вида (3), и при $A(x) = Q^2(x)$, где Q – многочлен, эти алгебраические дроби преобразуются в рациональные функции.

В настоящей работе получены неравенства для производных функций вида (3), обобщающие тригонометрический вариант неравенства (2) (см. теорему 4), приводится описание “базового” решения соответствующей экстремальной задачи, обобщающей задачу (1) (см. теорему 2), а также аналоги этих результатов для функций вида (4) на нескольких отрезках действительной оси (см. теоремы 3 и 5).

Необходимо заметить, что мы будем рассматривать лишь производные рациональных функций с фиксированным знаменателем, не затрагивая при этом задач об оценке производных рациональных функций со свободными полюсами (укажем только несколько основных работ [8]–[10] и [11, гл. 6], [12, гл. 10]).

§ 2. Вспомогательные результаты

Получим представления дробей вида (3), наименее уклоняющихся от нуля на $\mathcal{E}$, с помощью функций Шоттки–Бернсайда. В работах [13], [14] рассматриваемые функции называются *функциями Шоттки*, в справочнике [15] – *функциями Бернсайда*. Представляется более целесообразным называть их *функциями Шоттки–Бернсайда*, поскольку В. Бернсайд [16] принадлежит важное утверждение, которое далее будет именоваться теоремой Бернсайда о представлении, позволяющее находить формулы для автоморфных функций с заданными нулями и полюсами и доказанное им с помощью не замеченной Ф. Шоттки связи теории автоморфных функций с теорией абелевых интегралов. Поскольку помимо указанных классических сочинений существуют и более современные изложения теории функций Шоттки–Бернсайда [17], [18], ограничимся кратким перечислением основных обозначений и определений.

Итак, рассмотрим фундаментальную область $\mathbb{T}$ группы Шоттки, состоящую из внешностей кругов $K_1, \dots, K_{l-1}, K'_1, \dots, K'_{l-1}$ (и окружностей $\partial K_1, \dots, \partial K_{l-1}$), расположенных вне друг друга так, что их центры находятся на мнимой оси, круги $K_1, \dots, K_{l-1}$ расположены в верхней полуплоскости, а круги $K'_1, \dots, K'_{l-1}$ симметричны $K_1, \dots, K_{l-1}$ относительно действительной оси. Соответствующая группа Шоттки $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(K_1, \dots, K_{l-1})$ является свободной группой с операцией суперпозиции и образующими $T_1, \dots, T_{l-1}$, где T_i – дробно-линейное отображение, переводящее внешность круга K'_i во внутренность круга K_i и являющееся суперпозицией инверсии относительно окружности $\partial K'_i$ и симметрии относительно действительной оси.

Предположим, что $T_0(z) \equiv z$,

$$T_i(z) = \frac{R_i^2}{z - \bar{c}_i} + c_i, \quad (5)$$

$c_{i-1} = T_i^{-1}(\infty)$, $c_{i-1j} = T_i^{-1}(T_j(\infty))$. Далее, нормированная форма отображений T_i будет иметь вид $T_i(z) = (\alpha_i z + \beta_i)/(\gamma_i z + \delta_i)$, $\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1$, $\operatorname{Re} \alpha_i > 0$. В работе [19] доказана равномерная сходимость внутри области $\mathbb{T}$ тэта-рядов Пуанкаре

$$\theta(z, a) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\gamma_i z + \delta_i)^{-2}}{\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} - a}. \quad (6)$$

Учитывая абсолютную сходимость этого ряда и бесконечных произведений, рассматриваемых далее, нумерация отображений $T_i \in \mathfrak{G}$, $i > l - 1$, произвольна. С помощью тэта-рядов в [19] были определены постоянные

$$a_{pq} = \int_{A'_q A_q} \theta(z, c_p) dz, \quad (7)$$

где интегрирование проводится по путям $A'_q A_q$, не пересекающим ни самих себя, ни друг друга, находящимся вне кругов $K_1, \dots, K_{l-1}, K'_1, \dots, K'_{l-1}$ и соединяющим точки $A_q = c_q + iR_q$ и $A'_q = \bar{c}_q - iR_q$, $p, q = 1, \dots, l - 1$.

Определим теперь функции Шоттки–Бернсайда (сохраняя обозначения В. Бернсайда):

$$\Omega(z, y) = (z - y) \prod_k' \frac{(T_k(z) - y)(T_k(y) - z)}{(T_k(z) - z)(T_k(y) - y)}, \quad (8)$$

$$\exp \Phi_k(z) = \frac{z - c_k}{z - c_{k-1}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{z - c_{j-1k}}{z - c_{j-1}}, \quad k = 1, \dots, l - 1, \quad (9)$$

где штрих у знака произведения означает, что из каждой пары взаимно обратных отображений берется лишь одно и $k > 0$. При этом функции $\Phi_k(z)$ определены однозначно с точностью до слагаемых, кратных $2\pi i$.

Отметим основные свойства функций Шоттки–Бернсайда:

$$\frac{\Omega(T_p(z), y)}{\Omega(z, y)} \equiv \varepsilon_p(\gamma_p z + \delta_p)^{-1} \exp\left\{\Phi_p(z) - \Phi_p(y) + \frac{a_{pp}}{2}\right\}, \quad (10)$$

$$\frac{\exp \Phi_i(T_p(z))}{\exp \Phi_i(z)} \equiv \exp(-a_{ip}), \quad (11)$$

где $p, i = 1, \dots, l-1$ и $\varepsilon_p = \pm 1$ определяются по группе $\mathfrak{G}$ с учетом выбранной нормированной формы образующих (см. [14, с. 360–363]).

Кроме этих свойств, приведем ряд соотношений, доказанных, как и предыдущие, в [19], [16]:

- 1) $a_{pq} = a_{qp}$ для любых $1 \leq p, q \leq l-1$;
- 2) $a_{pq} \in \mathbb{R}$ в рассматриваемом (симметрическом) случае, $1 \leq p, q \leq l-1$;
- 3) $\Omega(z, y) = -\Omega(y, z)$.

Сформулируем теорему Бернсайда о представлении, по существу содержащуюся в [16].

ТЕОРЕМА 1. *Если автоморфная относительно группы $\mathfrak{G}$ функция f имеет нули $y_1, \dots, y_m$ и полюсы $x_1, \dots, x_m$ в фундаментальной области $\mathbb{T}$, то*

$$f(z) = \text{const} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{\Omega(z, y_j)}{\Omega(z, x_j)} \frac{\Omega(z, \zeta)}{\Omega(z, x_m)},$$

где ζ – образ точки y_m при некотором отображении группы $\mathfrak{G}$.

Нам понадобятся дополнительные (легко доказываемые) свойства функций Ω и Φ .

ЛЕММА 1. *Для любых точек $z, y \in \mathbb{T}$ справедливы соотношения*

$$\exp \Phi_j(-z) = \exp(-\Phi_j(z)), \quad (12)$$

$$\exp \Phi_j(-\bar{z}) = \overline{\exp \Phi_j(z)}, \quad (13)$$

$$\Omega(-\bar{z}, y) = -\overline{\Omega(z, -\bar{y})}, \quad (14)$$

$$\Omega(-z, y) = -\Omega(z, -y). \quad (15)$$

Пусть

$$\mathcal{R}(\varphi) = \prod_{j=1}^{2l} \sin\left(\frac{\varphi - \varphi_j}{2}\right) \quad (16)$$

– тригонометрический полином порядка l , задающий систему $\mathcal{E}$, а R – алгебраический многочлен степени $2l$, получаемый из $\mathcal{R}$ по правилу

$$R(e^{i\varphi}) = e^{il\varphi} \mathcal{R}(\varphi); \quad (17)$$

здесь и далее $\sqrt{R}$ – однозначная в $\mathbb{C} \setminus \Gamma_E$, $\Gamma_E = \{z \in \mathbb{C}: z = e^{i\varphi}, \varphi \in \mathcal{E}\}$, ветвь, выделяемая равенствами

$$\arg \sqrt{R(e^{i\varphi})} = \arg(-1)^j e^{il\varphi/2}, \quad \varphi \in (\varphi_{2j}, \varphi_{2j+1}), \quad j = 1, \dots, l-1. \quad (18)$$

Далее, пусть $A(z)$ – полученный из $\mathcal{A}$, аналогично (17), алгебраический многочлен, который может быть представлен в виде

$$A(z) = c_A \prod_{j=1}^{m^*} (z - z_j)^{m_j},$$

где $c_A \in \mathbb{C}$, $z_j = r_j e^{i\xi_j}$, $j = 1, \dots, m^*$, все z_j различны, причем для $r_j \neq 1$ найдется k такое, что $r_k = 1/r_j$, $\xi_k = \xi_j$, $m_k = m_j$. Его степень равна $2a = \sum_{j=1}^{m^*} m_j$. Многочлен $A(z)$ совпадает со своим взаимным многочленом

$$A^*(z) = z^{2a} \overline{A(1/\bar{z})},$$

т. е. является самовзаимным.

Нетрудно показать, пользуясь, например, композицией дробно-линейного отображения и отображения из [20, лемма 2], что для любой системы дуг Γ_E единичной окружности найдется область $\mathbb{T}_+ = \mathbb{T} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$, которую можно конформно отобразить на $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_E$. Обозначим через $\phi(u)$ это отображение, представление которого через функции Шоттки–Бернсайда дано ниже, в лемме 2. Через v_j , ξ обозначим соответственно прообразы z_j , ∞ при отображении ϕ .

