Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, О гладкости кривых де Рама, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 3, 139–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/im489>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 09:09:02

УДК 517.51

В. Ю. Протасов

О гладкости кривых де Рама

Кривая де Рама получается в пределе из ломаной с данными вершинами последовательным срезанием ее углов (на каждом шаге стороны ломаной делятся на три части в отношении $\omega : (1 - 2\omega) : \omega$, где $\omega \in (0, \frac{1}{2})$ – заданный параметр). Найдены точные показатели гладкости кривой де Рама для каждого значения параметра ω . При этом под гладкостью кривой понимается гладкость ее натуральной параметризации, когда в качестве параметра использована длина кривой. Получена формула для локальной гладкости кривой де Рама в каждой ее точке. Охарактеризованы множества точек кривой с данной локальной гладкостью, в частности множества точек максимальной и минимальной гладкости. Средняя гладкость (гладкость почти в каждой точке по мере Лебега) вычисляется с помощью показателя Ляпунова подходящих линейных операторов. Для этой величины получено интегральное представление и оценки сверху и снизу.

Библиография: 45 наименований.

§ 1. Кривые де Рама

1. Введение. Кривую де Рама получают в пределе из ломаной с данными вершинами $z_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{Z}$, последовательным срезанием ее углов. Обозначим начальную ломаную через Z^0 . На первом шаге каждую сторону ломаной делим на три части в отношении $\omega : (1 - 2\omega) : \omega$, где $\omega \in (0, \frac{1}{2})$ – заданный параметр. Таким образом на каждой стороне мы получаем по две точки деления. Соединив последовательно все точки деления, получаем новую ломаную, которую обозначим через Z^1 . Делим ее стороны в том же отношении (с тем же параметром ω), получаем следующую ломаную Z^2 и т. д. Кривая, получающаяся в пределе, называется *кривой де Рама* и обозначается $\Gamma = \Gamma(\omega, Z_0)$. Кривая де Рама определяется, таким образом, параметром ω и начальной ломаной Z^0 . Под пределом понимается стремление ломаных Z^n к кривой Γ в метрике Хаусдорфа, или (если исходная ломаная неограничена) на каждом компакте в плоскости. Если исходная последовательность точек $\{z_k\}$ периодична ($z_{k+N} = z_k$), то ломаная Z^0 является N -угольником. Тогда следующая ломаная Z^1 является $2N$ -угольником, Z^2 – $4N$ -угольником и т. д. В пределе получится замкнутая кривая де Рама. Исследование свойств кривых де Рама даже для простейших многоугольников (правильного треугольника, квадрата и т. д.) – весьма нетривиальная задача.

Впервые такие кривые были исследованы де Рамом в работах [1]–[3], где, в частности, показано, что для каждого $\omega \in (0, \frac{1}{2})$ последовательность ломаных Z^n сходится к некоторой непрерывной кривой Γ ; эта кривая спрямляема и, более того,

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 02-01-00248, 03-01-06300) и НШ 304.2003.1.

при $\omega < \frac{1}{3}$ непрерывно дифференцируема (в натуральной параметризации). При $\omega = \frac{1}{4}$ кривая де Рама представляет собой квадратичный сплайн, т.е. составлена из кусков парабол, гладко соединенных в узлах – серединах сторон исходной ломаной Z^0 . При остальных $\omega \in (0, \frac{1}{3})$ кривая Γ будет обладать фрактальными свойствами, оставаясь при этом кривой класса C^1 . Алгоритм срезания углов рассматривался независимо в работе [4], а также обобщался на случай, когда $r \geq 2$ (т.е. когда на каждом шаге мы берем выпуклую комбинацию не двух соседних вершин ломаной, а r соседних вершин), в [5]–[9]. Интерес к кривым де Рама возрос в начале 1990-х годов, когда выяснилась их связь с уточняющими алгоритмами и масштабирующими функциями, которые широко применяются в теории всплесков и теории приближений (см., например, [5], [8]–[10] и ссылки в этих работах). Подробнее обсудим этот аспект в §2. Кривые де Рама изучаются также в прикладной математике, где метод срезания углов оказался чрезвычайно удобным алгоритмом приближения и восстановления функций по значениям на некоторой сетке [11]–[14]. В теории вероятностей и динамических системах кривые де Рама изучаются как предельные кривые случайных блужданий (см. [15], [16] и библиографию в этих работах). Многие работы посвящены изучению различных свойств кривых де Рама (см., например, [17]–[19]) и обобщениям этих кривых (см. [6], [20], [21]).

В настоящей работе вычислим точный показатель гладкости кривой де Рама для каждого значения параметра ω . Важность этого результата объясняется тем, что гладкость определяет как скорость сходимости алгоритма срезания углов, так и точность приближения гладких функций кривыми де Рама. В частности, для граничного значения $\omega = \frac{1}{3}$ производная кривой Γ непрерывна, т.е. $\Gamma \in C^1$, хотя показатель Гёльдера этой производной равен нулю. Мы получим формулу для показателя локальной гладкости производной кривой де Рама в каждой ее точке, вычислим максимальный и минимальный показатели локальной гладкости и укажем, в каких точках кривой они достигаются. Для каждого $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$ максимальная гладкость не равна минимальной. Более того, для всех ω , кроме $\omega = \frac{1}{4}$, каждое промежуточное значение локальной гладкости достигается на всюду плотном множестве точек кривой. Множества эти имеют фрактальную структуру и являются так называемыми $(0, 1)$ -множествами (см. §6, определение 2). Наконец, мы докажем, что для каждого ω существует показатель α_{av} (“средняя гладкость”) такой, что для почти всех (по мере Лебега) точек кривой де Рама локальная гладкость производной равна α_{av} . Показатель α_{av} равен ляпуновской экспоненте подходящих линейных операторов. При $\omega = \frac{1}{4}$ показатель α_{av} , очевидно, равен 1. Мы установим, что при всех остальных ω имеет место неравенство $\alpha_{av} > 1$. Из этого, в частности, следует, что при $\omega \neq \frac{1}{4}$ производная кривой де Рама является чисто сингулярной функцией, т.е. вторая производная равна нулю почти всюду. Геометрически это означает, что на множестве полной меры касательная к кривой де Рама не меняет своего направления при движении вдоль кривой.

Прежде чем переходить к основным результатам, перечислим несколько простых свойств кривых де Рама.

2. Основные свойства кривых де Рама. 1) *Средины сторон всех ломаных $Z^0, Z^1, \dots$ принадлежат Γ .* Действительно, возьмем, например, середину B стороны $z_0 z_1$ ломаной Z^0 . После срезания углов длина этой стороны уменьшится

с коэффициентом $1 - 2\omega$, а середина по-прежнему будет находиться в точке B . Таким образом, $B \in Z^1$, аналогично, $B \in Z^2$ и т. д. Точка B принадлежит всем ломаным, следовательно, принадлежит и предельной кривой.

2) *Самоподобие*. Середины сторон ломаной Z^0 разбивают кривую Γ на куски, которые аффинно подобны друг другу, т. е. каждый кусок может быть переведен в другой подходящим аффинным преобразованием. Для доказательства достаточно рассмотреть аффинное преобразование, переводящее соответствующую пару соседних сторон ломаной в другую пару сторон.

Таким образом, кривая де Рама состоит из кусков, аффинно подобных одной и той же кривой. В качестве такой “образцовой” кривой рассмотрим кривую, получающуюся из двузвенной ломаной RST , где вершина S лежит на оси y и имеет координаты $(0, 1)$, а точки R и T – координаты $(-2, -1)$ и $(2, -1)$ соответственно. Применив алгоритм срезания углов с данным $\omega \in (0, \frac{1}{2})$ (на первом шаге срезается только угол S , на втором – два угла и т. д.), получим предельную кривую, соединяющую точки A и B – середины сторон SR и ST (точки A и B лежат на оси x и имеют координаты $(\mp 1, 0)$ соответственно). Эту кривую также обозначим через $\Gamma = \Gamma(\omega)$ и назовем *фундаментальной кривой*. При данном значении ω любая кривая де Рама, независимо от начальной ломаной, будет состоять из кусков, аффинно подобных $\Gamma(\omega)$. Поэтому можно ограничиться изучением свойств только фундаментальной кривой. С этого момента мы называем кривой де Рама фундаментальную кривую Γ .

3) *Выпуклость и липшицевость*. Рассмотрим последовательность ломаных Z^k , которые получаются при срезании углов начальной ломаной $Z^0 = ASB$. Все стороны каждой из них наклонены к прямой AB (т. е. к оси x) под углами, не превосходящими $\frac{\pi}{4}$. Доказывается это индукцией по k . Следовательно, каждая ломаная является графиком некоторой функции $f_k(x)$, $f_k: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, которая к тому же липшицева с константой 1, т. е.

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$$

для любых x_1, x_2 . Следовательно, и предельная кривая Γ является графиком липшицевой функции $f(x)$. Так же доказывается, что все функции $f_k(x)$ вогнуты (т. е. $-f_k(x)$ выпуклы), поэтому и функция $f(x)$ вогнута на отрезке $[-1, 1]$. Значит, $f(x)$ имеет в каждой точке $x \in (-1, 1)$ производные слева и справа, в концах отрезка – соответствующие односторонние производные. Наконец, в силу липшицевости функции $f(x)$ параметр x (т. е. кривая Γ задана в виде $(x, f(x))$) эквивалентен натуральному параметру. Поэтому гладкость кривой Γ в натуральной параметризации равна гладкости функции $f(x)$.

4) *Регулярный случай*: $\omega = \frac{1}{4}$. В этом случае, как впервые было замечено де Рамом [1], предельная кривая состоит из кусков парабол, при этом $f(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$. Легко проверить индукцией по k , что середины всех сторон ломаных Z^k лежат на параболе $y = f(x)$. Если начать с произвольной ломаной Z^0 , то при $\omega = \frac{1}{4}$ алгоритм срезания углов приведет к квадратичному сплайну Γ , состоящему из сегментов парабол. Каждый сегмент проходит через середины двух соседних сторон ломаной Z^0 и касается этих сторон. Как показано в работах [2], [3], ни при каком другом ω кривая де Рама не является кусочно-аналитической кривой.

Нас будут интересовать точные показатели локальной и глобальной гладкости кривой Γ . Через α_f обозначим показатель Гёльдера функции f :

$$\alpha_f = k + \sup\{\alpha \mid |f^{(k)}(x_1) - f^{(k)}(x_2)| \leq C_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha, x_1, x_2 \in [-1, 1]\},$$

где k – наибольшее целое число, для которого $f \in C^k[-1, 1]$. Поскольку для любого $\omega \in (0, \frac{1}{2})$ функция f липшицева, то $\alpha_f \geq 1$. При $\omega = \frac{1}{4}$ показатель Гёльдера кривой Γ равен 2, кривая Γ “почти” из C^2 (т.е. вторая производная может иметь разрыв в серединах сторон Z^0 – точках склейки сегментов парабол). Как мы увидим далее (теорема 2), при всех остальных ω имеет место неравенство $\alpha_f < 2$. Для данного $x \in [-1, 1]$ через $\alpha_f(x)$ обозначим локальный показатель Гёльдера функции f в точке x :

$$\alpha_f(x) = \sup\{\alpha \mid |f(x) - f(x')| \leq C_{\alpha, x} |x - x'|^\alpha, x' \in [-1, 1]\}.$$

В §4, 5 мы вычислим в явном виде показатель Гёльдера кривой де Рама при всех $\omega \in (0, \frac{1}{2})$, а также получим формулу для локального показателя Гёльдера в каждой точке x . В §6 установим точные границы минимальной и максимальной локальной гладкости, а также охарактеризуем множества точек кривой, в которых ее локальный показатель Гёльдера принимает данное значение. В §7 оценим среднюю гладкость кривой де Рама, т.е. локальный показатель Гёльдера, который достигается почти в каждой точке кривой (по мере Лебега). В §2, 3 проведем предварительную работу. В §2 кривая де Рама будет представлена как фрактальная (самоподобная) кривая, соответствующая определенной паре линейных операторов. В §3 установим несколько специальных свойств этих операторов, которые понадобятся при вычислении показателей гладкости. В конце статьи сформулируем несколько нерешенных задач (см. §8).

§2. Представление кривой де Рама в виде фрактальной кривой

Проведем первую итерацию алгоритма срезания углов. На отрезках AS и BS возьмем точки M и N соответственно, при этом $SM/SA = SN/SB = 2\omega$. Пусть L – середина отрезка MN . Как известно, $L \in \Gamma$ и, кроме того, дуги AL и BL кривой Γ аффинно подобны Γ . Обозначим через $\tilde{T}_0$ аффинный оператор в $\mathbb{R}^2$, переводящий точки A, S, B в точки A, M, L соответственно. Аналогично, $\tilde{T}_1$ – оператор, переводящий точки A, S, B в точки L, N, B соответственно. Тогда оператор $\tilde{T}_0$ переводит кривую Γ в ее дугу AL , а $\tilde{T}_1$ переводит Γ в ее дугу BL . Итак,

$$\Gamma = \tilde{T}_0\Gamma \cup \tilde{T}_1\Gamma. \quad (1)$$

Таким образом, кривая Γ является фракталом (самоподобным множеством), соответствующим паре аффинных операторов $\tilde{T}_0, \tilde{T}_1$, в смысле классического определения Хатчинсона [22]. Оператор $\tilde{T}_0$ имеет единственную неподвижную точку A , оператор $\tilde{T}_1$ имеет неподвижную точку B . Причем выполнено так называемое “перекрестное условие” $\tilde{T}_0B = \tilde{T}_1A$. Тогда по теореме Барнсли [23] кривая может быть параметризована непрерывной функцией $\Gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, которая удовлетворяет уравнению

$$\Gamma\left(\frac{t+i}{2}\right) = \tilde{T}_i\Gamma(t), \quad t \in [0, 1], \quad i = 0, 1. \quad (2)$$

Строится отображение Γ следующим образом: сначала определяем $\Gamma(0) = A$, $\Gamma(1) = B$. По формуле (2) $\Gamma(\frac{1}{2}) = L$. Точки $\Gamma(\frac{1}{4})$ и $\Gamma(\frac{3}{4})$ будут лежать в серединах сторон ломаной Z^2 , образующихся при срезании углов M и N соответственно. После срезания углов ломаной Z^2 появляются еще 4 стороны, их середины будут точками $\Gamma(\frac{1}{8})$, $\Gamma(\frac{3}{8})$, $\Gamma(\frac{5}{8})$, $\Gamma(\frac{7}{8})$ соответственно, и т. д. Таким образом функция $\Gamma(t)$ определяется последовательно во всех двоично-рациональных точках t , затем продолжается по непрерывности на все $t \in [0, 1]$. Пусть t – двоично-рациональное число, $d_1, \dots, d_n$ – цифры после запятой в его двоичной записи, $d_j \in \{0, 1\}$. Таким образом, $t = 0, d_1 \dots d_n$. Тогда

$$\Gamma(t) = \tilde{T}_{d_1} \dots \tilde{T}_{d_n} A. \quad (3)$$

В произвольной точке $t \in [0, 1]$ значение $\Gamma(t)$ находится следующим образом:

$$\Gamma(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_{d_1} \dots \tilde{T}_{d_n} A, \quad (4)$$

где $t = 0, d_1 d_2 \dots$ – двоичная запись числа t . Если не оговорено противное, мы будем полагать, что запись двоично-рациональных чисел оканчивается последовательностью нулей, а не последовательностью единиц. Параметризация (4) называется *канонической* для фрактальных кривых. Она многократно использовалась при изучении масштабирующих функций, всплесков с компактным носителем, уточняющих алгоритмов и т. д. (см., например, [24]–[27] и библиографию в этих работах). Идея представить кривые де Рама в виде инвариантных множеств аффинных операторов появилась впервые в [1] и затем использовалась во многих работах по кривым де Рама. Изучение этих кривых, таким образом, укладывается в общую схему рассмотрения фрактальных кривых, наряду с канторовской сингулярной функцией или кривой Кох.

Уравнение (2) может быть представлено в другом виде. Пусть $t = 0, d_1 d_2 \dots \in [0, 1]$. Тогда для любого n имеем

$$\Gamma(t) = \tilde{T}_{d_1} \dots \tilde{T}_{d_n} \Gamma(\tau^n t), \quad (5)$$

где $\tau t = 2t$ при $t \in [0, \frac{1}{2}]$ и $\tau t = 2t - 1$ при $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Иначе говоря, $\tau t = 2t \pmod{1}$.

Теперь специальным образом вводим базис в $\mathbb{R}^2$. Начало координат находится в точке S . В качестве первого базисного вектора возьмем вектор $\overrightarrow{AS}$ и обозначим его e_0 , в качестве второго – вектор $e_1 = \overrightarrow{SB}$. Любой вектор $a \in \mathbb{R}^2$ теперь раскладывается по базису: $a = (x_0, x_1)^T = x_0 e_0 + x_1 e_1$. Нам удобно будет нумеровать базисные векторы и соответствующие координаты индексами 0, 1 вместо привычных 1, 2. Обозначим линейные части аффинных операторов $\tilde{T}_i$ через T_i , $i = 0, 1$. В базисе e_0, e_1 матрицы этих операторов записываются следующим образом:

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 - 2\omega & \omega \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \omega & 1 - 2\omega \end{pmatrix}.$$

Далее будем обозначать эти матрицы так же, как и операторы T_i , $i = 0, 1$. Заметим, что $\overrightarrow{AB} = e_0 + e_1$. Из соотношения (3) непосредственно следует, что для любых $d_1, \dots, d_n \in \{0, 1\}$ имеем

$$\Gamma(t'_n) - \Gamma(t_n) = T_{d_1} \dots T_{d_n} e, \quad (6)$$

где $t_n = 0, d_1 \dots d_n 0$, $t'_n = 0, d_1 \dots d_n 1$, $e = (1 - \omega, \omega)^T = (1 - \omega)e_0 + \omega e_1$. В самом деле, $\Gamma(t'_n) = \tilde{T}_{d_1} \dots \tilde{T}_{d_n} \tilde{T}_1 A$, $\Gamma(t_n) = \tilde{T}_{d_1} \dots \tilde{T}_{d_n} A$. Следовательно,

$$\Gamma(t'_n) - \Gamma(t_n) = \tilde{T}_{d_1} \dots \tilde{T}_{d_n} \tilde{T}_1 A - \tilde{T}_{d_1} \dots \tilde{T}_{d_n} A = T_{d_1} \dots T_{d_n} (\tilde{T}_1 A - A).$$

Поскольку $\tilde{T}_1 A - A = \tilde{T}_1 A - \tilde{T}_0 A = \tilde{T}_0 B - \tilde{T}_0 A = T_0(B - A) = T_0(e_0 + e_1) = e$, получаем (6).

