Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Рациональность трехмерного многообразия Фано–Энриквеса рода пять, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 3, 181–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/im490>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:02:56

УДК 513.6

И. А. Чельцов

Рациональность трехмерного многообразия Фано–Энриквеса рода пять

Доказана рациональность трехмерного многообразия Фано степени восемь с индексом Фано один и группой Пикара $\mathbb{Z}$, имеющего негоренштейновы терминальные факторособенности, которое может быть также описано как фактор двойного накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в неособой поверхности степени четыре по инволюции, оставляющей неподвижными восемь различных точек.

Библиография: 57 наименований.

В настоящей работе будет доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\psi: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ – двойное накрытие с ветвлением в неособой поверхности степени 4 и $X = V/\tau$, где $\tau \in \text{Aut}(V)$ – инволюция, оставляющая неподвижными лишь конечное число точек. Тогда многообразие X рационально.

Все многообразия считаются проективными, нормальными и определенными над полем $\mathbb{C}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В обозначениях теоремы 1 многообразие V является неособым трехмерным многообразием Фано индекса 2 и степени 2, $-K_V = \psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$, выполнено равенство $-K_V^3 = 16$, инволюция τ оставляет неподвижными восемь точек, трехмерное многообразие X имеет восемь особых точек типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, дивизор $-K_X$ не является дивизором Картье, но $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} H$, где H – обильный дивизор Картье на X , общая поверхность в линейной системе $|H|$ является неособой поверхностью Энриквеса и $H^3 = 8$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим гиперповерхность $V \subset \mathbb{P}(1^3, 2)$, заданную уравнением

$$u^2 = x^4 + y^4 + z^4 + t^4,$$

где x, y, z и t – координаты веса 1, а u – координата веса 2. Зададим инволюцию τ на многообразии $\mathbb{P}(1^3, 2)$ действием $\tau(x : y : z : t : u) = (x : y : -z : -t : -u)$. Естественная проекция $\psi: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ является двойным накрытием с ветвлением в неособой поверхности степени четыре, многообразие V инвариантно относительно действия инволюции τ , а ограничение $\tau|_V$ оставляет неподвижными восемь точек на V , заданные уравнениями $u = z = t = 0$ и $u = x = y = 0$.

Дж. Фано пытался получить в работах [1]–[4] бирегулярную классификацию трехмерных многообразий, которые содержат канонически вложенные кривые в качестве сечений общими линейными подпространствами коразмерности 2. В неособом случае гиперплоские сечения таких трехмерных многообразий являются

неособыми поверхностями КЗ. Таким образом, естественным обобщением рассмотренных Дж. Фано в работах [1]–[4] многообразий следует считать трехмерные многообразия, содержащие неособую поверхность КЗ в качестве обильного дивизора Картье. В неособом случае антиканонический дивизор таких многообразий обязательно обильен, однако в работе [5] было показано, что общий элемент антиканонической линейной системы неособого трехмерного многообразия, имеющего обильный антиканонический дивизор, является неособой поверхностью КЗ. В частности, в неособом случае трехмерные многообразия, которые содержат неособую поверхность КЗ в качестве обильного дивизора Картье, являются многообразиями Фано в их современном определении, которое было дано В. А. Исковских. Полная бигулярная классификация неособых трехмерных многообразий Фано была получена в работах [5]–[10], где были найдены 105 различных семейств неособых трехмерных многообразий Фано.

Несколько позднее Дж. Фано изучал в работе [11] трехмерные многообразия, содержащие неособую поверхность Энриквеса в качестве гиперплоского сечения¹, где, в частности, был приведен список из шести таких многообразий, включая два исключительных (обильных, но не очень обильных) случая. Более того, как утверждал Дж. Фано, приведенными в работе [11] шестью многообразиями исчерпываются все трехмерные многообразия, содержащие неособую поверхность Энриквеса в качестве гиперплоского сечения. К сожалению, почти все доказательства работы [11] не удовлетворяют современным требованиям строгости, и, как было показано в работах [18], [19], классификация, данная в работе [11], неполная. Более того, в работах [18], [19] было отмечено, что каждое трехмерное многообразие, гиперплоское сечение которого является неособой поверхностью Энриквеса, обязано быть особым. Последнее, по-видимому, и явилось основной причиной, почему такие многообразия не рассматривались в течение почти половины столетия. Дж. Фано утверждал еще в работе [11], что трехмерные многообразия, содержащие неособую поверхность Энриквеса в качестве гиперплоского сечения, имеют ровно восемь особых точек таких, что касательный конус к каждой из них является конусом над поверхностью Веронезе. В современной терминологии такие особые точки есть не что иное, как терминальные факторособенности типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, которые локально изоморфны фактору $\mathbb{C}^3$ по инволюции, оставляющей неподвижной только начало координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Трехмерное многообразие X называется *многообразием Фано–Энриквеса* рода $g(X) = -\frac{1}{2} K_X^3 + 1$ и степени $-K_X^3$ в случае, если X имеет канонические особенности, дивизор $-K_X$ не является дивизором Картье и $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} H$ для некоторого обильного дивизора Картье H на многообразии X .

Следующий результат был получен в работе [20].

ТЕОРЕМА 5. Пусть X – трехмерное многообразие Фано–Энриквеса и $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} H$ для некоторого обильного дивизора Картье H на многообразии X .