Следующая лемма, доказательство которой аналогично доказательству леммы 2 из [20], описывает отображающую функцию.

ЛЕММА 2. *Отображающая функция $z = \phi(u)$ области $\mathbb{T}_+$ на $\mathbb{C} \setminus \Gamma_E$ имеет вид*

$$\phi(u) = c_\phi \frac{\Omega(u, \bar{\xi})\Omega(u, -\bar{\xi})}{\Omega(u, \xi)\Omega(u, -\xi)}, \quad (19)$$

где $|c_\phi| = 1$, функция $A(\phi(u))$ допускает следующее представление:

$$A(\phi(u)) = \bar{c}_A \prod_{j=1}^{m^*} \left(\frac{\Omega(u, v_j)\Omega(u, -v_j)\Omega(\bar{\xi}, \xi)\Omega(\bar{\xi}, -\xi)}{\Omega(u, \xi)\Omega(u, -\xi)\Omega(\bar{\xi}, v_j)\Omega(\bar{\xi}, -v_j)} \right)^{m_j}. \quad (20)$$

Далее будем использовать также некоторые понятия теории потенциала: функцию Грина $g_E(z, a)$ области $\mathbb{C} \setminus \Gamma_E$ и сопряженную ей (вообще говоря, многозначную) функцию $h_E(z, a)$, гармоническую меру $\omega(z, G, \mathbb{C} \setminus \Gamma_E)$ множества $G \subset \Gamma_E$ в точке $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_E$ относительно области $\mathbb{C} \setminus \Gamma_E$,

$$\omega_k(z) := \omega(z, \Gamma_{E_k}, \mathbb{C} \setminus \Gamma_E) = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_{2k-1}}^{\varphi_{2k}} \frac{\partial}{\partial n} g_E(\zeta, z) |d\zeta|,$$

где n – внешняя нормаль в точке ζ , $\Gamma_{E_k} := \{\zeta : \zeta = e^{i\varphi}, \varphi \in E_k = [\varphi_{2k-1}, \varphi_{2k}]\}$, $k = 1, \dots, l$.

§3. Экстремальные рациональные тригонометрические функции

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{A}(\varphi)$ – тригонометрический полином порядка a , положительный на системе отрезков $\mathcal{E}$, $l \geq 2$.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) для некоторых $A, B \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 \neq 0$, тригонометрическая рациональная функция вида (3), наименее уклоняющаяся от нуля на $\mathcal{E}$ среди всех функций этого вида, имеет на $\mathcal{E}$ максимальное число точек уклонения, т. е.

$$\begin{aligned} \max_{\varphi \in \mathcal{E}} \left| \frac{\tau_N(\varphi)}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}} \right| &= \min_{b_i, c_i \in \mathbb{R}} \max_{\varphi \in \mathcal{E}} \left| \frac{A \cos N\varphi + B \sin N\varphi + b_1 \cos(N-1)\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_1 \sin(N-1)\varphi + \dots + b_{[N]} \cos(N-2[\frac{N}{2}])\varphi + c_{[N]} \sin(N-2[\frac{N}{2}])\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}} \right| \\ &= A_N > 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{\tau_N(\varphi_{2j})}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi_{2j})}} = \frac{\tau_N(\varphi_{2j+1})}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi_{2j+1})}}, \quad j = 1, \dots, l; \quad (22)$$

2) для каждого j , $j = 1, \dots, l$, сумма гармонических мер дуги Γ_j относительно нулей многочлена $A(z)$ является натуральным числом, точнее,

$$(2N - a)\omega_j(\infty) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m^*} m_k \omega_j(z_k) = q_{j-1}^{(N)}, \quad q_{j-1}^{(N)} \in \mathbb{N}, \quad j = 2, \dots, l; \quad (23)$$

3) существует действительный тригонометрический полином $\sigma_{N-l/2}$ порядка $N - l/2$ такой, что для некоторой постоянной $A_N > 0$

$$\tau_N^2(\varphi) - \mathcal{R}(\varphi) \sigma_{N-l/2}^2(\varphi) = A_N^2 \mathcal{A}(\varphi), \quad (24)$$

причем

$$\tau_N(\xi_j) = (\sqrt{\mathcal{R}} \sigma_{N-l/2})(\xi_j), \quad j = 1, \dots, m^*; \quad (25)$$

4) для некоторых целых чисел $q_j^{(N)}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \exp \left((2N - a)(\Phi_j(\xi) - \Phi_j(\bar{\xi})) + \sum_{k=1}^{m^*} m_k \Phi_j(v_k) \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{l-1} q_k^{(N)} a_{jk} \right) = 1, \quad j = 1, \dots, l-1. \end{aligned} \quad (26)$$

При этом $q_j^{(N)}$ равны числу нулей $\tau_N(\varphi)$ на E_{j+1} , $j = 1, \dots, l-1$, и полином $\tau_N(\varphi)$ представляется в виде

$$\tau_N(\varphi) = \frac{A_N}{2} (F_N(u) + F_N(-u)) e^{-iN\varphi}, \quad (27)$$

где $\exp(i\varphi) = \phi(u)$,

$$F_N(u) = \frac{\Omega^{2N-a}(u, \bar{\xi})}{\Omega^a(u, -\xi)\Omega^{2N}(u, \xi)} \prod_{j=1}^{m^*} \Omega^{m_j}(u, -v_j) \exp\left(\sum_{j=1}^{l-1} q_j^{(N)} \Phi_j(u)\right) \quad (28)$$

и константа A_N определяется из равенства

$$\begin{aligned} & \frac{A_N e^{i\psi} \exp \sum_{j=1}^{l-1} q_j^{(N)} \Phi_j(\xi)}{\sqrt{\bar{c}_A} c_\phi^{2N-a} \sqrt{A^2 + B^2}} \frac{\Omega^{2N}(\xi, -\xi)}{\Omega^{2N}(\xi, -\bar{\xi})} \\ & \times \prod_{j=1}^{m^*} \left(\frac{\Omega(\xi, -v_j) \Omega(\bar{\xi}, v_j) \Omega(\bar{\xi}, -v_j)}{\Omega(\xi, -\xi) \Omega(\xi, \bar{\xi}) \Omega(\xi, v_j)} \right)^{m_j/2} = 1; \end{aligned} \quad (29)$$

здесь $A = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \psi$, $B = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \psi$.

Дробь $\frac{\tau_N(\varphi)}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}$ можно также записать через плотности гармонической меры $\varpi(z, x) = \frac{\partial}{\partial x} \omega(z, \Gamma_E \cap \{e^{i\varphi} : b \leq \varphi \leq x\}, \mathbb{C} \setminus \Gamma_E)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_N(\varphi)}{A_N \sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}} &= \varepsilon \cos\left(\frac{\pi}{2} \int_{\mathcal{E} \cap [b, \varphi]} \left((2N-a)(\varpi(\infty, \zeta) + \varpi(0, \zeta)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{m^*} m_j \varpi(z_j, \zeta) \right) d\zeta \right), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 3). Поскольку

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}, \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}, \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}, \dots, \frac{\sin(N-1)\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}, \frac{\cos(N-1)\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}} \right\}$$

(для целого N) и

$$\left\{ \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}, \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}, \dots, \frac{\sin(N-1)\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}, \frac{\cos(N-1)\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}} \right\}$$

(для полуцелого N) являются чебышевскими системами на $\mathcal{E}$, то по теореме Чебышева об альтернансе получаем, что $\tau_N/\sqrt{\mathcal{A}}$ имеет не менее $2N-l$ точек альтернанса ψ_j внутри $\mathcal{E}$. Положим

$$\sigma_{N-l/2}(\varphi) = c \prod_{j=1}^{2N-l} \sin\left(\frac{\varphi - \psi_j}{2}\right)$$

(константу c подберем позже) и заметим, что $\tau_N^2/\mathcal{A} - A_N^2$ имеет двойной нуль в каждой точке ψ_j , $j = 1, \dots, 2N-l$, а также в силу (22) и теоремы об альтернансе – простой нуль в каждом нуле $\mathcal{R}(\varphi)$, откуда можно подобрать c так, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\tau_N^2(\varphi)}{\mathcal{A}(\varphi)} - A_N^2 = \frac{\mathcal{R}(\varphi) \sigma_{N-l/2}^2(\varphi)}{\mathcal{A}(\varphi)},$$

т. е. соотношение (24) доказано.

Точки ψ_j , $j = 1, \dots, 2n - l$, и φ_j , $j = 1, \dots, 2l$, являются точками уклонения $\frac{\tau_N(\varphi)}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}$ на $\mathcal{E}$, т.е. точками, в которых $\left| \frac{\tau_N(\varphi)}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}} \right|$ достигает своего максимума на $\mathcal{E}$, их число – максимально возможное, т.е. $2N + l$.

