Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Щербина, Д. Томассини, Полулокальные леви-плоские продолжения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 3, 195–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/im491>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 18:30:19

УДК 517.553

Н. В. Щербина, Дж. Томассини

Полулокальные леви-плоские продолжения

Для областей $G \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ таких, что область $G \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^2$ строго псевдовыпукла, и открытых подмножеств $U \subset bG$ определена оболочка $\mathcal{E}(U)$ относительно алгебры $\mathcal{A}(G \times \mathbb{R})$ и изучены ее свойства. Доказано, что любая непрерывная функция, заданная на U , продолжается до непрерывной функции на $\mathcal{E}(U)$ такой, что ее график локально слои на голоморфные кривые.

Библиография: 17 наименований.

§ 1. Введение

Пусть G – область в $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u \subset \mathbb{C}_{z,w}^2$, $w = u + iv$, и пусть $\varphi: bG \rightarrow \mathbb{R}_v$ – непрерывная функция с графиком $\Gamma(\varphi)$. Возможность продолжения φ до непрерывной функции $\Phi: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}_v$ с леви-плоским (т.е. расслаивающимся на голоморфные кривые) графиком $\Gamma(\Phi)$ изучалась некоторыми авторами (см. [1], [2], [6], [11], [13], [5] в случае ограниченной области G , а также [14] в случае неограниченной области) в предположении, что граница bG гладкая и строго псевдовыпуклая (т.е. $G \times \mathbb{R}_v$ – строго псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}_{z,w}^2$). В настоящей работе мы изучаем задачу о продолжении функции в *полулокальном* варианте (когда φ задана на открытом подмножестве U границы bG) для случая гладкой строго псевдовыпуклой bG . Для этого мы введем понятие оболочки $\mathcal{E}(U) \subset \overline{G}$ множества U и покажем, что всякая непрерывная функция $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}_v$ обладает леви-плоским продолжением на $\mathcal{E}(U)$.

Для заданного открытого подмножества $\mathbb{D}$ пространства $\mathbb{C}^n$ обозначим через $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ алгебру Фреше $\mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$. Если K – компактное подмножество $\overline{\mathbb{D}}$, то через $\hat{K}_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}$ (или просто $\hat{K}$) обозначим $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ -оболочку K .

Пусть $\mathbb{D}$ – строго псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$, а V – открытое подмножество $b\mathbb{D}$. Определим $\mathcal{E}(V)$ как объединение оболочек $\hat{K}_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}$ всех компактных подмножеств K множества V . Легко видеть, что если $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ – исчерпание V компактными подмножествами, то $\mathcal{E}(V) = \bigcup_n \hat{K}_n$. Обозначим через $E(V)$ CR-оболочку V . Поскольку область $\mathbb{D}$ по предположению строго псевдовыпукла, CR-функции на V голоморфно продолжаются в одностороннюю окрестность V множества V в замкнутой области $\overline{\mathbb{D}}$; в этой ситуации $E(V)$ представляет собой просто объединение V с оболочкой голоморфности множества внутренних точек V .

Первый из результатов этой работы описывает свойства множества $\mathcal{E}(V)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbb{D}$ – строго псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}_{z,w}^{n+1}$, где $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $w = u + iv$, и пусть V – открытое подмножество границы $b\mathbb{D}$. Тогда

Работа частично поддержана Jubileumsfonden университета Гётеборга и проектом MURST “Geometric Properties of Real and Complex Manifolds”.

1) $\mathcal{E}(V)$ – открытое подмножество $\overline{\mathbb{D}}$, причем $\mathcal{E}(V) \cap b\mathbb{D} = V$ и $\mathcal{E}(V) \cap \mathbb{D}$ псевдовыпукло.

Если $\mathbb{D}$ при этом имеет вид $\mathbb{D} = G \times \mathbb{R}_v$, где G – область в $\mathbb{C}_z^n \times \mathbb{R}_u$, а V имеет вид $V = U \times \mathbb{R}_v$, где $U \subset bG$, то

2) $\mathcal{E}(V)$ инвариантно относительно сдвигов вдоль v -направления; в частности, $\overline{G}$ имеет открытое подмножество $\mathcal{E}(U)$ такое, что $\mathcal{E}(V) = \mathcal{E}(U) \times \mathbb{R}_v$.

Более того, если $n = 1$ и U – объединение непересекающихся односвязных подобластей bG , то

3) $\mathcal{E}(U \times \mathbb{R}_v) = \mathcal{E}(U \times \mathbb{R}_v)$.

В случае, когда G топологически является трехмерным шаром, множество $\mathcal{E}(U)$ обладает следующим свойством.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G \subset \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ – область, диффеоморфная трехмерному шару, такая, что область $G \times \mathbb{R}_v \subset \mathbb{C}_{z,w}^2$ строго псевдовыпукла. Пусть U – открытое подмножество bG , а $\{U_\alpha\}$ – связные компоненты U . Тогда множества $\mathcal{E}(U_\alpha)$ связны и не пересекаются; более того, $\mathcal{E}(U) = \bigcup_\alpha \mathcal{E}(U_\alpha)$.

Заметим, что, как показывает пример 1 из §7, утверждение теоремы 2, вообще говоря, неверно, если область G не диффеоморфна трехмерному шару.

В силу п. 3) теоремы 1 естественно задать следующий вопрос: как описывается CR-оболочка поверхности $U \times \mathbb{R}_v$? Общая конструкция оболочки голоморфности жесткой (rigid) области представлена в классической работе [4]. Этот результат обобщен в статьях [5], [10] и [16]. Поскольку в рассматриваемом случае поверхность $U \times \mathbb{R}_v$ уже лежит на границе строго псевдовыпуклой области $G \times \mathbb{R}_v$, возможно явное геометрическое описание ее CR-оболочки. Мы приведем его в §4, а потом используем в примере 2 из §7.

Как и ранее, пусть область $G \subset \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ такова, что область $G \times \mathbb{R}_v \subset \mathbb{C}_{z,w}^2$ строго псевдовыпукла, и пусть U – открытое подмножество bG , $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}_v$ – непрерывная функция. Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} V_\varphi^+ &= \{(z, w) \in U \times \mathbb{R}_v : \varphi(z, u) < v\}, \\ V_\varphi^- &= \{(z, w) \in U \times \mathbb{R}_v : v < \varphi(z, u)\}. \end{aligned}$$

Тогда выполнена следующая

ТЕОРЕМА 3. Множества $\mathcal{E}(V_\varphi^\pm)$ представимы в следующем виде:

$$\mathcal{E}(V_\varphi^+) = \{(z, w) \in \overline{G} \times \mathbb{R}_v : v > \Phi^+(z, u), (z, u) \in \mathcal{E}(U)\}, \quad (1)$$

$$\mathcal{E}(V_\varphi^-) = \{(z, w) \in \overline{G} \times \mathbb{R}_v : v < \Phi^-(z, u), (z, u) \in \mathcal{E}(U)\}, \quad (2)$$

где $\Phi^\pm$ – некоторые функции на множестве $\mathcal{E}(U)$.

Определив функции $\Phi^\pm$, мы можем сформулировать основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – область в $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ такая, что $G \times \mathbb{R}_v \subset \mathbb{C}_{z,w}^2$ строго псевдовыпукла. Пусть U – открытое подмножество bG , а $\mathcal{E}(U)$ – открытое подмножество $\overline{G}$, определенное выше. Тогда для всякой функции $\varphi \in C(U)$ существуют две функции $\Phi^\pm \in C(\mathcal{E}(U))$ такие, что $\Phi^\pm|_U = \varphi$, а графики этих функций $\Gamma(\Phi^\pm)$ леви-плоские над $\mathcal{E}(U) \cap G$.

Более того, для любой $\Phi \in C(\mathcal{E}(U))$ такой, что $\Phi|_U = \varphi$ и график $\Gamma(\Phi)$ леви-плоский над $\mathcal{E}(U) \cap G$, и для любой точки $(z, u) \in \mathcal{E}(U)$ имеем

$$\Phi^-(z, u) \leq \Phi(z, u) \leq \Phi^+(z, u).$$

Ограниченные области $G \subset \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$, обладающие тем свойством, что область $G \times \mathbb{R}_v$ строго псевдовыпукла, были охарактеризованы следующим образом в [5, теорема 1]: существуют область $\mathcal{G}$ над $\mathbb{C}_z$ (в дальнейшем мы будем называть $\mathcal{G}$ *накрывающей моделью* области G) и такие непрерывные функции h^- и $-h^+$ в $\mathcal{G}$, являющиеся гладкими и строго субгармоническими в $\mathcal{G}$, что

$$G = \{(z, u) : z = \pi(\zeta), h^-(\zeta) < u < h^+(\zeta), \zeta \in \mathcal{G}\},$$

где $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}_z$ – проекция. Легко видеть, что та же характеристика применима для неограниченных областей G с тем лишь отличием, что одна из функций h^- и $-h^+$ может тождественно обращаться в $-\infty$. Естественное отображение $p : G \rightarrow \mathcal{G}$ сопоставляющее точкам интервала $\{(z, u) : z = \pi(\zeta), h^-(\zeta) < u < h^+(\zeta)\}$ точку ζ будем называть *канонической проекцией*. Следуя [5], обозначим через

$$bG^\pm = \{(z, u) : z = \pi(\zeta), u = h^\pm(\zeta), \zeta \in \mathcal{G}\}$$

“верхнюю” и “нижнюю” части bG (если $h^- \equiv -\infty$ или $h^+ \equiv +\infty$, то соответствующее множество bG^- или bG^+ пусто).

Теперь можно сформулировать результат о максимальности $\mathcal{E}(U)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G – такая подобласть в $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$, что область $G \times \mathbb{R}_v$ строго псевдовыпукла. Пусть U – открытое подмножество, принадлежащее bG , такое, что всякая связная компонента U_α множества U может быть представлена в виде $U_\alpha = U'_\alpha \setminus K_\alpha$, где U'_α – односвязная подобласть из bG^- или bG^+ , а K_α – компактное подмножество, принадлежащее U'_α . Тогда существует функция $\varphi \in C(U)$, не допускающая непрерывного леви-плоского продолжения ни в какую область $\Omega \subset \bar{G}$, обладающую свойством $\mathcal{E}(U) \subsetneq \Omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко видеть, что если область G диффеоморфна трехмерному шару, то достаточно, чтобы всякая связная компонента U_α множества U лежала в bG^- или bG^+ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Большая часть наших результатов выполняется и для областей G , удовлетворяющих гораздо более слабым условиям регулярности, описанным в [5] и [14]. Мы формулируем их в строго псевдовыпуклом случае во избежание технических сложностей.

Настоящая работа была частично выполнена во время пребывания первого автора в Высшей нормальной школе в Пизе и в Математическом институте Макса Планка в Бонне. Он благодарит эти институты за гостеприимство и превосходные условия для работы.

§ 2. Предварительные результаты

ЛЕММА 1. Пусть $\mathbb{D}$ – неограниченная строго псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$ и K – компактное подмножество в $b\mathbb{D}$. Тогда $\mathbb{D}$ содержит такую ограниченную строго псевдовыпуклую подобласть $\mathbb{D}'$, что $K \subset b\mathbb{D}'$ и $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ -оболочка $\hat{K}_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}$ множества K совпадает с его $\mathcal{A}(\mathbb{D}')$ -оболочкой $\hat{K}_{\mathcal{A}(\mathbb{D}')}$. В частности, при $n = 2$ это означает, что множество $\mathbb{D} \setminus \hat{K}_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}$ псевдовыпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{B}_R = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < R\}$. Поскольку $\hat{K}_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}$ – компактное подмножество в $\overline{\mathbb{D}}$, можно выбрать достаточно большое $R \in \mathbb{R}$ такое, чтобы $\hat{K}_{\mathcal{A}(\mathbb{D})} \subset \mathbb{B}_R \cap \overline{\mathbb{D}}$ и сфера $b\mathbb{B}_R$ трансверсально пересекала $b\mathbb{D}$. Положим $\mathbb{D}_1 = \mathbb{B}_R \cap \mathbb{D}$. Пусть $r < R$ такое, что все еще выполнено включение $\hat{K}_{\mathcal{A}(\mathbb{D})} \subset \mathbb{B}_r \cap \overline{\mathbb{D}}$. Рассмотрим такую окрестность $\mathbf{V}$ множества $b\mathbb{B}_R \cap b\mathbb{D}$, что $\mathbf{V} \cap \overline{\mathbb{B}_r} = \emptyset$. Граница $b\mathbb{D}_1$ кусочно гладкая, так что для открытой окрестности $\mathbf{V}$ множества $b\mathbb{B}_R \cap b\mathbb{D}$ существует строго псевдовыпуклая область $\mathbb{D}'$ со следующими свойствами: $\mathbb{D}' \subset \mathbb{D}_1$ и $\mathbb{D}_1 \setminus \mathbb{D}' \subset \mathbf{V}$ (см., например, [17]). Мы утверждаем, что область $\mathbb{D}'$ обладает свойствами, требуемыми в лемме. В самом деле, $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ – подалгебра $\mathcal{A}(\mathbb{D}')$, поэтому $\hat{K}_{\mathcal{A}(\mathbb{D}')} \subset \hat{K}_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}$.