¹Аналогичная задача, конечно, может быть поставлена для любой поверхности кодаировой размерности нуль, однако в абелевом и биеллиптическом случаях соответствующая задача тривиальна даже в обильном случае (см. [12]–[17]).

зии X . Тогда достаточно общая поверхность в линейной системе $|H|$ является поверхностью Энриквеса с каноническими особенностями, которая неособа в случае, если особенности трехмерного многообразия X изолированы и выполнено неравенство $-K_X^3 \neq 2$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Степень и род трехмерного многообразия Фано–Энриквеса – натуральные числа.

Следующий результат был получен в работах [16], [17].

ТЕОРЕМА 7. Пусть X – нормальное трехмерное многообразие, содержащее поверхность Энриквеса с каноническими особенностями $H \subset X$, которая является обильным дивизором Картье на многообразии X . Тогда $-2K_X \sim 2H$ и либо X является многообразием Фано–Энриквеса, либо X является стягиванием исключительного сечения многообразия $\mathrm{Proj}(\mathcal{O}_H \oplus \mathcal{O}_H(H|_H))$.

Таким образом, за исключением обобщенных конусов, определенные выше трехмерные многообразия Фано–Энриквеса являются многообразиями, которые содержат поверхность Энриквеса с каноническими особенностями в качестве обильного дивизора Картье.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Пусть X – трехмерное многообразие Фано–Энриквеса, а H – обильный дивизор Картье на X такой, что $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} H$. Тогда $2(H + K_X) \sim 0$ и трехмерное многообразие $V = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(H + K_X))$ называется каноническим накрытием многообразия X . Можно показать, что многообразие V является многообразием Фано с горенштейновыми каноническими особенностями и существует естественное двойное накрытие $\pi: V \rightarrow X$, которое разветвлено в конечном числе точек, являющихся негоренштейновыми точками многообразия X , $-K_V \sim \pi^*(H)$, двойное накрытие π индуцирует этальное двойное накрытие поверхностей Энриквеса с каноническими особенностями в линейной системе $|H|$, которое в каждом случае совпадает с естественным этальным накрытием поверхности Энриквеса поверхностью $K3$.

Трехмерные многообразия Фано–Энриквеса особые и негоренштейновы по определению. Таким образом, трехмерные многообразия Фано–Энриквеса, имеющие терминальные циклические факторособенности, являются негоренштейновыми аналогами неособых трехмерных многообразий Фано. С другой стороны, канонические накрытия трехмерных многообразий Фано–Энриквеса, которые имеют терминальные циклические факторособенности, неособы. В частности, все особые точки трехмерных многообразий Фано–Энриквеса с терминальными циклическими факторособенностями являются факторособенностями типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, а в работе [21] было отмечено, что из формулы Римана–Роха для особых многообразий (см. [22]) следует, что число таких особых точек равно 8, как и утверждал Дж. Фано. Более того, классификация неособых трехмерных многообразий Фано позволила получить в работах [23], [24] следующий результат.

ТЕОРЕМА 9. Пусть X – трехмерное многообразие Фано–Энриквеса, имеющее терминальные циклические факторособенности, а V – каноническое

накрытие многообразия X . Тогда V является одним из следующих неособых многообразий Фано:

- 1) полным пересечением квадрики и кватрики в $\mathbb{P}(1^5, 2)$, $g(X) = 2$;
- 2) полным пересечением трех квадрик в $\mathbb{P}^6$, $g(X) = 3$;
- 3) раздутием неособой гиперповерхности степени 4 во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(1^4, 2)$ в эллиптической кривой, высекаемой двумя гиперповерхностями степени один, $g(X) = 3$;
- 4) $\mathbb{P}^1 \times S_2$, где S_2 – неособая поверхность дель Пеццо степени 2, $g(X) = 4$;
- 5) двойным накрытием $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с ветвлением в дивизоре степени $(2, 2, 2)$, $g(X) = 4$;
- 6) раздутием неособого полного пересечения двух квадрик в проективном пространстве $\mathbb{P}^5$ в эллиптической кривой, высекаемой двумя гиперплоскими сечениями, $g(X) = 5$;
- 7) гиперповерхностью степени 4 в $\mathbb{P}(1^4, 2)$, $g(X) = 5$;
- 8) полным пересечением трех дивизоров степени $(1, 1)$ в $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$, $g(X) = 6$;
- 9) $\mathbb{P}^1 \times S_4$, где S_4 – неособая поверхность дель Пеццо степени 4, $g(X) = 7$;
- 10) дивизором степени $(1, 1, 1, 1)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $g(X) = 7$;
- 11) раздутием конуса над неособой квадрикой $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$ в несвязном объединении вершины и неособой эллиптической кривой на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $g(X) = 8$;
- 12) полным пересечением двух квадрик в $\mathbb{P}^5$, $g(X) = 9$;
- 13) $\mathbb{P}^1 \times S_6$, где S_6 – неособая поверхность дель Пеццо степени 6, $g(X) = 10$;
- 14) $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $g(X) = 13$.

Следующий результат был получен в работе [25].

ТЕОРЕМА 10. Пусть X – трехмерное многообразие Фано–Энриквеса с терминальными особенностями. Тогда существует малая деформация $g: U \rightarrow \Delta$ над одномерным единичным диском Δ с центром O такая, что $X \cong g^{-1}(O)$, а для $s \in \Delta \setminus O$ слой морфизма g над точкой s является трехмерным многообразием Фано–Энриквеса с терминальными циклическими факторособенностями.