Далее, поскольку из (24) следует, что в $[b, b + 2\pi) \setminus \mathcal{E}$ справедливо неравенство $|\tau_N(\varphi)|/\sqrt{|\mathcal{A}(\varphi)|} > A_N$, то функция

$$\frac{\tau_N(\varphi) + \sqrt{\tau_N^2(\varphi) - A_N^2 \mathcal{A}(\varphi)}}{A_N \sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{F}_N(\varphi)}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}$$

будет иметь равные единице по модулю значения для $\varphi \in \mathcal{E}$, так как

$$\overline{\tau_N(\varphi) + \sqrt{\tau_N^2(\varphi) - A_N^2 \mathcal{A}(\varphi)}} = \tau_N(\varphi) - \sqrt{\tau_N^2(\varphi) - A_N^2 \mathcal{A}(\varphi)},$$

и действительные бóльшие единицы по модулю значения для $\varphi \in [b, b + 2\pi) \setminus \mathcal{E}$. Тогда функция

$$\frac{T_{2N}(z) + \sqrt{T_{2N}^2(z) - A_N^2 A(z)}}{A_N \sqrt{A(z)}} = \frac{F_N(z)}{\sqrt{A(z)}},$$

где $T_{2N}(z) \stackrel{\text{def}}{=} e^{iN\varphi} \tau_N(\varphi)$, $A(z) \stackrel{\text{def}}{=} e^{ia\varphi} \mathcal{A}(\varphi)$, $z = e^{i\varphi}$, также будет иметь равные единице по модулю значения для $z \in \Gamma_E$. Функция $F_N(z)$ – алгебраическая, и так как ее точками ветвления являются лишь точки $e^{i\varphi_j}$, $j = 1, \dots, 2l$, то она может быть записана в виде

$$P_1(z) + \sqrt{R(z)} P_2(z),$$

где P_1, P_2 – некоторые многочлены. Таким образом,

$$F_N(z) = T_{2N}(z) + \sqrt{R(z)} S_{2N-l}(z),$$

где

$$S_{2N-l}(z) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i(N-l/2)\varphi} \sigma_{N-l/2}(\varphi).$$

Отсюда видно, что функция $F_N(z)$ является однозначной мероморфной функцией на двулистной римановой поверхности $\mathcal{S}$ функции $w = \sqrt{R(z)}$ и может иметь полюс лишь в бесконечно удаленной точке одного из листов $\mathcal{S}$. Для определенности будем считать многочлен $S_{2N-l}(z)$ нормированным так, чтобы $F_N(z)$ имела полюс в ∞_1 . Поскольку изменение аргумента функции $F_N(z)$ при обходе вокруг дуги Γ_j по часовой стрелке равно изменению аргумента функции $\mathcal{F}_N(\varphi)$ при обходе вокруг отрезка $[\varphi_{2j-1}, \varphi_{2j}]$ по часовой стрелке, которое равно $-2\pi q_j^{(N)}$, где $q_j^{(N)}$ – число нулей $\tau_N(\varphi)$ на $[\varphi_{2j-1}, \varphi_{2j}]$, то общее изменение аргумента $F_N(z)$ при обходе по границе области $\mathbb{C} \setminus \Gamma_E$ равно $-4\pi N$. Отсюда по принципу аргумента $-2N = Z - P$, где Z – число нулей $F_N(z)$ в $\mathbb{C} \setminus \Gamma_E$, а P – число полюсов. Учитывая выбор ветви $\sqrt{R}$, имеем $P = 2N$, а тогда $Z = 0$. Следовательно, так как (см. (24))

$$\left(T_{2N}(z) + \sqrt{R(z)} S_{2N-l}(z) \right) \left(T_{2N}(z) - \sqrt{R(z)} S_{2N-l}(z) \right) = A_N A(z) z^{2N-a}, \quad (31)$$

то $T_{2N}(z_j) = (\sqrt{R}S_{2N-l})(z_j)$, $j = 1, \dots, m^*$, а это немедленно влечет равенство (25).

3) $\implies$ 4). Так же, как и на предыдущем шаге, имеем, переходя к переменной z , что $F_N(z) = T_{2N}(z) + \sqrt{R(z)}S_{2N-l}(z)$ – мероморфная функция на римановой поверхности $\mathcal{S}$. Как известно [21], группа Шоттки униформизирует поверхность $\mathcal{S}$ (инволюции I при этом соответствует отображение $u \rightarrow -u$), поэтому $F_N(\phi(u))$ – автоморфная функция относительно группы $\mathfrak{G}$ (далее будем ее обозначать через $F_N(u)$). То же справедливо и для функции

$$G_N(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_N^2(u)}{A(\phi(u))\phi^{2N-a}(u)}. \quad (32)$$

Используя тождество (31), получаем

$$G_N(u)G_N(-u) = A_N^2,$$

поэтому если u является нулем G_N , то $-u$ будет ее полюсом того же порядка, и наоборот (это замечание применим далее).

Перечислим нули и полюсы G_N :

- 1) точка $u = \xi$, $\phi(\xi) = \infty$, – полюс порядка $2N - a$;
 - 2) точка $u = -\bar{\xi}$, $\phi(-\bar{\xi}) = 0$, – полюс порядка $2N - a$;
 - 3) точка $u = v_j$, $\phi(v_j) = z_j$, – полюс порядка m_j , $j = 1, \dots, m^*$ (здесь используем (25));
 - 4) с учетом сделанного выше замечания из п. 1) следует, что $u = -\xi$ является нулем кратности $2N - a$;
 - 5) аналогично, $u = \bar{\xi}$ – нуль кратности $2N - a$;
 - 6) точка $u = -v_j$, $\phi(v_j) = z_j$, – нуль кратности m_j , $j = 1, \dots, m^*$.
- Отсюда

$$\begin{aligned} G_N(u) = \text{const} \prod_{j=1}^{m^*} \left(\frac{\Omega(u, -v_j)}{\Omega(u, v_j)} \right)^{m_j} & \left(\frac{\Omega(u, -\xi)\Omega(u, \bar{\xi})}{\Omega(u, \xi)\Omega(u, -\bar{\xi})} \right)^{2N-a} \\ & \times \exp \left(\sum_{j=1}^{l-1} k_j^{(N)} \Phi_j(u) \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Для функции F_N в силу соотношений (32), (33) и леммы 2 имеем

$$F_N^2(u) = \text{const} \frac{\prod_{j=1}^{m^*} \Omega^{2m_j}(u, -v_j)}{(\Omega(u, \xi)\Omega(u, -\xi))^{2a}} \left(\frac{\Omega(u, \bar{\xi})}{\Omega(u, \xi)} \right)^{4N-2a} \exp \left(\sum_{j=1}^{l-1} k_j^{(N)} \Phi_j(u) \right).$$

Отсюда, учитывая, что a – целое число и F_N – автоморфная функция, получим, что $k_j^{(N)}$ – четные и

$$F_N(u) = \text{const} \frac{\Omega^{2N-a}(u, \bar{\xi})}{\Omega^a(u, -\xi)\Omega^{2N}(u, \xi)} \prod_{j=1}^{m^*} \Omega^{m_j}(u, -v_j) \exp \left(\sum_{j=1}^{l-1} \frac{k_j^{(N)}}{2} \Phi_j(u) \right).$$

Далее, вычислив изменение аргумента функции $F_N(u)$ при обходе вокруг окружностей ∂K_j , $j = 1, \dots, l-1$, найдем $k_j^{(N)}/2 = q_j^{(N)}$, где $q_j^{(N)}$ – число нулей многочлена T_N на $\Gamma_{E_{j+1}}$, или, что то же самое, число нулей тригонометрического полинома τ_N на $[\varphi_{2j+1}, \varphi_{2j+2}]$. Тем самым получено равенство (28). Выписав условие автоморфности функции $F_N(u)$, получим (26).

4) $\implies$ 2). Поскольку (26) означает автоморфность функции $F_N(u)$, заданной формулой (28), относительно группы $\mathfrak{G}$, то $F_N(z)$ является мероморфной функцией на римановой поверхности $\mathcal{S}$, т. е. алгебраической функцией вида

$$F_N(z) = \frac{P_1(z) + \sqrt{R(z)} P_2(z)}{Q(z)},$$

где P_1 , P_2 , Q – некоторые многочлены. Анализ расположения ее нулей и полюсов показывает (после перехода к G_N по формуле (32)), что

$$Q(z) \equiv 1, \quad G_N(u)G_N(-u) = \text{const}.$$

Если $u \in \partial K_j$, то $u = T_j(\bar{u})$ и несложный подсчет (с учетом леммы 1) показывает, что (после подходящей нормировки)

$$G_N(u) = \frac{1}{G_N(\bar{u})} = \frac{1}{G_N(T_j(u))}, \quad (34)$$

т. е. $|G_N(u)| = 1$ для $u \in \partial \mathbb{T}_+$. В силу того что $G_N(u)$ не имеет нулей в $\mathbb{T}_+$, а ее полюсы суть v_k порядка m_k , $k = 1, \dots, m^*$, и ξ , $-\bar{\xi}$ порядка $2N - a$, имеем

$$G_N(u) = G^{2N-a}(z; \mathbb{C} \setminus \Gamma_E, \infty) G^{2N-a}(z; \mathbb{C} \setminus \Gamma_E, 0) \prod_{j=1}^{m^*} G^{m_j}(z; \mathbb{C} \setminus \Gamma_E, z_j), \quad (35)$$

где $z = \phi(u)$, $G(z; D, a)$ – комплексная функция Грина области D с особенностью в точке a , т. е. такая аналитическая (вообще говоря, многозначная) не обращающаяся в нуль в $D \setminus a$ функция с простым полюсом в a , что ее модуль однозначен в D и имеет предельные значения на ∂D , равные 1. Тогда из определения гармонической меры следует [22], что

$$\omega_j(a) = \frac{1}{2\pi} \text{var arg } G(z; \mathbb{C} \setminus \Gamma_E, a),$$

где z обходит вокруг дуги Γ_{E_j} , откуда с учетом смысла параметров $q_j^{(N)}$ и из инвариантности гармонической меры относительно инверсии немедленно получаем (23). Аналогично получается формула (30).