Рассуждая от противного, предположим, что $\hat{K}_{\mathcal{A}(\mathbb{D})} \setminus \hat{K}_{\mathcal{A}(\mathbb{D}')} \neq \emptyset$, и пусть $P \in \hat{K}_{\mathcal{A}(\mathbb{D})} \setminus \hat{K}_{\mathcal{A}(\mathbb{D}')}$. Тогда по определению оболочки существует функция $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}')$ такая, что $|f(P)| > 1$ и $\|f\|_K < 1$. Аппроксимируем f функциями из $\mathcal{A}(\mathbb{D})$, что и приведет к нужному противоречию. В силу теоремы Кэрмана [9] для всякого $\varepsilon > 0$ существует функция g , голоморфная в окрестности $\mathbf{W}$ множества $\overline{\mathbb{D}'}$, для которой $\|g - f\|_{\overline{\mathbb{D}'}} < \varepsilon$. Используем теперь тот факт, что $\overline{\mathbb{D}}$ имеет базис из штейновых окрестностей [17], и найдем такую штейнову область $\mathcal{U} \supset \overline{\mathbb{D}'}$, чтобы $\mathcal{U} \cap \mathbb{B}_r \Subset \mathbf{W}$. Поскольку $\mathcal{U} \cap \mathbb{B}_r$ – множество подуровня плюрисубгармонической функции $\rho(z) = |z|^2$ в $\mathcal{U}$, в силу теоремы Нарасимхана [12] $\mathcal{U} \cap \mathbb{B}_r$ обладает свойством Рунге в $\mathcal{U}$. Значит, в силу выбора r существует такая голоморфная в $\mathcal{U}$ функция $\tilde{g}$, что $\|\tilde{g} - g\|_{K \cup \{P\}} < \varepsilon$. Следовательно, $g_1 = \tilde{g}|_{\overline{\mathbb{D}'}}$ удовлетворяет соотношению $\|g_1 - f\|_{K \cup \{P\}} < 2\varepsilon$. Таким образом, если мы выбрали достаточно малое ε , то g_1 имеет те же свойства, что и f , т. е. $|g_1(P)| > 1$ и $\|g_1\|_K < 1$, что приводит к противоречию.

Последнее утверждение леммы о псевдовыпуклости $\mathbb{D} \setminus \hat{K}_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}$ непосредственно следует из строгой псевдовыпуклости $\mathbb{D}$ и того факта (см., например, [15]), что при $n = 2$ множество $\hat{K}_{\mathcal{A}(\mathbb{D}')}$ псевдовогнуто в $\mathbb{D}'$.

§ 3. Некоторые свойства $\mathcal{E}(U)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. 1) Пусть P – точка множества $\mathcal{E}(V)$. Рассмотрим такое исчерпание V компактными подмножествами $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, что для всякого $n = 1, 2, \dots$ множество K_n лежит во внутренней части K_{n+1} . Тогда, по определению $\mathcal{E}(V)$, $P \in \hat{K}_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $\mathbb{D}$ строго псевдовыпукла, существует односторонняя окрестность $\mathbf{V}_{n+1}$ внутренней части K_{n+1} (относительно $b\mathbb{D}$) в $\overline{\mathbb{D}}$, заполняемая голоморфными дисками с границами на K_{n+1} .

Пусть $\delta_0 > 0$ таково, что для всякого вектора $\mathbf{e}$ длины 1 мы имеем

$$(K_n + \delta \mathbf{e}) \cap \overline{\mathbb{D}} \subset \mathbf{V}_{n+1}, \quad (\hat{K}_n + \delta \mathbf{e}) \cap b\mathbb{D} \subset K_{n+1}$$

для всех δ , $0 \leq \delta < \delta_0$.

Для каждого такого δ рассмотрим множество $E_{n,\delta} = (\hat{K}_n + \delta \mathbf{e}) \cap \bar{\mathbb{D}}$. Тогда $E_{n,\delta}$ содержится в $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ -оболочке $\widehat{\mathbf{V}}_{n+1}$ множества $\bar{\mathbf{V}}_{n+1}$ (это очевидно, так как в противном случае существуют $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ и $Q \in E_{n,\delta}$, для которых $|f| < 1$ на $E_{n,\delta} \cap \bar{\mathbf{V}}_{n+1}$ и $|f(Q)| = 1$). Рассмотрим функцию $\varrho = \log |f| + \varepsilon(|z|^2 + |w|^2)$, строго плюрисубгармоничную в $\mathbb{D} \setminus \{f = 0\}$, и если ε достаточно мало, то для некоторого множества подуровня $L_a = \{\varrho < a\}$ получаем $E_{n,\delta} \cap \bar{\mathbf{V}}_{n+1} \subseteq L_a$, $E_{n,\delta} \subset \bar{L}_a$ и $E_{n,\delta} \cap bL_a \neq \emptyset$. Противоречие с локальным принципом максимума модуля (см., например, [8, с. 92]). Следовательно,

$$E_{n,\delta} \subset \widehat{\mathbf{V}}_{n+1} \subset \hat{K}_{n+1}.$$

Включение $\widehat{\mathbf{V}}_{n+1} \subset \hat{K}_{n+1}$ следует из принципа максимума ввиду того факта, что $\mathbf{V}_{n+1}$ заполняется голоморфными дисками с границами на K_{n+1} . Поэтому при $P + \delta \mathbf{e} \in \bar{\mathbb{D}}$ получаем $P + \delta \mathbf{e} \in \hat{K}_{n+1} \subset \mathcal{E}(V)$ для всех δ таких, что $0 \leq \delta < \delta_0$. Отсюда следует, что $\mathcal{E}(V) -$ открытое подмножество $\bar{\mathbb{D}}$.

Свойство $\mathcal{E}(V) \cap b\mathbb{D} = V$ непосредственно следует из строгой псевдовыпуклости $\mathbb{D}$ и определения $\mathcal{E}(V)$. Псевдовыпуклость $\mathcal{E}(V) \cap \mathbb{D}$ является следствием того очевидного факта, что внутренность $\text{int} \hat{K}_n$ каждого компакта $\hat{K}_n$ псевдовыпукла, а также равенства $\mathcal{E}(V) \cap \mathbb{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{int} \hat{K}_n$, вытекающего из свойства $\hat{K}_n \cap \mathbb{D} \subset \text{int} \hat{K}_{n+1}$, установленного выше.

2) Пусть t – произвольное вещественное число, $\mathbf{e}_v$ – единичный вектор в направлении v . Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ мы имеем $K_n + t\mathbf{e}_v \subset K_{n+k}$ для всех достаточно больших k , так что $\hat{K}_n + t\mathbf{e}_v \subset \hat{K}_{n+k}$ и, следовательно,

$$\mathcal{E}(V) + t\mathbf{e}_v = \bigcup_n (\hat{K}_n + t\mathbf{e}_v) \subset \bigcup_n \hat{K}_{n+k} = \mathcal{E}(V).$$

3) В силу строгой псевдовыпуклости $G \times \mathbb{R}_v \subset \mathbb{C}_{z,w}^2$ CR-оболочка $E(U \times \mathbb{R}_v)$ множества $U \times \mathbb{R}_v$ однолистка, т.е. является подобластью $\bar{G} \times \mathbb{R}_v$. Поскольку согласно п. 1) $(\mathcal{E}(U) \cap G) \times \mathbb{R}_v$ псевдовыпукло, можно заключить, что $E(U \times \mathbb{R}_v) \subset \mathcal{E}(U \times \mathbb{R}_v)$. Следовательно, осталось доказать второе включение $\mathcal{E}(U \times \mathbb{R}_v) \subset E(U \times \mathbb{R}_v)$.

Пусть $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ – такое исчерпание U компактными подмножествами, что каждый компакт E_n лежит во внутренности E_{n+1} . Рассмотрим также исчерпание $U \times \mathbb{R}_v$ компактами $K_n = E_n \times [-n, n]$. Из предположения об односвязности компонент U следует, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ можно найти конечное число непересекающихся гладких односвязных областей $D_n^p \Subset U$ таких, чтобы $E_n \subset \bigcup_p D_n^p$. Рассмотрим кусочно гладкие 2-сферы

$$S_n^p = ((bD_n^p) \times [-n-1, n+1]) \cup (D_n^p \times \{-n-1\}) \cup (D_n^p \times \{n+1\}),$$

лежащие в bG , их гладкие возмущения общего положения $\tilde{S}_n^p \subset bG \times \mathbb{R}_v$ и построенные Н. Г. Кружилиным [11] трехмерные шары B_n^p с границами $\tilde{S}_n^p$, расслаивающиеся на голоморфные диски. Поскольку $bB_n^p = \tilde{S}_n^p \subset bG \times \mathbb{R}_v \setminus K_n$, для всякого p из псевдовыпуклости области $G \times \mathbb{R}_v \setminus \hat{K}_n$ и “принципа непрерывности” можно сделать вывод, что $B_n^p \cap \hat{K}_n = \emptyset$ и существует окрестность $\mathbf{V}_n^p$ шара B_n^p в $G \times \mathbb{R}_v$ такая, что $\mathbf{V}_n^p \subset E(U \times \mathbb{R}_v)$. Обозначим через $\mathcal{W}_n^p$ ограниченную компоненту

множества $G \times \mathbb{R}_v \setminus B_n^p$; тогда по строгой псевдовыпуклости $G \times \mathbb{R}_v$ существует окрестность $\mathbf{W}_n^p$ множества $(bG \times \mathbb{R}_v) \cap \mathcal{W}_n^p$ в $\bar{G} \times \mathbb{R}_v$, лежащая в $E(U \times \mathbb{R}_v)$. Поскольку $\mathbf{V}_n^p \subset E(U \times \mathbb{R}_v)$ и $\mathbf{W}_n^p \subset E(U \times \mathbb{R}_v)$, мы видим из теоремы Хартогса об устранении компактных особенностей, что $\mathcal{W}_n^p \subset E(U \times \mathbb{R}_v)$ для всех p . Включение $\hat{K}_n \subset \bigcup_p \mathcal{W}_n^p$ показывает теперь, что $\hat{K}_n \subset E(U \times \mathbb{R}_v)$ и, следовательно,

$$\mathcal{E}(U \times \mathbb{R}_v) = \bigcup_n \hat{K}_n \subset E(U \times \mathbb{R}_v).$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассмотрим сначала специальный случай, когда G – ограниченная область.

В этом случае $\mathcal{E}(U)$ не может иметь связной компоненты с границей, пересекающей два различных множества U_{α_1} и U_{α_2} . Действительно, пусть F – такая связная компонента bU_{α_1} , что U_{α_1} и U_{α_2} лежат в различных связных компонентах множества $bG \setminus F$. Поскольку F – связное множество и bG диффеоморфно двумерной сфере, множество $bG \setminus F$ является объединением односвязных областей $\{V_\beta\}$. Можно предположить, что области V_β занумерованы так, что $U_{\alpha_1} \subset V_1$. Пусть $D^1 \subset D^2 \subset \dots$ – такое исчерпание множества $bG \setminus F$ открытыми подмножествами, что $D^k \Subset D^{k+1}$ для всякого $k = 1, 2, \dots$, множество D^k является объединением конечного числа гладких односвязных областей и для всякого β множество $D_\beta^k = D^k \cap V_\beta$ состоит из не более чем одной связной компоненты. Заметим, что в силу введенной нумерации для областей $\{D_\beta^k\}$ мы имеем

$$U_{\alpha_1} \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} D_1^k.$$

Пусть $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ – такое компактное исчерпание U , что $E_n \Subset \overset{\circ}{E}_{n+1}$ и $E_n \cap U_\alpha$ связно для любых $n \in \mathbb{N}$ и α . Пусть $\hat{K}_n$ – $\mathcal{A}(G \times \mathbb{R}_v)$ -оболочка множества $K_n = E_n \times [-n, n]$. Поскольку

$$\bigcup_k D^k = bG \setminus F \supset U,$$

для всякого n существует число $k(n)$ такое, что $E_n \subset D^{k(n)}$. Для любого β , при котором $D^{k(n)} \cap V_\beta \neq \emptyset$, рассмотрим кусочно гладкую двумерную сферу

$$S_\beta^{k(n)} = ((bD_\beta^{k(n)}) \times [-n-1, n+1]) \cup (D_\beta^{k(n)} \times \{-n-1\}) \cup (D_\beta^{k(n)} \times \{n+1\}),$$

лежащую в bG . Сглаживая ребра сферы $S_\beta^{k(n)}$ и слегка возмущая ее, мы получим гладкую двумерную сферу общего положения $\tilde{S}_\beta^{k(n)} \subset bG$. Из работы [11] (см. также [2]) следует, что существует трехмерный шар $B_\beta^{k(n)}$ с границей $\tilde{S}_\beta^{k(n)}$, расслоенный на голоморфные диски. Поскольку в силу рассматриваемой конструкции области $D_\beta^{k(n)}$ не пересекаются, шары $B_\beta^{k(n)}$ также не пересекаются. Так как каждый шар $B_\beta^{k(n)}$ расслаивается на голоморфные диски с границей $bS_\beta^{k(n)} \subset bG \setminus K_n$, из леммы 1 и “принципа непрерывности” следует, что $B_\beta^{k(n)} \cap \hat{K}_n = \emptyset$.