Таким образом, трехмерные многообразия Фано–Энриквеса с терминальными особенностями являются деформациями трехмерных многообразий Фано–Энриквеса, классифицированных в теореме 9. Однако задача полной классификации трехмерных многообразий Фано–Энриквеса с произвольными каноническими особенностями пока еще далека от завершения. Следующий результат был получен в работе [26].

ТЕОРЕМА 11. Пусть X – трехмерное многообразие Фано–Энриквеса. Тогда выполнены неравенства $-K_X^3 \leq 92$ и $g(X) \leq 47$.

По-видимому, неравенства в утверждении теоремы 11, далеки от совершенства. Есть основания полагать, что род трехмерного многообразия Фано–Энриквеса не превосходит 13. Следующий результат был анонсирован Л. Гиральдо, А. Л. Кнутсен, А. Лопесом и Р. Мюнозем.

ТЕОРЕМА 12. Пусть X – трехмерное многообразие Фано–Энриквеса с изолированными особенностями такое, что $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} H$ для очень обильного дивизора H на многообразии X . Тогда выполнено неравенство $g(X) \leq 26$.

Трехмерное многообразие Фано–Энриквеса является многообразием Фано с каноническими особенностями, имеющим целый индекс Фано. Однако индекс Фано трехмерного многообразия Фано–Энриквеса априори может и не быть равным 1. Следующий результат был получен в работе [27].

ТЕОРЕМА 13. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ – трехмерное многообразие Фано–Энриквеса с изолированными особенностями такое, что $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} H$, где H – гиперплоское сечение многообразия X , являющееся неособой поверхностью Энриквеса. Тогда $H \subset \mathbb{P}^{n-1}$ не может быть образом r -кратного вложения Веронезе линейно нормальной неособой поверхности Энриквеса $S \subset \mathbb{P}^k$ для $r \geq 2$.

На самом деле верно следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. Пусть X – трехмерное многообразие Фано–Энриквеса, обладающее дивизором Картье H таким, что $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} nH$ для $n \in \mathbb{N}$. Тогда $n = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $n \neq 1$. Пусть $D = K_X + nH$ – дивизор Вейля на многообразии X , а S – общая поверхность в линейной системе $|H|$. Тогда из работы [28] следует, что особенности S канонические, а из работы [29] следует, что в окрестности поверхности S особенности многообразия X канонические и горенштейновы. Более того, из формулы присоединения следует, что S является поверхностью дель Пеццо. В частности, имеет место рациональная эквивалентность $D|_S \sim 0$, поскольку ограничение $D|_S$ является дивизором Картье и $D|_S \sim_{\mathbb{Q}} 0$, но группа Пикара поверхности дель Пеццо S не имеет кручения.

Рассмотрим общую поверхность Y в линейной системе $|kH|$ для $k \gg 0$ и положим $C = Y \cap S$. В этом случае

$$D|_Y \cdot H|_Y = D|_S \cdot kH|_S = D \cdot C = 0,$$

откуда следует, что $D|_Y \equiv 0$ и $D|_C \sim 0$ по теореме Ходжа об индексе, поскольку дивизор $kH|_Y$ обилен и $D|_Y \cdot D|_Y \not\sim 0$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_Y(D|_Y)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_Y((D-H)|_Y)),$$

где дивизор $(H-D)|_Y$ обилен. Из теоремы Каваматы–Фивега об обращении в нуль следует, что $H^1(\mathcal{O}_Y((D-H)|_Y)) = 0$. Более того, $H^0(\mathcal{O}_C) = \mathbb{C}$, поскольку C является обильным дивизором на поверхности Y . Таким образом, $H^0(\mathcal{O}_Y(D|_Y)) = \mathbb{C}$, откуда следует, что $D|_Y \sim 0$. Последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(-kH) \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

точна, поскольку пучок $\mathcal{O}_X(D)$ локально свободен в окрестности поверхности Y , а вне поверхности Y последовательность тривиальна. Значит, последовательность групп

$$0 = H^0(\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(-kH)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(D)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_Y) \\ \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(-kH))$$

точна. С другой стороны, из работы [30] следует, что пучок $\mathcal{O}_X(D)$ является рефлексивным. Следовательно, существует такая точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

что пучок $\mathcal{E}$ локально свободен, а пучок $\mathcal{F}$ свободен от кручения. Последовательность

$$H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-kH)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(-kH)) \rightarrow H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-kH))$$

точна, но группа $H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-kH))$ обращается в нуль, поскольку $\mathcal{F}$ не имеет кручений, а группа когомологий $H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-kH))$ обращается в нуль в силу нормальности многообразия X . Значит, группа $H^1(\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(-kH))$ также обращается в нуль, откуда следует, что $H^0(\mathcal{O}_X(D)) = \mathbb{C}$. В частности, канонический дивизор K_X является дивизором Картье, что противоречит определению многообразия X .

Первоначальный интерес к трехмерным многообразиям Фано был в основном обусловлен проблемой Люрота. Дж. Фано утверждал нерациональность неособой трехмерной квартики в работе [31] и нерациональность неособой трехмерной кубики в работе [32]. С другой стороны, unirationalность неособой трехмерной кубики была к тому времени хорошо известна, а unirationalность некоторых неособых трехмерных квартик была установлена в работе [33] позднее (см. [34], [35]), однако вполне возможно, что Дж. Фано знал примеры неособых трехмерных unirationalных квартик. К сожалению, строгое доказательство этих утверждений Дж. Фано было получено только в работах [36], [37]. Тем не менее, сейчас уже можно сказать, что вопрос рациональности неособых трехмерных многообразий Фано практически полностью решен (см. [35]–[40]). Характерно, что первоначальный интерес к трехмерным многообразиям Фано–Энриквесы был обусловлен следующим результатом, который был независимо получен в работах [41], [42], но гипотетически утверждался задолго до этого еще Дж. Фано и Ф. Энриквесом.