Все элементы матриц T_0, T_1 неотрицательны, поэтому операторы T_i сохраняют положительный квадрант $K = \{(x_0, x_1)^T \in \mathbb{R}^2, x_0, x_1 \geq 0\}$. Далее будем называть элементы положительного квадранта *неотрицательными векторами* (обозначать $a \geq 0$), а операторы со свойством $TK \subset K$ – *неотрицательными операторами* ($T \geq 0$). Таким образом, операторы T_0, T_1 неотрицательны для любого $\omega \in (0, \frac{1}{2})$. Следовательно, пользуясь (6), получим $\Gamma(t'_n) - \Gamma(t_n) \in K$, откуда

$$x(t'_n) - x(t_n) = \langle \Gamma(t'_n) - \Gamma(t_n), e_0 + e_1 \rangle > 0.$$

Итак, $x(0, d_1 \dots d_n 1) > x(0, d_1 \dots d_n 0)$ для любых $d_1, \dots, d_n$. Следовательно, функция $x(t)$ возрастает на множестве двоично-рациональных чисел, а значит (в силу непрерывности), является строго возрастающей на отрезке $[0, 1]$. Через $\|\cdot\|_1$ обозначим L^1 -норму в пространстве $\mathbb{R}^2$:

$$\|(x_0, x_1)^T\|_1 = |x_0| + |x_1|.$$

Из соотношения (6) следует, что

$$x(t'_n) - x(t_n) = \|T_{d_1} \dots T_{d_n} e\|_1, \quad (7)$$

где, напомним, $e = (1 - \omega, \omega)^T$.

Получим теперь аналогичную формулу для производной $f'(x)$. Функция $f(x)$ вогнута, поэтому в каждой точке $x \in [-1, 1]$ существуют левая и правая производные (в концах отрезка – только левая или, соответственно, правая производные). Обозначим их через $f'_l(x)$ и $f'_p(x)$ соответственно. Перейдем временно к параметру x , т.е. представим кривую Γ как график функции $y = f(x)$. Таким образом, $\Gamma(x) = (x, f(x))^T$ (в старых координатах (x, y)). Тогда можно определить левый и правый касательные векторы к кривой в точке x :

$$v_l(x) = (1, f'_l(x))^T, \quad v_p(x) = (1, f'_p(x))^T.$$

Если f дифференцируема в точке x , то $v_l(x) = v_p(x) = v(x(t))$. Легко видеть, что в новых координатах (x_0, x_1) для любого x имеем $\|v_l(x)\|_1 = \|v_p(x)\|_1 = 1$. Далее для краткости будем обозначать $v_l(x(t)) = v_l(t)$, $v_p(x(t)) = v_p(t)$. Из равенства (2) следует, что для любого $t \in [0, 1)$ вектор $v_p(\frac{t+i}{2})$ сонаправлен с вектором $T_i v_p(t)$. В частности, вектор $v_p(2^{-n})$ сонаправлен с вектором $T_0^{n-1} v_p(\frac{1}{2})$. При $n \rightarrow \infty$ направление вектора $v_p(2^{-n})$ стремится к направлению $v_p(0)$, а вектора $T_0^{n-1} v_p(\frac{1}{2})$ – к направлению собственного вектора оператора T_0 , соответствующего наибольшему по модулю собственному значению. При $\omega \leq \frac{1}{3}$ это вектор

$(1, 0)^T = e_0$, при $\omega \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ – вектор $(\omega, 3\omega - 1)^T$. Учитывая, что $\|v_p\| = 1$, получаем: $v_p(0) = e_0$ при $\omega \leq \frac{1}{3}$ и $v_p(0) = (\omega, 3\omega - 1)^T$ при $\omega \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. То же верно и для левой производной: $v_l(1) = e_1$ при $\omega \leq \frac{1}{3}$ и $v_l(1) = (3\omega - 1, \omega)^T$ при $\omega \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. При $t = \frac{1}{2}$ имеем: вектор $v_p(\frac{1}{2})$ сонаправлен с вектором $T_1 v_p(0)$, $v_l(\frac{1}{2})$ сонаправлен с вектором $T_0 v_l(1)$. Легко видеть, что векторы $T_1(\omega, 3\omega - 1)^T$ и $T_0(3\omega - 1, \omega)^T$ не коллинеарны ни при каком $\omega \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Следовательно, при этих значениях ω имеем $v_p(\frac{1}{2}) \neq v_l(\frac{1}{2})$, значит, f не дифференцируема в точке $x(\frac{1}{2})$. Если $t = 0, d_1 \dots d_n$ – двоично-рациональное число ($d_n = 1$), то векторы $v_p(t)$ и $v_l(t)$ сонаправлены соответственно с векторами $T_{d_1} \dots T_{d_{n-1}} v_p(\frac{1}{2})$ и $T_{d_1} \dots T_{d_{n-1}} v_l(\frac{1}{2})$, следовательно, $v_p(t) \neq v_l(t)$.

Итак, при $\omega \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ функция f не дифференцируема в точках $x(t)$ при двоично-рациональных t .

С другой стороны, $T_1 e_0 = T_0 e_1$, следовательно, при $\omega \leq \frac{1}{3}$ имеем $v_p(\frac{1}{2}) = v_l(\frac{1}{2})$, значит, f дифференцируема в точке $x(\frac{1}{2})$ и, следовательно, дифференцируема во всех точках $x(t)$ при двоично-рациональных t . Для исследования дифференцируемости f в остальных точках нам понадобятся два вспомогательных утверждения. Введем еще несколько обозначений. Для данных $d_1, \dots, d_n \in \{0, 1\}$ обозначим $\Pi_{d_1 \dots d_n} = T_{d_1} \dots T_{d_n}$. Иногда для краткости будем обозначать $\Pi_{d_1 \dots d_n} = \Pi_n$, если понятно, о каких индексах $d_1, \dots, d_n$ идет речь. Образ положительного квадранта K под действием оператора $\Pi_{d_1 \dots d_n}$ обозначим $\Delta_{d_1 \dots d_n}$. Точно так же будем обозначать величину угла $\Delta_{d_1 \dots d_n}$, т.е. угол (в радианах) между векторами $\Pi_n e_0$ и $\Pi_n e_1$.

ЛЕММА 1. Пусть первые n цифр двоичного разложения после запятой чисел $t, s \in [0, 1]$ совпадают и равны соответственно $d_1, \dots, d_n$. Тогда:

- а) $|x(t) - x(s)| \leq 2 \|\Pi_{d_1 \dots d_n}\|_1$;
- б) угол между правыми (левыми) касательными векторами к кривой Γ в точках $\Gamma(t)$ и $\Gamma(s)$ не превосходит $\Delta_{d_1 \dots d_n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Воспользовавшись равенством (5), имеем

$$\Gamma(t) - \Gamma(s) = \Pi_{d_1 \dots d_n} (\Gamma(\tau^n t) - \Gamma(\tau^n s)).$$

Тогда, применяем (7), получим

$$|x(t) - x(s)| = \|\Gamma(t) - \Gamma(s)\|_1 \leq \|\Pi_{d_1 \dots d_n}\|_1 \|\Gamma(\tau^n t) - \Gamma(\tau^n s)\|_1.$$

Остается заметить, что $\|\Gamma(\tau^n t) - \Gamma(\tau^n s)\|_1 \leq 2$, поскольку расстояние в L^1 -норме между любыми двумя точками из треугольника ASB не превосходит 2.

б) Согласно (5) направления векторов $v_p(t)$ и $v_p(s)$ совпадают с направлениями векторов $\Pi_{d_1 \dots d_n} v_p(\tau^n t)$ и $\Pi_{d_1 \dots d_n} v_p(\tau^n s)$ соответственно. Поскольку $v_p(u) \in K$ для всех u , в частности $v_p(\tau^n t), v_p(\tau^n s) \in K$, то $v(t), v(s) \in \Pi_{d_1 \dots d_n} K$, что и завершает доказательство.

Через (t) обозначим последовательность, состоящую из нулей и единиц, $(t) = d_1, d_2, \dots$, через t – соответствующее число, $t = 0, d_1 d_2 \dots$.

ЛЕММА 2. а) Если $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$, то для любой последовательности (t) имеем $\Delta_{d_1 \dots d_n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

б) Если $\omega \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, то для любой последовательности (t) , не оканчивающейся одними нулями или одними единицами, имеем $\Delta_{d_1 \dots d_n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Докажем лемму 2 в §5, а пока будем пользоваться леммой 2 как доказанным фактом. Через $\mathcal{D}$ обозначим множество двоично-рациональных чисел, через $x(\mathcal{D})$ – образ множества $\mathcal{D}$ под действием функции $x(t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$, то $f \in C^1[-1, 1]$. Если $\omega \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, то функция f не дифференцируема в точках $x(t)$ при двоично-рациональных t . При всех остальных t она дифференцируема и производная f' непрерывна на множестве $[-1, 1] \setminus x(\mathcal{D})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если t – двоично-рациональное, то, как мы показали выше, при $\omega > \frac{1}{3}$ функция f не дифференцируема в точке $x(t)$, а при $\omega \leq \frac{1}{3}$ – дифференцируема. Пусть теперь $t \notin \mathcal{D}$. Тогда двоичная запись числа $t = 0, d_1 d_2 \dots$ не заканчивается последовательностью нулей или последовательностью единиц. Возьмем произвольное n , для которого $d_{n+1} = 0$, и положим $t_n = 0, d_1 \dots d_n 0$, $t'_n = 0, d_1 \dots d_n 1$. Поскольку $t \notin \mathcal{D}$, то для каждого такого n имеем $t_n < t < t'_n$, а так как $x(t)$ возрастает, то $x(t_n) < x(t) < x(t'_n)$. Согласно лемме 1 угол между векторами $v_p(t_n)$ и $v_p(t'_n)$ не превосходит $\Delta_{d_1 \dots d_n}$ и согласно лемме 2 стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ (так как $t \notin \mathcal{D}$, то найдутся сколь угодно большие n , для которых $d_{n+1} = 0$). Следовательно,

$$|f'_p(x(t'_n)) - f'_p(x(t_n))| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Далее, в силу вогнутости функции f имеем

$$f'_p(x(t_n)) \geq f'_l(x(t)) \geq f'_p(x(t)) \geq f'_p(x(t'_n)).$$

Поэтому $f'_p(x(t_n)) = f'_l(x(t))$, значит, f дифференцируема в точке $x(t)$ и, более того, функция $f'_p(x)$ непрерывна в точке $x(t)$.

Таким образом, f дифференцируема на множестве $[-1, 1] \setminus x(\mathcal{D})$, и ее производная на этом множестве непрерывна. Осталось доказать, что при $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$ функция f' непрерывна в точках $x(t)$ при $t \in \mathcal{D}$. Согласно лемме 1 угол между векторами $v(t'_n)$ и $v(t)$ не превосходит $\Delta_{d_1 \dots d_n}$ и согласно утверждению а) леммы 2 стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$|f'(x(t'_n)) - f'(x(t))| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

В силу монотонности функции f' это означает, что f' непрерывна справа. Непрерывность слева доказывается точно так же, необходимо только рассмотреть двоичную запись числа t , оканчивающуюся последовательностью единиц. В этом случае $t'_n < t$ и все дальнейшие рассуждения те же.

Итак, при $\omega \leq \frac{1}{3}$ кривая де Рама непрерывно дифференцируема. При $\omega > \frac{1}{3}$ она не дифференцируема в серединах сторон всех ломаных Z^k , $k \geq 0$, а во всех остальных точках дифференцируема.

В следующих параграфах работы мы вычислим точные показатели гладкости кривой де Рама для различных ω . Нас интересует геометрическая гладкость, т. е. гладкость в натуральной параметризации, которая, как мы отмечали выше, равна гладкости функции $f(x)$. Она превосходит гладкость функций $x(t)$ и $f(t)$. Так, ни при каком ω , кроме $\omega = \frac{1}{4}$, функции $x(t)$ и $f(t)$ не являются непрерывно дифференцируемыми, в то время как $f(x) \in C^1$ при $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$. Более того, функция $x(t)$ является чисто сингулярной, почти всюду (по мере Лебега) ее производная равна нулю. В этом смысле каноническая параметризация кривой де Рама является крайне неудачной. Поэтому для вычисления гладкости нужно по отдельности оценивать величины $|x(t) - x(s)|$ и $|f'(t) - f'(s)|$ при $|t - s| \rightarrow 0$. Согласно лемме 1 оценка величины $|x(t) - x(s)|$ сводится к оценке нормы произведений операторов $\Pi_n = T_{d_1} \dots T_{d_n}$. Такие оценки в общем случае (для произвольных линейных операторов в пространстве $\mathbb{R}^d$) можно получать, по крайней мере теоретически, с помощью совместного спектрального радиуса операторов. Техника для этого была разработана при исследовании масштабирующих функций и уточняющих схем (см. [5], [8]–[10], [25]–[28]). Для оценки величины $|f'(t) - f'(s)|$ необходимо каким-то образом оценить величину угла $\Delta_{d_1 \dots d_n}$, т. е. угла между векторами $T_{d_1} \dots T_{d_n} e_0$ и $T_{d_1} \dots T_{d_n} e_1$. Автору не известно, как эта задача может решаться для произвольных линейных операторов в $\mathbb{R}^d$. Для операторов, действующих в $\mathbb{R}^2$, это может быть сделано следующим образом:

$$\sin \Delta_{d_1 \dots d_n} = \frac{|\det(T_{d_1} \dots T_{d_n})|}{\|T_{d_1} \dots T_{d_n} e_0\| \|T_{d_1} \dots T_{d_n} e_1\|}$$

(норма евклидова). В самом деле, площадь параллелограмма, натянутого на векторы $T_{d_1} \dots T_{d_n} e_0$ и $T_{d_1} \dots T_{d_n} e_1$, равна $\|T_{d_1} \dots T_{d_n} e_0\| \|T_{d_1} \dots T_{d_n} e_1\| \sin \Delta_{d_1 \dots d_n}$. С другой стороны, этот параллелограмм является образом единичного квадрата под действием оператора $T_{d_1} \dots T_{d_n}$, поэтому его площадь равна $|\det(T_{d_1} \dots T_{d_n})|$. Поскольку $\det T_0 = \det T_1 = \omega(1 - 2\omega)$, получаем

$$\sin \Delta_{d_1 \dots d_n} = \frac{(\omega(1 - 2\omega))^n}{\|\Pi_{d_1 \dots d_n} e_0\| \|\Pi_{d_1 \dots d_n} e_1\|}. \quad (8)$$

Таким образом, оценка угла $\Delta_{d_1 \dots d_n}$ также сводится к оценке нормы произведений $\Pi_n = T_{d_1} \dots T_{d_n}$. В следующем параграфе мы докажем несколько вспомогательных утверждений о свойствах операторов T_0, T_1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В конце 1980-х годов в ряде работ (мы упоминали о них во введении) была замечена прямая связь кривых де Рама с масштабирующими функциями, именно обе координатные функции кривой де Рама $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ могут быть выражены как линейные комбинации целых сдвигов одной функции $\varphi(x)$, которая удовлетворяет масштабирующему уравнению

$$\varphi(x) = \omega\varphi(2x) + (1 - \omega)\varphi(2x - 1) + (1 - \omega)\varphi(2x - 2) + \omega\varphi(2x - 3). \quad (9)$$

Сама функция φ может быть получена как предел уточняющего алгоритма Чайкина: взяв начальную последовательность $f_0^0 = 1$, $f_r^0 = 0$ при $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, строим последовательности $\{f_r^1\}, \{f_r^2\}, \dots$ по следующему правилу:

$$\begin{aligned} f_{2r}^{n+1} &= \omega f_r^n + (1 - \omega) f_{r+1}^n, \\ f_{2r+1}^{n+1} &= (1 - \omega) f_r^n + \omega f_{r+1}^n. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда $\|f_r^n - \varphi(2^{-n}r)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Изучению масштабирующих функций и уточняющих алгоритмов посвящена обширная литература (мы привели несколько ссылок в начале работы). В частности, известно, что алгоритм Чайкина сходится при любом $\omega \in (0, \frac{1}{2})$ и скорость сходимости равна показателю гладкости функции φ . Для гладкости φ также получены оценки (см. [10], [25], [27]–[29]). Однако для исследования свойств кривых де Рама эти результаты оказались неприменимы, поскольку они позволяют лишь оценивать гладкость настоящей параметризации $\Gamma(t)$, которая в данном случае меньше геометрической гладкости Γ при любом значении $\omega \neq \frac{1}{4}$. Тем не менее, с помощью уточняющих алгоритмов построен ряд обобщений кривых де Рама (см. [5]–[7], [9]).

§ 3. Несколько вспомогательных утверждений

Везде в работе будем использовать евклидову норму $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^2$, иногда будем пользоваться L^1 -нормой и обозначать ее $\|\cdot\|_1$. Для данного вектора $a \in K \setminus \{0\}$ обозначим через $\beta(a)$ минимальный из углов, которые образует a с осями координат. Для $a = 0$ положим формально $\beta(a) = 0$. Таким образом, величина $\beta(a)$ характеризует удаленность вектора a от границы положительного квадранта; $\beta(a) = 0$ тогда и только тогда, когда вектор a сонаправлен с одним из координатных векторов. Доказательство следующей леммы может быть найдено, например, в [30].

ЛЕММА 3. *Существует абсолютная константа $\tilde{C} > 0$ такая, что для любого оператора $P \geq 0$ и любого $a \in K$ имеем $\|Pa\| \geq \tilde{C}\beta(a)\|P\|\|a\|$.*

В частности, если $a \in \text{int } K$ (т.е. обе координаты вектора a положительны), то для каждого произведения Π_n операторов T_0, T_1 , независимо от n , имеем $\|\Pi_n a\| \geq C\|\Pi_n\|$, где константа C зависит только от вектора a .

ЛЕММА 4. *Пусть $\omega \in (0, \frac{1}{2})$. Существует константа C_ω , зависящая только от ω , такая, что для любого $a \in K$ и любой последовательности $d_1, \dots, d_n$, заканчивающейся двумя разными цифрами (01 или 10), имеем*

$$\|\Pi_n a\| \geq C_\omega \|\Pi_n\| \|a\|,$$

где $\Pi_n = T_{d_1} \dots T_{d_n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d_{n-1} = 1$, $d_n = 0$ (случай $d_{n-1} = 0$, $d_n = 1$ разбирается аналогично). Все координаты матрицы $T_1 T_0$ положительны, поэтому конус $T_1 T_0 K \setminus \{0\}$ лежит в $\text{int } K$, а значит,

$$\beta(T_1 T_0 K) = \inf\{\beta(u), u \in T_1 T_0 K, u \neq 0\} > 0.$$

Применив лемму 3 к вектору $T_1 T_0 a$ и оператору $P = \Pi_{n-2}$, получим

$$\|\Pi_n a\| = \|\Pi_{n-2}(T_1 T_0 a)\| \geq \tilde{C}\beta(T_1 T_0 K)\|\Pi_{n-2}\|\|T_1 T_0 a\|.$$

Оператор $T_1 T_0$ невырожден, поэтому $\|T_1 T_0 a\| \geq C_1 \|a\|$, где константа $C_1 > 0$ не зависит от a . Наконец, $\|\Pi_{n-2}\| \geq \|\Pi_n\|/\|T_1 T_0\|$. Таким образом,

$$\|\Pi_n a\| \geq \frac{\tilde{C}\beta(T_1 T_0 K)C_1}{\|T_1 T_0\|} \|\Pi_n\| \|a\|,$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие $d_{n-1} \neq d_n$ в формулировке леммы 4 существенно. Например, при $\omega = \frac{1}{3}$ возьмем $\Pi_n = T_1^n$, $a = e_1$. Тогда $\|\Pi_n e_1\|/\|\Pi_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В самом деле, $\Pi_n e_1 = 3^{-n} e_1$, т.е. $\|\Pi_n e_1\| = 3^{-n}$, в то время как $\|\Pi_n e_0\| = 3^{-n} \sqrt{n^2 + 1}$ и, следовательно, $\|\Pi_n\| \geq 3^{-n} \sqrt{n^2 + 1}$.