Для всякого β пусть $\mathcal{W}_\beta^{k(n)}$ – ограниченная компонента множества $\overline{G} \times \mathbb{R}_v \setminus B_\beta^{k(n)}$. Тогда

$$\widehat{K}_n \subset \bigcup_{\beta} \mathcal{W}_\beta^{k(n)}.$$

Рассмотрим множества

$$\mathcal{W}_1 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{W}_1^{k(n)}, \quad \mathcal{W}_2 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{\beta \neq 1} \mathcal{W}_\beta^{k(n)}.$$

Поскольку для любого n множества $\mathcal{W}_\beta^{k(n)}$ относительно открыты в $\overline{G} \times \mathbb{R}_v$ и не пересекаются, а для любого β семейство множеств $\mathcal{W}_\beta^{k(n)}$ возрастает по n , множества $\mathcal{W}_1$ и $\mathcal{W}_2$ не пересекаются и относительно открыты в $\overline{G} \times \mathbb{R}_v$. Включение $\widehat{K}_n \subset \bigcup_{\beta} \mathcal{W}_\beta^{k(n)}$, выполняющееся для любого n , влечет включение

$$\mathcal{E}(U \times \mathbb{R}_v) = \bigcup_n \widehat{K}_n \subset \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2.$$

Поскольку $U_{\alpha_1} \times \mathbb{R}_v \subset \mathcal{W}_1$ и $U_{\alpha_2} \times \mathbb{R}_v \subset (U \setminus U_{\alpha_1}) \times \mathbb{R}_v \subset \mathcal{W}_2$, то $\mathcal{E}(U)$ не имеет связных компонент с границами, пересекающими множества U_{α_1} и U_{α_2} .

Чтобы доказать, что $\mathcal{E}(U) = \bigcup_{\alpha} \mathcal{E}(U_{\alpha})$, достаточно показать, что для всякой связной компоненты U_{α_1} множества U выполнено равенство

$$\mathcal{E}(U) \cap \mathcal{W}_1 = \mathcal{E}(U_{\alpha_1})$$

(см. выше определение $\mathcal{W}_1$). Поскольку

$$\mathcal{E}(U) \times \mathbb{R}_v = \bigcup_n \widehat{K}_n, \quad \mathcal{E}(U_{\alpha_1}) \times \mathbb{R}_v = \bigcup_n \widehat{K}_n^{U_{\alpha_1}}$$

(здесь мы положим $K_n^{U_{\alpha_1}} = K_n \cap (U_{\alpha_1} \times \mathbb{R}_v)$), достаточно показать, что для любого n мы имеем

$$\widehat{K}_n \cap \mathcal{W}_1^{k(n)} = \widehat{K}_n^{U_{\alpha_1}}.$$

По лемме 1 множество $\mathcal{W}_1^{k(n)} \setminus (\widehat{K}_n \cap \mathcal{W}_1^{k(n)})$ псевдовыпукло для любого n и, следовательно, $\widehat{K}_n \cap \mathcal{W}_1^{k(n)} \subset \widehat{K}_n^{U_{\alpha_1}}$. Обратное включение $\widehat{K}_n^{U_{\alpha_1}} \subset \widehat{K}_n \cap \mathcal{W}_1^{k(n)}$ очевидно, так как $\widehat{K}_n^{U_{\alpha_1}} \subset \widehat{K}_n$. Следовательно, $\widehat{K}_n \cap \mathcal{W}_1^{k(n)} = \widehat{K}_n^{U_{\alpha_1}}$ для всех n и, таким образом,

$$\mathcal{E}(U) \cap \mathcal{W}_1 = \bigcup_n (\widehat{K}_n \cap \mathcal{W}_1^{k(n)}) = \bigcup_n \widehat{K}_n^{U_{\alpha_1}} = \mathcal{E}(U_{\alpha_1}).$$

Связность множеств $\mathcal{E}(U_{\alpha})$ следует из равенства $\mathcal{E}(U_{\alpha}) \times \mathbb{R}_v = \bigcup_n \widehat{K}_n^{U_{\alpha}}$ и связности любого множества $\widehat{K}_n^{U_{\alpha}}$, вытекающей из теоремы Шилова об идемпотентах (см., например, [8, с. 88]). Это завершает доказательство для ограниченной области G .

Рассмотрим теперь общий случай неограниченной области G . Согласно доказательству предложения 3.4 из [15] следует, что G можно исчерпать ограниченными

областями G_n таким образом, чтобы области $G_n \times \mathbb{R}_v$ были кусочно строго псевдовыпуклыми и $G \cap \mathbb{B}_n \subset G_n$, где $\mathbb{B}_n$ – шар радиуса n в $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ с центром в начале координат. Более того, поскольку по условию G диффеоморфна трехмерному шару, ее “накрывающая модель” $\mathcal{G}$ односвязна и в упомянутой выше конструкции G_n можно использовать исчерпание $\mathcal{G}$ односвязными подобластями, добившись тем самым, чтобы каждая G_n тоже была областью, диффеоморфной трехмерному шару. Сглаживая ребра G_n (см., например, [17]), получим исчерпание G такими ограниченными областями $\tilde{G}_n$, диффеоморфными трехмерному шару, что $\tilde{G}_n \times \mathbb{R}_v$ строго псевдовыпуклы и $G \cap \mathbb{B}_n \subset \tilde{G}_n$.

Обозначим через U_n внутренность $U \cap b\tilde{G}_n$. Из рассуждений, проведенных в доказательстве леммы 1, вытекает, что множество $\mathcal{E}(U_n)$, определенное относительно области G , совпадает с аналогичным множеством, определенным относительно $\tilde{G}_n$. Легко видеть, что

$$\mathcal{E}(U) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{E}(U_n),$$

так что, применяя к множествам $\tilde{G}_n$ и U_n рассуждения из первой части доказательства и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем необходимые свойства $\mathcal{E}(U)$ в общем случае. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Использование результатов Бедфорда–Клингенберга и Кружилина в доказательстве теоремы 2 аналогично конструкциям Ерошкина в [7].

§ 4. Характеризация CR-оболочек жестких поверхностей

Как и ранее, пусть U – открытое подмножество границы bG , где G – такая область в $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$, что $G \times \mathbb{R}_v$ строго псевдовыпукло. Поскольку CR-оболочка $E(U \times \mathbb{R}_v)$ множества $U \times \mathbb{R}_v$ – объединение CR-оболочек своих связных компонент и для всякого исчерпания $U_1 \Subset U_2 \Subset \dots$ множества U выполнено равенство

$$E(U \times \mathbb{R}_v) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(U_n \times \mathbb{R}_v),$$

достаточно описать CR-оболочку $U \times \mathbb{R}_v$ в случае, когда U – гладкая ограниченная подобласть bG , находящаяся в общем положении относительно канонической проекции $p: \bar{G} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$. Это означает, что все самопересечения и пересечения с $b\mathcal{G}$ кривой $p(bU)$ трансверсальны.

В настоящем параграфе предположим, что $U \subset bG$ – гладкая ограниченная область общего положения. Для произвольной области U характеристика, сходная с приводимой в предложении 1 (см. далее), легко получается переходом к пределу.

Пусть $U^- = U \cap bG^-$ и $U^+ = U \cap bG^+$, где bG^- и bG^+ – соответственно “нижняя” и “верхняя” части bG , определенные во введении. Обозначим через Σ объединение всех компонент связности $p(U^-) \cap p(U^+)$, замыкание которых пересекается с bG . Далее, пусть $\mathcal{U}^- = p(U^-) \setminus \Sigma$ и $\mathcal{U}^+ = p(U^+) \setminus \Sigma$. Рассмотрим функцию f^- на $b\mathcal{U}^-$, равную h^- на множестве $b\mathcal{U}^- \setminus b\Sigma$ и h^+ на множестве $b\mathcal{U}^- \cap b\Sigma$.

Пусть F^- – гармоническое продолжение f^- в $\mathcal{U}^-$. Аналогичным образом рассмотрим функцию f^+ на $b\mathcal{U}^+$, равную h^+ на множестве $b\mathcal{U}^+ \setminus b\Sigma$ и h^- на множестве $b\mathcal{U}^+ \cap b\Sigma$. Пусть F^+ – гармоническое продолжение f^+ на $\mathcal{U}^+$. Положим

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{(z, u): z = \pi(\zeta), h^-(\zeta) \leq u \leq h^+(\zeta), \zeta \in \Sigma\}, \\ \mathcal{U}^- &= \{(z, u): z = \pi(\zeta), h^-(\zeta) \leq u < F^-(\zeta), \zeta \in \mathcal{U}^-\}, \\ \mathcal{U}^+ &= \{(z, u): z = \pi(\zeta), F^+(\zeta) < u \leq h^+(\zeta), \zeta \in \mathcal{U}^+\}\end{aligned}$$

и

$$\mathbf{U} = \Sigma \cup \mathcal{U}^- \cup \mathcal{U}^+.$$

Заметим теперь, что множества Σ , $\mathcal{U}^-$ и $\mathcal{U}^+$ не пересекаются, и потому $\mathbf{U}$ – “однолистная” подобласть $\overline{G}$. В самом деле, Σ не пересекается со множествами $\mathcal{U}^-$ и $\mathcal{U}^+$, поскольку соответствующее множество Σ не пересекается с $\mathcal{U}^-$ и $\mathcal{U}^+$. Чтобы показать, что $\mathcal{U}^-$ не пересекается с $\mathcal{U}^+$, рассмотрим произвольную компоненту связности $\mathcal{V}$ множества $\mathcal{U}^- \cap \mathcal{U}^+$. Отметим, что по определению $\mathcal{U}^-$ и $\mathcal{U}^+$ множество $\overline{\mathcal{V}}$ относительно компактно в $\mathcal{G}$. Обозначим множество $b\mathcal{U}^- \cap \overline{\mathcal{V}}$ через γ^- , а через γ^+ обозначим множество $b\mathcal{U}^+ \cap \overline{\mathcal{V}}$. Поскольку функции h^- и $-h^+$ строго субгармоничны, а F^- и F^+ гармоничны, то $h^-(\zeta) < F^-(\zeta) < h^+(\zeta)$ для всех $\zeta \in \mathcal{U}^-$ и $h^-(\zeta) < F^+(\zeta) < h^+(\zeta)$ для $\zeta \in \mathcal{U}^+$. Следовательно, $F^-(\zeta) < h^+(\zeta) = F^+(\zeta)$ для $\zeta \in \gamma^+$ и $F^-(\zeta) = h^-(\zeta) < F^+(\zeta)$ для $\zeta \in \gamma^-$. Поскольку $b\mathcal{V} = \gamma^- \cup \gamma^+$, получаем, что $F^-(\zeta) < F^+(\zeta)$ для всех $\zeta \in \overline{\mathcal{V}}$, так что множества $\mathcal{U}^-$ и $\mathcal{U}^+$ действительно не пересекаются. Теперь сформулируем основной результат этого параграфа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть G – область в $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ такая, что область $G \times \mathbb{R}_v$ строго псевдовыпукла, и пусть U – такая открытая ограниченная подобласть в bG , что граница bU гладкая и находится в общем положении относительно канонической проекции $p: \overline{G} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$. Тогда для CR-оболочки $E(U \times \mathbb{R}_v)$ множества $U \times \mathbb{R}_v$ выполнено равенство $E(U \times \mathbb{R}_v) = \mathbf{U} \times \mathbb{R}_v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что CR-оболочка $E(U \times \mathbb{R}_v)$ множества $U \times \mathbb{R}_v$ однолистна, т.е. является подобластью $\overline{G} \times \mathbb{R}_v$. Пусть $W_1 \Subset W_2 \Subset \dots$ – открытое исчерпание $U \times \mathbb{R}_v$. Для всякого $n = 1, 2, \dots$ рассмотрим ограниченную строго псевдовыпуклую подобласть G_n области $G \times \mathbb{R}_v$, для которой $W_n \subset bG_n$. Тогда из [15] следует, что $E(W_n)$ является дополнением в $\overline{G}_n$ к $\mathcal{A}(G_n)$ -оболочке множества $bG_n \setminus W_n$. В частности, $E(W_n)$ однолистно. Поскольку $E(U \times \mathbb{R}_v)$ – объединение возрастающей последовательности оболочек $E(W_n)$, заключаем, что оболочка $E(U \times \mathbb{R}_v)$ тоже однолистна.