ТЕОРЕМА 15. Пусть $X \subset \mathbb{P}^4$ – так называемое трехмерное многообразие Энриквесы, которое задано как особая гиперповерхность

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \left(x_0^2 + x_0 \sum_{i=1}^4 a_i x_i + \sum_{i,j=1}^4 b_{ij} x_i x_j \right) + c_1 x_2^2 x_3^2 x_4^2 \\ + c_2 x_1^2 x_3^2 x_4^2 + c_3 x_1^2 x_2^2 x_4^2 + c_4 x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 0$$

степени шесть, где x_i – однородные координаты на $\mathbb{P}^4$, а a_i, b_{ij}, c_i – достаточно общие комплексные числа. Тогда многообразие V нерационально.

Дж. Фано считал, что трехмерное многообразие Энриквеса не является унирациональным. Позднее Л. Рот показал унирациональность трехмерного многообразия Энриквеса в книге [43], где он также утверждал его нерациональность, обуславливая это тем, что фундаментальная группа разрешения особенностей трехмерного многообразия Энриквеса содержит подгруппу $\mathbb{Z}_2$. Последнее утверждение вызвало удивление в связи с тем, что Ж.П. Серр доказал в работе [44] односвязность неособых унирациональных многообразий. Это недоразумение было объяснено в работе [45], где была указана явная ошибка в доказательстве нерациональности трехмерного многообразия Энриквеса в книге [43], которая была обусловлена тем, что не были учтены особенности трехмерного многообразия Энриквеса, которые возникают как образы восьми негоренштейновых особых точек на его нормализации.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Нормализацией трехмерного многообразия Энриквеса является трехмерное многообразие Фано–Энриквеса степени 6 и рода 4, имеющее восемь особых точек типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, каноническое накрытие которого является двойным накрытием произведения $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с ветвлением в неособом дивизоре степени $(2, 2, 2)$.

Таким образом, некоторые трехмерные многообразия Фано–Энриквеса нерациональны. Следующий результат был получен в работе [46].

ТЕОРЕМА 17. Пусть X – трехмерное многообразие Фано–Энриквеса такое, что выполнено неравенство $-K_X^2 \geq 10$. Тогда многообразие X рационально.

Хорошо известно и интуитивно понятно, что многообразия Фано “более рациональны” при увеличении степени и при ухудшении особенностей. Например, из классификации следует, что неособое трехмерное многообразие Фано рационально, если его степень больше 24. С этой точки зрения утверждение теоремы 17 выглядит очень естественно. Таким образом, можно сказать, что утверждение теоремы 1 заполняет возникшую пустоту между утверждениями теорем 15 и 17.

СЛЕДСТВИЕ 18. Пусть X – нерациональное трехмерное многообразие Фано–Энриквеса, имеющее терминальные факторособенности, а V – каноническое накрытие многообразия X . Тогда V является либо полным пересечением трех квадрат, либо полным пересечением квадратики и кватрики в $\mathbb{P}(1^5, 2)$, либо двойным накрытием произведения $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с ветвлением в дивизоре степени $(2, 2, 2)$.

ГИПОТЕЗА 19. Пусть X – трехмерное многообразие Фано–Энриквеса, имеющее терминальные факторособенности, такое, что его каноническое накрытие является либо полным пересечением квадратики и кватрики в $\mathbb{P}(1^5, 2)$, либо полным пересечением трех квадрат. Тогда многообразие X нерационально.

В оставшейся части настоящей работы будет доказана теорема 1. Рассмотрим двойное накрытие $\psi: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ с ветвлением в неособой поверхности $S \subset \mathbb{P}^3$ сте-

пени 4. Предположим, что существует инволюция τ многообразия V , оставляющая неподвижными восемь точек на многообразии V . Пусть $X = V/\tau$. Тогда X является трехмерным многообразием Фано–Энриквеса степени 8 и рода 5.

ЛЕММА 20. *Существуют однородные координаты $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ на $\mathbb{P}^3$ такие, что индуцированное действие инволюции τ на $\mathbb{P}^3$ задается соотношением*

$$\tau(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (x_0 : x_1 : -x_2 : -x_3),$$

а поверхность $S \subset \mathbb{P}^3$ задается уравнением

$$q_4(x_0, x_1) + a_2(x_0, x_1)x_2^2 + b_2(x_0, x_1)x_2x_3 + c_2(x_0, x_1)x_3^2 + p_4(x_2, x_3) = 0,$$

где q_4 и p_4 – многочлены степени 4, а a_2, b_2, c_2 – многочлены степени 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение доказано в [23, §6.1.2].