Однако при $\omega < \frac{1}{3}$ такая ситуация не возникает и утверждение леммы 4 обобщается на все произведения Π_n без исключений.

ЛЕММА 5. Пусть $\omega \in (0, \frac{1}{3})$. Тогда существует константа C_ω , зависящая только от ω , такая, что для любого произведения $\Pi_n = T_{d_1} \dots T_{d_n}$ и для любого $a \in K$ имеем

$$\|\Pi_n a\| \geq C_\omega \|\Pi_n\| \|a\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, считаем, что произведение Π_n заканчивается оператором T_0 . Пусть k последних множителей равны T_0 . Заметим, что при $\omega \in (0, \frac{1}{3})$ наибольшее по модулю собственное значение T_0 равно $\lambda = 1 - 2\omega$, а e_0 — соответствующий собственный вектор. Второе собственное значение по модулю строго меньше λ , а соответствующий собственный вектор имеет отрицательную координату, а значит, не лежит в K . Следовательно, для любого $u \in K$

$$C_1 \lambda^r \|u\| \leq \|T_0^r u\| \leq C_2 \lambda^r \|u\|,$$

где C_1, C_2 — константы, зависящие только от ω (не зависящие от r и u). В частности, $\|T_0^r\| \leq C_2 \lambda^r$ (поскольку норма достигается на некотором элементе из K) и $\|T_0^r a\| \geq C_1 \lambda^r \|a\|$. Следовательно,

$$\|T_0^r a\| \geq \frac{C_1}{C_2} \|T_0^r\| \|a\| \quad (11)$$

для любых a, r . Это доказывает лемму для $k = n$ (т.е. $\Pi_n = T_0^n$). Если $k < n$, то $\Pi_n = \Pi_{n-k+1} T_0^k$. Пользуясь неравенством (11), имеем $\|T_0^{k-1} a\| \geq \frac{C_1}{C_2} \|T_0^{k-1}\| \|a\|$. Теперь применяя лемму 4, получаем

$$\begin{aligned} \|\Pi_n a\| &= \|\Pi_{n-k+1} T_0^{k-1} a\| \geq C_\omega \|\Pi_{n-k+1}\| \|T_0^{k-1} a\| \\ &\geq C_\omega \frac{C_1}{C_2} \|\Pi_{n-k+1}\| \|T_0^{k-1}\| \|a\| \geq C_\omega \frac{C_1}{C_2} \|\Pi_{n-k+1} T_0^{k-1}\| \|a\|, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 6. Пусть $\omega \in (0, \frac{1}{3})$. Тогда для любых произведений Π_n, Π_k имеем

$$\|\Pi_n \Pi_k\| \geq C_\omega \|\Pi_n\| \|\Pi_k\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть норма оператора Π_k достигается на векторе $a \in K$, $\|a\| = 1$ (норма неотрицательного оператора всегда достигается на некотором элементе из K). Применив лемму 5, получим

$$\|\Pi_n \Pi_k\| \geq \|\Pi_n(\Pi_k a)\| \geq C_\omega \|\Pi_n\| \|\Pi_k a\| = C_\omega \|\Pi_n\| \|\Pi_k\|.$$

Если вместо леммы 5 воспользоваться леммой 4, то получим более слабое неравенство, верное, однако, для всех $\omega \in (0, \frac{1}{2})$.

ЛЕММА 7. Пусть $\omega \in (0, \frac{1}{2})$, и пусть последние два множителя произведения Π_n либо первые два множителя произведения Π_k различны. Тогда

$$\|\Pi_n \Pi_k\| \geq C_\omega \|\Pi_n\| \|\Pi_k\|.$$

Доказательство совпадает с доказательством леммы 6, при этом вместо леммы 5 используется лемма 4. Пусть, например, последние два множителя произведения Π_n различны. Если норма оператора Π_k достигается на векторе $a \in K$, $\|a\| = 1$, то, применив лемму 4, получаем

$$\|\Pi_n \Pi_k\| \geq \|\Pi_n(\Pi_k a)\| \geq C_\omega \|\Pi_n\| \|\Pi_k a\| = C_\omega \|\Pi_n\| \|\Pi_k\|.$$

Для данных операторов T_0, T_1 и данной последовательности $(t) = d_1, d_2, \dots$ из единиц и нулей обозначим через

$$\rho_t = \rho_t(T_0, T_1) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_{d_1} \dots T_{d_n}\|^{1/n}$$

нижний спектральный радиус вдоль последовательности (t) . Легко видеть, что он не зависит от нормы.

Следующее утверждение, несмотря на кажущуюся очевидность, выполняется не для всех линейных операторов.

ЛЕММА 8. При любом $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$ для произвольной последовательности (t) и любого $b < \rho_t$ существует константа $C(\omega, t, b)$ такая, что для каждого вектора $a \in K$ и любого n

$$\|\Pi_n a\| \geq C(\omega, t, b) b^n \|a\|. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\|\Pi_n\| \geq C(b) b^n$, где константа $C(b) > 0$ не зависит от n . В силу леммы 5 имеем $\|\Pi_n a\| \geq C_\omega C(b) b^n$, что завершает доказательство для $\omega < \frac{1}{3}$.

Случай $\omega = \frac{1}{3}$ требует отдельного анализа. Не ограничивая общности, считаем, что произведение Π_n заканчивается оператором T_0 . При $\omega = \frac{1}{3}$ оператор T_0 имеет собственное значение $\lambda = \frac{1}{3}$ кратности 2, которому соответствует единственный собственный вектор e_0 . Поэтому в данном случае $\|T_0^k\| \leq C_1 k (\frac{1}{3})^k$. С другой стороны, для любого $a \in K$ имеем $\|T_0^k a\| \geq C_2 (\frac{1}{3})^k \|a\|$. В последних неравенствах $C_1, C_2 > 0$ – абсолютные константы. Поэтому в случае $\Pi_n = T_0^n$ имеем

$$\|\Pi_n a\| \geq \frac{C_2}{nC_1} \|\Pi_n\| \|a\|.$$

Кроме того, для любого $b_1 \in (b, \rho_t)$ имеем $\|\Pi_n\| \geq C(b_1) b_1^n$. Следовательно,

$$\|\Pi_n a\| \geq \frac{C_2 C(b_1)}{nC_1} b_1^n \|a\|.$$

Поскольку $b < b_1$, то $\frac{1}{n} b_1^n \geq C_3(b) b^n$, где $C_3(b) > 0$ – некоторая константа. Это завершает доказательство для случая $\Pi_n = T_0^n$.

Если $\Pi_n = \Pi_{n-k-1}T_1T_0^k$, то, применяя лемму 4, получим

$$\begin{aligned} \|\Pi_{n-k-1}T_1T_0^ka\| &= \|\Pi_{n-k+1}T_0^{k-1}a\| \geq C_\omega \|\Pi_{n-k+1}\| \|T_0^{k-1}a\| \\ &\geq C_\omega \|\Pi_{n-k+1}\| C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^k \|a\|. \end{aligned} \quad (13)$$

С другой стороны,

$$\|\Pi_n\| \leq \|\Pi_{n-k+1}\| \|T_0^{k-1}\| \leq \|\Pi_{n-k+1}\| C_1 k \left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

Кроме того, $\|\Pi_n\| \geq C(b_1)b_1^n$ для любого $b_1 \in (b, \rho_t)$. Следовательно,

$$\|\Pi_{n-k+1}\| \geq \frac{C(b_1)3^k}{C_1 k} b_1^n.$$

Объединив это неравенство с (13), получаем $\|\Pi_n a\| \geq \frac{C_\omega C_2 C(b_1)}{C_1 k} b_1^n \|a\|$. Наконец, поскольку $b_1 > b$ и $n > k$, величина $\frac{1}{k} b_1^n$ не меньше $C_4(b_1)b^n$, где $C_4(b_1) > 0$ не зависит от k . Лемма доказана.

Заметим, что $\rho_t < 1$ для любой последовательности (t) . В самом деле, для $i = 0, 1$ имеем $\|T_i\|_1 = \max\{2\omega, 1 - 2\omega\}$, поэтому

$$\|T_{d_1} \dots T_{d_n}\|_1^{1/n} \leq \max\{2\omega, 1 - 2\omega\}.$$

Следовательно,

$$\rho_t = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_{d_1} \dots T_{d_n}\|_1^{1/n} \leq \max\{2\omega, 1 - 2\omega\} < 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $\omega > \frac{1}{3}$ утверждение леммы 8 неверно. Например, если последовательность (t) состоит из одних нулей, то $\rho_t = \rho(T_0) = \omega$, в то время как $\|\Pi_n e_0\| = (1 - 2\omega)^n$. Поэтому при $b \in (1 - 2\omega, \omega)$ имеем $\|\Pi_n e_0\|/b^n \rightarrow 0$. То же происходит, если (t) заканчивается последовательностью нулей (или последовательностью единиц). Можно строить и более содержательные примеры, скажем $d_n = [\log_2 n] \pmod{2}$, где $[x]$ – целая часть числа x . В этой последовательности сначала идет нуль, затем две единицы, потом четыре нуля, потом восемь единиц и т. д. Несложно показать, что $\rho_t \geq \omega$, в то время как $\liminf_{n \rightarrow \infty} b^{-n} \|\Pi_n e_i\| = 0$ при $i = 0, 1$ и любом $b \in (\omega^{3/4}(1 - 2\omega)^{1/4}, \omega)$. Заметим, что неравенство (12) может не выполняться только на базисных векторах $a = e_i$ (это несложно вывести из леммы 3). Для всех остальных a оно выполняется даже при $\omega > \frac{1}{3}$. Тем не менее, именно нарушение неравенства на базисных векторах влечет потерю гладкости кривой де Рама при $\omega > \frac{1}{3}$. Мы рассмотрим это далее, в замечании 4.

§ 4. Локальная и глобальная гладкость

Одно из характерных свойств самоподобных функций – это переменная локальная гладкость. Локальная гладкость фрактальных объектов меняется от точки к точке. Покажем, что кривые де Рама обладают этим свойством. В следующей теореме приведена явная формула локальной гладкости функции $f'(x)$ в каждой точке $x(t)$, $t \in [0, 1]$. Далее везде мы используем логарифмы по основанию 2.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < \omega \leq \frac{1}{3}$. Тогда для любого $t \in [0, 1]$, $t = 0, d_1 d_2 \dots$, имеем

$$\alpha_{f'}(x(t)) = \frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log \rho_t} - 2. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем, что $\alpha_{f'}(x) \leq \frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log \rho_t} - 2$. Пусть $(t_{m_k}) = d_1, \dots, d_{m_k}$ – конечные подпоследовательности последовательности (t) такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Pi_{m_k}\|^{1/m_k} = \rho_t,$$

где $\Pi_{m_k} = \Pi_{t_{m_k}} = T_{d_1} \dots T_{d_{m_k}}$. Для любого $p \in (\rho_t, 1)$ существует такая константа $C(p) > 0$, что $\|\Pi_{m_k}\| \leq C(p)p^{m_k}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Далее, положим $\tilde{t}_{m_k} = 0, d_1 \dots d_{m_k}$, $\tilde{t}_{m_k} = t_{m_k} + 2^{-m_k}$. Заметим, что $\tilde{t}_{m_k} = \lim_{r \rightarrow \infty} t_{m_k}^r$, где $t_{m_k}^r = 0, d_1 \dots d_{m_k} 1 \dots 1$ (r единиц после цифры d_{m_k}). Для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C_0(\varepsilon)$ такая, что

$$|f'(s) - f'(t)| \leq C_0(\varepsilon) |x(s) - x(t)|^{\alpha_{f'}(t) - \varepsilon}$$

для всех $s \in [-1, 1]$. Применяя это неравенство при $s = t_{m_k}$ и $s = t_{m_k}^r$, имеем

$$\begin{aligned} |f'(t_{m_k}^r) - f'(t_{m_k})| &\leq |f'(t_{m_k}^r) - f'(t)| + |f'(t_{m_k}) - f'(t)| \\ &\leq C_0(\varepsilon) (|x(t_{m_k}^r) - x(t)|^{\alpha_{f'}(t) - \varepsilon} + |x(t_{m_k}) - x(t)|^{\alpha_{f'}(t) - \varepsilon}) \end{aligned}$$

для любых $k, r \in \mathbb{N}$. Применив утверждение а) леммы 1, получаем $|x(t_{m_k}) - x(t)| \leq 2\|\Pi_{m_k}\|_1$. Аналогично, $|x(t_{m_k}^r) - x(t)| \leq 2\|\Pi_{m_k}\|_1$ для любого r , что в пределе при $r \rightarrow \infty$ влечет неравенство $|x(\tilde{t}_{m_k}) - x(t)| \leq 2\|\Pi_{m_k}\|_1$. Таким образом,

$$|f'(\tilde{t}_{m_k}) - f'(t_{m_k})| \leq 2C_0(\varepsilon) (2\|\Pi_{m_k}\|_1)^{\alpha_{f'}(t) - \varepsilon}.$$

Кроме того, $\|\Pi_{m_k}\|_1 \leq \sqrt{2} \|\Pi_{m_k}\| \leq \sqrt{2} C(p) p^{m_k}$. В частности, $|x(t_{m_k}) - x(\tilde{t}_{m_k})| \leq 4\sqrt{2} C(p) p^{m_k}$.

Итак,

$$|f'(\tilde{t}_{m_k}) - f'(t_{m_k})| \leq 2C_0(\varepsilon) (2\sqrt{2} C(p) p^{m_k})^{\alpha_{f'}(t) - \varepsilon}.$$

С другой стороны, величина $|f'(\tilde{t}_{m_k}) - f'(t_{m_k})|$ не меньше угла между касательными к кривой Γ в точках $\Gamma(t_{m_k})$ и $\Gamma(\tilde{t}_{m_k})$. Заметим, что касательная в точке $\Gamma(t_{m_k})$ параллельна вектору $\Pi_{m_k} e_0$, а касательная в точке $\Gamma(\tilde{t}_{m_k})$ параллельна

вектору $\Pi_{m_k} e_1$, угол между этими векторами равен $\Delta_{m_k} = \Pi_{m_k} K$. Таким образом,

$$\begin{aligned} |f'(\tilde{t}_{m_k}) - f'(t_{m_k})| &\geq C \sin \Delta_{m_k} = C \frac{(\omega(1-2\omega))^{m_k}}{\|\Pi_{m_k} e_0\| \|\Pi_{m_k} e_1\|} \\ &\geq C \frac{(\omega(1-2\omega))^{m_k}}{\|\Pi_{m_k}\|^2} \geq C \left(\frac{\omega(1-2\omega)}{C^2(p)p^2} \right)^{m_k}. \end{aligned}$$

Тогда

$$2C_0(\varepsilon)(2\sqrt{2}C(p)p^{m_k})^{\alpha_{f'}(t)-\varepsilon} \geq C \frac{(\omega(1-2\omega))^{m_k}}{C^2(p)p^{2m_k}}.$$

Логарифмируя обе части этого неравенства, получаем

$$\begin{aligned} \log(2C_0(\varepsilon)) + (\alpha_{f'}(t) - \varepsilon) \log(2\sqrt{2}C(p)) + m_k(\alpha_{f'}(t) - \varepsilon) \log p \\ \geq \log C + m_k(\log(\omega(1-2\omega)) - 2\log p) - 2\log C(p), \end{aligned}$$

что при $m_k \rightarrow \infty$ влечет

$$(\alpha_{f'}(t) - \varepsilon) \log p \geq \log(\omega(1-2\omega)) - 2\log p,$$

или

$$\alpha_{f'}(t) - \varepsilon \leq \frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log p} - 2$$

(напомним, что $p < 1$ и, следовательно, $\log p < 0$). Теперь при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \rho_t$ получим требуемое.

2) Докажем, что $\alpha_{f'}(t) \geq \frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log \rho_t} - 2$. Возьмем любое $b < \rho_t$. Пусть $t = 0, d_1 d_2 \dots$. По лемме 8 для любого k имеем

$$\|\Pi_k e_i\| = \|T_{d_1} \dots T_{d_k} e_i\| \geq C(\omega, b)b^k,$$

где $i = 0, 1$, а константа $C(b, \omega) > 0$ не зависит от k . Положим $t_k = 0, d_1 \dots d_k$. Оценим гладкость функции f' в точке t слева (гладкость справа оценивается аналогично). Возьмем произвольное $s < t$. Пусть двоичная запись числа s совпадает с записью t в первых n разрядах после запятой (возможно, $n = 0$), а цифры в следующем разряде не совпадают. Таким образом, $s = 0, d_1 \dots d_n d'_{n+1} d'_{n+2} \dots$. Поскольку $s < t$, то $d_{n+1} = 1$, $d'_{n+1} = 0$. Пусть в записи числа t после цифры d_{n+1} следует l нулей подряд (возможно, $l = 0$). Таким образом, $d_{n+l+2} = 1$. Пусть также в записи числа s после цифры d'_{n+1} следует r единиц подряд (возможно, $r = 0$). Не ограничивая общности, предположим $l \geq r$ (случай $l \leq r$ разбирается точно так же). Поскольку первые $n + 1 + r$ цифр в записи чисел t и t_{n+1} совпадают, согласно утверждению б) леммы 1 угол между касательными к Γ в этих точках не превосходит $\Delta_{d_1 \dots d_{n+r+1}}$. Если теперь записать число t_{n+1} в виде $0, d_1 \dots d_n 011 \dots$, то в его записи первые $n + 1 + r$ цифр будут те же, что и в числе s , следовательно, угол между касательными к Γ в точках $\Gamma(t_{n+1})$ и $\Gamma(s)$ не превосходит $\Delta_{d_1 \dots d_n d'_{n+1} \dots d'_{n+r+1}}$.