Заметим теперь, что область $\mathbf{U} \times \mathbb{R}_v$ псевдовыпукла. Действительно, псевдовыпуклость части $(\mathbf{U} \cap bG) \times \mathbb{R}_v$ ее границы следует из строгой псевдовыпуклости $G \times \mathbb{R}_v$. Для доказательства псевдовыпуклости $\mathbf{U} \times \mathbb{R}_v$ в $G \times \mathbb{R}_v$ обозначим через I множество точек самопересечения $p(bU)$, лежащих в $\overline{\Sigma}$. Обозначим через $\mathbf{I}$ множество

$$\{(z, u) \in G: z = \pi(\zeta), h^-(\zeta) < u < h^+(\zeta), \zeta \in I\}.$$

Легко видеть, что $\mathbf{I}$ – конечное объединение открытых вертикальных интервалов (параллельных u -оси). “Внутренняя” часть $(b\mathbf{U} \cap G) \times \mathbb{R}_v$ границы $\mathbf{U} \times \mathbb{R}_v$ – это леви-плоская поверхность, состоящая из кусков

$$\begin{aligned}\{(z, w) \in G \times \mathbb{R}_v: z = \pi(\zeta), u = F^-(\zeta), \zeta \in \mathcal{U}^-\}, \\ \{(z, w) \in G \times \mathbb{R}_v: z = \pi(\zeta), u = F^+(\zeta), \zeta \in \mathcal{U}^+\}\end{aligned}$$

и $\mathbf{I} \times \mathbb{R}_v$, каждый из которых расслаивается на голоморфные кривые. То, что первые два множества леви-плоские, следует из гармоничности функций F^- и F^+ . Третье множество – это объединение конечного числа аналитических полос: интервалов, параллельных u -оси, умноженных на $\mathbb{R}_v$. Поскольку $(b\mathbf{U} \cap G) \times \mathbb{R}_v$ – леви-плоская поверхность, можно сделать вывод, что эта часть границы области $\mathbf{U} \times \mathbb{R}_v$ псевдовыпукла и, следовательно, $\mathbf{U} \times \mathbb{R}_v$ в целом псевдовыпукла.

В завершение доказательства с помощью “принципа непрерывности” покажем, что $\mathbf{U} \times \mathbb{R}_v \subset E(U \times \mathbb{R}_v)$. Поскольку мы уже показали, что $\mathbf{U} \times \mathbb{R}_v$ псевдовыпукла, это соотношение будет означать, что $E(U \times \mathbb{R}_v) = \mathbf{U} \times \mathbb{R}_v$.

Отметим сначала, что в силу строгой псевдовыпуклости области $G \times \mathbb{R}_v$ существует односторонняя окрестность $\mathbf{V} \times \mathbb{R}_v$ множества $U \times \mathbb{R}_v$, заполненная голоморфными дисками с границей на $U \times \mathbb{R}_v$. Очевидно, что $\mathbf{V} \times \mathbb{R}_v$ лежит в $E(U \times \mathbb{R}_v)$. Дальнейшие рассуждения проходят в два этапа. На первом мы “заполняем” множество $\Sigma \times \mathbb{R}_v$ непрерывным семейством голоморфных дисков. Точнее, для всякой точки $Q \in \Sigma$ мы строим семейство голоморфных дисков $\{D_t\}$, $0 \leq t \leq 1$, такое, что $D_0 \subset \mathbf{V} \times \mathbb{R}_v$, $bD_t \subset \mathbf{V} \times \mathbb{R}_v$ для всех $t \in [0, 1]$ и $D_t \cap (\{Q\} \times \mathbb{R}_v) \neq \emptyset$ для некоторого t . Поскольку поверхность $U \times \mathbb{R}_v$ жесткая, а Q – произвольная точка Σ , в силу “принципа непрерывности” это будет означать, что $\Sigma \times \mathbb{R}_v$ лежит в $E(U \times \mathbb{R}_v)$. На следующем этапе мы “заполним” оставшуюся часть $\mathbf{U} \times \mathbb{R}_v$ непрерывным семейством голоморфных дисков, а именно для всякой точки $Q \in \mathcal{U}^- \cup \mathcal{U}^+$ построим голоморфные диски $\{D_t'\}$, $0 \leq t \leq 2$, такие, что $D_0' \subset \mathbf{V} \times \mathbb{R}_v$, $bD_t' \subset (\Sigma \cup \mathbf{V}) \times \mathbb{R}_v$ для всех $t \in [0, 2]$ и $D_t' \cap (\{Q\} \times \mathbb{R}_v) \neq \emptyset$ для некоторого t . Как и ранее, мы сможем заключить из “принципа непрерывности”, что $E(U \times \mathbb{R}_v) = \mathbf{U} \times \mathbb{R}_v$, как и утверждается в формулировке предложения.

Шаг 1. Пусть Q – точка множества Σ . Для упрощения доказательства предположим, что Σ – связное множество. В общем случае рассуждения, используемые ниже, можно провести для всякой компоненты связности Σ . Рассмотрим внутреннюю точку ζ_0 одной из дуг, составляющих $b\mathcal{G} \cap \bar{\Sigma}$. Поскольку $\Sigma = p(\Sigma)$ – связное множество, существует связная кривая $\gamma(t) \subset \Sigma$, $0 \leq t \leq 1$, соединяющая ζ_0 с точкой $p(Q) \in \Sigma$ и трансверсальная $b\mathcal{G}$ в точке ζ_0 . Для всякого $T \leq 1$ обозначим часть γ , отвечающую $t \in [0, T]$, через γ_T . Пусть $\mathcal{W}$ – такая малая окрестность ζ_0 в $\bar{\mathcal{G}}$, что $p^{-1}(\mathcal{W}) \subset \mathbf{V}$.

Выберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы в δ -окрестности $\mathcal{V}_\delta(\gamma)$ кривой γ в $\bar{\mathcal{G}}$ выполнялось $\mathcal{V}_\delta(\gamma) \cap b\Sigma \subset \mathcal{W}$. Рассмотрим $T_0 < 1$ такое, чтобы $\mathcal{V}_\delta(\gamma_T) \subset \mathcal{W}$ для всех $T \in [0, T_0]$. При $\delta_1 \in (0, \delta)$ для всякого $T \in [T_0, 1]$ рассмотрим область $\mathcal{A}_T = \mathcal{V}_\delta(\gamma_T) \setminus \bar{\mathcal{V}}_{\delta_1}(\gamma_T) \subset \bar{\mathcal{G}}$. Границы областей $\mathcal{A}_T$ являются гладкими всюду, за исключением некоторых точек множества $b\Sigma \cap \mathcal{W}$, в которых они трансверсально пересекают $b\mathcal{G}$. Легко видеть, что области $\mathcal{A}_T$ непрерывно зависят от T . Для всякого $T \in [T_0, 1]$ мы введем функцию $\phi_T(\zeta)$ на $b\mathcal{A}_T$, равную $h^-(\zeta)$ на $b\mathcal{V}_\delta(\gamma_T) \cap \bar{\mathcal{G}}$, $h^+(\zeta)$ на $b\bar{\mathcal{V}}_{\delta_1}(\gamma_T) \cap \mathcal{G}$ и равную $h^-(\zeta) = h^+(\zeta)$ на $b\mathcal{A}_T \cap b\mathcal{G}$. Тогда $\{\phi_T\}$ – семейство функций из класса Гёльдера $C^{1/2}(b\mathcal{A}_T)$, непрерывно зависящее от T (каждая из этих функций ведет себя как $\pm \sqrt{\text{dist}(\zeta, b\mathcal{G})}$ при $\zeta \rightarrow b\mathcal{G}$).

Пусть F_T – гармоническое продолжение ϕ_T на $\mathcal{A}_T$. Поскольку каждая из областей $\mathcal{A}_T$ односвязна по построению, для всякого $T \in [T_0, 1]$ существует такая функция G_T , голоморфная в $\mathcal{A}_T$ и непрерывная на $\bar{\mathcal{A}}_T$, что $\text{Re } G_T = F_T$ (на самом деле такие функции тоже будут принадлежать некоторому классу Гёльдера на $\bar{\mathcal{A}}_T$). Очевидно, можно выбрать функции G_T непрерывно зависящими от T .

Рассмотрим семейство голоморфных дисков

$$D_T = \{(z, w): z = \pi(\zeta), w = G_T(\zeta), \zeta \in \bar{\mathcal{A}}_T\}, \quad T_0 \leq T \leq 1.$$

В силу нашей конструкции D_T непрерывно зависят от T , для всякого T выполнено $bD_T \subset U \times \mathbb{R}_v$, и поскольку $\mathcal{A}_{T_0} \subset \mathcal{W}$, то можно заключить, что $D_{T_0} \subset \mathbf{V} \times \mathbb{R}_v$. Более того, семейство областей $\mathcal{A}_T$ и функции F_T были построены таким образом, что график какой-то функции F_T из нашего семейства должен содержать Q и, следовательно, соответствующий голоморфный диск D_T содержит точку из $\{Q\} \times \mathbb{R}_v$. Теперь из “принципа непрерывности” следует, что эта точка из $\{Q\} \times \mathbb{R}_v$ лежит в $E(U \times \mathbb{R}_v)$. Поскольку $U \times \mathbb{R}_v$ – жесткая поверхность, вся прямая $\{Q\} \times \mathbb{R}_v$ лежит в $E(U \times \mathbb{R}_v)$, и так как Q – произвольная точка Σ , мы в итоге заключаем, что $\Sigma \times \mathbb{R}_v \subset E(U \times \mathbb{R}_v)$.

Шаг 2. Теперь докажем, что $\mathcal{U}^- \cup \mathcal{U}^+ \subset E(U \times \mathbb{R}_v)$. Поскольку рассуждения для множеств $\mathcal{U}^-$ и $\mathcal{U}^+$ одни и те же, мы покажем, что $\mathcal{U}^- \subset E(U \times \mathbb{R}_v)$. Предположим далее, что множество $\mathcal{U}^-$ связно; в противном случае мы используем те же рассуждения отдельно для каждой связной компоненты множества $\mathcal{U}^-$. В частности, из предположения следует, что $\mathcal{U}^-$ – (связная) подобласть $\bar{\mathcal{G}}$.

Пусть Q – точка $\mathcal{U}^-$; тогда $Q = (\pi(\zeta_Q), u_Q)$ для некоторого $\zeta_Q \in \mathcal{U}^-$. По определению $\mathcal{U}^-$ получаем

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} F^-(\zeta_Q) - u_Q > 0,$$

где F^- – функция, задающая “верхнюю” (относительно u -координаты) часть $b\mathcal{U}^-$. Напомним, что по определению функция $f^- = F^-|_{b\mathcal{U}^-}$ – непрерывна, быть может, за исключением конечного числа точек, лежащих в $b\mathcal{U}^- \cap b\mathcal{U}^+$.

Рассмотрим теперь новую область $\tilde{\mathcal{U}}^-$, полученную “обрезанием” $\mathcal{U}^-$ вдоль части $b\mathcal{U}^- \setminus b\Sigma$ ее границы и “выпячиванием” ее вдоль остальной части границы $b\mathcal{U}^- \cap b\Sigma$, проведенными так, чтобы область $\tilde{\mathcal{U}}^-$ получилась гладкой. Далее мы приблизим f^- гладкой функцией $\tilde{f}^-$ на $b\tilde{\mathcal{U}}^-$. Точнее, пусть $\tilde{\mathcal{U}}^-$ – гладкая область над $\mathcal{G}$ с проекцией $\tilde{\pi}: \tilde{\mathcal{U}}^- \rightarrow \mathcal{G}$, а $\tilde{f}^-$ – гладкая функция на $b\tilde{\mathcal{U}}^-$ с гармоническим продолжением $\tilde{F}^-$ на $\tilde{\mathcal{U}}^-$ такие, что $\tilde{\pi}(\tilde{\mathcal{U}}^-) \subset \mathcal{U}^- \cup \Sigma$,

$$\Gamma(\tilde{f}^-) \stackrel{\text{def}}{=} \{(z, u): z = \pi(\tilde{\pi}(\xi)), u = \tilde{f}^-(\xi), \xi \in b\tilde{\mathcal{U}}^-\} \subset U^- \cup \Sigma$$

и

$$\tilde{F}^-(\xi_Q) > F^-(\zeta_Q) - \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\xi_Q = \tilde{\pi}^{-1}(\zeta_Q)$. Из последнего неравенства вытекает, что $u_Q < \tilde{F}^-(\xi_Q) - \varepsilon/2$. Проблема заключается в том, что $\tilde{\mathcal{U}}^-$ может быть многосвязной областью, в то время как для применения “принципа непрерывности” необходима односвязная область. Поэтому придется еще раз изменить область $\tilde{\mathcal{U}}^-$ и функцию $\tilde{f}^-$. С этой целью мы используем рассуждения из [14, лемма 5.1]. Для удобства читателя напомним конструкции из этой леммы.

Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ – компоненты связности $b\tilde{\mathcal{U}}^-$. Рассмотрим универсальное накрытие $\tilde{\pi}: \Delta \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}^-$ области $\tilde{\mathcal{U}}^-$ единичным диском Δ . Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1}$ – такие непересекающиеся гладкие кривые в $\tilde{\mathcal{U}}^-$, что каждая γ_i , $i = 1, 2, \dots, m-1$,

соединяет кривые Γ_i и Γ_{i+1} и ни одна из кривых γ_i не проходит через ξ_Q . По определению $\mathcal{U}^-$ и Σ никакая связанная компонента $b\mathcal{U}^-$ не содержится в Σ , поэтому можно выбрать γ_i лежащими в $\tilde{\pi}^{-1}(\mathcal{U}^-)$. Следовательно, область $\mathcal{U}^- \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} \gamma_i$ односвязна, а потому множество $\tilde{\pi}^{-1}(\mathcal{U}^- \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} \gamma_i)$ является объединением счетного семейства непересекающихся односвязных подобластей $\{\mathcal{F}_\sigma\}$ диска Δ . Для каждого σ обозначим через $\mathcal{F}_\sigma^*$ объединение множества $\overline{\mathcal{F}_\sigma} \cap \Delta$ со всеми областями $\mathcal{F}_{\sigma'}$ такими, что $\overline{\mathcal{F}_\sigma} \cap \overline{\mathcal{F}_{\sigma'}} \neq \emptyset$.

Выберем теперь одну из областей $\{\mathcal{F}_\sigma\}$ и обозначим ее через $\mathcal{F}_0$. Пусть $\mathcal{F}_1$ – соответствующая область $\mathcal{F}_0^*$. По индукции определим для $n = 2, 3, \dots$ область $\mathcal{F}_n$ как объединение всех областей $\mathcal{F}_\sigma^*$ таких, что $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{n-1}$. Из определения сразу видно, что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots$ и $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{F}_n = \Delta$.

Следующая лемма доказана в [14, лемма 5.1].

ЛЕММА 2. *Существует положительное число $\theta < 1$ такое, что для всех $\eta \in \overline{\mathcal{F}_0}$ и $n = 1, 2, \dots$ выполнено неравенство для гармонической меры*

$$\omega(\eta, b\mathcal{F}_n \cap \Delta, \mathcal{F}_n) \leq \theta^n.$$

Пусть η_Q – точка $\tilde{\pi}^{-1}(\xi_Q) \cap \mathcal{F}_0$, и пусть $\tilde{f}_n^-$ – такая функция на $b\mathcal{F}_n$, что $\tilde{f}_n^-(\eta) = \tilde{f}^-(\tilde{\pi}(\eta))$ для $\eta \in b\mathcal{F}_n \cap b\Delta$ и $\tilde{f}_n^-(\eta) = h^-(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(\eta)))$ для $\eta \in b\mathcal{F}_n \cap \Delta$. Рассмотрим гармоническое продолжение $\tilde{F}_n^-$ функции $\tilde{f}_n^-$ в область $\mathcal{F}_n$. По лемме 2 $\tilde{F}_n^-(\eta_Q) > \tilde{F}^-(\xi_Q) - \varepsilon/2$ для достаточно больших n . В частности, $u_Q < \tilde{F}_n^-(\eta_Q)$. Заметим, что в силу конструкции $\mathcal{F}_n$ и $\tilde{F}_n^-$ выполнено $\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(\mathcal{F}_n)) \subset \mathcal{U}^- \cup \Sigma$ и

$$\Gamma(\tilde{F}_n^-) \stackrel{\text{def}}{=} \{(z, u): z = \pi(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(\eta))), u = \tilde{f}_n^-(\eta), \eta \in b\mathcal{F}_n\} \subset U^- \cup \Sigma.$$

Теперь можно построить семейство голоморфных дисков, требуемое в “принципе непрерывности”. Для $t \in [1, 2]$ зададим функцию ϕ'_t на $b\mathcal{F}_n$ следующим образом:

$$\phi'_t(\eta) = (1-t)\tilde{f}_n^- + (2-t)h^-(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(\eta))),$$

и для всякого t рассмотрим гармоническое продолжение $\tilde{F}_t$ функции ϕ'_t в область $\mathcal{F}_n$. Поскольку $\mathcal{F}_n$ – односвязная область с кусочно гладкой границей, а функция ϕ'_t гладкая на $b\mathcal{F}_n$, существует такое однопараметрическое семейство функций G'_t , голоморфных в $\mathcal{F}_n$, непрерывных на $\overline{\mathcal{F}_n}$ и непрерывно зависящих от параметра t , что $\text{Re } G'_t = \tilde{F}_t$.

Рассмотрим семейство голоморфных дисков

$$D'_t = \{(z, w): z = \pi(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(\eta))), w = G'_t(\eta), \eta \in \overline{\mathcal{F}_n}\}, \quad 1 \leq t \leq 2.$$

В силу конструкций $\mathcal{F}_n$ и ϕ'_t для всякого $t \in [1, 2]$ выполняется включение $bD'_t \subset (U^- \cup \Sigma) \times \mathbb{R}_v$, и поскольку $\tilde{F}_1(\eta) = h^-(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(\eta)))$ для всех $\eta \in b\mathcal{F}_n$, мы также получаем $bD'_1 \subset U \times \mathbb{R}_v$.

Завершим доказательство, используя тот факт, что область $\mathcal{F}_n$ односвязна, а именно рассмотрим однопараметрическое семейство гладких замкнутых односвязных подобластей $\mathcal{A}'_t$, $0 \leq t \leq 1$, области $\mathcal{F}_n$, непрерывно зависящих от t и таких, что $\mathcal{A}'_1 = \mathcal{F}_n$ и $\mathcal{A}'_0$ – точка в $\mathcal{F}_n$. Для всякого $t \in [0, 1]$ пусть $\tilde{F}_t$ – гармоническое продолжение функции $\phi'_t(\eta) = h^-(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(\eta)))$ с $b\mathcal{A}'_t$ на $\mathcal{A}'_t$. Рассмотрим

однопараметрическое семейство голоморфных функций G'_t , заданных в соответствующих областях $\mathcal{A}'_t$, непрерывно зависящих от t и удовлетворяющих равенству $\operatorname{Re} G'_t = \tilde{F}_t$. Тогда для семейства голоморфных дисков

$$D'_t = \{(z, w): z = \pi(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(\eta))), w = G'_t(\eta), \eta \in \bar{\mathcal{A}}_n\}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

легко видно, что D'_0 – точка в $U \times \mathbb{R}_v$ и $bD'_t \subset U \times \mathbb{R}_v$ для всякого $t \in [0, 1]$. Семейство дисков D'_t , $0 \leq t \leq 2$, непрерывно зависит от t , D_0 – точка в $U \times \mathbb{R}_v$ и для всякого t выполнено $bD'_t \subset (U^- \cup \Sigma) \times \mathbb{R}_v$.

Заметим теперь, что в силу нашей конструкции

$$\bigcup_{0 \leq t \leq 2} \pi_{z,u}(D'_t) = \left\{ (z, u): \pi(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(\eta))), h^-(\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(\eta))) \leq u \leq \tilde{F}_n^-(\eta), \eta \in \mathcal{F}_n \right\},$$

где $\pi_{z,u}: \mathbb{C}_{z,w}^2 \rightarrow \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ – проекция. Поскольку $u_Q < \tilde{F}_n^-(\eta_Q)$, существует диск $D'_{t'_0}$ из рассматриваемого семейства такой, что $Q \in \pi_{z,u}(D'_{t'_0})$. Следовательно, в $\{Q\} \times \mathbb{R}_v$ существует точка из $D'_{t'_0}$. Теперь из “принципа непрерывности” видно, что эта точка лежит в CR-оболочке множества $(U^- \cup \Sigma) \times \mathbb{R}_v$, которая ввиду построений шага 1 лежит в $E(U \times \mathbb{R}_v)$. Из жесткости области $E(U \times \mathbb{R}_v)$ следует, что прямая $\{Q\} \times \mathbb{R}_v$ лежит в $E(U \times \mathbb{R}_v)$, и потому в силу выбора Q множество $\mathcal{U}^- \cup \mathcal{U}^+$ целиком лежит в $E(U \times \mathbb{R}_v)$. Это завершает доказательство предложения.

§ 5. Доказательства теорем 3 и 4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Тот факт, что множества $\mathcal{E}(V_\varphi^\pm)$ открыты в $\bar{G} \times \mathbb{R}_v$, следует из утверждения 1) теоремы 1, а их представления в форме (1) и (2) следуют из того же рассуждения, что и в утверждении 2) теоремы 1. Свойство $\Phi^\pm|_U = \varphi$ – прямое следствие определения $\mathcal{E}(V_\varphi^\pm)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Начнем с доказательства непрерывности функций $\Phi^\pm$ в точках множества U . Область $G \times \mathbb{R}_v$ строго псевдовыпукла, поэтому существуют односторонние окрестности $\mathbf{V}^+$ и $\mathbf{V}^-$ множеств V_φ^+ и V_φ^- в $\bar{G} \times \mathbb{R}_v$, заполняемые голоморфными дисками с границами в V_φ^+ и V_φ^- соответственно. Поскольку $\mathbf{V}^+ \subset \mathcal{E}(V_\varphi^+)$, $\mathbf{V}^- \subset \mathcal{E}(V_\varphi^-)$ и поскольку из определения $\Phi^\pm$ непосредственно видно, что $\Phi^-(z, u) \leq \Phi^+(z, u)$ для $(z, u) \in \mathcal{E}(U)$, можно сделать вывод, что $\Phi^\pm$ непрерывны в точках U .

Для доказательства непрерывности функций $\Phi^\pm$ во внутренних точках $\mathcal{E}(U)$ необходим следующий результат.

ЛЕММА 3. *Существует такая возрастающая последовательность относительно компактных подмножеств $\{\mathcal{E}_n\}$ множества $\mathcal{E}(U)$, что:*

- 1) $\mathcal{E}_n \times \mathbb{R}_v$ кусочно строго псевдовыпукло для любого $n \in \mathbb{N}$;
- 2) для всякого компакта K в $\mathcal{E}(U)$ выполнено $K \subset \mathcal{E}_n$ при всех достаточно больших n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и ранее, пусть $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ – компактное исчерпание U , и пусть $K_n = E \times [-n, n]$. Поскольку

$$\mathcal{E}(U) = \bigcup_n \pi_{z,u}(\hat{K}_n),$$

где $\pi_{z,u}: \mathbb{C}_{z,w}^2 \rightarrow \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ – проекция, достаточно построить для всякого $n \in \mathbb{N}$ такое открытое подмножество $\mathcal{E}_n$ множества $\mathcal{E}(U)$, удовлетворяющее свойству 1) леммы, чтобы $\pi_{z,u}(\hat{K}_n) \subset \mathcal{E}_n$. Для фиксированного n можно предположить в конструкции $\mathcal{E}_n$, что G – ограниченная область. В противном случае мы используем те же рассуждения, что и в лемме 1, а именно для достаточно больших r рассмотрим связную компоненту G_r множества $G \cap \mathbb{B}_r$, граница которой содержит E_n . Сглаживая ребра G_r (см., например, [17]), получим ограниченную область $\tilde{G}_r$ такую, что область $\tilde{G}_r \times \mathbb{R}_v$ строго псевдовыпукла. В заключение можно рассмотреть вместо G область $\tilde{G}_r$, а вместо U – внутренность множества $U \cap b\tilde{G}_r$.

Пусть ϱ – определяющая функция области G , т. е. пусть $G = \{(z, u): \varrho(z, u) < 0\}$ и $\text{grad} \varrho \neq 0$ на bG . Для всякого $\delta > 0$ рассмотрим область $G^\delta = \{(z, u): \varrho(z, u) < \delta\}$ и множество

$$U_n^\delta = \left\{ (z, u): \varrho(z, u) = \delta, \text{dist}((z, u), E_n) < \frac{\varepsilon_n}{2} \right\},$$

где $\varepsilon_n = \text{dist}(E_n, bU)$, а E_n – соответствующий компакт из исчерпания U . Пусть $\mathcal{E}(U_n^\delta)$ – множество, определенное так же, как $\mathcal{E}(U)$, с заменой G и U на G^δ и U_n^δ соответственно. Поскольку для достаточно малых δ области $G^\delta \times \mathbb{R}_v$ строго псевдовыпуклы, существуют равномерно большие односторонние окрестности $\mathbf{V}_n^\delta$ множеств $U_n^\delta \times \mathbb{R}_v$ в областях $\bar{G}^\delta \times \mathbb{R}_v$, заполняемые голоморфными дисками с границами в соответствующем множестве $U_n^\delta \times \mathbb{R}_v$. Тогда для некоторого $\delta_0 > 0$ имеем

$$K_n \subset \mathbf{V}_n^{\delta_0} \subset \mathcal{E}(U_n^{\delta_0}) \times \mathbb{R}_v,$$

а по определению $\mathcal{E}(U_n^{\delta_0})$ имеем вдобавок $\hat{K}_n \subset \mathcal{E}(U_n^{\delta_0}) \times \mathbb{R}_v$, т. е. $\pi_{z,u}(\hat{K}_n) \subset \mathcal{E}(U_n^{\delta_0})$.