2) $\implies$ 1). Условия (23) обеспечивают однозначность функции из правой части равенства (35). Но тогда (35) определяет однозначную аналитическую функцию $G_N(u)$ в области $\mathbb{T}_+$ (здесь $z = \phi(u)$). Поскольку на $\partial \mathbb{T}_+$ выполнено равенство $|G_N(u)| = 1$, то, продолжая $G_N(u)$ по принципу симметрии Римана–Шварца и учитывая, что каждое из дробно-линейных отображений T_j^{-1} , $j = 1, \dots, l-1$,

является композицией двух симметрий: относительно действительной оси и относительно окружности ∂K_j , получим автоморфность функции G_N относительно группы $\mathfrak{G}$. Следовательно, функция G_N представляется формулой (28), причем $k_j^{(N)} = 2q_j^{(N)}$, а тогда $G_N(u)G_N(-u) = 1$. Кроме того, G_N как функция от $z = \phi(u)$ является алгебраической вида

$$\frac{P_1(z) + \sqrt{R(z)} P_2(z)}{Q(z)},$$

где P_1, P_2, Q – многочлены, и при этом обладает следующими свойствами:

- 1) $|G_N(z)| = 1$ для $z \in \Gamma_E$;
- 2) $G_N(z)$ имеет полюс порядка $2N - a$ в точках ∞_1 и 0_1 и полюсы порядков m_j в точках $z_j, j = 1, \dots, m^*$, первого листа и нули тех же порядков в соответствующих точках второго листа.

Тогда, образовав функцию

$$\frac{G_N(z) + G_N(I(z))}{2},$$

где $I(z)$ – гиперэллиптическая инволюция на $\mathcal{S}$, мы видим, что эта функция является рациональной, принимающей значения из отрезка $[-1, 1]$ для $z \in \Gamma_E$, имеющей $k_j^{(N)} + 2$ точки максимума модуля на Γ_j с полюсами в точках ∞ и 0 порядков $2N - a$ и в точках $z_j, j = 1, \dots, m^*$, порядков m_j . Следовательно,

$$\frac{1}{2}(G_N(z) + G_N(I(z))) = \frac{T_{4N}(z)}{A(z)z^{2N-a}},$$

где $T_{4N}(z)$ – некоторый многочлен степени $4N$. Поскольку число точек уклонения на каждой из дуг Γ_j четное и для каждого $\alpha \in [-1, 1]$ уравнение

$$\frac{T_{4N}(z)}{A(z)z^{2N-a}} = \alpha \tag{36}$$

не может иметь решений вне Γ_E , то, умножая $T_{4N}(z)$ на ± 1 , можно добиться того, чтобы все $(-)$ -точки уклонения, т.е. решения уравнения (36) с $\alpha = -1$, были внутренними точками дуг.

Установим самовзаимность многочлена $T_{4N}(z)$. Для этого вычислим

$$\begin{aligned} T_{4N}^*(z) &= \overline{z^{4N} T_{4N}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \\ &= z^{2N-a} \cdot \frac{1}{2} \overline{\left(G_N\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + G_N\left(I\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\right) \right)} A(z) \\ &= \frac{1}{2} \phi^{2N-a}(u) \overline{(G_N(\bar{u}) + G_N(-\bar{u}))} A(\phi(u)). \end{aligned}$$

Учитывая (34), отсюда получим $T_{4N}^*(z) = T_{4N}(z)$.

Возвращаясь к тригонометрическим полиномам, получаем наличие действительного тригонометрического полинома $\tau_{2N}(\varphi)$ такого, что функция

$$\frac{\tau_{2N}(\varphi)}{\mathcal{A}(\varphi)}$$

обладает следующими свойствами:

- 1) $\left| \frac{\tau_{2N}(\varphi)}{\mathcal{A}(\varphi)} \right| \leq 1$ для $\varphi \in \mathcal{E}$;
 - 2) уравнение $\frac{\tau_{2N}(\varphi)}{\mathcal{A}(\varphi)} = \alpha$ не имеет решений при $\varphi \in [0, 2\pi] \setminus \mathcal{E}$ для всех $\alpha \in [-1, 1]$;
 - 3) функция $\frac{\tau_{2N}(\varphi)}{\mathcal{A}(\varphi)}$ имеет на $\mathcal{E}$ максимальное число точек уклонения;
 - 4) все $(-)$ -точки уклонения являются внутренними точками $\mathcal{E}$.
- Тогда функция $1 + \frac{\tau_{2N}(\varphi)}{\mathcal{A}(\varphi)}$ будет представима в виде

$$\text{const} \frac{\prod_{j=1}^{2N} \sin^2\left(\frac{\varphi - t_j}{2}\right)}{\mathcal{A}(\varphi)},$$

а следовательно, функция

$$\frac{\tau_N(\varphi)}{A_N \sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\prod_{j=1}^{2N} \sin\left(\frac{\varphi - t_j}{2}\right)}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}$$

при подходящем выборе константы A_N будет удовлетворять требуемым свойствам.

Таким образом, эквивалентность условий 1)–4) теоремы доказана. Попутно были установлены представления (27), (28), (30). Для завершения доказательства осталось установить (29), для чего достаточно воспользоваться равенством (28) и леммой 2.

Сформулируем теперь аналог теоремы 2 для алгебраического случая. Этот результат в целом известен, хотя и содержится по частям в различных работах (его доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 2, но отличается от известных доказательств соответствующих эквивалентностей).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\rho_\nu(x)$ – положительный на системе непересекающихся отрезков $E = \bigcup_{j=1}^l [a_{2j-1}, a_{2j}] \subset \mathbb{R}$ действительный алгебраический многочлен степени ν ,

$$\rho_\nu(x) = \prod_{j=1}^{\nu^*} (x - x_j)^{\nu_j}, \quad l \geq 2.$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) рациональная функция со знаменателем $\sqrt{\rho_\nu(x)}$, наименее уклоняющаяся от нуля среди всех таких функций, имеет на E максимальное число точек уклонения, т. е.

$$\max_{x \in E} \left| \frac{P_n(x)}{\sqrt{\rho_\nu(x)}} \right| = \min_{c_i \in \mathbb{R}} \max_{x \in E} \left| \frac{x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n}{\sqrt{\rho_\nu(x)}} \right| = M_n > 0 \quad (37)$$

и

$$\frac{P_n}{\sqrt{\rho}}(a_{2j}) = \frac{P_n}{\sqrt{\rho}}(a_{2j+1}), \quad j = 1, \dots, l-1, \quad 2n \geq \nu; \quad (38)$$

2) для каждого j , $j = 1, \dots, l$, сумма гармонических мер отрезка $[a_{2j-1}, a_{2j}]$ относительно нулей многочлена ρ_ν является натуральным числом, точнее,

$$\left(n - \frac{\nu}{2}\right)\omega_j(\infty) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\nu^*} \nu_k \omega_j(x_k) = q_j, \quad q_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, l;$$

3) существует действительный алгебраический многочлен Q_{n-l} степени $n-l$ такой, что для некоторой постоянной $M_n > 0$

$$P_n^2(x) - H(x) Q_{n-l}^2(x) = M_n^2 \rho_\nu(x), \quad (39)$$

причем можно так выбрать ветвь корня, что

$$P_n(x_k) = (\sqrt{H} Q_{n-l})(x_k), \quad k = 1, \dots, \nu^*, \quad (40)$$

и $H(x) = \prod_{j=1}^{2l} (x - a_j)$;

4) справедливы равенства

$$\exp\left((2n - \nu)\Phi_p(\xi) + \sum_{k=1}^{\nu^*} \nu_k \Phi_p(w_k) - \sum_{k=1}^{l-1} q_k a_{kp}\right) = 1, \quad p = 1, \dots, l-1,$$

где q_k – некоторые целые числа, $\phi(w_j) = x_j$, $\phi(\xi) = \infty$.

При этом многочлен P_n представляется в виде

$$2P_n(x) = c_n(\Omega_n(u) + \Omega_n(-u)), \quad (41)$$

где Ω_n задается формулой

$$\Omega_n(u) = \frac{\Omega^n(u, -\xi)}{\Omega^n(u, \xi)} \prod_{j=1}^{\nu^*} \frac{\Omega^{\nu_j}(u, -w_j)}{\Omega^{\nu_j}(u, -\xi)} \exp\left(\sum_{j=1}^{l-1} q_j \Phi_j(u)\right) \quad (42)$$

и $x = \phi(u)$. Дробь

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{\rho_\nu(x)}}$$

можно также записать через плотности гармонической меры $\varpi_a(z, x) := \frac{\partial}{\partial x} \omega(z, E \cup [a_1, x], \mathbb{C} \setminus E)$ следующим образом:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{\rho_\nu(x)}} = \varepsilon M_n \cos\left(\pi \int_{a_1}^x \left(\left(n - \frac{\nu}{2}\right) \varpi_a(\infty, x) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu^*} \nu_j \varpi_a(x_j, x)\right) dx\right), \quad (43)$$

где $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

§ 4. Неравенства для производных

ТЕОРЕМА 4. Для любой рациональной тригонометрической функции вида (3), где N – полуцелое, $N \in \mathbb{N}/2$, $A, B \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 \neq 0$, – фиксированные числа, $\mathcal{A}(\varphi) = \prod_{j=1}^{m^*} \sin \frac{\varphi - \xi_j}{2}$ – фиксированный действительный тригонометрический полином порядка a , положительный на заданной конечной системе отрезков $\mathcal{E} = [\varphi_1, \varphi_2] \cup \dots \cup [\varphi_{2l-1}, \varphi_{2l}]$, $b \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{2l} < b + 2\pi$, справедливо неравенство

$$\left(\frac{r'(\varphi)}{\frac{\pi}{2}((2N - a)_+ (\varpi(\infty, \varphi) + \varpi(0, \varphi)) + \sum_{j=1}^{m^*} m_j \varpi(z_j, \varphi))} \right)^2 + r^2(\varphi) \leq \|r\|_{C(\mathcal{E})}^2, \quad (44)$$

где $z_j = e^{i\xi_j}$. При выполнении любого из эквивалентных условий теоремы 2 неравенство в (44) преобразуется в тождественное равенство для дробей вида (30).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что последнее утверждение теоремы следует из (30), для справедливости которого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (26).