Таким образом, многообразие V может быть рассмотрено как гиперповерхность степени 4 во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(1^4, 2)$, заданная уравнением

$$y^2 = q_4(x_0, x_1) + a_2(x_0, x_1)x_2^2 + b_2(x_0, x_1)x_2x_3 + c_2(x_0, x_1)x_3^2 + p_4(x_2, x_3),$$

где x_i – однородная координата веса 1, y – однородная координата веса 2; индуцированное действие инволюции τ на взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(1^4, 2)$ задается уравнением $\tau(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : y) = (x_0 : x_1 : -x_2 : -x_3 : -y)$, восемь различных неподвижных точек инволюции $\tau: V \rightarrow V$ определяются двумя наборами уравнений $x_0 = x_1 = y = 0$ и $x_2 = x_3 = y = 0$, где q_4 и p_4 – однородные многочлены степени 4, а a_2, b_2, c_2 – однородные многочлены степени 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Линейная система $|-K_V|$ порождена формами

$$\lambda y + \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j, \quad \lambda, a_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Пусть $\Lambda \subset |-K_V|$ – линейная система, порожденная формами

$$b_{00}x_0^2 + b_{01}x_0x_1 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2,$$

а $\Sigma \subset |-K_V|$ – линейная система, порожденная формами

$$\mu y + c_{02}x_0x_2 + c_{03}x_0x_3 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3,$$

где $\mu, c_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$. Тогда линейная система Λ свободна, базисное множество линейной системы Σ состоит из неподвижных точек инволюции τ , поверхности в Λ и Σ инвариантны относительно действия τ , общая поверхность S_Λ в Λ является неособой поверхностью КЗ, инволюция τ действует на S_Λ свободно, общая поверхность S_Σ в Σ является неособой поверхностью КЗ, ограничение τ на S_Σ оставляет неподвижными восемь точек. Пусть $H_\Lambda \subset X$ – фактор поверхности S_Λ по инволюции τ и $H_\Sigma \subset X$ – факторповерхность S_Σ/τ . Тогда H_Λ – неособая поверхность Энриквеса, H_Σ – поверхность КЗ, имеющая восемь обыкновенных двойных точек, поверхность H_Λ является обильным дивизором Картье на многообразии X , поверхность H_Σ – дивизором Вейля на многообразии X , дивизор $2H_\Sigma$ – дивизором Картье, $2H_\Lambda \sim 2H_\Sigma$, H_Σ является общей поверхностью в $|-K_X|$, а H_Λ – общей поверхностью в $|H_\Lambda|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 22. По построению линейная система $|H_\Lambda|$ свободна и задает двойное накрытие $\varphi_{|H_\Lambda|}: X \rightarrow \mathbb{P}^5$ такое, что образ $\varphi_{|H_\Lambda|}(X) \subset \mathbb{P}^5$ является полным пересечением двух особых квадрик $B^2 = AC$ и $E^2 = DF$ в соответствующих однородных координатах $(A : B : C : D : E : F)$ на $\mathbb{P}^5$. Линейная система $|H_\Sigma|$ задает рациональное отображение $\varphi_{|H_\Sigma|}: X \dashrightarrow \mathbb{P}^4$, образ которого является квадрикой с одной особой точкой, степень отображения $\varphi_{|H_\Sigma|}$ в общей точке X равна двум, раздутие всех особых точек многообразия X разрешает неопределенности отображения $\varphi_{|H_\Sigma|}$.

Рассмотрим пучок Ξ на многообразии V , заданный линейными формами $\alpha x_0 + \beta x_1$, и пучок Ω , заданный линейными формами $\gamma x_2 + \delta x_3$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. В этом случае базисное множество пучка Ξ состоит из неособой эллиптической кривой $C_\Xi \subset V$, заданной уравнениями $x_0 = x_1 = 0$, базисное множество пучка Ω состоит из неособой эллиптической кривой $C_\Omega \subset V$, заданной уравнениями $x_2 = x_3 = 0$, поверхности в пучках Ξ и Ω инвариантны относительно действия инволюции τ , достаточно общая поверхность $S_\Xi \in \Xi$ и общая поверхность $S_\Omega \in \Omega$ являются неособыми поверхностями дель Педро степени 2, инволюция τ оставляет неподвижными на S_Ξ четыре точки, заданные уравнениями $y = x_0 = x_1 = 0$, и на поверхности S_Ω четыре точки, заданные уравнениями $y = x_2 = x_3 = 0$.

Рассмотрим факторповерхности $H_\Xi = S_\Xi/\tau \subset X$ и $H_\Omega = S_\Omega/\tau \subset X$. По построению обе поверхности H_Ξ и H_Ω являются поверхностями дель Педро степени 1, каждая из которых имеет четыре обыкновенные двойные особые точки, поверхности H_Ξ и H_Ω не являются дивизорами Картье на многообразии X , но оба дивизора $2H_\Xi$ и $2H_\Omega$ являются дивизорами Картье и $2H_\Xi \sim 2H_\Omega \sim H_\Lambda$, поверхности H_Ξ и H_Ω являются общими поверхностями в линейных системах дивизоров Вейля $|H_\Xi|$ и $|H_\Omega|$ соответственно.

ЛЕММА 23. Пусть E_Ξ и E_Ω – образы соответственно неособых кривых C_Ξ и C_Ω на многообразии X . Тогда кривые E_Ξ и E_Ω неособы и рациональны, кривая E_Ω пересекает поверхность H_Ξ трансверсально в одной неособой точке O , являющейся базисной точкой пучка $|-K_{H_\Xi}|$, который высекается на H_Ξ пучком $|H_\Omega|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все необходимые утверждения следуют непосредственно из приведенной выше явной конструкции трехмерных многообразий V и X .