Из строгой псевдовыпуклости областей $G^\delta \times \mathbb{R}_v$ вытекает существование равномерно больших односторонних окрестностей $\tilde{\mathbf{V}}_n^\delta$ множеств $(bG^\delta \setminus \bar{U}_n^\delta) \times \mathbb{R}_v$ в соответствующих областях $\bar{G}^\delta \times \mathbb{R}_v$, заполняемых голоморфными дисками с границами в $(bG^\delta \setminus \bar{U}_n^\delta) \times \mathbb{R}_v$. Поскольку множество $\mathcal{E}(U_n^\delta) \times \mathbb{R}_v$ по определению является объединением оболочек компактов, исчерпывающих $U_n^\delta \times \mathbb{R}_v$, а по лемме 1 диски, заполняющие $\tilde{\mathbf{V}}_n^\delta$, не пересекают эти оболочки, мы видим, что $bG \cap \mathcal{E}(U_n^\delta) \subset U$, и, следовательно, $\mathcal{E}(U_n^\delta) \cap \bar{G} \subset \mathcal{E}(U)$ для всех достаточно малых δ . Можно предположить, что это включение выполнено для δ_0 , выбранного ранее (в противном случае уменьшим его). Ввиду теоремы 1 внутренность множества $\mathcal{E}(U_n^{\delta_0}) \times \mathbb{R}_v$ псевдовыпукла, так что функция

$$h(z, u) = -\log \text{dist}((z, u), b\mathcal{E}(U_n^{\delta_0}) \times \mathbb{R}_v)$$

плюрисубгармонична во внутренних точках множества $\mathcal{E}(U_n^{\delta_0}) \times \mathbb{R}_v$. Сглаживая эту функцию и добавляя к ней $\theta(|z|^2 + u^2)$ с достаточно малым $\theta > 0$, получаем строго плюрисубгармоническую функцию $\tilde{h}(z, u)$. Выберем достаточно большое $\eta > 0$ таким, чтобы область $\mathcal{E}_\eta(U_n^{\delta_0}) = \{(z, u): \tilde{h}(z, u) < \eta\}$ была достаточно

близка к $\mathcal{E}(U_n^{\delta_0})$, а $b\mathcal{E}_\eta(U_n^{\delta_0})$ была трансверсальна bG . Положим $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_\eta(U_n^{\delta_0}) \cap G$. Теперь из конструкции $\mathcal{E}_\eta(U_n^{\delta_0})$ вытекает, что область $\mathcal{E}_n \times \mathbb{R}_v$ кусочно строго псевдовыпукла и $\pi_{z,u}(\widehat{K}_n) \subset \overline{\mathcal{E}_n}$. Это завершает доказательство леммы.

Теперь можно действовать, как в работе [14], а именно для всякого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим подмножество $A_n = bG \cap \overline{\mathcal{E}_n}$ границы $b\mathcal{E}_n$. Далее, для всякого $s > 0$ определим подмножество $B_{n,s}$ множества $b\mathcal{E}_n$ следующим образом:

$$B_{n,s} = \left\{ P \in b\mathcal{E}_n : \text{dist}(P, bG) \geq \frac{1}{s} \right\}.$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство непрерывных функций $\varphi_{n,t}$, $t \in \mathbb{R}$, на $b\mathcal{E}_n$, непрерывно зависящих от параметра t , такое, что $\varphi_{n,t} = \varphi$ на A_n , где φ – заданная непрерывная функция на U , $\varphi_{n,t} = t$ на $B_{n,|t|}$ и $\varphi_{n,t_1} \leq \varphi_{n,t_2}$ при $t_1 \leq t_2$. Теперь в силу конструкции $\mathcal{E}_n$ можно применить к функциям $\varphi_{n,t}$ теорему 2 из [5] и получить для всякого t функцию $\Phi_{n,t} \in C(\overline{\mathcal{E}_n})$ со следующими свойствами: $\Phi_{n,t} = \varphi_{n,t}$ на $b\mathcal{E}_n$ и график $\Gamma(\Phi_{n,t}) \setminus \Gamma(\varphi_{n,t})$ расслоен (локально) на 1-мерные комплексные многообразия. Зададим функции $\tilde{\Phi}^\pm$ на $\mathcal{E}(U)$ следующим образом:

$$\tilde{\Phi}^+(P) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_{n,t}(P), \quad \tilde{\Phi}^-(P) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_{n,t}(P).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Далее мы покажем (см. лемму 6), что функции $\tilde{\Phi}^\pm$ совпадают соответственно с $\Phi^\pm$, и будем тогда использовать только обозначения $\Phi^\pm$.

В следующей лемме мы докажем равномерную ограниченность функций $\Phi_{n,t}$ на компактных подмножествах $\mathcal{E}(U)$.

ЛЕММА 4. Для всякого компакта K в $\mathcal{E}(U)$ существуют константа $C > 0$ и число N такие, что $|\Phi_{n,t}(P)| \leq C$ для всех $P \in K$, $t \in \mathbb{R}$ и $n \geq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K – компактное подмножество $\mathcal{E}(U)$, и пусть $\mathcal{K}_1^\pm \subset \mathcal{K}_2^\pm \subset \dots$ – компактные исчерпания соответствующих множеств $V_\varphi^\pm$ такие, что для $n \in \mathbb{N}$ каждое $\mathcal{K}_n^\pm$ лежит строго внутри соответствующего множества $\mathcal{K}_{n+1}^\pm$. Поскольку $\pi_{z,u}(\mathcal{E}(V_\varphi^\pm)) = \mathcal{E}(U)$ по теореме 3, то существует число L , при котором $K \subset \pi_{z,u}(\widehat{\mathcal{K}}_L^\pm)$. Рассмотрим такое число N , чтобы $\pi_{z,u}(\widehat{\mathcal{K}}_L^\pm) \subset \mathcal{E}_N$. Тогда для любых $n \geq N$ и $t \in \mathbb{R}$ график $\Gamma(\Phi_{n,t})$ функции $\Phi_{n,t}$ не пересекает множества $\widehat{\mathcal{K}}_L^\pm$. Поскольку рассуждения для обоих множеств $\widehat{\mathcal{K}}_L^\pm$ аналогичны, мы докажем это только для $\widehat{\mathcal{K}}_L^+$.

В самом деле, для фиксированных $n \geq N$ и $t \in \mathbb{R}$ из непрерывности $\Phi_{n,t}$ на $\mathcal{E}_n$ и компактности $\widehat{\mathcal{K}}_L^+$ следует, что

$$\Gamma(\Phi_{n,t} - C) \cap \widehat{\mathcal{K}}_L^+ = \emptyset$$

для достаточно больших $C > 0$. По определению $\varphi_{n,t}$ и по выбору $\mathcal{E}_N$ имеем

$$\Gamma(\varphi_{n,t} - s) \cap \widehat{\mathcal{K}}_L^+ = \emptyset$$

при $s \geq 0$, и поскольку по лемме 1 область $G \times \mathbb{R}_v \setminus \widehat{\mathcal{K}}_L^+$ псевдовыпукла, из того факта, что $\Gamma(\Phi_{n,t} - s)$ леви-плоская при $0 \leq s \leq C$, можно заключить, что $\Gamma(\Phi_{n,t}) \cap \widehat{\mathcal{K}}_L^+ = \emptyset$.

Для завершения доказательства заметим, что из свойств $\Gamma(\Phi_{n,t}) \cap \widehat{\mathcal{K}}_L^\pm = \emptyset$ и $K \subset \pi_{z,u}(\widehat{\mathcal{K}}_L^\pm)$ вытекает, что $|\Phi_{n,t}(P)| \leq C$ для всех $P \in K$, $t \in \mathbb{R}$, и $n \geq N$, где $C = \max\{|v| : (z, u + iv) \in \mathcal{K}_L^\pm\}$.

Чтобы показать, что графики $\Gamma(\tilde{\Phi}^\pm) \setminus \Gamma(\varphi)$ расслаиваются на голоморфные кривые, повторим рассуждения из [14, § 6], а именно из леммы 4 с помощью [13, леммы 3.2–3.5] получим, что для всякой точки $P = (z_0, u_0) \in \mathcal{E}(U) \cap G$ существует такое положительное R^* (зависящее только от $\text{dist}(P, b\mathcal{E}(U))$) и константы C , соответствующей по лемме 4 компакту K , являющемуся фиксированной окрестностью P), что для всякого $t \in \mathbb{R}$ и достаточно больших n существует голоморфная функция

$$f_{n,t}^P(z) = u_{n,t}^P(z) + iv_{n,t}^P(z) : \Delta_{R^*}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}_w,$$

обладающая следующими свойствами: $u_{n,t}^P(z_0) = u_0$ и $\Gamma(f_{n,t}^P) \subset \Gamma(\Phi_{n,t})$, где $\Delta_{R^*}(z_0) = \{|z - z_0| < R^*\}$. Теперь ввиду теоремы Монтеля можно перейти к пределу при $t \rightarrow +\infty$ и $n \rightarrow +\infty$ (подробности см. в доказательстве леммы 6.2 из [14]) и получить голоморфную функцию

$$f^P(z) = u^P(z) + iv^P(z) : \Delta_{R^*}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}_w$$

такую, что $f^P(z_0) = u_0$ и $\Gamma(f^P) \subset \Gamma(\tilde{\Phi}^+)$. Аналогично, при $t \rightarrow -\infty$ и $n \rightarrow +\infty$ мы получаем соответствующий голоморфный диск в $\Gamma(\tilde{\Phi}^-)$. Наконец, используя рассуждения из [14, предложение 6.3], мы получим слоения целых графиков $\Gamma(\tilde{\Phi}^\pm) \setminus \Gamma(\varphi)$ на голоморфные кривые, образованные упомянутыми выше голоморфными дисками.

Для листов этих слоений верен следующий результат.

ЛЕММА 5. *Для каждого голоморфного листа, лежащего в одном из множеств $\Gamma(\tilde{\Phi}^\pm) \setminus \Gamma(\varphi)$, существует предельная точка в $\Gamma(\varphi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассуждать от противного, предполагая, что существует такой голоморфный лист $\mathcal{L}$, лежащий в одном из множеств $\Gamma(\tilde{\Phi}^\pm) \setminus \Gamma(\varphi)$, что $\mathcal{L}$ не имеет предельных точек в $\Gamma(\varphi)$. Поскольку оба случая разбираются аналогично, можно предположить, что $\mathcal{L} \subset \Gamma(\tilde{\Phi}^-) \setminus \Gamma(\varphi)$. Включение $\pi_{z,u}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{E}(U)$ означает, что

$$\pi_{z,u}(\mathcal{L}) \cap \pi_{z,u}(\widehat{K}_n) \neq \emptyset$$

для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть V – такая относительно компактная окрестность множества $\pi_{z,u}(\widehat{K}_n)$ в $\mathcal{E}(U)$, что $\text{dist}(b\mathcal{E}(U) \cap G, V) > 0$. Тогда из нашего предположения и непрерывности $\tilde{\Phi}^\pm$ вблизи U следует, что $\pi_{z,u}(\mathcal{L}) \cap V \Subset G$. Поскольку $\tilde{\Phi}^-$ ограничена на компактных подмножествах $\mathcal{E}(U)$ по лемме 4, мы видим из построения голоморфных листов в $\Gamma(\tilde{\Phi}^-)$, что замыкание $\overline{\mathcal{L}}$ листа $\mathcal{L}$ в $\overline{V} \times \mathbb{R}_v$ – компакт и множество $\overline{\mathcal{L}} \cap (V \times \mathbb{R}_v)$ расслаивается на голоморфные кривые. Поэтому область $V \times \mathbb{R}_v \setminus \overline{\mathcal{L}}$ псевдовыпукла вблизи $\overline{\mathcal{L}}$.

Рассматривая теперь функцию

$$\varrho(P) = -\log \text{dist}(P, \overline{\mathcal{L}}) + \varepsilon(|z|^2 + |w|^2)$$

с достаточно малым $\varepsilon > 0$ и сглаживая ее при необходимости, построим (взяв некоторое множество надуровня полученной функции) такую строго псевдовогнутую окрестность $\mathcal{V}$ множества $\overline{\mathcal{L}}$ в $V' \times \mathbb{R}_v$ (мы подразумеваем здесь строгую псевдовогнутость $\mathcal{V}$ вблизи куска $b\mathcal{V} \cap (V' \times \mathbb{R}_v)$ ее границы), где V' – окрестность $\pi_{z,u}(\widehat{K}_n)$ в $\mathcal{E}(U)$, несколько меньшая V , что $\mathcal{V} \subseteq G \times \mathbb{R}_v$. Поскольку $\overline{\mathcal{V}}$ – компакт, существует такая достаточно большая константа C , что $(\overline{\mathcal{V}} + C\mathbf{e}_v) \cap \widehat{K}_n = \emptyset$. Теперь из свойства $\pi_{z,u}(\mathcal{L}) \cap \pi_{z,u}(\widehat{K}_n) \neq \emptyset$ следует, что для некоторого $t \geq 0$ множество $\overline{\mathcal{V}} + (C - t)\mathbf{e}_v$ впервые касается $\widehat{K}_n$. Это противоречит псевдовыпуклости $G \times \mathbb{R}_v \setminus \widehat{K}_n$, утверждаемой леммой 1. Лемма доказана.