Доказательство неравенства (44) будем вести от противного, т. е. предположим, что для некоторого множества $\mathcal{E}$, состоящего из l отрезков, некоторого тригонометрического полинома $\mathcal{A}$, положительного на $\mathcal{E}$, и некоторой рациональной тригонометрической функции

$$r_N(\varphi) = \frac{a_N \cos N\varphi + b_N \sin N\varphi + \dots}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}}, \quad a_N^2 + b_N^2 \neq 0, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R},$$

при $\varphi = \varphi_0 \in \mathcal{E}$ имеет место противоположное неравенство

$$\left(\frac{r'_N(\varphi_0)}{\mathfrak{H}_N(\varphi_0, \mathcal{A}, \mathcal{E})} \right)^2 + r_N^2(\varphi_0) > \|r_N\|_{C(\mathcal{E})}^2, \quad (45)$$

где

$$\mathfrak{H}_N(\varphi, \mathcal{A}, \mathcal{E}) = \frac{\pi}{2} \left((2N - a)_+ (\varpi(\infty, \varphi) + \varpi(0, \varphi)) + \sum_{j=1}^{m^*} m_j \varpi(z_j, \varphi) \right).$$

Так как $\mathfrak{H}_N(\varphi, \mathcal{A}, \mathcal{E}) = \infty$ для $\varphi = \varphi_j$, $j = 1, \dots, 2l$, то φ_0 – внутренняя точка $\mathcal{E}$.

Далее, без ограничения общности можно считать, что $\max(N, a) \geq l - 1$ и среди корней полинома $\mathcal{A}$ имеются по крайней мере $l - 1$ различных и не являющихся попарно комплексно-сопряженными.

В самом деле, если $0 < a < l - 1$, то достаточно рассмотреть дробь

$$r_{N,k}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} T_k \left(\frac{r_N(\varphi)}{\|r_N\|} \right),$$

где $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ – многочлен Чебышева первого рода и $k > (l-1)/a$ такое, что

$$\frac{1}{\pi} k \arccos \frac{r_N(\varphi_0)}{\|r_N\|} \notin \mathbb{Z}. \quad (46)$$

Для этой дроби (поскольку она имеет знаменатель $\sqrt{\mathcal{A}^k(\varphi)}$, а ее числитель – тригонометрический полином порядка Nk) выполнено

$$\begin{aligned} \frac{(r'_{N,k}(\varphi_0))^2}{\mathfrak{H}_{Nk}^2(\varphi_0, \mathcal{A}^k, \mathcal{E})} + r_{N,k}^2(\varphi_0) &= \frac{\sin^2\left(k \arccos \frac{r_N(\varphi_0)}{\|r_N\|}\right)}{k^2 \mathfrak{H}_{Nk}^2(\varphi_0, \mathcal{A}, \mathcal{E})} \frac{k^2 (r'_{N,k}(\varphi_0))^2}{\|r_N\|^2 - r_{N,k}^2(\varphi_0)} \\ &\quad + \cos^2\left(k \arccos \frac{r_N(\varphi_0)}{\|r_N\|}\right). \end{aligned}$$

В силу (45), (46) это выражение больше, чем единица, т. е.

$$\left(\frac{r'_{N,k}(\varphi_0)}{\mathfrak{H}_{Nk}(\varphi_0, \mathcal{A}^k, \mathcal{E})}\right)^2 + r_{N,k}^2(\varphi_0) > 1 = \|r_{N,k}\|_{C(\mathcal{E})}^2. \quad (47)$$

Кроме того, если неравенство (45) справедливо для дроби со знаменателем $\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}$, то оно справедливо и для дроби $\tilde{r}_N(\varphi) = r_N(\varphi) \sqrt{\mathcal{A}(\varphi)/\tilde{\mathcal{A}}(\varphi)}$, где $\tilde{\mathcal{A}}$ – произвольный тригонометрический полином такой, что $\|\mathcal{A} - \tilde{\mathcal{A}}\|_{\mathbb{R}} < \varepsilon$, и ε – достаточно малое положительное число (в частности, можно считать, что $\tilde{\mathcal{A}}$ имеет по крайней мере $l-1$ различных не являющихся взаимно комплексно-сопряженными корней). Здесь следует использовать возможность заменить “нуль” полинома $\mathcal{A}$ в бесконечности (соответствующий случаю $2N > a$) на нули в точках $\pm Mi$, где M достаточно велико. Тем самым $\mathcal{A}$ умножается на множитель вида

$$\frac{4}{e^M} \sin \frac{\varphi - Mi}{2} \sin \frac{\varphi + Mi}{2},$$

стремящийся к единице при $M \rightarrow +\infty$ равномерно на $\mathbb{R}$.

Итак, можно считать, что $\max(N, a) \geq l-1$ и среди корней полинома $\mathcal{A}$ имеются по крайней мере $l-1$ различных не являющихся комплексно-сопряженными.

Поскольку функции Φ_p являются не чем иным, как абелевыми интегралами первого рода, то определитель

$$I = \begin{vmatrix} \Phi'_1(v_1) & \dots & \Phi'_1(v_{l-1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Phi'_{l-1}(v_1) & \dots & \Phi'_{l-1}(v_{l-1}) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, если только среди точек $v_1, \dots, v_{l-1} \in \mathbb{T}_+$ не существует совпадающих. В самом деле, рассматриваемый определитель состоит из значений линейно независимых абелевых дифференциалов первого рода на поверхности $\mathcal{S}$ в точках $\phi(v_1), \dots, \phi(v_{l-1})$ [16, с. 66]. Поскольку стандартный базис пространства таких дифференциалов на $\mathcal{S}$ состоит из дифференциалов вида $z^k dz / \sqrt{R(z)}$,

$k = 0, \dots, l-2$, то линейным преобразованием определитель I преобразуется в точках $\phi(v_1), \dots, \phi(v_{l-1})$ в определитель Вандермонда, отличный от нуля. Таким образом, отображение

$$(v_1, \dots, v_{l-1}) \mapsto (2N-a)_+(\Phi_p(\xi) - \Phi_p(\bar{\xi})) + \sum_{k=1}^{2a} \Phi_p(v_k)$$

несингулярно в точке $(v_1, \dots, v_{l-1})$, а значит, можно в произвольной окрестности точки $(v_1, \dots, v_{l-1})$ найти точку $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{l-1})$ такую, чтобы (считая остальные $\tilde{v}_k$ равными v_k или для $v_k = -\bar{v}_j$, $1 \leq j \leq l-1$, полагая $\tilde{v}_k = -\bar{v}_j$)

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{p=1}^{l-1} a'_{pj} \left((2N-a)_+(\Phi_p(\xi) - \Phi_p(\bar{\xi})) + \sum_{k=1}^{2a} \Phi_p(\tilde{v}_k) \right) \right) \in \mathbb{Q}, \quad (48)$$

$$j = 1, \dots, l-1,$$

где $(a'_{pj})_{p=1, j=1}^{l-1, l-1}$ — матрица, обратная к матрице периодов $A = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{l-1, l-1}$ римановой поверхности $\mathcal{S}$. Изменяя при необходимости φ_0 , можно добиться того, чтобы

$$\frac{1}{\pi} \arccos \frac{\tilde{r}_N(\varphi_0)}{\|\tilde{r}_N\|} \notin \mathbb{Q}, \quad (49)$$

где $\tilde{r}_N(\varphi) = r_N(\varphi) \sqrt{\mathcal{A}(\varphi)/\tilde{\mathcal{A}}(\varphi)}$ и $\tilde{\mathcal{A}}(\varphi) = \prod_{j=1}^{2a} \sin \frac{\varphi - \phi(\tilde{v}_j)}{2}$. Из (45), (49) и замечания, сделанного после (47), следует, как и выше, что найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что “рациональная тригонометрическая” функция

$$r_{Nn}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \cos \left(n \arccos \frac{\tilde{r}_N(\varphi_0)}{\|\tilde{r}_N\|} \right)$$

со знаменателем $\sqrt{\tilde{\mathcal{A}}^n(\varphi)}$ удовлетворяет неравенству

$$\left(\frac{r'_{Nn}(\varphi_0)}{n\mathfrak{H}_N(\varphi_0, \tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{E})} \right)^2 + r_{Nn}^2(\varphi_0) > \|r_{Nn}\|_{C(\mathcal{E})}^2, \quad (50)$$