Итак, угол между касательными в точках $\Gamma(t)$ и $\Gamma(s)$ не превосходит $\Delta_{d_1 \dots d_{n+r+1}} + \Delta_{d_1 \dots d_n d'_{n+1} \dots d'_{n+r+1}}$. Учитывая, что $\|\Pi_{d_1 \dots d_{n+r+1}} e_i\| \geq C(\omega, b)b^{n+r+1}$, имеем

$$\sin \Delta_{d_1 \dots d_{n+r+1}} = \frac{(\omega(1-2\omega))^{n+r+1}}{\|\Pi_{d_1 \dots d_{n+r+1}} e_0\| \|\Pi_{d_1 \dots d_{n+r+1}} e_1\|} \leq \frac{(\omega(1-2\omega))^{n+r+1}}{C^2(\omega, b)b^{2(n+r+1)}}. \quad (15)$$

Далее, используя лемму 7, получаем

$$\begin{aligned} \|\Pi_{d_1 \dots d_n d'_{n+1} \dots d'_{n+r+1}\| &= \|\Pi_{d_1 \dots d_n} T_0 T_1^r\| \geq C_\omega \|\Pi_{d_1 \dots d_n}\| \|T_0 T_1^r\| \\ &= C_\omega \|\Pi_{d_1 \dots d_n}\| \|T_1 T_0^r\| \geq C_\omega \|\Pi_{d_1 \dots d_n} T_1 T_0^r\| \\ &= C_\omega \|\Pi_{d_1 \dots d_n d_{n+1} \dots d_{n+r+1}}\| \geq C(\omega, b) C_\omega b^{n+r+1} \end{aligned}$$

(мы воспользовались тем, что $\|T_0 T_1^r\| = \|T_1 T_0^r\|$). Таким образом,

$$\|\Pi_{d_1 \dots d_n d'_{n+1} \dots d'_{n+r+1}\| \geq C(\omega, b) C_\omega b^{n+r+1}. \quad (16)$$

Теперь аналогично неравенству (15) выводим

$$\sin \Delta_{d_1 \dots d_n d'_{n+1} \dots d'_{n+r+1}} \leq \frac{(\omega(1-2\omega))^{n+r+1}}{(C(\omega, b) C_\omega)^2 b^{2(n+r+1)}}. \quad (17)$$

Объединяя соотношения (15) и (17), получаем

$$|f'(t) - f'(s)| \leq C_0(\omega, b) \frac{(\omega(1-2\omega))^{n+r+1}}{b^{2(n+r+1)}}. \quad (18)$$

Оценим теперь разность $|x(t) - x(s)|$. В силу монотонности функции $x(t)$ имеем

$$x(t) \geq x(t_{n+1}) = x(0, d_1 \dots d_n 011 \dots) \geq x(0, d_1 \dots d_n 01 \dots 1)$$

(в конце последовательности стоят $r+2$ единицы). С другой стороны,

$$x(s) \leq x(0, d_1 \dots d_n d'_{n+1} \dots d'_{n+r+1} 1) = x(0, d_1 \dots d_n 011 \dots 1)$$

(в конце $r+1$ единица). Тогда, используя (7), имеем $x(t) - x(s) \geq \|\Pi_{d_1 \dots d_n} T_0 \times T_1^{r+1} e\|_1$. Последняя величина в силу леммы 3 не меньше, чем

$$C \|\Pi_{d_1 \dots d_n d'_{n+1} \dots d'_{n+r+1}}\| \geq \frac{C \|\Pi_{d_1 \dots d'_{n+r+1}}\|}{\|T_1^{-1}\|} \geq \frac{C \cdot C(\omega, b)}{\|T_1^{-1}\|} b^{n+r+1},$$

где $C > 0$ – абсолютная константа (воспользовались неравенством (16)). Итак,

$$|x(t) - x(s)| \geq C_1(\omega, b) b^{n+r+1}. \quad (19)$$

Объединяя неравенства (18) и (19), получаем

$$\frac{\log |f'(t) - f'(s)|}{\log |x(t) - x(s)|} \geq \frac{\log C_0(\omega, b) + (n+r+1) \log(\omega(1-2\omega)) - 2(n+r+1) \log b}{\log C_1(\omega, b) + (n+r+1) \log b}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ левая часть последнего неравенства при $x(s) \rightarrow x(t)$ меньше, чем $\alpha_{f'}(x(t)) + \varepsilon$. Из (19) следует, что $n+r+1 \rightarrow \infty$ при $|x(t) - x(s)| \rightarrow 0$. Таким образом, при $x(s) \rightarrow x(t)$ имеем

$$\alpha_{f'}(x(t)) + \varepsilon \geq \frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log b} - 2.$$

В пределе при $b \rightarrow \rho_t$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем требуемое.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Первая часть доказательства (оценка локальной гладкости сверху) применима и для случая $\omega > \frac{1}{3}$. Однако оценка снизу в этом случае неверна. Ее доказательство основано на двух неравенствах: (19) и (20). Второе неравенство выполняется при любом $\omega \in (0, \frac{1}{2})$, первое – только при $\omega \leq \frac{1}{3}$, поскольку при $\omega > \frac{1}{3}$ неравенство (12) нарушается на базисных векторах e_i , $i = 0, 1$ (замечание 3), и только на них. Но при доказательстве (17), т.е. при оценке сверху угла $\Delta_{d_1 \dots d_n}$, это неравенство как раз и используется только для базисных векторов. Как известно, при каждом $\omega \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ функция $f(x)$ дифференцируема во всех точках $x(t)$, кроме двоично-рациональных t . Ее производная f' на этом множестве непрерывна. Однако формула локальной гладкости f' (формула (14)) не выполняется. Например, для иррационального числа t из замечания 3 имеем

$$\alpha_{f'}(x(t)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\log(1-\omega)}{\log \omega} - 1 \right),$$

что вдвое меньше, чем величина $\frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log \rho_t} - 2$.

Рассмотрим для каждого $r \geq 2$ аналогичную последовательность (t^r) : $d_n^r = [\log_r n] \pmod{2}$. Каждое число t^r иррационально. Несложно показать, что при любом $\omega > \frac{1}{3}$ имеем $\alpha_{f'}(x(t^r)) \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$. Это вполне естественно: функция $f'(x)$ имеет разрыв при двоично-рациональных t , поэтому ее локальная гладкость мала в тех точках t , которые “слишком хорошо” приближаются двоично-рациональными числами. Можно доказать, однако, что формула (14) выполнена при $\omega > \frac{1}{3}$ во всех “нормальных” точках t . Число $t \in (0, 1)$ называется *нормальным*, если для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n в двоичной записи t между цифрами с номерами n и $n(1+\varepsilon)$ найдутся две разные цифры. В частности, если число $t = 0, d_1 d_2 \dots$ обладает свойством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n d_k = \frac{1}{2},$$

то оно нормальное. Таким свойством обладают почти все числа из интервала $(0, 1)$. Следовательно, при $\omega > \frac{1}{3}$ формула локальной гладкости (14) выполнена почти во всех точках t (по мере Лебега на отрезке $[0, 1]$).

Формула (14) неудобна в применении, поскольку выражает локальную гладкость через величину ρ_t , которую трудно оценивать для произвольной последовательности (t) . Однако во всех рациональных точках t величина ρ_t элементарно вычисляется как собственное значение соответствующей (2×2) -матрицы. Кроме того, формула (14) позволяет установить точные границы, в которых может находиться показатель локальной гладкости, а также описать множества точек t , на которых локальная гладкость принимает фиксированное значение.

Пусть $\rho(T)$ – спектральный радиус линейного оператора T , т.е. максимальный модуль его собственных значений. Тогда для любого $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$ имеем

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $t \in [0, 1]$ – рациональное число с периодом $(d_1 \dots d_m)$, $m \geq 1$, и $\Pi_m = T_{d_1} \dots T_{d_m}$, то

$$\alpha_{f'}(x(t)) = \frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\frac{1}{m} \log \rho(\Pi_m)} - 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фактически надо доказать, что $\rho_t = (\rho(\Pi_m))^{1/m}$. Пусть период последовательности (t) начинается с $(l+1)$ -ой цифры. Возьмем достаточно большое $N = km + r$, $r < m$. Имеем

$$\|\Pi_{l+N}\|^{1/(l+N)} = \|\Pi_l(\Pi_m)^k\Pi_r\|^{1/(N+l)},$$

где Π_l – произведение первых l операторов, Π_r – произведение последних r . Тогда

$$\|\Pi_l\|^{1/(N+l)} \leq \|(\Pi_m)^k\|^{1/(l+N)} \|\Pi_r\|^{1/(N+l)}.$$

Крайние сомножители, очевидно, стремятся к 1 при $N \rightarrow \infty$, для среднего получим

$$\begin{aligned} \|(\Pi_m)^k\|^{1/(l+N)} &= \|(\Pi_m)^k\|^{1/(l+km+r)} \\ &= (\|(\Pi_m)^k\|^{1/k})^{km/(l+km+r)} \rightarrow (\rho(\Pi_m))^{1/m}, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для получения оценки снизу заметим, что операторы Π_l и Π_r невырожденные, поэтому $\|\Pi_N\| \geq \|\Pi_l^{-1}\|^{-1} \|(\Pi_m)^k\| \|\Pi_r^{-1}\|^{-1}$. Далее повторяем те же рассуждения.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Двоично-рациональные t имеют два разложения, они могут оканчиваться последовательностью нулей либо последовательностью единиц. Согласно следствию 1 в качестве ρ_t можно взять либо $\rho(T_0)$, либо $\rho(T_1)$. Противоречия здесь нет, поскольку для операторов T_0, T_1 имеем $\rho(T_0) = \rho(T_1)$.

Используя следствие 1, можно точно находить показатель локальной гладкости во всех рациональных точках t .

ПРИМЕР 1. При $0 < \omega \leq \frac{1}{3}$ имеем $\rho(T_0) = \rho(T_1) = 1 - 2\omega$. Следовательно, в двоично-рациональных точках t получаем

$$\alpha_{f'}(x(t)) = \frac{\log \omega}{\log(1 - 2\omega)} - 1. \quad (20)$$

Рассмотрим теперь числа вида $t = \frac{n}{3 \cdot 2^k}$, где $n \geq 1$, $k \geq 0$ и n не делится на 3. Их двоичная запись имеет период (01) (оканчивается последовательностью $010101\dots$). Для них $\rho_t = \sqrt{\rho(T_0 T_1)} = \frac{1}{2}(\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2})$. Итак,

$$\alpha_{f'}(x(t)) = \frac{\log(\omega(1 - 2\omega))}{\log(\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2}) - 1} - 2 \quad (21)$$

(напомним, что все логарифмы – двоичные). Величину, определенную равенством (20), будем в дальнейшем обозначать $\alpha_0(\omega)$, величину (21) обозначим $\alpha_1(\omega)$.

Заметим, что $\alpha_0(\omega) < 1$ при $\omega > \frac{1}{4}$. Следовательно, при $\omega > \frac{1}{4}$ функция $f(x)$ не имеет второй производной в точках $x(t)$ при двоично-рациональных t (иначе должно быть $\alpha_{f'}(x) \geq 1$). С другой стороны, при $\omega < \frac{1}{4}$ имеем $\alpha_1(\omega) < 1$, следовательно, f не имеет второй производной в точках $x(t)$ при $t = \frac{n}{3 \cdot 2^k}$. Таким образом, доказано

СЛЕДСТВИЕ 2. При всех $\omega \in (0, \frac{1}{2})$, кроме $\omega = \frac{1}{4}$, гладкость кривой де Рама меньше, чем 2. В частности, ни при каком ω кривая де Рама не принадлежит C^2 .

Из теоремы 1 можно сделать ряд интересных выводов о распределении точек x , в которых производная $f'(x)$ имеет заданную локальную гладкость. Поскольку при любом $0 < \omega < \frac{1}{2}$ оба оператора T_0, T_1 невырождены, нижний спектральный радиус вдоль любой последовательности (t) не зависит от цифр, стоящих в начале этой последовательности, а зависит только от ее “хвоста”. Отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $0 < \omega \leq \frac{1}{3}$. Тогда для любых $t, s \in [0, 1]$ таких, что $2^r s - t \in \mathcal{D}$ при некотором целом r (т.е. в двоичной записи числа t и s оканчиваются одинаковой последовательностью нулей и единиц), локальная гладкость функции $f'(x)$ в точках $x(t)$ и $x(s)$ одинакова.

В каких границах может находиться показатель локальной гладкости $f'(x)$ для различных $x \in [-1, 1]$? Для ответа на этот вопрос используются понятия совместного спектрального радиуса и нижнего спектрального радиуса линейных операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Совместным спектральным радиусом конечномерных линейных операторов B_0, B_1 называется величина

$$\hat{\rho}(B_0, B_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{d_1, \dots, d_n \in \{0, 1\}} \|B_{d_1} \dots B_{d_n}\|^{1/n}. \quad (22)$$

Нижним спектральным радиусом называется величина

$$\check{\rho}(B_0, B_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{d_1, \dots, d_n \in \{0, 1\}} \|B_{d_1} \dots B_{d_n}\|^{1/n}. \quad (23)$$

В равенствах (22) и (23) пределы существуют и не зависят от нормы (см., например, [31]). Ясно, что $\hat{\rho} \geq \check{\rho}$. Если $B_0 = B_1$, то оба числа $\hat{\rho}$ и $\check{\rho}$ равны обычному спектральному радиусу $\rho(B_0)$. Это следует из формулы Гельфанда $\rho(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|B^n\|^{1/n}$. В общем случае $\hat{\rho} > \check{\rho}$.

Следующее утверждение общеизвестно. Мы приведем его доказательство для удобства читателя.

ЛЕММА 9. Для любых операторов B_0, B_1 и для любого их произведения Π_n имеем

$$\check{\rho}(B_0, B_1) \leq (\rho(\Pi_n))^{1/n} \leq \hat{\rho}(B_0, B_1). \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого k имеем

$$\left(\min_{d_1, \dots, d_{kn}} \|\Pi_{kn}\| \right)^{\frac{1}{kn}} \leq \|(\Pi_n)^k\|^{\frac{1}{kn}} \leq \left(\max_{d_1, \dots, d_{kn}} \|\Pi_{kn}\| \right)^{\frac{1}{kn}}.$$

При $k \rightarrow \infty$ получаем требуемое.

Аналогично докажем, что $\check{\rho}(B_0, B_1) \leq \rho_t(B_0, B_1) \leq \hat{\rho}(B_0, B_1)$ для любой последовательности (t) . Для операторов T_0, T_1 будем обозначать $\check{\rho}(T_0, T_1) = \check{\rho}$, $\hat{\rho}(T_0, T_1) = \hat{\rho}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $0 < \omega \leq \frac{1}{3}$. Для любого $x \in [-1, 1]$ имеем

$$\frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log \check{\rho}} - 2 \leq \alpha_{f'}(x) \leq \frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log \hat{\rho}} - 2.$$

Таким образом, локальная гладкость производной кривой де Рама ограничена сверху и снизу. Следствие 4 предоставляет такие границы. В следующем параграфе мы покажем, что эти границы точные, и, более того, вычислим их значения для каждого ω . Пока начнем решать другую задачу – нахождение показателя глобальной гладкости кривой де Рама α_f . Напомним, что при каждом $\omega > \frac{1}{3}$ имеем $\alpha_f = 1$ (предложение 1). Поэтому сосредоточимся на рассмотрении случая $0 < \omega \leq \frac{1}{3}$ и везде ниже будем предполагать, что ω принадлежит этому интервалу. Поскольку $\alpha_f = \alpha_{f'} + 1$, достаточно вычислить гладкость производной f' . Локальная гладкость производной в каждой точке вычисляется по формуле (14). Для того чтобы найти глобальную гладкость, докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для каждого $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$ показатель Гёльдера функции $f'(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ удовлетворяет равенству

$$\alpha_{f'} = \frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log \check{\rho}} - 2. \quad (25)$$

Этот показатель точен, т. е. существует константа C такая, что для любых x, y имеем $|f'(x) - f'(y)| \leq C|x - y|^{\alpha_{f'}}$.

Доказательству этого предложения предпошлем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 10. Для каждого $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$ существует константа C_1 такая, что для любого $a \in K$ и для любого произведения Π_n операторов T_0, T_1 выполнено

$$\|\Pi_n a\| \geq C_1 \check{\rho}^n \|a\|. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разбиваем на две части: случай $\omega \in (0, \frac{1}{3})$ и случай $\omega = \frac{1}{3}$. В первом случае воспользуемся следующим фактом: для любой пары неотрицательных операторов $B_0, B_1 \geq 0$ существует константа C такая, что для любого произведения этих операторов имеем $\|\Pi_n\| \geq C \check{\rho}^n$, где $\check{\rho} = \check{\rho}(B_0, B_1)$ (см. [30]). Теперь, применив лемму 5, завершаем доказательство.

Второй случай придется рассмотреть отдельно, поскольку лемма 5 при $\omega = \frac{1}{3}$ не выполняется. При $\omega = \frac{1}{3}$ нижний радиус $\check{\rho}$ равен $\frac{1}{3}$. В самом деле, $\rho(T_0) = \frac{1}{3}$; применив (24) при $n = 1$, заключаем, что $\check{\rho} \leq \frac{1}{3}$. С другой стороны, легко показать, что $\|T_i a\| \geq \frac{1}{3} \|a\|$ для любого $a \in K$. Значит, для любого произведения Π_n имеем

$$\|\Pi_n a\| \geq \left(\frac{1}{3}\right)^n \|a\|.$$

Следовательно, $\check{\rho} \geq \frac{1}{3}$, и свойство (26) выполнено при $C_1 = 1$.

Доказательство предложения 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1.

1) Докажем что $\alpha_{f'} \leq \frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log \tilde{\rho}} - 2$. Согласно следствию 3 имеем $\alpha_f \leq 2$, значит, $\alpha_{f'} \leq 1$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\sup\{\alpha \mid |f'(x_1) - f'(x_2)| \leq C_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha, x_1, x_2 \in [-1, 1]\}$$

не превосходит $\frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log \tilde{\rho}} - 2$. Для каждого n выбираем произведение Π_n , имеющее наименьшую норму. Тогда $\|\Pi_n\|^{1/n} \rightarrow \tilde{\rho}$, $n \rightarrow \infty$. Следовательно, для любого $p \in (\tilde{\rho}, 1)$ выполнено $\|\Pi_n\| \leq C(p)p^n$. Пусть $\Pi_n = T_{d_1} \dots T_{d_n}$. Полагая $t_n = 0, d_1 \dots d_n 0$, $\tilde{t}_n = t_n + 2^{-n}$. Так же, как и в доказательстве теоремы 1, устанавливаем, что

$$\begin{aligned} |x(\tilde{t}_n) - x(t_n)| &\leq 4\sqrt{2} C(p)p^n, \\ |f'(\tilde{t}_n) - f'(t_n)| &\geq C \left(\frac{\omega(1-2\omega)}{C^2(p)p^2} \right)^n, \end{aligned}$$

где C – абсолютная константа. Дальнейшее рассуждение полностью совпадает с рассуждениями, проведенными в первой части доказательства теоремы 1.