ЛЕММА 24. Пусть $P_i \in X$ – особые точки для $i = 1, 2, 3, 4$, являющиеся образам неподвижных точек инволюции τ , заданных уравнениями $y = x_0 = x_2$, а H_Ω^i – единственная поверхность в пучке $|H_\Omega|$, содержащая точку P_i . Тогда $H_\Xi \cap H_\Omega^i$ – кривая арифметического рода один в пучке $|-K_{H_\Xi}|$, имеющая одну двойную точку P_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из леммы 23.

Рассмотрим композицию $g: Y \rightarrow X$ раздутий особых точек P_i с последующим раздутием собственного прообраза кривой E_Ξ . Обозначим F_i и E такие g -исключительные дивизоры, что $g(F_i) = P_i$ и $g(E) = E_\Xi$. Пусть $H \subset Y$ – собственный прообраз поверхности H_Ξ , Θ – собственный прообраз на Y пучка $|H_\Xi|$, а $H_i \subset Y$ –

собственный прообраз поверхности H_Ω^i . Тогда H – неособая поверхность дель Пеццо степени один, линейная система Θ свободна и задает морфизм $\varphi_\Theta: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$, поверхность H является общим слоем морфизма φ_Θ , кривые $E \cap H$, $F_i \cap H$, $H_i \cap H$ неприводимы, неособы и рациональны. Более того, выполнены равенства

$$\begin{aligned} F_i \cdot F_i \cdot H &= -2, & E \cdot F_i \cdot H &= 1, & E \cdot E \cdot H &= -1, \\ H_i \cdot H_i \cdot H &= -1, & E \cdot H_i \cdot H &= 0, & F_i \cdot H_i \cdot H &= 2 \end{aligned}$$

и $F_i \cdot F_j \cdot H = 0$ в случае $i \neq j$. Таким образом, многообразие Y можно считать неособой поверхностью дель Пеццо степени один, определенной над полем $\mathbb{C}(x)$ рациональных функций на $\mathbb{P}^1$, а поверхности H_i , F_i и E можно считать кривыми на Y , которые также определены над полем $\mathbb{C}(x)$. В таком случае выполнены равенства

$$\begin{aligned} F_i \cdot F_i &= -2, & E \cdot F_i &= 1, & E \cdot E &= -1, \\ H_i \cdot H_i &= -1, & E \cdot H_i &= 0, & F_i \cdot H_i &= 2 \end{aligned}$$

и $F_i \cdot F_j = 0$ при $i \neq j$, а также $H_i \cdot H_j = 1$ при $i \neq j$, где все кривые H_i пересекаются между собой в одной точке, которая является базисной точкой пучка $|-K_Y|$, причем выполнены эквивалентность $-K_Y \sim H_i + F_i$ и равенство $K_Y^2 = 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 25. *Выполнено неравенство $\text{rank}(\text{Pic}(Y)) \geq 5$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства $-K_Y \cdot F_i = 0$, $F_i \cdot F_i = -2$ и $F_i \cdot F_j = 0$ для $i \neq j$ влекут требуемое утверждение.

Бирациональная геометрия геометрически рациональных поверхностей, определенных над алгебраически незамкнутым полем, была исследована в работах [47]–[56], где были получены три следующих результата.

ТЕОРЕМА 26. *Пусть W – неособая, минимальная, геометрически неприводимая и геометрически рациональная поверхность, определенная над некоторым совершенным полем $\mathbb{F}$. Тогда либо W является поверхностью дель Пеццо и $\text{Pic}(W) \cong \mathbb{Z}$, либо существует расслоение на коники $\pi: W \rightarrow Z$ и $\text{Pic}(W) \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$.*

ТЕОРЕМА 27. *Пусть W – неособая, минимальная, геометрически неприводимая и геометрически рациональная поверхность, определенная над некоторым совершенным полем $\mathbb{F}$. Тогда поверхность W рациональна над полем $\mathbb{F}$ в том и только в том случае, когда поверхность W обладает $\mathbb{F}$ -точкой и выполнено неравенство $K_W^2 \geq 5$.*

ТЕОРЕМА 28. *На неособой, геометрически неприводимой и геометрически рациональной поверхности W , определенной над C_1 -полем $\mathbb{F}$, существует $\mathbb{F}$ -точка.*

Таким образом, на поверхности Y существует $\mathbb{C}(x)$ -точка. На самом деле, множество $\mathbb{C}(x)$ -точек поверхности Y очень велико (см. [57]). Из утверждения 25 следует, что поверхность Y не минимальна и существует бирациональный морфизм $f: Y \rightarrow U$, определенный над полем $\mathbb{C}(x)$, такой, что поверхность U неособа, минимальна, геометрически неприводима, геометрически рациональна и также содержит $\mathbb{C}(x)$ -точку.

ЗАМЕЧАНИЕ 29. Выполнены неравенства

$$K_U^2 \geq K_Y^2 + \operatorname{rank}(\operatorname{Pic}(Y)) - \operatorname{rank}(\operatorname{Pic}(U)) \geq \operatorname{rank}(\operatorname{Pic}(Y)) - 1 \geq 4.$$

Можно считать, что $\operatorname{Pic}(Y) \cong \mathbb{Z}^5$, поскольку в противном случае U и, следовательно, многообразие X будут рациональными. В частности, группа $\operatorname{Pic}(Y) \otimes \mathbb{Q}$ порождена дивизорами F_i и $-K_Y$. Над алгебраическим замыканием $\overline{\mathbb{C}(x)}$ поля $\mathbb{C}(x)$ морфизм f является композицией стягиваний неособых рациональных кривых с самопересечением -1 , откуда следует, что в случае, когда f стягивает по крайней мере четыре кривые над полем $\overline{\mathbb{C}(x)}$, выполнено неравенство $K_U^2 \geq 5$. С другой стороны, морфизм f стягивает по крайней мере три кривые над $\overline{\mathbb{C}(x)}$. Можно считать, что f стягивает ровно три кривые над полем $\overline{\mathbb{C}(x)}$, $K_U^2 = 4$ и $\operatorname{Pic}(U) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$, откуда следует, что каждая кривая, стягиваемая морфизмом f над $\overline{\mathbb{C}(x)}$, инвариантна относительно $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{C}(x)}/\mathbb{C}(x))$.