причем $\|r_{Nn}\|_{C(\mathcal{E})} = 1$ и, кроме того, в силу (48) и теоремы 2 существует дробь $\tau_{Nn}(\varphi)$ со знаменателем $\sqrt{\tilde{\mathcal{A}}^n(\varphi)}$ и числителем порядка $n \max(N, a/2)$, наименее уклоняющаяся от нуля на $\mathcal{E}$ и имеющая максимальное число точек уклонения, а значит, для нее выполнено тождество

$$\left(\frac{\tau'_{Nn}(\varphi)}{n\mathfrak{H}_N(\varphi, \tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{E})} \right)^2 + \tau_{Nn}^2(\varphi) \equiv 1 = \|\tau_{Nn}\|_{C(\mathcal{E})}^2. \quad (51)$$

Теперь, изменяя при необходимости φ_0 и числитель дроби r_{Nn} , можно считать, что

$$\frac{1}{2\pi} \left(\arccos \tau_{Nn}(\varphi_0) - \sigma \arccos \frac{r_{Nn}(\varphi_0)}{\|r_{Nn}\|} \right) \in \mathbb{Q}, \quad (52)$$

$$\frac{1}{\pi} \arccos \frac{r_{Nn}(\varphi_0)}{\|r_{Nn}\|} \notin \mathbb{Q}, \quad (53)$$

где $\sigma = \text{sign} \frac{\tau'_{Nn}(\varphi_0)}{r'_{Nn}(\varphi_0)} \neq 0$, причем для измененной дроби r_{Nn} в точке φ_0 все еще справедливо неравенство (50).

Тогда найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что функции

$$\tau(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} T_m(\tau_{Nn}(\varphi)) \quad \text{и} \quad r(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} T_m(r_{Nn}(\varphi)/\|r_{Nn}\|)$$

будут рациональными тригонометрическими со знаменателями $\sqrt{\tilde{\mathcal{A}}^{nm}(\varphi)}$, причем в силу (52)

$$\tau(\varphi_0) = r(\varphi_0), \quad (54)$$

$$\text{sign } \tau'(\varphi_0) = \text{sign } r'(\varphi_0). \quad (55)$$

Кроме того, из тождества (51) имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau'(\varphi)}{\mathfrak{H}_{Nnm}(\varphi, \tilde{\mathcal{A}}^{nm}, \mathcal{E})} \right)^2 + \tau^2(\varphi) &= \frac{\sin^2(m \arccos \tau_{Nn}(\varphi))}{n^2 m^2 \mathfrak{H}_N^2(\varphi, \tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{E})} \frac{m^2 (\tau'_{Nn}(\varphi))^2}{(1 - \tau_{Nn}(\varphi))} \\ &+ \cos^2(m \arccos \tau_{Nn}(\varphi)) \equiv 1 = \|\tau\|_{C(\mathcal{E})}^2, \end{aligned} \quad (56)$$

а используя (50), (53), как и при выводе (46), получаем

$$\left(\frac{r'(\varphi_0)}{mn \mathfrak{H}_N(\varphi_0, \tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{E})} \right)^2 + r^2(\varphi_0) > 1, \quad (57)$$

причем $\|r\|_{C(\mathcal{E})}^2 = 1$.

Умножая $r(\varphi)$ на константу c , $0 < c < 1$, можно добиться того, чтобы неравенство (57) выполнялось и для рациональной тригонометрической функции $cr(\varphi)$, где c – любое достаточно мало отличающееся от единицы число, и для любых φ , достаточно мало отличающихся от φ_0 . Из соотношений (54), (56) и (57) следует, что $\tau'(\varphi_0) - r'(\varphi_0) \neq 0$, и, значит, по теореме о неявной функции уравнение $\tau(\varphi) - cr(\varphi) = 0$ для всех c из достаточно малой левосторонней окрестности единицы имеет решение $\varphi = \varphi_c$. Тогда выполнены следующие соотношения:

$$\|\tau\|_{\mathcal{E}} = 1, \quad \|cr\|_{\mathcal{E}} < 1, \quad (58)$$

$$\left(\frac{cr'(\varphi_c)}{mn \mathfrak{H}_N(\varphi_c, \tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{E})} \right)^2 + c^2 r^2(\varphi_c) > 1, \quad (59)$$

$$\left(\frac{\tau'(\varphi_c)}{mn \mathfrak{H}_N(\varphi_c, \tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{E})} \right)^2 + \tau^2(\varphi_c) = 1, \quad (60)$$

и с учетом (55) имеем

$$cr(\varphi_c) = \tau(\varphi_c), \quad \text{sign } cr'(\varphi_c) = \text{sign } \tau'(\varphi_c). \quad (61)$$

Из соотношений (59), (60) следует, что

$$|cr'(\varphi_c)| > |\tau'(\varphi_c)|, \quad (62)$$

а тогда формулы (58), (61) и (62) вместе с тем, что τ имеет максимальное, т.е. $2mn \max(N, a/2) + l$, число точек уклонения, влекут, что рациональная тригонометрическая функция $\tau - cr$ со знаменателем $\sqrt{\tilde{\mathcal{A}}^{mn}(\varphi)}$ и числителем порядка не выше $mn \max(N, a/2)$ имеет (с учетом кратностей) не менее $2mn \max(N, a/2) + 2$ нулей на $\mathcal{E}$, что невозможно. Теорема доказана.

Аналогично доказывается соответствующая оценка в алгебраическом случае.

ТЕОРЕМА 5. *Для любой алгебраической дроби*

$$r(x) = \frac{x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}{\sqrt{\rho_\nu(x)}},$$

где $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, $\rho_\nu(x) = \prod_{j=1}^{\nu^*} (x - x_j)^{\nu_j}$ — действительный многочлен степени ν , положительный на $E = [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{2l-1}, a_{2l}] \subset \mathbb{R}$, $a_1 < \dots < a_{2l}$, справедливо неравенство

$$\left(\frac{r'(x)}{\frac{\pi}{2}((2n - \nu)_+ \varpi_a(\infty, x) + \sum_{j=1}^{\nu^*} \nu_j \varpi_a(x_j, x))} \right)^2 + r^2(x) \leq \|r\|_{C(E)}. \quad (63)$$

§5. Замечания по истории вопроса

Задача нахождения полиномов и рациональных функций с заданным знаменателем, наименее уклоняющихся от нуля на отрезке действительной оси, была поставлена и решена П. Л. Чебышевым в 1853 г., и именно с нее началась теория приближений как математическая дисциплина. Решение этой задачи может быть получено вследствие теоремы 3 при $l = 1$ и четных ν_j , так как все условия теоремы 3 выполнены автоматически и выражение (43) может быть преобразовано либо к форме Чебышева, либо к форме А. А. Маркова, который нашел также решение более общей задачи (случай $l = 1$ и произвольного ρ_ν в теореме 3). В связи с этим соответствующие экстремальные алгебраические дроби называют *дробями Чебышева–Маркова*. Здесь необходимо отметить, что, хотя многочлены Чебышева получили очень большую известность из-за многочисленных теоретических и практических приложений (см., например, указанные во введении книги), их рациональный аналог известен гораздо меньше. Более того, как было замечено С. Н. Бернштейном, числители дробей Чебышева–Маркова являются ортогональными многочленами относительно соответствующих весов, и поскольку эти многочлены были использованы им и Г. Сегё для создания общей теории ортогональных на отрезке многочленов, в работах по ортогональным многочленам их принято называть *многочленами Бернштейна–Сегё*. Встречается также название ЧМБС-*многочлены* (см. [3], там же указаны другие работы В. И. Лебедева, относящиеся к этому кругу проблем, а также [23]). Необходимо отметить, что

в западной литературе работа А. А. Маркова цитируется редко и его результат неоднократно переоткрывался (см. [24], [25] и др.).

Случай $l = 2$, $\rho_\nu = 1$ из теоремы 3 рассмотрен Н. И. Ахиезером [13]. Аналог представления (41), (42), построенный им, использует эллиптические функции, и решение совпадает с многочленами Золотарева (см., например, [26], где обсуждаются также и другие близкие вопросы). Приводя полное решение этой задачи (т. е. без каких-либо ограничений на систему отрезков), Н. И. Ахиезер был вынужден рассматривать по сути случай трех отрезков, в связи с чем он впервые в задачах подобного рода использовал функции Шоттки. Эквивалентность условий 1) и 3) здесь аналогична отмеченной С. Н. Бернштейном связи с ортогональными многочленами, она была установлена в [27], [28]. Эквивалентность 1) и 4) (в терминах эллиптических функций) установлена (в различной форме) в [29], [30]. Один частный случай (симметричные отрезки, $\rho_\nu(x) = a^2 - x^2$) рассматривался в [31].

Для $l > 2$ первые явные решения задачи п. 1) теоремы 3 приведены в [32]. Эквивалентность 1) и 3) установлена в [33], для $\rho_\nu \equiv 1$ эквивалентность 1), 3) и 2) следует из [34], [35], эквивалентность 1) и 4) доказана в [36, следствие 2]. (Пользуясь случаем, отметим, что в формулировке этого следствия имеется опечатка: между формулами (60) и (61) должно быть $m_1, \dots, m_{l-1} \in 2\mathbb{Z}$.) Другие эквивалентные характеристики приведены (для $\rho_\nu \equiv 1$) в [37], в общем случае – в [38], [33], [20], [39], укажем также обзоры [40], [41]. Для $\rho_\nu \equiv 1$ уравнение Абеля (39) исследовано в [42], [46], различные алгоритмы вычисления чебышевских многочленов приводятся в [18], [47]–[49]. Представление (43) может быть получено из [43]–[45] и отмеченной выше связи с ортогональными многочленами [33].