2) Для доказательства обратного неравенства, а заодно и точности показателя Гёльдера, достаточно установить, что для любых $t, s \in [0, 1]$

$$|f'(t) - f'(s)| \leq C |x(t) - x(s)|^{\frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log \tilde{\rho}} - 2}, \quad (27)$$

где константа C не зависит от t и s . Согласно лемме 10 имеем $\|\Pi_k e_i\| \geq C_1 \tilde{\rho}^k$, $i = 0, 1$, для любого Π_k . Не ограничивая общности, считаем, что $s < t$ и что двоичные записи чисел s и t совпадают в первых n разрядах после запятой (возможно, $n = 0$), а цифры в следующем разряде не совпадают. Таким образом, $t = 0, d_1 \dots d_n 1 d_{n+2} \dots$; $s = 0, d_1 \dots d_n 0 d'_{n+2} \dots$. Пусть в записи числа t после цифры d_{n+1} следует l нулей подряд (возможно, $l = 0$). Таким образом, $d_{n+l+2} = 1$. Пусть также в записи числа s после цифры d'_{n+1} следует r единиц подряд (возможно, $r = 0$). Не ограничивая общности, предполагаем, что $l \geq r$. Далее повторяем соответствующую часть доказательства теоремы 1: пользуясь леммой 1, заключаем, что угол между касательными к Γ в точках $\Gamma(t)$ и $\Gamma(s)$ не превосходит $\Delta_{d_1 \dots d_{n+r+1}} + \Delta_{d_1 \dots d_n d'_{n+1} \dots d'_{n+r+1}}$. Учитывая (26), получаем, что синус каждого из двух углов не превосходит $\frac{(\omega(1-2\omega))^{n+r+1}}{C_1^2 \tilde{\rho}^{2(n+r+1)}}$. Имеем, таким образом, следующий аналог неравенства (18):

$$|f'(t) - f'(s)| \leq C_0(\omega) \frac{(\omega(1-2\omega))^{n+r+1}}{\tilde{\rho}^{2(n+r+1)}}, \quad (28)$$

где константа $C_0(\omega)$ не зависит от t и s . Точно так же оцениваем $|x(t) - x(s)|$:

$$|x(t) - x(s)| \geq C_1(\omega) \tilde{\rho}^{n+r+1}. \quad (29)$$

Объединяя неравенства (18) и (19), получаем

$$|f'(t) - f'(s)| \leq C_0(\omega) \left(\frac{|x(t) - x(s)|}{C_1(\omega)} \right)^{\frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log \tilde{\rho}} - 2}.$$

Остается положить $C = C_0(\omega) / (C_1(\omega))^{\frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log \tilde{\rho}} - 2}$, тогда получаем (27). Предложение доказано.

§ 5. Вычисление показателей гладкости

Предложение 2 позволяет для любого значения ω выразить показатель гладкости кривой де Рама через нижний спектральный радиус $\check{\rho}$ операторов T_0, T_1 . Кроме того, значения $\check{\rho}$ и $\hat{\rho}$ определяют границы локальной гладкости кривой де Рама (следствие 4). Как вычислять эти значения? Возможно ли получить формулу, выражающую спектральные радиусы $\check{\rho}$ и $\hat{\rho}$ через параметр ω ? В общем случае проблема вычисления или даже оценки этих величин для произвольных линейных операторов чрезвычайно сложна. Исследования последнего времени [32]–[34] показывают, что даже для (2×2) -матриц не существует формулы, выражающей совместный спектральный радиус в виде алгебраических функций от коэффициентов. Все известные алгоритмы для приближенного вычисления $\hat{\rho}(B_0, B_1)$ и $\check{\rho}(B_0, B_1)$ сходятся очень медленно и требуют больших вычислительных затрат (см., например, [25], [35], [36]). Тем не менее, для операторов T_0, T_1 эта задача решается полностью.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $0 < \omega \leq \frac{1}{4}$, то

$$\check{\rho} = \sqrt{\rho(T_1 T_0)} = \frac{1}{2}(\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2}), \quad \hat{\rho} = \rho(T_0) = 1 - 2\omega.$$

Если $\frac{1}{4} \leq \omega < \frac{1}{2}$, то

$$\check{\rho} = \rho(T_0) = \begin{cases} 1 - 2\omega, & \frac{1}{4} \leq \omega \leq \frac{1}{3}, \\ \omega, & \frac{1}{3} \leq \omega < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \hat{\rho} = \sqrt{\rho(T_1 T_0)} = \frac{1}{2}(\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2}).$$

Для доказательства этого предложения будет использована следующая несложная

ЛЕММА 11. Пусть B_0, B_1 – два линейных оператора, действующих в $\mathbb{R}^d$, и λ – положительное число. Тогда:

- а) если существует центрально-симметричное относительно нуля выпуклое тело (выпуклый компакт с непустой внутренностью) $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d$, для которого $B_i \mathcal{M} \subset \lambda \mathcal{M}$, то $\hat{\rho}(B_0, B_1) \leq \lambda$;
- б) если существует замкнутое множество $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^d$, не содержащее нуля, для которого $B_i \mathcal{Q} \subset \lambda \mathcal{Q}$, то $\check{\rho}(B_0, B_1) \geq \lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Обозначим через $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ норму Минковского, соответствующую выпуклому телу $\mathcal{M}$. Поскольку $\|B_i\|_{\mathcal{M}} \leq \lambda$, $i = 0, 1$, то норма любого произведения $B_{d_1} \dots B_{d_n}$ не превосходит λ^n . Следовательно, $\max_{d_1, \dots, d_n} \|B_{d_1} \dots B_{d_n}\|_{\mathcal{M}}^{1/n} \leq \lambda$ для любого n , поэтому $\hat{\rho}(B_0, B_1) \leq \lambda$.

б) Пусть $h = \inf\{\|u\|, u \in \mathcal{Q}\}$. Ясно, что $h > 0$. Возьмем произвольную точку $a \in \mathcal{Q}$. Для любых $d_1, \dots, d_n$ имеем $B_{d_1} \dots B_{d_n} a \in \lambda^n \mathcal{Q}$, а значит, $\|B_{d_1} \dots B_{d_n} a\| \geq h \lambda^n$. Следовательно,

$$\min_{d_1, \dots, d_n} \|B_{d_1} \dots B_{d_n}\|^{1/n} \geq \left(\frac{h}{\|a\|} \right)^{1/n} \lambda$$

для любого n , поэтому $\check{\rho}(B_0, B_1) \geq \lambda$.

Идея доказательства предложения 3 состоит в следующем. Из леммы 11 получаем оценки сверху для $\hat{\rho}$ и оценки снизу для $\check{\rho}$. Для этого нужно лишь предъявить подходящее выпуклое тело $\mathcal{M}$ или, соответственно, замкнутое множество $\mathcal{Q}$. Для оценки снизу из леммы 9 имеем обратные оценки. Согласно (24) для любого произведения Π_n величина $(\rho(\Pi_n))^{1/n}$ является оценкой снизу для $\hat{\rho}$ и оценкой сверху для $\check{\rho}$. Если “повезет” и нижняя оценка совпадет с верхней, то значение совместного спектрального радиуса будет найдено. Для этого нужно найти подходящее произведение Π_n и множество $\mathcal{M}$ (или $\mathcal{Q}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. 1) $0 < \omega \leq \frac{1}{4}$. Найдем $\check{\rho}$. Неравенство $\check{\rho} \leq \sqrt{\rho(T_1 T_0)}$ следует из (24) при $n = 2$, и $\Pi_n = T_1 T_0$. Для доказательства обратного неравенства применим утверждение б) леммы 11. В качестве $\mathcal{Q}$ возьмем выпуклую фигуру, ограниченную отрезком $[u_0, u_1]$, лучом $l_0 = \{u_0 + ta_0, t \geq 0\}$ и лучом $l_1 = \{u_1 + ta_1, t \geq 0\}$, где $u_0 \in K$ – собственный вектор оператора $T_1 T_0$, соответствующий собственному значению $\rho(T_1 T_0)$, $a_0 = (-\omega, 1 - 3\omega)^T$, u_1 и a_1 симметричны соответственно u_0 и a_0 относительно биссектрисы положительного квадранта.

Покажем, что $T_i \mathcal{Q} \subset \lambda \mathcal{Q}$, где $\lambda = \sqrt{\rho(T_1 T_0)}$. Доказательство проведем для $i = 0$ (для $i = 1$ доказательство аналогично). Легко проверить, что $T_0 u_0 = \lambda u_1$. Далее, вектор $T_0(u_1 - u_0)$ сонаправлен с вектором a_1 , следовательно, точка $T_0 u_1$ лежит на луче $T_0 l_1$. Таким образом, обе вершины фигуры $T_0 \mathcal{Q}$ принадлежат $\lambda \mathcal{Q}$. Далее, $T_0 a_0 = \omega a_0$, следовательно, $T_0 l_0 \subset \lambda \mathcal{Q}$. Наконец, непосредственной проверкой устанавливаем, что вектор $T_0 a_1$ лежит в положительном квадранте между векторами a_0 и a_1 .

Итак, граница фигуры $T_0 \mathcal{Q}$ лежит во множестве $\lambda \mathcal{Q}$. В силу выпуклости $\mathcal{Q}$ это означает, что $T_0 \mathcal{Q} \subset \lambda \mathcal{Q}$.

Найдем теперь $\hat{\rho}$. Неравенство $\hat{\rho} \geq \rho(T_0)$ следует из (24) при $n = 1$, $\Pi_n = T_0$. Для доказательства обратного неравенства применим утверждение а) леммы 11. В качестве $\mathcal{M}$ возьмем квадрат $\{(x_0, x_1), |x_0| + |x_1| \leq 1\}$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что вершины $(1, 0)^T$ и $(-1, 0)^T$ переходят в соответствующие вершины квадрата $\lambda \mathcal{M}$, $\lambda = \rho(T_0) = 1 - 2\omega$, а вершины $(0, 1)^T$, $(0, -1)^T$ переходят внутрь этого квадрата. Таким образом, $T_0 \mathcal{M} \subset \lambda \mathcal{M}$. Аналогично, для оператора T_1 .

2) $\frac{1}{4} < \omega < \frac{1}{2}$. Найдем $\check{\rho}$. Неравенство $\check{\rho} \leq \rho(T_0)$ следует из (24). Для доказательства обратного неравенства разберем два случая. Если $\frac{1}{4} \leq \omega < \frac{1}{3}$, то в качестве $\mathcal{Q}$ возьмем выпуклую фигуру, ограниченную отрезком $[(0, 1)^T, (1, 0)^T]$ и лучами $\{(0, t), t \geq 1\}$ и $\{(t, 0), t \geq 1\}$. Тогда $T_i \mathcal{Q} \subset \lambda \mathcal{Q}$, где $\lambda = \rho(T_0) = 1 - 2\omega$. Если же $\frac{1}{3} \leq \omega < \frac{1}{2}$, то в качестве $\mathcal{Q}$ возьмем угол $\{(x_0, x_1), \min\{x_0, x_1\} \geq 1\}$. Снова получаем $T_i \mathcal{Q} \subset \lambda \mathcal{Q}$, где $\lambda = \rho(T_0) = \omega$.

Найдем $\hat{\rho}$. Неравенство $\hat{\rho} \geq \sqrt{\rho(T_1 T_0)}$ следует из (24). Для доказательства обратного неравенства возьмем $\mathcal{M} = \mathcal{Q} \cap (-\mathcal{Q})$, где $\mathcal{Q}$ – выпуклая фигура, ограниченная отрезком $[u_0, u_1]$, лучом $l_0 = \{u_0 + ta_0, t \geq 0\}$ и лучом $l_1 = \{u_1 + ta_1, t \geq 0\}$ (та же, что построена в п. 1) доказательства); $\mathcal{M}$ является шестиугольником с вершинами $\pm u_0, \pm u_1$, и еще две вершины лежат на прямой $x_0 + x_1 = 0$. Так же, как в п. 1), докажем, что $T_i \mathcal{Q} \subset \lambda \mathcal{Q}$, где $\lambda = \sqrt{\rho(T_1 T_0)}$. Следовательно, $T_i \mathcal{M} \subset \lambda \mathcal{M}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Совместный спектральный радиус впервые был рассмотрен в работе [37] в 1960 г., после чего почти 30 лет не использовался математиками. Только в 1988–1989 гг. выяснилась исключительная важность этого понятия в теории масштабирующих функций и всплесков. Было установлено (см., например, [8], [25], [28]), что показатель Гёльдера масштабирующей функции равен логарифму от совместного спектрального радиуса подходящих линейных операторов. Например, для функции (9) имеем $\alpha_\varphi = -\log_2 \hat{\rho}$, где $\hat{\rho}$ – совместный спектральный радиус операторов T_0, T_1 . Это обстоятельство вызвало активный интерес к изучению совместного спектрального радиуса, за короткое время было написано больше ста работ. Вывод таков: совместный спектральный радиус в общем случае невычислим (точные формулировки см. в [32], [33]), задача о приближенном вычислении НР полная, и, вероятнее всего, не существует эффективного и быстрого алгоритма для оценки совместного спектрального радиуса. Все существующие алгоритмы сходятся медленно, их сложность растет экспоненциально от размерности (некоторые из алгоритмов можно найти в [9], [26], [35], [36]). В работе [34] показано, что даже для (2×2) -матриц нахождение совместного спектрального радиуса не сводится к вычислению обычного спектрального радиуса никакого конечного произведения. То, что в нашем случае для любого значения ω эта задача свелась к вычислению обычного спектрального радиуса произведений, состоящих из одной или двух матриц, можно воспринимать как определенное везение.

Заметим также, что, применив предложение 3 к функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей уравнению (9), получаем точный показатель гладкости масштабирующей функции (4) (поскольку $\alpha_\varphi = -\log_2 \hat{\rho}$) и, следовательно, скорость сходимости алгоритма Чайкина (10). Этот показатель был впервые вычислен в работе [28], а до этого в работе [29] был получен ряд численных результатов.

Объединив предложения 1–3, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Если $\omega \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, то кривая де Рама не дифференцируема в точках $x(t)$ при двоично-рациональных t и дифференцируема во всех остальных точках, при этом $\alpha_f = 1$. Если $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$, то кривая де Рама непрерывно дифференцируема, при этом

$$\alpha_f = \begin{cases} \frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log(\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2})} - 1 & \text{при } 0 < \omega \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{\log \omega}{\log(1-2\omega)} & \text{при } \frac{1}{4} < \omega < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (30)$$

Теперь нам будет удобнее вновь перейти к производной f' . Из (30) следует, что при каждом $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$ имеем $\alpha_{f'} = \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$, где, напомним,

$$\alpha_0 = \frac{\log \omega}{\log(1-2\omega)} - 1, \quad \alpha_1 = \frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log(\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2})} - 2.$$

Графики функций $\alpha_0(\omega)$ и $\alpha_1(\omega)$ представлены на рис. 1. Функция α_0 на полуинтервале $(0, \frac{1}{3}]$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0; α_1 монотонно возрастает от 0 до $\frac{2 \log 3}{\log 6 - \log(\sqrt{5}+1)} - 2 = 1,5588 \dots$. При этом $\alpha_0 = \alpha_1$ в единственной точке $\omega = \frac{1}{4}$,

Рис. 1

где обе функции равны 1. При остальных ω имеем $\min\{\alpha_0, \alpha_1\} < 1$. Таким образом, показатель гладкости кривой де Рама возрастает, когда ω меняется от 0 до $\frac{1}{4}$, в точке $\omega = \frac{1}{4}$ достигает своего максимума: $\alpha_f = 2$, затем на интервале $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ убывает до $\alpha_f = 1$ в точке $\omega = \frac{1}{3}$, а затем на интервале $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ остается постоянным, равным 1. Заметим, что при $\omega = \frac{1}{3}$ гладкость функции f' равна нулю (при том, что f' непрерывна).

СЛЕДСТВИЕ 5. Ни при каком $\omega \neq \frac{1}{4}$ кривая де Рама не является сплайном.

В самом деле, при $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$, $\omega \neq \frac{1}{4}$, имеем $\alpha_f \in (1, 2)$, а сплайн не может иметь дробную гладкость. При $\omega \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ функция не является дифференцируемой на всюду плотном множестве точек (теорема 2) и, следовательно, не является сплайном.

В заключение приведем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. а) Применив формулу (8) и оценив знаменатель снизу с помощью (26), получаем, что для любого произведения Π_n

$$\sin \Delta_n \leq \frac{1}{C_1^2} r^n,$$

где $r = r(\omega) = \frac{\omega(1-2\omega)}{\check{\rho}^2}$, $\Delta_n = \Pi_n K$. Теперь используя предложение 3, имеем

$$\check{\rho} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2}), & 0 < \omega \leq \frac{1}{4}, \\ 1 - 2\omega, & \frac{1}{4} < \omega \leq \frac{1}{3}, \\ \omega, & \frac{1}{3} < \omega \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Несложно показать, что при любом ω , кроме $\omega = \frac{1}{3}$, имеем $\omega(1 - 2\omega) < \check{\rho}^2$. Поэтому $r(\omega) < 1$ и $\sin \Delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Для $\omega = \frac{1}{3}$ имеем $r(\omega) = 1$, однако, тем не менее, $\sin \Delta_n \rightarrow 0$. Показать это можно, например, следующим образом: пусть $\omega = \frac{1}{3}$; тогда если угол между двумя векторами из K равен δ , а угол между их образами под действием оператора T_0 равен $\tilde{\delta}$, то $\sin \tilde{\delta} < \frac{\sin \delta}{\sqrt{1+\sin^2 \delta}}$ (доказательство ввиду его простоты не приводим). То же верно для оператора T_1 . Поэтому для любого n имеем $\sin \Delta_{n+1} < \frac{\sin \Delta_n}{\sqrt{1+\sin^2 \Delta_n}}$. Следовательно, $\sin \Delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

б) Пусть после цифры d_{n-2} последовательности (t) следуют цифры 01. По условию леммы n можно взять сколь угодно большим. По лемме 4 получаем $\|\Pi_n e_i\| \geq C_\omega \|\Pi_n\|$. Далее, для любой пары неотрицательных операторов имеем $\|\Pi_n\| \geq C\tilde{\rho}^n$ (см. [30]). Итак, $\|\Pi_n e_i\| \geq C_4 \tilde{\rho}^n$, где константа C_4 не зависит от n . Тогда

$$\sin \Delta_n \leq C_4^{-2} r^n,$$

где $r = \frac{\omega(1-2\omega)}{\tilde{\rho}^2}$. Поскольку $r < 1$ при $\omega \neq \frac{1}{3}$, то $\Delta_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Кроме того, $\Delta_k \leq \Delta_n$ для любого $k \geq n$. При произвольном $\varepsilon > 0$, взяв n достаточно большим, имеем $\Delta_k < \varepsilon$ для всех $k \geq n$. Лемма доказана.