СЛЕДСТВИЕ 30. *Морфизм f является композицией $f_1 \circ f_2 \circ f_3$, где f_i – стягивание геометрически неприводимой, неособой и рациональной кривой с самопересечением -1 , определенной над $\mathbb{C}(x)$.*

Рассмотрим неособую рациональную кривую $C \subset Y$, определенную над полем $\mathbb{C}(x)$, такую, что выполнено равенство $C^2 = -1$. В этом случае

$$C \sim_{\mathbb{Q}} -\varepsilon K_Y - \sum_{i=1}^4 k_i F_i,$$

где ε и k_i – рациональные числа. Более того, выполнены импликации

$$C \cdot F_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \Rightarrow k_i \in \frac{1}{2} \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad -K_Y \cdot C = 1 \Rightarrow \varepsilon = 1, \quad C^2 = -1 \Rightarrow \sum_{i=1}^4 k_i^2 = 1,$$

откуда следует, что либо $C \sim_{\mathbb{Q}} -K_X - F_i \sim H_i$, либо

$$C \sim_{\mathbb{Q}} -K_X - \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} F_i \sim_{\mathbb{Q}} E,$$

и, таким образом, кривая C совпадает либо с H_i , либо с E . Следовательно, геометрически неприводимые кривые на поверхности Y , имеющие отрицательное самопересечение, исчерпываются кривыми F_i , H_i и E . Однако форма пересечения любых трех кривых среди девяти кривых F_i , H_i и E не является отрицательно определенной, что противоречит следствию 30. Таким образом, утверждение теоремы 1 доказано.

Автор признателен В. Алексееву, Р. Варлей, А. Верре, М. М. Гриненко, В. А. Исковских, А. Конте, А. Корти, А. Лопезу, М. Марчизио, М. Мелле, Дж. Парку, Ю. Г. Прохорову, А. В. Пухликову, В. В. Шокурову и Л. Воцлаву за полезные и плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. *Fano G.* Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli // Atti Congr. Int. Bologna. 1929. V. IV. P. 115–121.
2. *Fano G.* Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni a curve sezioni canoniche // Scritti Mat. offerti a L. Berzolari Ist. Mat. R. Univ. Pavia. 1936. P. 329–349.
3. *Fano G.* Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve sezioni canoniche // Mem. Accad. d'Italiana. 1937. V. VIII. P. 23–64.
4. *Fano G.* Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve-sezioni canoniche // Comment. Math. Helv. 1942. V. 14. P. 202–211.
5. *Шокуров В. В.* Гладкость общего антиканонического дивизора на многообразиях Фано // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. №2. С. 430–441.
6. *Исковских В. А.* Многообразия Фано. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. №3. С. 516–562.
7. *Исковских В. А.* Многообразия Фано. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. №3. С. 504–549.
8. *Шокуров В. В.* Существование прямой на многообразии Фано // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. №5. С. 922–964.
9. *Mori S., Mukai S.* Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$ // Manuscr. Mat. 1981. V. 36. P. 147–162.
10. *Mori S., Mukai S.* Erratum, Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$ // Manuscr. Mat. 2003. V. 110. P. 407.
11. *Fano G.* Sulle varrieta algebriche a tre dimensionile le cui sezioni iperpiane sono superfici di genere zero e bigenere uno // Mem. Soc. It. d. Scienze (detta dei XL). 1938. V. 24. P. 44–66.
12. *Fujita T.* Impossibility criterion of being an ample divisor // J. of the Math. Soc. of Japan. 1982. V. 34. P. 355–363.
13. *Beltrametti M., Sommese A.* A criterion for a variety to be a cone // Comm. Math. Helv. 1987. V. 62. P. 417–422.
14. *Lvovsky S.* Extensions of projective varieties and deformations. I // Mich. Math. J. 1992. V. 39. P. 41–51.
15. *Lvovsky S.* Extensions of projective varieties and deformations. II // Mich. Math. J. 1992. V. 39. P. 65–70.
16. *Чельцов И. А.* Особенности трехмерных многообразий, обладающих обильным эффективным дивизором – гладкой поверхностью кодаировой размерности нуль // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №4. С. 618–626.
17. *Чельцов И. А.* Трехмерные многообразия, обладающие дивизором с численно тривиальным каноническим классом // УМН. 1996. Т. 51. №1. С. 177–178.
18. *Conte A.* On threefolds whose hyperplane sections are Enriques surfaces // Lect. Note Math. 1981. V. 947. P. 221–228.
19. *Conte A., Murre J. P.* Algebraic varieties of dimension 3 whose hyperplane sections are Enriques surfaces // Ann. Souola Norm. Sup. de Pisa. 1985. V. 12. P. 43–80.
20. *Прохоров Ю. Г.* О трехмерных многообразиях с гиперплоскими сечениями – поверхностями Энриквеса // Матем. сб. 1995. Т. 186. №9. С. 113–124.
21. *Alexeev V.* General elephants of $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds // Comp. Math. 1994. V. 91. P. 91–116.
22. *Fletcher A.* Contributions to Riemann-Roch on projective 3-folds with only canonical singularities and applications // Proceedings of Symposium in Pure Mathematics. 1987. V. 46. P. 221–231.
23. *Bayle L.* Classification des variétés complexes projectives de dimension trois dont une section hyperplane generale est une surface d'Enriques // J. Reine Ang. Math. 1994. V. 449. P. 9–63.