Заметим, что задача нахождения многочленов или рациональных функций с заданным знаменателем, наименее уклоняющихся от нуля на нескольких отрезках, до сих пор не имеет удовлетворительного для практического использования решения. Основная проблема здесь состоит в нахождении того множества, на котором искомая функция будет наименее уклоняться от нуля с максимальным числом точек уклонения. Для $l = 2$ и $\rho_\nu \equiv 1$ полное описание решения приведено в [13], [50], при четных ν_j – в [29]. При $l > 2$ и четных ν_j полное описание приведено в [39], а при $\rho_\nu(x) > 0$ для $x \in [a_1, a_{2l}]$ – в [20], но это описание практически малоприменимо. Существенное продвижение в эффективизации данного подхода получено в [18], хотя этот результат применим лишь при наличии дополнительной информации об искомом решении. Отметим также интересную работу [22], посвященную изучению асимптотик многочленов Чебышева для общих компактов комплексной плоскости.

Тригонометрический аналог дробей Чебышева–Маркова был найден впервые, по-видимому, в [51] (для $l = 1$ и $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$), т. е. в результате предельного перехода при решении задачи, рассматриваемой в теореме 2. Случай для $l = 2$, $\mathcal{A} \equiv 1$ и множества $\mathcal{E}$, симметрично расположенного относительно 0, рассматривался в [52] и (для использования в хаусдорфовой аппроксимации) в [53]. Эквивалентность 1)–3) в теореме 2 для $\mathcal{A} \equiv 1$ была установлена (другим способом) в [73], [74]. Следует отметить, что для несимметрично расположенных отрезков формальное сведение к алгебраическому случаю с помощью обычно применяемой замены $\cos \varphi = x$ невозможно.

Из теоремы 4 следует аналог неравенства Бернштейна–Сегё для тригонометрических полиномов:

$$n^2 T_n^2(\varphi) + T_n'(\varphi)^2 \leq \|T_n\|_{C(\mathbb{R})}$$

(см. [54]–[56]); достаточно положить $l = 1$, $\mathcal{A} \equiv 1$ и перейти к пределу $\varphi_2 \rightarrow \varphi_1 + 2\pi$. После того же предельного перехода из теоремы 4 в случае $l = 1$ и произвольного $\mathcal{A}$ получаем неравенство из [57, теорема 3.1]. Из теоремы 4 нетрудно получить аналог неравенства Бернштейна для тригонометрических полиномов, частными случаями которого являются неравенства В. С. Виденского [58], [59] для оценки производных тригонометрических полиномов целого и полуцелого порядков на отрезке короче периода (первая оценка такого рода принадлежит И. И. Привалову [60]). Заметим также, что в последнее время оживился интерес к уточнению и обобщению этого неравенства (см. [61], [62]).

Алгебраический случай (теорема 5) изучался значительно интенсивней. Для $l = 1$, $\rho \equiv 1$ неравенство (63) преобразуется в известное неравенство Бернштейна–Сегё, упомянутое выше, из которого, в свою очередь, следует классическое неравенство Бернштейна

$$|P_n'(x)|\sqrt{1-x^2} \leq n\|P_n\|_{C([-1,1])}.$$

В случае $l = 1$ и произвольного ρ_ν из теоремы 5 следует неравенство, принадлежащее В. Н. Русаку [63, теорема 1], [5], позже переоткрытое в [57] и уточненное в [64] (см. [2]):

$$|r_n'(x)| \leq \sqrt{1-r_n^2(x)} \frac{|\lambda_n(x)|}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1), \quad (64)$$

где $r_n(x) = \frac{p_n(x)}{\sqrt{\prod_{k=1}^{2n}(1+a_k x)}}$; a_k – либо действительные и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно-сопряженные; p_n – алгебраический многочлен степени не выше n с действительными коэффициентами; $\lambda_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}$. Тот факт, что (64) следует из (63), проще всего вывести, если сравнить два представления дробей Чебышева–Маркова со знаменателем $\sqrt{\rho_\nu(x)} = \sqrt{\prod_{k=1}^{2n}(1+a_k x)}$ и числителем степени n , наименее уклоняющихся от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

Первое представление, найденное А. А. Марковым, имеет вид (см. [5])

$$\frac{p_n(x)}{\sqrt{\rho_\nu(x)}} = M_n \cos \varphi_{2n}(x),$$

где

$$\varphi_{2n}'(x) = -\frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \varphi_{2n}(1) = 0.$$

Второе представление, следующее из (43), таково:

$$\frac{p_n(x)}{\sqrt{\rho_\nu(x)}} = \varepsilon M_n \cos \frac{\pi}{2} \int_{-1}^x \sum_{j=1}^{2n} \varpi_a(x, x_j),$$

где $x = -1/a_j$, $j = 1, \dots, 2n$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Следовательно, для $E = [-1, 1]$

$$\left| \frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right| = \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^{2n} \varpi_a(x, x_j),$$

а тогда импликация (63) $\Rightarrow$ (64) очевидна. Из неравенства Русака следует оценка бернштейновского типа, справедливая и для любых комплекснозначных числителей и впервые установленная в [65] (уточнения этих неравенств были недавно получены в [6]).

При $l > 1$, $\rho_\nu \equiv 1$ из теоремы 5 следует неравенство В. Тотика [7, теорема 3.1] (необходимо учесть, что плотность равновесной меры $\omega_E(x)$ совпадает с $\varpi_a(\infty, x)$ [66, теорема 4.3.14])

$$\left(\frac{|P'_n(x)|}{\pi \omega_E(x)} \right)^2 + n^2 P_n^2(x) \leq n^2 \|P_n\|_{C(E)}^2, \quad x \in E, \quad (65)$$

где P_n – произвольный алгебраический многочлен степени не выше n . В свою очередь, соответствующее неравенство бернштейновского типа известно достаточно давно даже в более общем случае целых функций экспоненциального типа [67]. Заметим также (см. [68]), что неравенство (65) является частным случаем неравенства М. Барана [69, теорема 1.3], справедливого для компактов в $\mathbb{R}^n$.

В общем случае из теоремы 5 также нетрудно получить оценку бернштейновского типа, которая, как нетрудно видеть при применении известного метода (см., например, [5, гл. II.2]), справедлива и для комплекснозначных числителей. Отметим, что ранее автором [70] была получена более слабая оценка такого типа для $l = 2$ при дополнительных условиях на нули и полюсы рациональной функции, эта оценка являлась обобщением одного результата из [71].

Теорема 4 была анонсирована в [72].

Автор благодарен А. И. Аптекареву и другим участникам семинара под управлением академика А. А. Гончара в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН за обсуждение результатов, Ф. Пехерсторферу и университету им. И. Кеплера, г. Линц, Австрия, за предоставленную возможность ознакомиться со многими из упомянутых работ и рецензенту за подробный отзыв, способствовавший улучшению изложения и исправлению недочетов первоначального варианта настоящей работы.

Список литературы

1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. 2-е изд. М.: Наука, 1965.
2. *Borwein P., Erdélyi T.* Polynomials and polynomial inequalities. N. Y.: Springer, 1995.
3. *Лебедев В. И.* Функциональный анализ и вычислительная математика. 4-е изд. М.: Физматлит, 2000.
4. *Milovanović G. V., Mitrinović, Rassias Th. M.* Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific, 1994.
5. *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: Изд-во БГУ, 1979.
6. *Дубинин В. Н.* О применении конформных отображений в неравенствах для рациональных функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 2. С. 67–80.