§ 6. Распределение точек фиксированной локальной гладкости

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_{\min} &= \min \left\{ \frac{\log \omega}{\log(1-2\omega)} - 1, \frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log(\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2}) - 1} - 2 \right\}, \\ \alpha_{\max} &= \max \left\{ \frac{\log \omega}{\log(1-2\omega)} - 1, \frac{\log(\omega(1-2\omega))}{\log(\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2}) - 1} - 2 \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом, при $\omega \leq \frac{1}{4}$ имеем $\alpha_{\min} = \alpha_1$, $\alpha_{\max} = \alpha_0$, при $\omega \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ имеем $\alpha_{\min} = \alpha_0$, $\alpha_{\max} = \alpha_1$. При этом $\alpha_{\min} < \alpha_{\max}$ для всех $\omega \neq \frac{1}{4}$. По теореме 2 имеем $\alpha_{f'} = \alpha_{\min}$. Согласно следствию 4 показатель локальной гладкости функции $f'(x)$ в любой точке $x \in [-1, 1]$ лежит между $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$. В примере 1 было показано, что обе границы достигаются: при $\omega \leq \frac{1}{4}$ имеем $\alpha_{f'}(x(t)) = \alpha_{\max}$ в двоично-рациональных точках t и $\alpha_{f'}(x(t)) = \alpha_{\min}$ в точках вида $t = \frac{n}{3 \cdot 2^k}$; при $\omega \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ – наоборот: в двоично-рациональных точках имеем $\alpha_{f'}(x(t)) = \alpha_{\min}$, а в точках вида $t = \frac{n}{3 \cdot 2^k}$ имеем $\alpha_{f'}(x(t)) = \alpha_{\max}$. Таким образом, доказано следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$. В любой точке $x \in [-1, 1]$ показатель локальной гладкости функции $f'(x)$ принадлежит отрезку $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, где $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$ определены в (31). Если $0 < \omega \leq \frac{1}{4}$, то максимальная локальная гладкость $\alpha_{\max}$ достигается в точках $x(t)$ при двоично-рациональных t , а если $\frac{1}{4} \leq \omega \leq \frac{1}{3}$, то при $t = \frac{n}{3 \cdot 2^k}$, $n \not\equiv 0 \pmod{3}$. Показатель минимальной гладкости $\alpha_{\min}$ в случае $0 < \omega \leq \frac{1}{4}$ достигается при $t = \frac{n}{3 \cdot 2^k}$, $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, а в случае $\frac{1}{4} \leq \omega \leq \frac{1}{3}$ – при двоично-рациональных t .

Для данного $\alpha \geq 0$ обозначим $\Omega_\alpha = \{t \in [0, 1], \alpha_{f'}(x(t)) = \alpha\}$ множество точек данной гладкости. Согласно предложению 4 множество Ω_α может быть непусто только для $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Непустое подмножество отрезка $[0, 1]$ назовем $(0, 1)$ -*множеством*, если вместе с любой своей точкой x оно содержит все точки, двоичные записи которых оканчиваются той же последовательностью нулей и единиц, что и двоичная запись x .

Иначе говоря, принадлежность произвольной точки данному $(0, 1)$ -множеству не зависит ни от какого конечного подмножества цифр в его двоичной записи. Тогда $(0, 1)$ -множеством точки t (обозначим его $\mathcal{M}_t$) назовем множество всех чисел отрезка $[0, 1]$, двоичная запись которых оканчивается той же последовательностью, что и двоичная запись t . Ясно, что $\mathcal{M}_t$ – наименьшее по включению $(0, 1)$ -множество, содержащее t . Легко видеть, что $\mathcal{M}_t = \{2^r t + p, r \in \mathbb{Z}, p \in \mathcal{D}\} \cap [0, 1]$ (напомним, что $\mathcal{D}$ – множество двоично-рациональных чисел). Любое множество $\mathcal{M}_t$ является классом эквивалентности, поэтому весь отрезок $[0, 1]$ естественным образом разбивается на непересекающиеся $(0, 1)$ -множества. Каждое $(0, 1)$ -множество всюду плотно на отрезке $[0, 1]$. Кроме того, если оно измеримо по Лебегу, то его мера равна либо 0, либо 1. Этот факт называется *законом нуля и единицы*. Он следует из другого утверждения: если множество $A \in [0, 1]$ имеет положительную меру и для любого двоично-рационального p имеем $(A + p) \cap [0, 1] \subset A$, то A имеет меру 1 (доказательство см., например, в [38]).

Согласно следствию 2 для любого $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ множество Ω_α либо пусто, либо является $(0, 1)$ -множеством. В частности, каждое непустое множество Ω_α всюду плотно на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим теперь показатель локальной гладкости $\alpha_{f'}(x(t))$ как функцию от t . Эта функция ограничена и измерима. Кроме того, в силу следствия 2 все ее множества уровня (т.е. множества $\{t \in [0, 1], \alpha_{f'}(x(t)) \leq \alpha\}$) являются $(0, 1)$ -множествами. Хорошо известно, что измеримые функции, у которых все множества уровня имеют меру 0 или 1, суть константы (см., например, [38]). Таким образом, показатель $\alpha_{f'}(x(t))$ почти во всех точках отрезка $[0, 1]$ один и тот же, будем обозначать его α_{av} и называть *средней гладкостью* f' .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$. Для любого $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ множество Ω_α непусто и является $(0, 1)$ -множеством. В частности, каждое Ω_α всюду плотно на отрезке $[0, 1]$. Существует число $\alpha_{av} \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, зависящее от ω , такое, что $\alpha_{f'}(x) = \alpha_{av}$ для почти всех t из отрезка $[0, 1]$. Для каждого $\alpha \neq \alpha_{av}$ множество Ω_α имеет меру нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из всех утверждений теоремы не доказано только то, что множество Ω_α для каждого $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ непусто. Пока мы лишь доказали, что наибольшее и наименьшее значения гладкости достигаются (предложение 4). Покажем, что все промежуточные значения также достигаются в некоторых точках. В силу формулы локальной гладкости (теорема 1) для этого достаточно доказать, что для любого $q \in (\check{\rho}, \hat{\rho})$ существует последовательность нулей и единиц (t) , для которой $\rho_t = q$. Докажем несколько более сильное утверждение.

ЛЕММА 12. Для каждого $q \in [\check{\rho}, \hat{\rho}]$ существует такая последовательность из нулей и единиц $(t) = d_1, d_2, \dots$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_{d_1} \dots T_{d_n}\|^{1/n} \rightarrow q$.

Доказательство проведем для случая $\omega \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$, когда $\check{\rho} = \rho(T_0)$, $\hat{\rho} = \sqrt{\rho(T_1 T_0)}$. Случай $\omega \in (0, \frac{1}{4})$ рассматривается аналогично. Будем строить последовательность (t) следующим образом: возьмем наименьшее натуральное число n_1 такое, что $\|T_0^{n_1}\| < q^{n_1}$. Такое число существует, поскольку $\|T_0^n\|^{1/n} \rightarrow \rho(T_0) = \check{\rho} < q$. Полагаем $d_1 = \dots = d_{n_1} = 0$. Далее возьмем наименьшее натуральное число m_1 такое, что $\|T_0^{n_1}(T_1 T_0)^{m_1}\| > q^{n_1+2m_1}$. Такое число существует, поскольку

$$\|T_0^{n_1}(T_1 T_0)^m\|^{1/(n_1+2m)} \rightarrow \sqrt{\rho(T_1 T_0)} = \hat{\rho} > q.$$

Полагаем $d_{n_1+1}, d_{n_1+2}, \dots, d_{n_1+2m_1-1}, d_{n_1+2m_1} = 0, 1, \dots, 0, 1$. Далее выбираем: n_2 – наименьшее натуральное число, для которого $\|T_0^{n_1}(T_1 T_0)^{m_1} T_0^{n_2}\| < q^{n_1+2m_1+n_2}$, а также m_2 – наименьшее натуральное число, для которого $\|T_0^{n_1}(T_1 T_0)^{m_1} T_0^{n_2}(T_1 T_0)^{m_2}\| > q^{n_1+2m_1+n_2+2m_2}$, и т. д. Докажем, что для последовательности (t) выполнено $\|\Pi_N\|^{1/N} \rightarrow q$, $N \rightarrow \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что для достаточно больших N выполнено $|q - \|\Pi_N\|^{1/N}| < \varepsilon$. Пусть уже сделано k шагов ($k \geq 1$), т. е. $N = \sum_{j=1}^k (n_j + 2m_j) + r$, где $0 \leq r \leq n_{k+1} + 2m_{k+1}$. Обозначим $N_k = \sum_{j=1}^k (n_j + 2m_j)$. Рассмотрим сначала случай $r < n_{k+1}$. Имеем

$$\|\Pi_{N_k-2}\| \leq q^{N_k-2}, \quad \|\Pi_{N_k}\| > q^{N_k}.$$

Тогда

$$1 < q^{-N_k(N_k-2)} \|\Pi_{N_k}\|^{N_k-2} < \|\Pi_{N_k}\|^{N_k-2} \|\Pi_{N_k-2}\|^{-N_k}.$$

Поскольку $\|\Pi_{N_k}\| = \|\Pi_{N_k-2} T_1 T_0\| \leq \|\Pi_{N_k-2}\| \|T_1 T_0\|$, то

$$\|\Pi_{N_k-2}\| \geq \|\Pi_{N_k}\| / \|T_1 T_0\|.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|\Pi_{N_k}\|^{N_k-2} \|\Pi_{N_k-2}\|^{-N_k} &\leq \|\Pi_{N_k}\|^{N_k-2} \|T_1 T_0\|^{N_k} \|\Pi_{N_k}\|^{-N_k} \\ &= \|\Pi_{N_k}\|^{-2} \|T_1 T_0\|^{N_k}. \end{aligned}$$

Наконец, так как $\|\Pi_{N_k}\| > q^{N_k}$, то $\|\Pi_{N_k}\|^{-2} \|T_1 T_0\|^{N_k} < (q^{-2} \|T_1 T_0\|)^{N_k}$. Итак,

$$1 < q^{-N_k(N_k-2)} \|\Pi_{N_k}\|^{N_k-2} < (q^{-2} \|T_1 T_0\|)^{N_k}.$$

При достаточно больших N_k имеем $q^{-2} \|T_1 T_0\| < (1 + \frac{\varepsilon}{2q})^{N_k-2}$, и, следовательно,

$$q < \|\Pi_{N_k}\|^{1/N_k} < q + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (32)$$

Далее, так как $r < n_{k+1}$, то $\|\Pi_{N_k+r}\| > q^{N_k+r}$. С другой стороны,

$$\|\Pi_{N_k+r}\| \leq \|\Pi_{N_k}\| \|T_0^r\| < \|\Pi_{N_k}\| C q^r.$$

В самом деле, поскольку $q > \check{\rho} = \rho(T_0)$, имеем $\|T_0^r\| < Cq^r$. Следовательно,

$$\|\Pi_{N_k+r}\| < C\|\Pi_{N_k}\|q^r < C\left(q + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_k} q^r \leq C\left(q + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_k+r}.$$

Для достаточно больших N_k имеем $C\left(q + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_k+r} < (q + \varepsilon)^{N_k+r}$. Итак, если k достаточно велико, то $q^{N_k+r} < \|\Pi_{N_k+r}\| < (q + \varepsilon)^{N_k+r}$ для всех $r = 0, \dots, n_{k+1} - 1$. Таким образом, $q < \|\Pi_{N_k+r}\|^{1/(N_k+r)} < q + \varepsilon$. Это завершает доказательство для $r < n_{k+1}$.

Остается рассмотреть случай $n_{k+1} \leq r < n_{k+1} + 2m_{k+1}$. Имеем

$$\|\Pi_{N_k+n_{k+1}-1}\| \geq q^{N_k+n_{k+1}-1}, \quad \|\Pi_{N_k+n_{k+1}}\| < q^{N_k+n_{k+1}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 1 &> q^{-(N_k+n_{k+1})(N_k+n_{k+1}-1)} \|\Pi_{N_k+n_{k+1}}\|^{N_k+n_{k+1}-1} \\ &> \|\Pi_{N_k+n_{k+1}}\|^{N_k+n_{k+1}-1} \|\Pi_{N_k+n_{k+1}-1}\|^{-(N_k+n_{k+1})}. \end{aligned}$$

Поскольку $\|\Pi_{N_k+n_{k+1}-1}\| = \|\Pi_{N_k+n_{k+1}}T_0^{-1}\| \leq \|\Pi_{N_k+n_{k+1}}\| \|T_0^{-1}\|$, то

$$\begin{aligned} &\|\Pi_{N_k+n_{k+1}}\|^{N_k+n_{k+1}-1} \|\Pi_{N_k+n_{k+1}-1}\|^{-(N_k+n_{k+1})} \\ &\geq \|\Pi_{N_k+n_{k+1}}\|^{N_k+n_{k+1}-1} \|\Pi_{N_k+n_{k+1}}\|^{-(N_k+n_{k+1})} \|T_0^{-1}\|^{-(N_k+n_{k+1})} = \\ &= \|T_0^{-1}\|^{-(N_k+n_{k+1})} \|\Pi_{N_k+n_{k+1}}\|^{-1}. \end{aligned}$$

Так как $\|\Pi_{N_k+n_{k+1}}\| < q^{N_k+n_{k+1}}$, то

$$\|T_0^{-1}\|^{-(N_k+n_{k+1})} \|\Pi_{N_k+n_{k+1}}\|^{-1} > (\|T_0^{-1}\|q)^{-(N_k+n_{k+1})}.$$

Итак,

$$1 > q^{-(N_k+n_{k+1})(N_k+n_{k+1}-1)} \|\Pi_{N_k+n_{k+1}}\|^{N_k+n_{k+1}-1} > (\|T_0^{-1}\|q)^{-(N_k+n_{k+1})}.$$

Следовательно, при достаточно больших N_k имеем

$$q > \|\Pi_{N_k+n_{k+1}}\|^{1/(N_k+n_{k+1})} > q - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (33)$$

Далее, так как $r < n_{k+1} + 2m_{k+1}$, то $\|\Pi_{N_k+n_{k+1}+r}\| < q^{N_k+n_{k+1}+r}$. Предположим, что r четно, случай нечетного r рассматривается аналогично. В силу леммы 7 имеем

$$\|\Pi_{N_k+n_{k+1}+r}\| \geq C_\omega \|\Pi_{N_k+n_{k+1}}\| \|(T_1 T_0)^{r/2}\| > C_\omega \|\Pi_{N_k+n_{k+1}}\| Cq^r.$$

В самом деле, поскольку $\rho^2(T_1, T_0) = \hat{\rho}^2 > q^2$, имеем

$$\|(T_1 T_0)^{r/2}\| > C(q^2)^{r/2} = Cq^r.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\Pi_{N_k+n_{k+1}+r}\| &> C_\omega C \|\Pi_{N_k+n_{k+1}}\| q^r > C_\omega C \left(q - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_k+n_{k+1}} q^r \\ &> C_\omega C \left(q - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_k+n_{k+1}+r}. \end{aligned}$$

Для достаточно больших N_k имеем $C_\omega^2 C \left(q - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_k+n_{k+1}+r} > (q - \varepsilon)^{N_k+n_{k+1}+r}$. Итак, если k достаточно велико, то

$$q - \varepsilon < \|\Pi_{N_k+n_{k+1}+r}\|^{1/(N_k+n_{k+1}+r)} < q$$

для всех $r = n_{k+1}, \dots, n_{k+1} + 2m_{k+1} - 1$. Лемма доказана. Это завершает доказательство теоремы 3.

Используя теорему 3, можно описать множество значений параметра t , на котором функция $f'(x)$ имеет заданную локальную гладкость. Что это дает для самой функции f , если абстрагироваться от данной параметризации? Поскольку функция $x(t)$ монотонна и непрерывна, она задает гомеоморфизм отрезков $[0, 1]$ и $[-1, 1]$, в частности переводит всюду плотные подмножества отрезка $[0, 1]$ во всюду плотные подмножества отрезка $[-1, 1]$. Поэтому в силу теоремы 3 для каждого $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ множество $x(\Omega_\alpha)$ всюду плотно на отрезке $[-1, 1]$.

Таким образом, имеем

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$. Показатель локальной гладкости функции $f'(x)$ в каждой точке x лежит между $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$. Для каждого $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ множество точек x , в которых показатель локальной гладкости равен α , всюду плотно на отрезке $[-1, 1]$.

Итак, на любом интервале отрезка $[-1, 1]$ достигаются все возможные значения локальной гладкости функции $f'(x)$. При $\omega \neq \frac{1}{4}$ множеством значений локальной гладкости будет отрезок. Все значения из этого отрезка будут достигаться на любом интервале $(a, b) \subset [-1, 1]$. Таким образом, при $\omega \neq \frac{1}{4}$ производная кривой де Рама меняет свою гладкость на любом интервале. Поскольку $\alpha_{\min} < 1$ для каждого $\omega \neq \frac{1}{4}$, функция f' не является дифференцируемой ни на каком интервале.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. При $\omega \neq \frac{1}{4}$ функция f не является дважды дифференцируемой ни на каком интервале.