24. *Sano T.* On classifications of non-Gorenstein $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds of Fano index 1 // J. Math. Soc. Japan. 1995. V. 47. P. 369–380.
25. *Minagawa T.* Deformations of $\mathbb{Q}$ -Calabi-Yau 3-folds and $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds of Fano index 1 // J. Math. Soc. Univ. Tokyo. 1999. V. 6. P. 397–414.
26. *Чельцов И. А.* Ограниченность трехмерных многообразий Фано целого индекса // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 3. С. 445–451.
27. *Giraldo L., Lopez A., Muñoz R.* On the existence of Enriques–Fano threefolds of index greater than one // J. Alg. Geom. 2004. V. 13. P. 143–166.
28. *Alexeev V.* Theorems about good divisors on log Fano varieties (case of index $r > n - 2$) // Lect. Note Math. 1991. V. 1479. P. 1–9.
29. *Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K.* Introduction to the minimal model problem // Advanced Studies in Pure Mathematics. 1987. V. 10. P. 383–360.
30. *Hartshorne R.* Stable reflexive sheaves // Math. Ann. 1980. V. 254. P. 121–176.
31. *Fano G.* Osservazioni sopra alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli // Atti Accad. Torino. 1915. V. 50. P. 1067–1072.
32. *Fano G.* Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche // Pont. Acad. Sci. Comment. 1947. V. 11. P. 635–720.
33. *Segre B.* Variazione continua ad omotopia in geometria algebrica // Ann. Mat. Pura Appl. 1960. V. 50. P. 149–186.
34. *Marchisio M.* Unirational quartic hypersurfaces // Boll. Unione Mat. Ital. 2000. V. 8. P. 301–313.
35. *Исковских В. А.* Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Современные проблемы математики. Т. 12. М.: ВИНТИ, 1978. С. 159–236.
36. *Исковских В. А., Манин Ю. И.* Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86. № 1. С. 140–166.
37. *Clemens H., Griffiths P.* The intermediate Jacobian of the cubic threefold // Ann. Math. 1972. V. 95. P. 281–356.
38. *Тюрин А. Н.* Средний якобиан трехмерных многообразий // Современные проблемы математики. Т. 12. М.: ВИНТИ, 1978. С. 5–57.
39. *Исковских В. А.* О проблеме рациональности для трехмерных алгебраических многообразий // Тр. МИАН. 1997. Т. 218. С. 186–227.
40. *Исковских В. А., Прохоров Ю. Г.* Fano varieties. N.Y.: Springer, 1999.
41. *Botta L. P., Verra A.* The non rationality of the generic Enriques threefold // Comp. Math. 1983. V. 48. P. 167–184.
42. *Эндрюшка С. Ю.* Нерациональность общего многообразия Энриквеса // Матем. сб. 1984. Т. 123. № 2. С. 269–275.
43. *Roth L.* Algebraic threefolds with special regard to problems of rationality. Berlin: Springer-Verlag, 1955.
44. *Serre J. P.* On the fundamental group of a unirational variety // J. Lond. Math. Soc. 1959. V. 34. P. 481–484.
45. *Tyrrell J. A.* The Enriques threefold // Proc. Camb. Philos. Soc. 1961. V. 57. P. 897–898.
46. *Cheltsov I. A.* On the rationality of non-Gorenstein $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds with an integer Fano index // Cont. Math. 1997. V. 207. P. 43–50.
47. *Manin Yu. I.* Rational surfaces over perfect fields // Publ. Math. IHES. 1966. V. 30. P. 55–114.
48. *Манин Ю. И.* Рациональные поверхности над совершенными полями. II // Матем. сб. 1967. Т. 72. № 2. С. 161–192.
49. *Манин Ю. И.* Кубические формы. М.: Наука, 1972.
50. *Исковских В. А.* О бирациональных формах рациональных поверхностей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 6. С. 1417–1433.

- 51. *Исковских В. А.* Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых // Матем. сб. 1967. Т. 74. № 4. С. 608–638.
- 52. *Исковских В. А.* Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса // Матем. сб. 1970. Т. 83. № 1. С. 90–119.
- 53. *Исковских В. А.* Бирациональные свойства поверхности степени 4 в $\mathbb{P}_k^4$ // Матем. сб. 1972. Т. 88. № 1. С. 31–37.
- 54. *Исковских В. А.* Минимальные модели алгебраических поверхностей над совершенными полями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 19–43.
- 55. *Исковских В. А.* Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори // УМН. 1996. Т. 51. № 4. С. 3–72.
- 56. *Гизатулин М.* Рациональные G -поверхности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 1. С. 103–134.
- 57. *Kollár J.* Rational curves on algebraic varieties. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

E-mail: cheltsov@yahoo.com

Поступило в редакцию
07.10.2003