7. Totik V. Polynomial inverse images and polynomial inequalities // Acta Math. 2001. V. 187. P. 139–160.
8. Долженко Е. П. Оценки производных рациональных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1963. Т. 27. № 1. С. 9–28.
9. Гончар А. А. Обратные теоремы о наилучших приближениях рациональными функциями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25. № 2. С. 347–356.
10. Данченко В. И. Некоторые интегральные оценки производных рациональных функций на множествах с ограниченной плотностью // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 10. С. 33–52.
11. Petrushev P. P., Popov V. A. Rational approximation of real functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
12. Lorentz G. G., Golitschek M., Makovoz Y. Construtive approximation: advanced problems. Berlin: Springer, 1996.
13. Akhiezer N. I. Über einige Funktionen, die in gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen // Bull. Soc. Phys.-Mathem. Kazan. Ser. 3. 1928. V. 3. № 2. P. 1–69.
14. Baker H. Abel's theorem and the allied theory. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1897.
15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.
16. Burnside W. Further note on automorphic functions // Proc. London Math. Soc. 1892. V. 23. P. 281–295.
17. Belokolos E. D., Bobenko A. I., Enol'skii V. Z., Its A. R., Matveev V. B. Algebro-geometric approach to nonlinear integrable equations. Berlin et al.: Springer, 1994.
18. Богатырев А. Б. Эффективное вычисление многочленов Чебышева на нескольких отрезках // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 11. С. 15–50.
19. Burnside W. On a class of automorphic functions // Proc. London Math. Soc. 1892. V. 23. P. 49–88.
20. Лукашов А. Л. Алгебраические дроби Чебышева–Маркова на нескольких отрезках // Analysis Mathem. 1998. Т. 24. С. 111–130.
21. Форд Л. Р. Автоморфные функции. М.–Л.: Гостехиздат, 1936.
22. Widom H. Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane // Adv. Math. 1969. V. 3. P. 127–232.
23. Лебедев В. И. Об одной универсальной формуле для фазовых функций экстремальных ЧМБС-многочленов родов 1–4 // Докл. РАН. 2003. Т. 389. С. 23–26.
24. Darlington S. Analytical approximations to approximations in the Chebyshev sense // Bell System Techn. J. 1970. V. 49. P. 1–32.
25. Pierre R. On explicit decomposition for positive polynomials on $[-1, +1]$ with applications to extremal problems // Can. J. Math. 1984. V. 36. P. 1031–1045.
26. Lebedev V. I. Zolotarev polynomials and extremum problems // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1994. V. 9. P. 231–263.
27. Peherstorfer F. Orthogonal- and Chebyshev polynomials on two intervals // Acta Math. Hungar. 1990. V. 55. P. 245–278.
28. Седин М. Л., Юдицкий П. М. Алгебраическое решение задач Е. И. Золотарева и Н. И. Ахиезера о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 56. Харьков: Изд-во ХГУ, 1991. С. 56–64.
29. Лукашов А. Л. О задаче Чебышева–Маркова на двух отрезках. Деп. в ВИНТИ 01.11.1989, № 6615-B89. Саратов. ун-т.
30. Peherstorfer F. Elliptic orthogonal and extremal polynomials // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1995. V. 70. P. 605–624.
31. Levy R. Generalized rational function approximation in finite intervals using Zolotarev functions // IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1970. V. 18. P. 1052–1064.
32. Лебедев В. И. Об итерационных методах решения операторных уравнений со спектром, лежащим на нескольких отрезках // ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9. С. 1247–1252.
33. Peherstorfer F. Orthogonal and extremal polynomials on several intervals // J. Comp. Appl. Math. 1993. V. 48. P. 187–205.

34. *Peherstorfer F.* On Bernstein–Szegő orthogonal polynomials on several intervals. II. Orthogonal polynomials with periodic recurrence coefficients // *J. Approx. Theory.* 1991. V. 64. P. 123–161.
35. *Антоненков А. И.* Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Тода // *Матем. сб.* 1984. Т. 125(167). № 2. С. 231–258.
36. *Lukashov A. L., Peherstorfer F.* Automorphic orthogonal and extremal polynomials // *Can. J. Mathem.* 2003. V. 55. P. 576–608.
37. *Содин М. Л., Юдицкий П. М.* Функции, наименее уклоняющиеся от нуля на замкнутых подмножествах вещественной оси // *Алгебра и анализ.* 1992. Т. 4. № 2. С. 1–62.
38. *Krein M. G., Levin B. Ya., Nudel'man A. A.* On special representation of polynomials that are positive on a system of closed intervals, and some applications // *Functional Analysis, Optimisation, and Mathematical Economics: a collection of papers dedicated to the memory of Leonid Vital'evich Kantorovich.* N. Y.: Oxford Univ. Press, 1990. P. 56–114.
39. *Lukashov A. L.* On Chebyshev–Markov rational fractions over several intervals // *J. Approx. Theory.* 1998. V. 95. P. 333–352.
40. *Lebedev V. I.* Extremal polynomials with restrictions and optimal algorithms // *Advanced Mathematics: Computations and Applications.* Novosibirsk: NCC Publ., 1995. P. 491–502.
41. *Peherstorfer F.* Minimal polynomials on several intervals with respect to the maximum-norm – a survey // *Complex methods in approximation theory.* Alméria: Univ. Alméria, 1997. P. 137–159.
42. *Малышев В. А.* Уравнение Абеля // *Алгебра и анализ.* 2001. Т. 13. № 6. С. 1–55.
43. *Nuttall J., Singh S. R.* Orthogonal polynomials and Padé approximations associated with a system of arcs // *J. Approx. Theory.* 1977. V. 21. P. 1–42.
44. *Peherstorfer F.* Zeros of polynomials orthogonal on several intervals // *Int. Math. Res. Not.* 2003. № 7. P. 361–385.
45. *Суетин С. П.* О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций // *Матем. сб.* 2000. Т. 191. № 9. С. 81–114.
46. *Пастор А. В.* Обобщенные полиномы Чебышева и уравнение Пелля–Абеля // *Фундамент. и прикл. матем.* 2001. Т. 7. № 4. С. 1123–1145.
47. *Peherstorfer F., Schiefermayr K.* Description of extremal polynomials on several intervals and their computation. I, II // *Acta Math. Hungar.* 1999. V. 83. P. 27–58, 59–83.
48. *Емельянова О. В., Плешаков М. Г., Сидоров С. П.* Генетический алгоритм для поиска многочлена наилучшего приближения на компакте // *Компьютерные науки и информационные технологии. Тез. докл. междунар. конф. посв. памяти проф. А. М. Богомолова.* Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. С. 27–28.
49. *Чумак А. А.* Построение полинома наименьшего отклонения для аппроксимаций со значительным весом // *ЖВМ и МФ.* 2002. Т. 42. № 2. С. 142–154.
50. *Achyeser N. I.* Über einige Funktionen, welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen. I, II, III // *Изв. АН СССР. Отд. матем. и естеств. наук.* 1932. № 9. С. 1163–1202; 1933. № 3, 4. С. 309–344; 449–536.
51. *Szegő G.* On a problem of the best approximation // *Abh. Math. Univ.* V. 27. Hamburg, 1964. P. 193–198.
52. *Крупицкий Э. И.* Об одном классе полиномов, наименее уклоняющихся от нуля на двух интервалах // *ДАН СССР.* 1961. Т. 138. № 3. С. 533–536.
53. *Петухов А. П.* Об ужках и приближении разрывных функций в метрике Хаусдорфа // *Anal. Math.* 1985. V. 11. P. 55–73.
54. *Szegő G.* Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // *Schriften Königsberger Gelehrte Ges. Naturwiss. Kl.* 1928. B. 5. S. 59–70.
55. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени: Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
56. *Van der Corput J. G., Schaake G.* Ungleichungen für Polynome und trigonometrische Polynome // *Comp. Math.* 1935. V. 2. P. 321–361.

57. *Borwein P. B., Erdélyi T., Zhang J.* Chebyshev polynomials and Markov–Bernstein type inequalities for rational spaces // J. London Math. Soc. 1994. V. 50. P. 501–519.
58. *Виденский В. С.* Экстремальные оценки производной тригонометрического полинома на отрезке, меньшем чем период // ДАН СССР. 1960. Т. 130. № 1. С. 13–16.
59. *Виденский В. С.* О тригонометрических многочленах полуполого порядка // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. наук. 1964. Т. 17. № 3. С. 133–140.
60. *Привалов И. И.* Интеграл Cauchy // Изв. Саратов. ун-та. Физ.-матем. ф-т. 1918. № 1. С. 1–94.
61. *Скалыга В. И.* Многомерные аналоги неравенств В. А. Маркова и С. Н. Бернштейна // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 6. С. 129–172.
62. *Kobindarajah C. K., Lubinsky D. S.* L_p Markov–Bernstein inequalities on all arcs of the circle // J. Approxim. Theory. 2002. V. 116. P. 343–368.
63. *Русаков В. Н.* Об оценках производных алгебраических дробей на конечном отрезке // Докл. АН БССР. 1976. Т. 20. № 1. С. 5–7.
64. *Borwein P. B., Erdélyi T.* Sharp extensions of Bernstein’s inequality to rational spaces // Mathematika. 1996. V. 43. P. 413–423.
65. *Виденский В. С.* Некоторые оценки производных от рациональных дробей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1962. Т. 26. № 2. С. 415–426.
66. *Ransford T.* Potential theory in the complex plane. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
67. *Ахиезер Н. И., Левин Б. Я.* Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производных от целых функций // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного: Сб. статей под ред. А. И. Маркушевича. М.: ГИФМЛ, 1960. С. 111–165.
68. *Totik V.* How to prove results for polynomials on several intervals? // Approximation Theory: a volume dedicated to B. Sendov. Sofia: DARBA, 2002. P. 397–410.
69. *Baran M.* Complex equilibrium measure and Bernstein type theorems for compact sets in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. P. 485–494.
70. *Лукашов А. Л.* Неравенство типа Бернштейна для производных рациональных функций на двух отрезках // Матем. заметки. 1999. Т. 66. С. 508–514.
71. *Borwein P. B.* Markov’s and Bernstein’s inequalities on disjoint intervals // Can. J. Math. 1981. V. 33. № 1. P. 201–209.
72. *Лукашов А. Л.* Обобщение неравенств Бернштейна–Сегё для производных рациональных тригонометрических функций на нескольких отрезках // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тез. докл. 11-й Саратовской зимней школы, посвященной памяти выдающихся профессоров МГУ Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова. Саратов: Изд-во ГосУНЦ “Колледж”, 2002. С. 124–125.
73. *Peherstorfer F., Steinbauer R.* Orthogonal polynomials on arcs of the unit circle. II // J. Approx. Theory. 1996. V. 87. P. 60–102.
74. *Peherstorfer F., Steinbauer R.* Strong asymptotics of orthonormal polynomials with the aid of Green’s function // SIAM J. Math. Anal. 2000. V. 32. P. 385–402.

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: LukashovAL@info.sgu.ru

Поступило в редакцию
15.12.2002