§ 7. Оценка показателя средней гладкости

Согласно теореме 3 локальная гладкость функции f' одна и та же для почти всех t . Обозначим этот показатель гладкости через α_{av} и назовем *средней гладкостью*. Из формулы (14) следует, что существование средней гладкости равносильно следующему утверждению: для почти всех $t \in [0, 1]$ показатель ρ_t один и тот же. Обозначим этот показатель через $\bar{\rho}$, он известен в эргодической теории как показатель Ляпунова. Имеет место следующий факт: для произвольной пары линейных операторов B_0, B_1 предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Pi_n\|^{1/n} \tag{34}$$

существует и равен $\bar{\rho}$ для почти всех $t \in [0, 1)$, $t = 0, d_1 d_2 \dots$, $\Pi_n = B_{d_1} \dots B_{d_n}$ (доказательство см., например, в [39], [40]). Этот факт можно сформулировать в терминах теории вероятностей. Если независимые случайные величины $d_1, d_2, \dots$ принимают значения 0 и 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$, то почти наверно предел (34) существует и равен $\bar{\rho}$. Отсюда следует, что дискретные случайные величины $\eta_n = \frac{1}{n} \log \|\Pi_n\|$ сходятся по вероятности к константе $\log \bar{\rho}$. Если при этом $\check{\rho}(B_0, B_1) > 0$, то

$$\log \check{\rho}(B_0, B_1) \leq \eta_n \leq \log \hat{\rho}(B_0, B_1)$$

для каждого n с вероятностью 1. Поэтому величины η_n равномерно ограничены и, следовательно, $E\eta_n \rightarrow \log \bar{\rho}$, где E обозначает математическое ожидание. Заметим, что

$$E\eta_n = \log \left(\prod_{d_1, \dots, d_n} \|\Pi_n\| \right)^{1/(2^n n)}.$$

Таким образом, получаем другое определение показателя Ляпунова:

$$\bar{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{d_1, \dots, d_n} \|\Pi_n\| \right)^{1/(2^n n)}. \quad (35)$$

Данный предел существует и не зависит от нормы. (Строгие доказательства, а также другие свойства показателя Ляпунова можно найти, например, в [39], [41], [42].) Используя теорему 1, получим

$$\alpha_{av} = \frac{\log(\omega(1 - 2\omega))}{\log \bar{\rho}} - 2. \quad (36)$$

Подобно совместному спектральному радиусу, показатель Ляпунова чрезвычайно трудно вычислять и оценивать. Для операторов T_0, T_1 эту задачу можно свести к вычислению некоторого интеграла вдоль кривой де Рама. Введем на множестве $K \setminus \{0\}$ функцию

$$g(a) = \frac{1}{2} (\log \|T_0 a\|_1 + \log \|T_1 a\|_1) - \log \|a\|_1.$$

Производя прямые вычисления, получим, что для данного вектора $a = (x_0, x_1)^T$ имеем

$$g(a) = \frac{1}{2} (\log(2\omega x_0 + (1 - 2\omega)x_1) + \log(2\omega x_1 + (1 - 2\omega)x_0)) - \log(x_0 + x_1). \quad (37)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *При любом $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$ имеет место равенство*

$$\log \bar{\rho} = \int_0^1 g(v(t)) dt. \quad (38)$$

Напомним, что $v(t)$ – касательный вектор к кривой Γ в точке $\Gamma(t)$, лежащий в положительном квадранте K и нормированный условием $\|v(t)\|_1 = 1$. Далее для

краткости будем обозначать $g(t) = g(v(t))$. Перед доказательством предложения преобразуем формулу (38). В координатах (x_0, x_1) имеем $v(t) = \frac{1}{2}(1 + f'(x), 1 - f'(x))^T$. Подставив это выражение в (37), после элементарных упрощений получим

$$g(t) = -1 + \frac{1}{2} \log(1 - (1 - 4\omega)^2(f')^2), \quad (39)$$

где $f' = f'(x(t))$. Формула (38) может быть записана следующим образом:

$$\log \bar{\rho} = -1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \log(1 - (1 - 4\omega)^2(f')^2) dt. \quad (40)$$

Получаем довольно любопытный вывод: средняя гладкость производной кривой де Рама выражается через интеграл от функции (39), зависящей только от значений этой производной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 6. В силу леммы 3 в формулу (35) можно подставить вместо норм операторов Π_n нормы векторов $\Pi_n a$, где a – произвольный положительный вектор (т. е. $\beta(a) > 0$ в терминах леммы 3) и $\|a\| = 1$. Поскольку показатель Ляпунова не зависит от нормы, будем рассматривать L^1 -норму. Таким образом,

$$\bar{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\rho}_n,$$

где $\bar{\rho}_n = (\prod_{d_1, \dots, d_n} \|\Pi_n a\|_1)^{1/(2^n)}$. Вектор $\Pi_n a = \Pi_{d_1 \dots d_n} a$ лежит внутри угла $\Delta_n = \Delta_{d_1 \dots d_n} = \Pi_n K$. Согласно (5) стороны этого угла сонаправлены с векторами $v(t_n)$ и $v(t'_n)$, где $t_n = 0, d_1 \dots d_n 0$, $t'_n = 0, d_1 \dots d_n 1$. Так как функция $v(t)$ непрерывна, найдется $s_n = s_{d_1 \dots d_n} \in [t_n, t'_n]$, для которого вектор $v(s_n)$ сонаправлен с вектором $\Pi_n a$, и, следовательно, $g(s_n) = g(\Pi_n a)$. Тогда

$$\begin{aligned} (n+1) \log \bar{\rho}_{n+1} &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{d_1, \dots, d_{n+1}} \log \|\Pi_{n+1} a\|_1 \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{d_1, \dots, d_n} \frac{1}{2} (\log \|T_0 \Pi_n a\|_1 + \log \|T_1 \Pi_n a\|_1) \\ &= n \log \bar{\rho}_n + \frac{1}{2^n} \sum_{d_1, \dots, d_n} \frac{1}{2} (\log \|T_0 \Pi_n a\|_1 + \log \|T_1 \Pi_n a\|_1 - 2 \log \|\Pi_n a\|_1) \\ &= n \log \bar{\rho}_n + \frac{1}{2^n} \sum_{d_1, \dots, d_n} g(\Pi_n a) = n \log \bar{\rho}_n + \frac{1}{2^n} \sum_{d_1, \dots, d_n} g(s_n). \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого $n \geq 1$ имеем

$$(n+1) \log \bar{\rho}_{n+1} - n \log \bar{\rho}_n = S_n, \quad (41)$$

где $S_n = \frac{1}{2^n} \sum_{d_1, \dots, d_n} g(s_{d_1 \dots d_n})$. Суммируя равенство (41) по всем $n = 1, \dots, N$, сокращая промежуточные слагаемые и производя деление на N , получим

$$\frac{1}{N} ((N+1) \bar{\rho}_{N+1} - \bar{\rho}_1) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n.$$

Левая часть равенства стремится к $\bar{\rho}$ при $N \rightarrow \infty$. Поскольку $S_n \rightarrow \int_0^1 g(t) dt$ при $n \rightarrow \infty$, то $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n \rightarrow \int_0^1 g(t) dt$, что завершает доказательство.

Используя формулу (40), можно для каждого ω если не вычислить точно, то по крайней мере оценить показатель Ляпунова $\bar{\rho}$, а вместе с ним и среднюю гладкость кривой де Рама. Автору неизвестно точное значение $\bar{\rho}$ ни для какого ω , кроме, разумеется, $\omega = \frac{1}{4}$, когда $\bar{\rho} = \check{\rho} = \hat{\rho} = \frac{1}{2}$. Тем не менее, оценим эту величину и используем для этого интегральное представление (40). Главной целью будет доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Для любого $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$, кроме $\omega = \frac{1}{4}$, имеем $\alpha_{av} > 1$. При этом $\alpha_{av} \rightarrow 1$, когда $\omega \rightarrow 0$.*

СЛЕДСТВИЕ 7. *Для любого $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$, кроме $\omega = \frac{1}{4}$, локальная гладкость функции $f'(x)$ для почти всех $t \in [0, 1]$ одна и та же и строго больше 1. В частности, $f''(x) = 0$ для почти всех t .*

Геометрически это означает, что при почти всех t касательная к кривой де Рама не меняет своего направления в точке $x(t)$.

Перед доказательством теоремы 4 сделаем еще ряд замечаний. Из формулы для локальной гладкости (14) следует, что неравенство $\alpha_{av} > 1$ равносильно неравенству

$$\bar{\rho} > \sqrt[3]{\omega(1-2\omega)}, \quad (42)$$

которое мы и будем доказывать, для чего воспользуемся двумя свойствами функции $g(t)$, которые следуют из формулы (39):

- 1) $g(t) = g(1-t)$;
- 2) $g(t)$ возрастает на полуинтервале $[0, \frac{1}{2})$ от значения $g(0) = \frac{1}{2} \log(2\omega(1-2\omega))$ до $g(\frac{1}{2}) = -1$, затем строго убывает до $g(1) = \frac{1}{2} \log(2\omega(1-2\omega))$.

Первое свойство следует из того, что $f'(x(t)) = -f'(x(1-t))$. Второе следует из того, что $x(t)$ возрастает, а $f'(x)$ убывает (поскольку функция $f(x)$ вогнута). Таким образом, f' – убывающая функция от t . Тогда $(f')^2$ убывает на $[0, \frac{1}{2})$ от $(f'(0))^2 = 1$ до $(f'(\frac{1}{2}))^2 = 0$, а затем возрастает до $(f'(1))^2 = 1$. Поэтому функция $\log(1 - (1-4\omega)^2(f')^2)$ возрастает на $[0, \frac{1}{2})$ и убывает на $[\frac{1}{2}, 1]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Показатель $\bar{\rho}$ легче оценивать сверху, чем снизу. Так, несложно показать, что для любого n выполнено $\bar{\rho}_n \geq \bar{\rho}$, поэтому при каждом n величина $\bar{\rho}_n$ уже является оценкой сверху на $\bar{\rho}$. Увеличивая n , эту оценку можно сделать сколь угодно точной, поскольку $\bar{\rho}_n \rightarrow \bar{\rho}$. Кроме того, сами $\bar{\rho}_n$ являются средними геометрическими норм операторов Π_n и оцениваются сверху средним арифметическим норм, или L^p -средним. Поэтому для любого $p \geq 0$ p -радиус операторов (см. [43]–[45]) также является верхней оценкой на ρ . Получить нижние оценки значительно сложнее. В общем случае автору не известна ни одна нижняя оценка показателя Ляпунова, кроме очевидной $\bar{\rho} \geq \check{\rho}$, но для операторов T_0, T_1 данная оценка слишком груба и для доказательства теоремы 4 не применима ни при каком ω . Поэтому будем пользоваться интегральным представлением (38). В ходе доказательства получим для каждого ω более точные оценки на α_{av} , чем оценка $\alpha_{av} > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 начнем с рассмотрения случая $\omega > \frac{1}{4}$. Необходимо доказать неравенство (42). Имеем

$$\int_0^1 g(t) dt = 2 \int_0^{1/2} g(t) dt \geq \frac{1}{2} \left(\min_{t \in [0, 1/4]} g(t) + \min_{t \in [1/4, 1/2]} g(t) \right).$$

Поскольку функция $g(t)$ возрастает при $t < \frac{1}{2}$, то $\min_{t \in [0, 1/4]} g(t) = g(0)$, $\min_{t \in [1/4, 1/2]} g(t) = g(\frac{1}{4})$. Таким образом, $\log \bar{\rho} \geq \frac{1}{2} (g(0) + g(\frac{1}{4}))$. Далее, $g(0) = \frac{1}{2} \log(2\omega(1-2\omega))$. В силу равенства (5) вектор $v(\frac{1}{4})$ сонаправлен с вектором $T_0 T_1 e_0 = (\omega - \omega^2, \omega^2)^T$, поэтому

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = g(T_0 T_1 e_0) = \frac{1}{2} \log(3\omega - 4\omega^2)(1 - 3\omega + 4\omega^2).$$

Итак,

$$\bar{\rho} \geq [2\omega(1-2\omega)(3\omega - 4\omega^2)(1 - 3\omega + 4\omega^2)]^{1/4}. \quad (43)$$

Несложно показать, что это выражение строго больше, чем $\sqrt[3]{\omega(1-2\omega)}$ для всех $\omega \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ (что и требовалось) и, более того, для всех $\omega \in (\frac{1}{4} - \frac{2\sqrt{3}-3}{12}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Для этих значений ω теорема доказана.

Рассмотрим случай $\omega < \frac{1}{4}$. Пользуясь свойством $g(t) = g(1-t)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t) dt &= 2 \int_0^{1/2} g(t) dt = 2 \int_0^{1/3} g(t) dt + 2 \int_{1/3}^{1/2} g(t) dt \\ &= 2 \int_0^{1/3} g(t) dt + 2 \int_{1/2}^{2/3} g(t) dt = \int_0^{1/3} \left(2g(t) + g\left(\frac{t+1}{2}\right) \right) dt. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\log \bar{\rho} = \int_0^{1/3} \left(2g(t) + g\left(\frac{t+1}{2}\right) \right) dt. \quad (44)$$

Следовательно,

$$\log \bar{\rho} \geq \frac{1}{3} \min_{t \in [0, 1/3]} \left(2g(t) + g\left(\frac{t+1}{2}\right) \right).$$

Далее, вектор $v(\frac{t+1}{2})$ сонаправлен с вектором $T_1 v(t)$, поэтому $g(\frac{t+1}{2}) = g(T_1 v(t))$. Кроме того, $\|v(t)\|_1 = 1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} 2g(t) + g\left(\frac{t+1}{2}\right) &= \log \|T_0 v(t)\|_1 + \log \|T_1 v(t)\|_1 - 2 \log \|v(t)\|_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \log \|T_0 T_1 v(t)\|_1 + \frac{1}{2} \log \|T_1^2 v(t)\|_1 - \log \|T_1 v(t)\|_1 \\ &= \frac{1}{2} \log (\|T_0 v(t)\|_1^2 \|T_0 T_1 v(t)\|_1 \|T_1^2 v(t)\|_1). \end{aligned}$$

Итак,

$$\bar{\rho} \geq \min_{t \in [0, 1/3]} (\|T_0 v(t)\|_1^2 \|T_0 T_1 v(t)\|_1 \|T_1^2 v(t)\|_1)^{1/6}. \quad (45)$$

Положим $v(t) = (1 - z, z)^T$. Параметр z монотонно возрастает от t . При $t = 0$ имеем $z = 0$. При $t = \frac{1}{3}$ имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{1 + 1/3}{4}\right) = T_0\Gamma\left(\frac{1 + 1/3}{2}\right) = T_0T_1\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Следовательно, $v(\frac{1}{3})$ – положительный собственный вектор оператора T_0T_1 , откуда получаем

$$v\left(\frac{1}{3}\right) = \left(1 - \frac{2\omega}{3\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2}}, \frac{2\omega}{3\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2}}\right)^T.$$

Поэтому при $t = \frac{1}{3}$ имеем $z = \frac{2\omega}{3\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2}}$. Подставив $v(t) = (1 - z, z)^T$ в оценку (45), после элементарных упрощений получим

$$\bar{\rho} \geq \min_{z \in [0, \frac{2\omega}{3\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2}}]} [\omega(1 - 2\omega - (1 - 4\omega)z)^2 (\omega + (1 - \omega)(1 - 4\omega)z) (1 + (1 - 4\omega)z)]^{1/6}.$$

Положим $h = (1 - 4\omega)z$, $h_1 = \frac{2\omega(1 - 4\omega)}{3\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2}}$, $F(h) = \omega(1 - 2\omega - h)^2 (\omega + (1 - \omega)h) (1 + h)$. Последнее неравенство принимает вид

$$\bar{\rho} \geq \left(\min_{h \in [0, h_1]} F(h) \right)^{1/6}.$$

Первый положительный нуль производной функции $F(h)$ достигается в точке

$$h_0 = \frac{2(1 - 4\omega)}{\sqrt{(1 + 6\omega - 4\omega^2)^2 + 16(1 - \omega)(1 - 4\omega)} + 1 + 6\omega - 4\omega^2}.$$

Прямым вычислением показывается, что $h_0 > h_1$ при всех $\omega \in [0, \frac{1}{4}]$. Таким образом, функция $F(h)$ возрастает на интервале $(0, h_1)$, следовательно,

$$\min_{h \in [0, h_1]} F(h) = F(0) = \omega^2(1 - 2\omega^2).$$

Тогда $\bar{\rho} \geq (\omega^2(1 - 2\omega^2))^{1/6} = \sqrt[3]{\omega(1 - 2\omega)}$, что и требовалось доказать.

Для доказательства того, что $\alpha_{av} \rightarrow 1$ при $\omega \rightarrow 0$, оценим величину $\bar{\rho}$ сверху асимптотически при $\omega \rightarrow 0$. Вновь воспользуемся интегральным представлением (44). Для данного n положим $t_n = (1 - 2^{-2n})/3$. Имеем

$$\log \bar{\rho} \leq t_n \max_{t \in [0, t_n]} \left(2g(t) + g\left(\frac{t+1}{2}\right) \right) + \left(\frac{1}{3} - t_n \right) \max_{t \in [t_n, 1/3]} \left(2g(t) + g\left(\frac{t+1}{2}\right) \right).$$

Мы показали, что $2g(t) + g(\frac{t+1}{2}) = \frac{1}{2} \log F(h(t))$, причем функция $F(h(t))$ возрастает при $t \in [0, \frac{1}{3}]$. Поэтому

$$\max_{t \in [0, t_n]} F(h(t)) = F(h(t_n)), \quad \max_{t \in [t_n, 1/3]} F(h(t)) = F\left(h\left(\frac{1}{3}\right)\right).$$

Итак,

$$\log \bar{\rho} \leq \frac{1 - 2^{-2n}}{6} \log F(h(t_n)) + \frac{2^{-2n}}{6} \log F\left(h\left(\frac{1}{3}\right)\right). \quad (46)$$

По доказанному выше имеем $h(\frac{1}{3}) = \frac{2\omega(1-4\omega)}{3\omega + \sqrt{4\omega - 7\omega^2}}$; это меньше, чем $\sqrt{\omega}$ при $\omega \in (0, \frac{1}{4})$. Поэтому $F(h(\frac{1}{3})) < F(\sqrt{\omega})$. Далее, $t_n = 0,0101\dots 01$ (n раз 01), следовательно, вектор $v(t_n)$ сонаправлен с вектором $(T_0 T_1)^n e_0$. Положим

$$(T_0 T_1)^k e_0 = \|(T_0 T_1)^k e_0\|^T (1 - z_k, z_k)^T, \quad k \leq n.$$

По индукции легко показать, что для достаточно малых ω имеем $z_{k+1} \leq z_k + 2\omega$. Следовательно, $z_n \leq 2n\omega$, откуда $h(t_n) \leq 2n\omega(1 - 4\omega) < 2n\omega$. Поэтому $F(t_n) < F(2n\omega)$. Подставив это неравенство в (46), получаем, что при всех достаточно малых ω

$$\log \bar{\rho} < \frac{1 - 2^{-2n}}{6} \log F(2n\omega) + \frac{2^{-2n}}{6} \log F(\sqrt{\omega}).$$

Из определения $F(h)$ видно, что при $\omega \rightarrow 0$ величина $F(\sqrt{\omega})$ эквивалентна $\omega^{3/2}$, а величина $F(2n\omega)$ эквивалентна $(2n + 1)\omega^2$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно малых ω имеем

$$\log \bar{\rho} \leq \frac{1 - 2^{-2n}}{6} \log((2n + 1)\omega^2) + \frac{2^{-2n}}{6} \log(\omega^{3/2}) + \varepsilon.$$

Подставив это неравенство в формулу (36), получаем

$$\alpha_{av} \leq \frac{\log(\omega(1 - 2\omega))}{\frac{1 - 2^{-2n}}{6} \log((2n + 1)\omega^2) + \frac{2^{-2n}}{6} \log(\omega^{3/2}) + \varepsilon} - 2,$$

откуда при $\omega \rightarrow 0$ имеем

$$\alpha_{av} \leq \frac{1}{\frac{1 - 2^{-2n}}{3} + \frac{2^{-2n}}{6} \frac{3}{2} - \varepsilon} - 2 = \frac{1 + 2^{-2n-1}}{1 - 2^{-2n-2} - 3\varepsilon}.$$

Итак, при любом n и любом $\varepsilon > 0$ для всех достаточно малых ω имеем $1 < \alpha_{av} \leq \frac{1 + 2^{-2n-1}}{1 - 2^{-2n-2} - 3\varepsilon}$. Следовательно, $\alpha_{av} \rightarrow 1$ при $\omega \rightarrow 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Если $\omega \rightarrow \frac{1}{4}$, то, как следует из теоремы 2, величины $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$ стремятся к 1. Поэтому средняя гладкость функции f' также стремится к 1. Если же $\omega \rightarrow 0$, то $\alpha_{\min} \rightarrow 0$, $\alpha_{\max} \rightarrow +\infty$; разрыв между максимальной и минимальной гладкостями увеличивается, и функция f' становится все более нерегулярной. Тем не менее, $\alpha_{av} \rightarrow 1$, т. е. на множестве полной меры функция ведет себя все более регулярно, приближаясь по свойствам к C^1 -функции. Заметим, что при малых ω углы срезаются очень близко к вершинам и у ломаных $Z^1, Z^2, \dots$ будут оставаться большие прямолинейные куски. Поэтому интуитивно кажется, что при $\omega \rightarrow 0$ кривая де Рама должна приближаться к сингулярной функции типа канторовой лестницы, и, соответственно, “должно быть” $\alpha_{av} \rightarrow +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Верхние оценки для α_{av} элементарны, получить их довольно легко (см. замечание 8). Упомянем лишь одну возможную оценку, которую можно получить из интегрального представления (38). Поскольку $g(t)$ возрастает при $t < \frac{1}{2}$, то

$$\begin{aligned}\max_{t \in [0, 1/4]} g(t) &= g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \log(3\omega - 4\omega^2)(1 - 3\omega + 4\omega^2), \\ \max_{t \in [1/4, 1/2]} g(t) &= g\left(\frac{1}{2}\right) = -1.\end{aligned}$$

Получаем неравенство, аналогичное (43):

$$\bar{\rho} \leq \left[\frac{1}{4} (3\omega - 4\omega^2)(1 - 3\omega + 4\omega^2) \right]^{1/4}. \quad (47)$$

На полуинтервале $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$ имеем

$$\frac{1}{4} (3\omega - 4\omega^2)(1 - 3\omega + 4\omega^2) < \omega(1 - 2\omega),$$

поэтому $\bar{\rho} < [\omega(1 - 2\omega)]^{1/4}$. Подставив это неравенство в формулу (36), получаем, что $\alpha_{av} < 2$ для любого $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$. Эта оценка не является точной, для любого ω ее можно улучшать.