Непрерывность функций $\tilde{\Phi}^\pm$ во внутренних точках $\mathcal{E}(U)$ теперь прямо следует из доказательства леммы 7.2 из [14], в котором ссылку на лемму 7.1 надо заменить ссылкой на только что доказанную лемму 5.

Итак, мы доказали, что функции $\tilde{\Phi}^\pm$ задают непрерывные леви-плоские продолжения фиксированной функции $\varphi \in C(U)$ в область $\mathcal{E}(U)$.

ЛЕММА 6. *Функции $\Phi^\pm$, задающие множества $\mathcal{E}(V_\varphi^\pm)$, совпадают с соответствующими функциями $\tilde{\Phi}^\pm$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для обеих функций рассуждения одни и те же, поэтому мы докажем требуемый результат для функции Φ^+ . Сначала покажем, что $\Phi^+ \leq \tilde{\Phi}^+$ в $\mathcal{E}(U)$. Для любых $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим график $\Gamma(\varphi_{m,t+\varepsilon})$ функции $\varphi_{m,t+\varepsilon}$. Из определений V_φ^+ , $\varphi_{m,t}$ и теоремы 3 следует, что для фиксированных m, ε и (достаточно большого) t выполняется $\Gamma(\varphi_{m,t+\varepsilon}) \subset \widehat{\mathcal{K}}_n^+$, если n достаточно большое. Поскольку $\Gamma(\varphi_{m,t+\varepsilon})$ леви-плоская, можно сделать вывод, что $\Gamma(\varphi_{m,t+\varepsilon}) \subset \widehat{\mathcal{K}}_n^+$. По определению $\tilde{\Phi}^+$ и $\mathcal{E}(V_\varphi^+)$ это означает, что $\Gamma(\tilde{\Phi}^+ + \varepsilon) \subset \mathcal{E}(V_\varphi^+)$. Следовательно, $\Phi^+ \leq \tilde{\Phi}^+ + \varepsilon$ для всякого $\varepsilon > 0$, и потому $\Phi^+ \leq \tilde{\Phi}^+$.

Доказательство неравенства $\tilde{\Phi}^+ \leq \Phi^+$ мы проведем от противного, предположив, что $\Phi^+(P_0) < \tilde{\Phi}^+(P_0)$ для некоторой точки $P_0 \in \mathcal{E}(U)$. Тогда из определения $\tilde{\Phi}^+$ и $\mathcal{E}(V_\varphi^+)$ следует, что существуют такие $n_0 \in \mathbb{N}$ и точка $(P_0, v_0) \in \widehat{\mathcal{K}}_{n_0}^+$, что $v_0 < \tilde{\Phi}^+(P_0)$. По определению $\tilde{\Phi}^+$ существуют $m_0 \in \mathbb{N}$ и $t_0 \in \mathbb{R}$, для которых $v_0 < \Phi_{m_0,t_0}(P_0)$. Можно также предположить, что m_0 выбрано достаточно большим, так что область $\mathcal{E}_{m_0}$ (в которой определена функция Φ_{m_0,t_0}) обладает следующим свойством:

$$\text{dist}(b\mathcal{E}_{m_0} \cap G, \pi_{z,u}(\widehat{\mathcal{K}}_{n_0}^+)) > 0.$$

Поскольку $\Gamma(\Phi_{m_0,t_0} - C)$ не пересекает $\widehat{\mathcal{K}}_{n_0}^+$ для больших C , а в силу выбора m_0 график $\Gamma(\varphi_{m_0,t_0} - s)$ не пересекает $\widehat{\mathcal{K}}_{n_0}^+$ ни при каких $s \geq 0$ и так как область $G \times \mathbb{R}_v \setminus \widehat{\mathcal{K}}_{n_0}^+$ псевдовыпуклая (см. лемму 1) и поверхности $\Gamma(\Phi_{m_0,t_0} - s)$, $0 \leq s \leq C$, леви-плоские, мы получаем, что $\Gamma(\Phi_{m_0,t_0} - s) \cap \widehat{\mathcal{K}}_{n_0}^+ = \emptyset$ для всех $0 \leq s \leq C$. Это противоречит неравенству $v_0 < \Phi_{m_0,t_0}(P_0)$ и доказывает лемму.

Последнее утверждение теоремы 4 о том, что для всякой функции $\Phi \in C(\mathcal{E}(U))$ такой, что $\Phi|_U = \varphi$ и $\Gamma(\Phi) \setminus \Gamma(\varphi)$ леви-плоская, неравенства $\Phi^-(z, u) \leq \Phi(z, u) \leq \Phi^+(z, u)$ выполнены для всех $(z, u) \in \mathcal{E}(U)$, вытекает из псевдовыпуклости областей $G \times \mathbb{R}_v \setminus (\widehat{\mathcal{K}}_n^- \cup \widehat{\mathcal{K}}_n^+)$ с помощью рассуждений, аналогичных проведенным в доказательстве леммы 4. Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть $U_c = bG \setminus \bar{U}$ и $\mathcal{E}^*(U)$ – объединение компонент связности множества $\mathcal{E}(U \cup U_c)$, границы которых содержат точки U . Рассмотрим функцию $\psi \in C(U_c)$. Применяя теорему 4 к множеству $U \cup U_c$ вместо U и к функции на $U \cup U_c$, равной φ на U и ψ на U_c , мы получим леви-плоские продолжения φ на множество $\mathcal{E}^*(U)$, которое, вообще говоря, больше $\mathcal{E}(U)$ (см. пример 1 в § 7). Если область G диффеоморфна трехмерному шару, то по теореме 2 выполнено равенство $\mathcal{E}^*(U) = \mathcal{E}(U)$ и эти леви-плоские продолжения φ не зависят от выбора ψ , так как они равны функциям $\Phi^\pm$, определяемым теоремой 4 для множества U и функции φ .

§ 6. О максимальнойности $\mathcal{E}(U)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Без ограничения общности можно предположить, что множество U связно. В противном случае мы можем применить рассуждения, приведенные далее, ко всем компонентам связности U . Поскольку случаи $U \subset bG^-$ и $U \subset bG^+$ разбираются одинаково, предположим, что $U \subset bG^-$. Рассмотрим исчерпание $U_1 \Subset U_2 \Subset \dots$ области U гладкими областями, и для $n = 1, 2, \dots$ пусть $\mathcal{U}_n = p(U_n)$, где $p: \bar{G} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$ – каноническая проекция. Далее, рассмотрим $\mathcal{U}' = p(U')$, где $U' \subset bG^-$ – односвязная область из условия теоремы. Обозначим через $\mathcal{A}_n$ множество, состоящее из компактных компонент связности $\mathcal{U}' \setminus \mathcal{U}_n$. Тогда $\mathcal{U}'_n = \mathcal{U}_n \cup \mathcal{A}_n$ – односвязные подобласти $\mathcal{U}'$ со свойствами $\mathcal{U}'_1 \Subset \mathcal{U}'_2 \Subset \dots \subset \mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}' = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{U}'_n$. Для всякого $n = 1, 2, \dots$ зададим функцию H'_n в области $\mathcal{U}'$, положив ее равной h^- на $\mathcal{U}' \setminus \mathcal{A}_n$ и равной гармоническому продолжению h^- с $b\mathcal{A}_n$ в $\mathcal{A}_n$ на множестве $\mathcal{A}_n$. Далее, введем функцию H''_n в области $\mathcal{U}'$, равную h^- на $\mathcal{U}' \setminus \mathcal{U}'_n$ и равную гармоническому продолжению h^- с $b\mathcal{U}'_n$ в $\mathcal{U}'_n$ на множестве $\mathcal{U}'_n$. Тогда все эти функции субгармоничны в $\mathcal{U}'$ и

$$\dots \leq H'_3 \leq H'_2 \leq H'_1 \leq H''_1 \leq H''_2 \leq H''_3 \leq \dots$$

Пусть $H'(\zeta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H'_n(\zeta)$ и $H''(\zeta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H''_n(\zeta)$, $\zeta \in \mathcal{U}'$. Определим подобласть $\mathbf{U}$ области $\bar{G}$ равенством

$$\mathbf{U} = \{(z, u): z = \pi(\zeta), H'(\zeta) < u < H''(\zeta), \zeta \in \mathcal{U}'\} \cup U.$$

Заметим, что $\mathbf{U} \subset \mathcal{E}(U)$. В самом деле, фиксируем n и для всякой компоненты связности Γ_n^α множества $b\mathcal{U}_n$ рассмотрим гармоническое продолжение F_n^α функции h^- из Γ_n^α в область $\mathcal{B}_n^\alpha$, ограниченную Γ_n^α в $\mathcal{G}$. Отметим, что $\mathcal{U}'_n$ является одной из этих областей (она соответствует $\Gamma_n^\alpha = b\mathcal{U}'_n$), а другие области – это просто компоненты связности множества $\mathcal{A}_n$. Поскольку каждая из областей $\mathcal{B}_n^\alpha$ односвязна, а функция h^- гладкая в $\mathcal{G}$, для всякого α существует такая гладкая на $\bar{\mathcal{B}}_n^\alpha$ функция G_n^α , голоморфная в $\mathcal{B}_n^\alpha$, что $\operatorname{Re} G_n^\alpha = F_n^\alpha$. Для любых α и $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим диск

$$D_{n,t}^\alpha = \{(z, w): z = \pi(\zeta), w = G_n^\alpha(\zeta) + it, \zeta \in \mathcal{B}_n^\alpha\}$$

и определим множество $\mathcal{M}_n$ как объединение $U_n \times \{0\}$ и границ всех дисков $D_{n,t}^\alpha$, для которых $\bar{D}_{n,t}^\alpha \cap \{v = 0\} \neq \emptyset$. Поскольку $\mathcal{M}_n$ – компактное подмножество множества $U \times \mathbb{R}_v$, получаем $\widehat{\mathcal{M}}_n \subset \mathcal{E}(U \times \mathbb{R}_v)$.

Рассмотрим множество

$$\mathbf{U}_n = \{(z, u): z = \pi(\zeta), H'_n(\zeta) < u < H''_n(\zeta), \zeta \in \mathcal{U}'_n\}.$$

Поскольку $\mathbf{U}_n \times \{0\} \subset \mathbb{C}^2_{z,w}$, очевидно, леви-плоская поверхность и по определению $\mathcal{M}_n$ ее край лежит в $\mathcal{M}_n$, мы видим, что

$$\mathbf{U}_n \times \{0\} \subset \widehat{\mathcal{M}}_n \subset \mathcal{E}(U \times \mathbb{R}_v).$$

Следовательно, $\mathbf{U}_n \subset \mathcal{E}(U)$. Это включение выполнено для всех n , поэтому

$$\mathbf{U} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{U}_n \subset \mathcal{E}(U),$$

что и требовалось доказать.

Для завершения доказательства построим такую функцию $\varphi \in C(U)$, что $\mathbf{U}$ – максимальная область определения леви-плоского продолжения φ . Так как леви-плоское продолжение на $\mathcal{E}(U)$ всегда определено ввиду теоремы 4, $\mathcal{E}(U) \subset \mathbf{U}$ и по доказанному выше включению имеем $\mathcal{E}(U) = \mathbf{U}$ и это – максимальная область для леви-плоских продолжений φ .

Для $n = 1, 2, \dots$ выберем $t_n \in \mathbb{R}$ такое, чтобы все диски D_{n,t_n}^α лежали в $\{v \leq -n\}$. Далее, для $(z, u) \in bU_n$ положим $\varphi(z, u)$ равным $\text{Im } G_n^\alpha(\zeta) + t_n$, где ζ – такая точка из $b\mathcal{U}_n$, что $(z, u) = (\pi(\zeta), h^-(\zeta))$. Последовательность множеств $\{bU_n\}$ не имеет точек накопления в U , так что можно продолжить эту функцию до непрерывной функции φ , определенной во всем U . Мы утверждаем, что $\mathbf{U}$ – максимальная область для леви-плоских продолжений заданной функции φ .