ПРИМЕР 2. При $\omega = \frac{1}{3}$, напомним, $\alpha_{\min} = 0$, $\alpha_{\max} = 1,5588 \dots$. Для средней гладкости, пользуясь оценками (43) и (47), получаем $1,0279 \dots < \alpha_{av} < 1,1557 \dots$.

Итак, для почти всех t показатель гладкости производной кривой де Рама в точке $x(t)$ больше единицы. Что это означает для самой кривой, без привязки к данной параметризации? Дело в том, что “для почти всех t ” не означает “для почти всех точек кривой”, или (что то же самое) “для почти всех x ”. Функция $x(t)$ не является абсолютно непрерывной и может переводить множества полной меры во множества меры нуль. Тем не менее, для почти всех x показатель гладкости также больше 1 и даже больше, чем α_{av} . Этот факт слабее, чем доказанная нами теорема 1, и по сути является ее следствием.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. При любом $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$ для почти всех $x \in [-1, 1]$

$$\alpha_{f'}(x) \geq -\log(4\omega(1 - 2\omega)).$$

Поскольку $-\log(4\omega(1 - 2\omega)) > 1$ при всех $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$, кроме $\omega = \frac{1}{4}$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 8. Для любого $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$, кроме $\omega = \frac{1}{4}$, имеем $\alpha_{f'}(x) > 1$ для почти всех $x \in [-1, 1]$. В частности, $f''(x) = 0$ для почти всех x .

Таким образом, касательная к кривой де Рама почти в каждой точке кривой не меняет своего направления. Заметим, что функция f строго выпукла несмотря на то, что ее вторая производная равна нулю почти всюду.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. На самом деле при $\omega \neq \frac{1}{4}$ показатель локальной гладкости $\alpha_{f'}(x)$ не только больше 1, но и больше α_{av} для почти всех x . Последнее следует из того, что $\bar{\rho} < \frac{1}{2}$ для любого $\omega \neq \frac{1}{4}$ или $\omega \neq \frac{1}{2}$ (это прямо вытекает из оценки (47), поскольку неравенство

$$\left[\frac{1}{4}(3\omega - 4\omega^2)(1 - 3\omega + 4\omega^2) \right]^{1/4} < \frac{1}{2}$$

выполнено для всех ω , кроме $\omega = \frac{1}{2}$ и $\omega = \frac{1}{4}$). Тогда

$$\alpha_{av} = \frac{\log(\omega(1 - 2\omega))}{\log \bar{\rho}} - 2 < \frac{\log(\omega(1 - 2\omega))}{\log(1/2)} - 2 = -\log(4\omega(1 - 2\omega)).$$

Гладкость для почти всех t не совпадает с гладкостью для почти всех x . Объясняется это тем, что функция $x(t)$ не является абсолютно непрерывной и может переводить множества полной меры в нуль-множества и наоборот. Так, оно переводит множество полной меры $\Omega_{\alpha_{av}}$ во множество меры нуль.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Средняя гладкость α_{av} производной кривой де Рама тесно связана с хаусдорфовой размерностью гармонической меры, которую определяет отображение $t \rightarrow f'(x(t))$ на отрезке $[0, 1]$ (точные формулировки см. в [15], [16]). Этот факт применяется при изучении случайных блужданий. Кривая де Рама рассматривается как предельное множество для случайных блужданий по двум аффинным операторам $\tilde{T}_0$ и $\tilde{T}_1$ (см. [15]). В работе [16], в частности, вычислена хаусдорфова размерность для случая $\omega = \frac{1}{3}$. Из этого результата получаются оценки для средней гладкости α_{av} при $\omega = \frac{1}{3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7. Рассмотрим функцию $t(x)$, обратную к функции $x(t)$. Функция $t(x)$ монотонна, а значит, почти всюду дифференцируема. Поэтому для почти всех x имеем $\alpha_t(x) \geq 1$. С другой стороны, $\alpha_t(x) = -\frac{1}{\log \rho_t}$. Выводится это из равенств (14) и (19) так же, как при доказательстве теоремы 1. Итак, $\frac{1}{\log \rho_t} \leq -1$, откуда $\rho_t \geq \frac{1}{2}$ для почти всех x . Применив теперь теорему 1, имеем

$$\alpha_{f'}(x) = \frac{\log(\omega(1 - 2\omega))}{\log \rho_t} - 2 \geq \frac{\log(\omega(1 - 2\omega))}{\log(1/2)} - 2 = -\log(4\omega(1 - 2\omega)),$$

что завершает доказательство.

§ 8. Несколько нерешенных задач

Сформулируем две группы задач, связанных с гладкостью кривых де Рама.

1. Возможно ли вычислить в явном виде показатель средней гладкости α_{av} для каждого $\omega \in (0, \frac{1}{3}]$? Используя интегральное представление (38), можно получить численное решение задачи. Вопрос в том, выражается ли α_{av} через элементарные функции от ω подобно тому, как выражаются $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$? Является ли α_{av} аналитической или кусочно аналитической функцией от ω ? Достигается ли средняя гладкость хотя бы в одной рациональной точке $t \in [0, 1]$?

2. При каком ω средняя гладкость максимальна? Поскольку $\alpha_{av} \rightarrow 1$ при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \frac{1}{4}$, а на интервале $\omega \in (0, \frac{1}{4})$ имеем $\alpha_{av} > 1$, то на интервале $(0, \frac{1}{4})$ существуют точки максимума средней гладкости. Как найти эти точки и определить максимальное значение α_{av} ?

3. Какие из полученных нами результатов обобщаются на несимметричные кривые де Рама? Эти кривые получаются в пределе из многоугольников несимметричным срезанием углов (каждый отрезок делится в отношении $\beta : (1 - \beta - \gamma) : \gamma$, где $\beta, \gamma > 0$, $\beta + \gamma < 1$). Несимметричные кривые де Рама изучались в работе [3]. Было показано, что они наследуют много свойств от симметричного случая. При любых β, γ соответствующая кривая $\Gamma(\beta, \gamma)$ спрямляема, липшицева и почти всюду дифференцируема. Она также является фрактальной кривой, и соответствующие линейные операторы имеют вид

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 - \beta - \gamma & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \gamma & 1 - \beta - \gamma \end{pmatrix}.$$

Поэтому фундаментальная кривая Γ имеет каноническую параметризацию $\Gamma(t)$. Аналогично можно задать Γ в виде графика функции $f(x)$. Если $1 - \beta - \gamma \geq \max\{\beta, \gamma\}$, то $f \in C^1[-1, 1]$ (см. [3]). Несложно также обобщить результаты §2 на несимметричные кривые: если $1 - \beta - \gamma < \max\{\beta, \gamma\}$, то $f(x)$ дифференцируема везде, кроме двоично-рациональных t . Особый случай соответствует равенству $\beta + \gamma = \frac{1}{2}$. В этом случае гладкость Γ совпадает с гладкостью канонической параметризации. Однако кривая уже не будет сплайном ни при каких β, γ , кроме симметричного случая $\beta = \gamma = \frac{1}{4}$ (см. [3]). Как будет видно далее, она даже не будет дважды дифференцируемой.

Главная проблема состоит в том, как вычислять локальную и глобальную гладкости в несимметричном случае. Существуют два момента, осложняющих эту задачу. Во-первых, $\det T_0 \neq \det T_1$. Формула (8) принимает вид

$$\sin \Delta_{d_1 \dots d_n} = \frac{\beta^k \gamma^{n-k} (1 - \beta - \gamma)^n}{\|\Pi_{d_1 \dots d_n} e_0\| \|\Pi_{d_1 \dots d_n} e_1\|},$$

где k – количество единиц в последовательности $d_1, \dots, d_n$. Если знаменатель по-прежнему оценивается через нижний спектральный радиус операторов T_0, T_1 , то числитель уже зависит от количества единиц в последовательности. Поэтому показатель гладкости может зависеть не только от спектрального радиуса операторов. Для самих спектральных радиусов аналог предложения 3 не выполняется. Так, например, при $\beta = 0,1$ и $\gamma = 0,3$ имеем $\rho(T_0) = \rho(T_1) = 0,6$, $\sqrt{\rho(T_0 T_1)} = 0,470 \dots$, в то время как $(\rho(T_0 T_1 T_0 T_0 T_1 T_0 T_0 T_1))^{1/8} = 0,460 \dots$. Следовательно, нижний спектральный радиус $\check{\rho}$ строго меньше каждой из величин $\rho(T_0)$, $\rho(T_1)$, $\sqrt{\rho(T_0 T_1)}$. Неизвестно, достигается ли он вообще на некотором конечном произведении операторов T_0, T_1 .

В рациональных точках t локальная гладкость несимметричной кривой де Рама вычисляется по следующей формуле, обобщающей следствие 1: если t имеет период $(d_1 \dots d_m)$ и $m \geq 2$, то

$$\alpha_{f'}(x(t)) = \frac{k \log \beta + (m - k) \log \gamma + m \log(1 - \beta - \gamma)}{\log \rho(\Pi_m)} - 2,$$

где k – количество единиц в периоде. Если $m = 1$, т.е. число t двоично-рациональное, то показатель гладкости в точке t слева равен $\frac{\log \beta}{\log(1-\beta-\gamma)} - 1$, а справа – равен $\frac{\log \gamma}{\log(1-\beta-\gamma)} - 1$. Соответственно, гладкость в двоично-рациональных точках равна минимальной из этих величин. Доказательства этих утверждений проводятся по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. Отсюда, в частности, следует, что при $\beta \neq \gamma$ в двоично-рациональных точках t гладкость производной слева не равна гладкости справа. Следовательно, Γ не является дважды дифференцируемой. В отличие от симметричного случая, максимальная и минимальная гладкости не обязательно достигаются в двоично-рациональных t или в точках вида $t = \frac{n}{3 \cdot 2^k}$. Так, в том же примере $\beta = 0,1$, $\gamma = 0,3$ при двоично-рациональных t имеем

$$\alpha_{f'}(x(t)) = \min \left\{ \frac{\log 0,1}{\log 0,6}, \frac{\log 0,3}{\log 0,6} \right\} - 1 = 1,3569 \dots,$$

а в точках вида $t = \frac{n}{3 \cdot 2^k}$ имеем

$$\alpha_{f'}(x(t)) = \frac{\log 0,1 + \log 0,3 + 2 \log 0,6}{\log \rho(T_0 T_1)} - 2 = 1,001 \dots$$

С другой стороны, при $t = \frac{4}{7} = 0,(100)$ имеем

$$\alpha_{f'}(x(t)) = \frac{2 \log 0,3 + \log 0,1 + 3 \log 0,6}{\log \rho(T_1 T_0 T_0)} - 2 = 0,6752 \dots$$

Таким образом, $\alpha_{f'} = \alpha_{\min} \leq 0,6752 \dots$. Возникает вопрос: каким образом вычислять максимальную и минимальную гладкости? Обязательно ли эти показатели гладкости достигаются в рациональных точках?

Автор выражает благодарность С. В. Конягину, профессору МГУ им. М. В. Ломоносова, за полезные обсуждения и многочисленные ценные замечания.

Список литературы

1. *De Rham G.* Une peu de mathematique a propos d'une courbe plane // *Revue de Mathematiques Elementaires*. II. 1947. Nos. 4, 5. P. 678–689.
2. *De Rham G.* Sur une courbe plane // *J. Math. Pur. Appl.* IX. 1956. V. 35. P. 25–42.
3. *De Rham G.* Sur les courbes limit de polygones obtenus par trisection // *Enseign. Math.* II. 1959. V. 5. P. 29–43.
4. *Chaikin G. M.* An algorithm for high speed curve generation // *Computer Graphics and Image Processing*. 1974. V. 3. P. 346–349.
5. *Cavaretta D., Dahmen W., Micchelli C.* Stationary subdivision // *Mem. Amer. Math. Soc.* 1991. V. 93. P. 1–186.
6. *Dyn N., Gregory J. A., Levin D.* Analysis of linear binary subdivision schemes for curve design // *Constr. Approx.* 1991. V. 7. P. 127–147.
7. *Deslauriers G., Dubuc S.* Symmetric iterative interpolation processes // *Constr. Approx.* 1989. V. 5. P. 49–68.
8. *Daubechies I., Lagarias J.* Two-scale difference equations. I. Global regularity of solutions // *SIAM. J. Math. Anal.* 1991. V. 22. P. 1388–1410.
9. *Daubechies I., Lagarias J.* Two-scale difference equations. II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals // *SIAM. J. Math. Anal.* 1992. V. 23. P. 1031–1079.
10. *Protasov V.* Refinement equations with nonnegative coefficients // *J. Fourier Anal. Appl.* 2000. V. 6. № 6. P. 55–77.

11. *Farin G. E.* Curves and surfaces for computer-aided geometric design. San Diego: Academic Press, 1997.
12. *Brezinski C., Redivo Zaglia M.* Extrapolation Methods, Theory and Practice. N.Y.: North-Holland, 1991.
13. *Aumann G.* Subdivision of linear corner cutting curves // J. Geom. Graph. 1997. V. 1. № 2. P. 91–103.
14. *Mainar E., Pena J. M.* Error analysis of corner cutting algorithms // Numer. Algorithms. 1999. V. 22. № 1. P. 41–52.
15. *Sidorov N., Vershik A.* Ergodic properties of Erdos measure, the entropy of golden shift, and related problems // Monatsh. Math. 1998. V. 126. P. 215–261.
16. *Никитин П.* Хаусдорфова размерность гармонической меры на кривой де Рама // Записки научн. семин. ПОМИ. 2001. Т. 238. С. 206–222.
17. *Paluszny M., Prautzsch H., Schafer M.* A geometric look at corner cutting // Comput. Aided Geom. Design. 1997. V. 14. № 5. P. 421–447.
18. *Merrien J. -L.* Prescribing the length of a de Rham curve // Math. Eng. Ind. 1998. V. 7. № 2. P. 129–138.
19. *Dubuc S., Merrien J. -L., Sablonniere P.* The length of the de Rham curve // J. Math. Anal. Appl. 1998. V. 223. № 1. P. 182–195.
20. *Gregory J. A., Qu R.* Nonuniform corner cutting // Comput. Aided Geom. Design. 1996. V. 13. № 8. P. 763–772.
21. *Noakes L.* Nonlinear corner cutting // Adv. Comput. Math. 1998. V. 8. № 3. P. 165–177.
22. *Hutchinson J. E.* Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30. № 5. P. 713–747.
23. *Barnsley M.* Fractals everywhere. Boston: Academic press, 1988.
24. *Micchelli C. A., Prautzsch H.* Uniform refinement of curves // Linear Alg. Appl. 1989. V. 114/115. P. 841–870.
25. *Collela D., Heil C.* Characterization of scaling functions. I. Continuous solutions // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1994. V. 15. P. 496–518.
26. *Rioul O.* Simple regularity criteria for subdivision schemes // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1544–1576.
27. *Han B.* Analysis and construction of optimal multivariate biorthogonal wavelets with compact support // SIAM J. Math. Anal. 1999. V. 31. P. 274–304.
28. *Villemonais L.* Wavelet analysis of refinement equations // SIAM J. Math. Anal. 1994. V. 25. P. 1433–1460.
29. *Vetterly M., Herley C.* Wavelets and filter banks. Theory and Design // IEEE Trans. on signal Proc. 1992. V. 40. № 9. P. 2207–2232.
30. *Протасов В. Ю.* Асимптотика функции разбиения // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 3. С. 65–98.
31. *Berger M. A., Wang Y.* Bounded semi-groups of matrices // Linear Alg. Appl. 1992. V. 166. P. 21–27.
32. *Blondel V., Tsitsiklis J. M.* Approximating the spectral radius of sets of matrices in the max-algebra is NP-hard // IEEE Trans. Autom. Control. 2000. V. 45. № 9. P. 1762–1765.
33. *Blondel V., Tsitsiklis J. M.* The boundedness of all products of a pair of matrices is undecidable // Syst. Control Lett. 2000. V. 41. № 2. P. 135–140.
34. *Blondel V., Theys J., Vladimirov A. A.* An elementary counterexample to the finiteness conjecture. Preprint, 2001. www.inma.ucl.ac.be/blondel.
35. *Протасов В. Ю.* Совместный спектральный радиус и инвариантные множества линейных операторов // Фундам. и прикл. математика. 1996. Т. 2. № 1. С. 205–231.
36. *Gripenberg G.* Computing the joint spectral radius // Lin. Alg. Appl. 1996. V. 234. P. 43–60.
37. *Rota G. C., Strang G.* A note on the joint spectral radius // Kon. Nederl. Acad. Wet. Proc. 1960. V. 63. P. 379–381.
38. *Гвишиани А. Д., Кириллов А. А.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.

39. *Oseledets V. I.* A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems // Trans. Moscow Math. Soc. 1968. V. 19. P. 197–231.
40. *Ma J., Chen Y., Liu Z.* The matrix algorithm of Lyapunov exponent for the experimental data obtained in dynamic analysis // Appl. Math. Mech. 1999. V. 20. № 9. P. 985–993.
41. *Ravishankar K.* Power law scaling of the top Lyapunov exponent of a product of random matrices // J. Stat. Phys. 1989. V. 54. № 1/2. P. 531–537.
42. *Kaganova E. M.* The Lyapunov index for the product of random operators // Vestn. Mosk. Univ. Ser. I. 1988. № 2. P. 10–14.
43. *Lau K. S., Wang J.* Characterization of L_p -solutions for two-scale dilation equations // SIAM J. Math. Anal. 1995. V. 26. P. 1018–1046.
44. *Протасов В. Ю.* Обобщенный совместный спектральный радиус. Геометрический подход // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 5. С. 99–136.
45. *Zhou D. X.* The p -norm joint spectral radius and its applications in wavelet analysis // Intern. conference in wavelet analysis and its applications. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics. 2002. V. 25. P. 305–326.

МГУ им. М. В. Ломоносова
механико-математический факультет
E-mail: vladimir_protassov@yahoo.com

Поступило в редакцию
30.09.2003