Чтобы прийти к противоречию, предположим, что существует такая область $\Omega \subset \overline{G}$, $\mathbf{U} \subsetneq \Omega$, что φ имеет непрерывное леви-плоское продолжение Φ в Ω . Рассмотрим точку $Q \in (b\mathbf{U} \setminus bG) \cap \Omega$. Тогда по определению $\mathbf{U}$ для всякого $n = 1, 2, \dots$ можно выбрать α_n такое, чтобы Q лежала во множестве предельных точек последовательности графиков

$$\Gamma(F_n^{\alpha_n}) = \{(z, u): z = \pi(\zeta), u = F_n^{\alpha_n}(\zeta), \zeta \in \overline{\mathcal{B}}_n^{\alpha_n}\}$$

функций $F_n^{\alpha_n}$. По предположению Φ непрерывна на множестве $\Gamma(F_n^{\alpha_n}) \subset \Omega$. Следовательно, диск $D_{n,c}^{\alpha_n}$ не пересекает график $\Gamma(\Phi)$ функции Φ для достаточно больших $c > 0$. Поскольку мы предполагаем, что $\Gamma(\Phi)$ леви-плоская, дополнение к $\Gamma(\Phi)$ в $\mathbb{C}^2_{z,w}$ локально псевдовыпукло во внутренних точках $\Gamma(\Phi)$. Применяя “принцип непрерывности” к семейству дисков $D_{n,t}^{\alpha_n}$, $t_n \leq t \leq c$, заключаем, что $D_{n,t}^{\alpha_n} \cap \Gamma(\Phi) = \emptyset$ для всех $t > t_n$. Это означает, что диск $D_{n,t_n}^{\alpha_n}$ расположен над $\Gamma(\Phi)$ по координате v . Тогда из определения φ на bU_n и выбора t_n в этом определении получим, что $\Phi \leq -n$ на $\Gamma(F_n^{\alpha_n})$. Теперь условие, что Q лежит во множестве предельных точек последовательности $\{\Gamma(F_n^{\alpha_n})\}$, противоречит предположениям о том, что $Q \in \Omega$ и $\Phi \in C(\Omega)$.

Ввиду теорем 4 и 5 и доказательства теоремы 2, примененного к дискам $D_{n,t}^\alpha$ вместо дисков Бедфорда–Клингенберга, мы получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ. В предположениях, сделанных в теореме 5, множества $\mathcal{E}(U_\alpha)$ не пересекаются и $\mathcal{E}(U) = \bigcup_\alpha \mathcal{E}(U_\alpha)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Интересно отметить, что область $\mathcal{E}(U)$ не будет максимальной для леви-плоских продолжений из U , если ослабить требование, чтобы всякая компонента связности U лежала в bG^- или bG^+ . Точнее, существует такая гладкая односвязная подобласть U границы единичного шара $\mathbb{B}$ в $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$, что всякая функция $\varphi \in C(U)$ имеет непрерывное леви-плоское продолжение в подобласть $\mathbb{B}$, большую, чем $\mathcal{E}(U)$. Авторы намерены описать пример такого множества U и изучить это явление подробнее в следующей статье.

§ 7. Примеры

ПРИМЕР 1. Пусть G – полноторие в $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$, заданное неравенством $(|z| - 2)^2 + u^2 < 1$. Прямым вычислением формы Леви легко удостовериться в том, что область $G \times \mathbb{R}_v \subset \mathbb{C}_{z,w}^2$ строго псевдовыпуклая (см. также [5, теорема 1]). Рассмотрим открытое подмножество $U = \{(z, u) \in bG : |z| < 2\}$ границы bG . Тогда

$$U_c = bG \setminus \overline{U} = \{(z, u) \in bG : |z| > 2\}.$$

Очевидно, что множества U и U_c не пересекаются, но множество $\mathcal{E}(U \cup U_c) = \{(z, u) \in G : |u| < 1\}$ связно (множество $\mathcal{E}(U \cup U_c) \times \mathbb{R}_v$ расслаивается на кольца $A_C = \{(z, w) \in G \times \mathbb{R}_v : u = \operatorname{Re} C, v = \operatorname{Im} C\}$, где C удовлетворяет неравенству $|\operatorname{Re} C| < 1$).

Следующая открытая проблема послужила мотивировкой второго примера.

Пусть $\mathbb{D}$ – гладкая строго псевдовыпуклая подобласть $\mathbb{C}^2$, и пусть S – гладкая двумерная сфера, вложенная в $b\mathbb{D}$. Означает ли это существование единственного трехмерного шара B^3 , вложенного в $\mathbb{D}$ и расслаивающегося на голоморфные диски, с границей $bB^3 = S$?

Заметим, что в силу [2] и [11] существуют двумерные сферы $S' \subset b\mathbb{D}$, сколь угодно близкие к S и удовлетворяющие указанным выше требованиям. Частичным ответом на этот вопрос является следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\widehat{S}$ – $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ -оболочка S , то множество $b\widehat{S} \cap \mathbb{D}$ является объединением непересекающихся голоморфных дисков с границами в S .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Мы не знаем, является ли $\widehat{S} \setminus S$ трехмерным шаром и даже пусто ли множество внутренних точек $\widehat{S} \setminus S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку S локально разделяет $b\mathbb{D}$ на связные компоненты $b\mathbb{D}'$ и $b\mathbb{D}''$, можно рассмотреть последовательности непересекающихся двумерных сфер $S'_n \subset b\mathbb{D}'$ и $S''_n \subset b\mathbb{D}''$, сходящихся к S . Сферы S'_n и S''_n можно выбрать таким образом, чтобы они удовлетворяли условиям, приведенным в [11], и, следовательно, ограничивали соответствующие трехмерные шары B'_n и B''_n , расслаивающиеся на голоморфные диски. Поскольку сферы S'_n и S''_n выбраны непересекающимися, легко видеть по “принципу непрерывности”, что все шары B'_n и B''_n тоже не пересекаются. Для всякого $n = 1, 2, \dots$ обозначим через $\mathcal{M}_n$ замкнутую компоненту связности $\mathbb{D} \setminus (B'_n \cup B''_n)$ с границей, содержащей S , и через $\mathcal{N}_n$ – замкнутую компоненту связности $b\mathbb{D} \setminus (S'_n \cup S''_n)$, содержащую S . Тогда $\{\mathcal{M}_n\}$ – убывающая последовательность компактных подмножеств из $\overline{\mathbb{D}}$ таких, что $\mathcal{M} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$ – тоже компакт в $\overline{\mathbb{D}}$. Мы утверждаем, что $\mathcal{M} = \widehat{S}$ и $b\mathcal{M} \cap \mathbb{D}$ – объединение непересекающихся голоморфных дисков с границами на S .

Чтобы показать, что $\widehat{S} \subset \mathcal{M}$, заметим, что по определению $\mathcal{M}$ для всякого $\varepsilon > 0$ существуют шары B'_n и B''_n , лежащие в ε -окрестности $U_\varepsilon(\mathcal{M})$ множества $\mathcal{M}$. В силу леммы 1 множество $\mathbb{D} \setminus \widehat{S}$ псевдовыпукло. Применяя “принцип непрерывности” к дискам из слоений на B'_n и B''_n , можно заключить, что $\widehat{S} \cap B'_n = \emptyset$ и $\widehat{S} \cap B''_n = \emptyset$. По теореме Шилова об идемпотентах (см. [8, с. 88]) множество $\widehat{S}$ связно, так что $\widehat{S} \subset \mathcal{M}_n$. Это рассуждение верно для всех $\varepsilon > 0$, поэтому

$$\widehat{S} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n = \mathcal{M}.$$

Покажем теперь, что $b\mathcal{M} \cap \mathbb{D}$ – объединение непересекающихся голоморфных дисков с границами на S . В частности, в силу принципа максимума модуля это влечет включение $\mathcal{M} \subset \widehat{S}$, и потому $\mathcal{M} = \widehat{S}$. Пусть Q – точка из $b\mathcal{M} \cap \mathbb{D}$. По определению $\mathcal{M}$ существует либо последовательность точек $Q_n \in B'_n$, либо последовательность точек $Q_n \in B''_n$, сходящаяся к Q . Поскольку рассуждения в обоих случаях одинаковы, предположим, что $Q_n \in B'_n$. Пусть D_n – такой голоморфный диск, рассмотренный в [11] и лежащий в B'_n , что $Q_n \in D_n$. Площадь D_n меньше площади $S'_n = bB'_n$, и сферы S'_n , сходящиеся к S , могут быть выбраны такими, чтобы их площади оставались равномерно ограниченными, поэтому, как известно из [3], существует подпоследовательность $\{D_{n_k}\}$, сходящаяся к голоморфному диску D_Q . Теперь из включения $D_{n_k} \subset \mathcal{M}_{n_k}$ и определения $\mathcal{M} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$ видно, что $D_Q \subset \mathcal{M}$. Поскольку $D_{n_k} \subset B'_{n_k}$ и, как показывают проведенные выше рассуждения, $B'_{n_k} \cap \mathcal{M} = \emptyset$, то D_Q не пересекает внутренность $\mathcal{M}$ и, следовательно, $D_Q \subset b\mathcal{M} \cap \mathbb{D}$.

Чтобы показать единственность голоморфного диска в $b\mathcal{M} \cap \mathbb{D}$, проходящего через Q , предположим, что, напротив, существует еще один диск $D \neq D_Q$. Так как $Q \in D \cap D_Q$, а наличие точек пересечения двух голоморфных дисков в $\mathbb{C}^2$ – свойство, устойчивое относительно малых возмущений, то $D \cap D_{n_k} \neq \emptyset$ для достаточно больших k . Значит, соотношения $\mathcal{M} \cap B'_{n_k} = \emptyset$, $D_{n_k} \subset B'_{n_k}$ и $D \subset \mathcal{M}$ приводят к требуемому противоречию и доказывают тем самым единственность D_Q . Легко видеть, что единственность голоморфного диска в $b\mathcal{M}$, проходящего через данную точку множества $b\mathcal{M} \cap \mathbb{D}$, означает, что множество $b\mathcal{M} \cap \mathbb{D}$ в целом является объединением непересекающихся голоморфных дисков с границами в S . Это завершает доказательство предложения.

Заметим, что если область $\mathbb{D}$ ограничена и диффеоморфна четырехмерному шару, то S разделяет $b\mathbb{D}$ на связные компоненты $b\mathbb{D}'$ и $b\mathbb{D}''$. Используя рассуждения, аналогичные проведенным в п. 2) доказательства теоремы 1, мы видим, что $\mathcal{E}(b\mathbb{D}') = E(b\mathbb{D}')$ и $\mathcal{E}(b\mathbb{D}'') = E(b\mathbb{D}'')$, множества $\mathcal{E}(b\mathbb{D}')$ и $\mathcal{E}(b\mathbb{D}'')$ не пересекаются и

$$\widehat{S} = \overline{\mathbb{D}} \setminus (\mathcal{E}(b\mathbb{D}') \cup \mathcal{E}(b\mathbb{D}'')).$$

Как уже отмечалось, мы не знаем, имеет ли множество $\widehat{S} = \overline{\mathbb{D}} \setminus (\mathcal{E}(b\mathbb{D}') \cup \mathcal{E}(b\mathbb{D}''))$ внутренние точки. Интересно, что если $\mathbb{D}$ – жесткая область в $\mathbb{C}^2$, то это возможно. Точнее, на границе $b\mathbb{B}$ единичного шара $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ существует гладкая открытая ограниченная область U , диффеоморфная двумерному диску, для которой внутренняя часть множества

$$\mathbb{B} \times \mathbb{R}_v \setminus (\mathcal{E}(U \times \mathbb{R}_v) \cup \mathcal{E}((b\mathbb{B} \setminus \overline{U}) \times \mathbb{R}_v))$$

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

непуста. Пример такого множества U мы приводим ниже.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим единичный шар $\mathbb{B}$ в $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$. Тогда в обозначениях § 4 “накрывающая модель” $\mathcal{G}$ области $\mathbb{B}$ – единичный круг $\Delta = \{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}_z$ и для функций $h^\pm$, задающих $b\mathbb{B}$, выполнены равенства $h^\pm(z) = \pm\sqrt{1 - |z|^2}$.

Рассмотрим гладкий двумерный диск в $b\mathbb{B}$ с такими проекциями $p(U^\pm)$ множеств $U^\pm = U \cap b\mathbb{B}^\pm$ на Δ , как на рис. 1.

Из определений множеств Σ и $\mathcal{U}^\pm$ (см. § 4) и описания $\mathcal{E}(U)$, сделанного в предложении 1, теперь ясно, что множество $b\mathcal{E}(U) \cap \mathbb{B}$ является объединением графиков $\Gamma(F^\pm)$ гармонических функций $F^\pm$, определенных в соответствующих областях $\mathcal{U}^\pm$ (см. рис. 2 и 3, где мы также указываем граничные значения функций $F^\pm$) и отрезка $\mathbb{B} \cap \{z = A_1\}$.

Аналогично, множество $U_c = b\mathbb{B} \setminus \bar{U}$ также является двумерным диском с такими проекциями $p(U_c^\pm)$ множеств $U_c^\pm = U_c \cap b\mathbb{B}^\pm$ на Δ , как на рис. 4. Соответствующие множества Σ_c и $\mathcal{U}_c^\pm$ изображены на рис. 5 и 6, где также указаны граничные значения функций $F_c^\pm$, графики которых, объединенные с отрезками $\mathbb{B} \cap \{z = A_i\}$, $i = 2, 3, 4$, составляют множество $b\mathcal{E}(U_c) \cap \mathbb{B}$.

Понятно, что поскольку графики $\Gamma(F^\pm)$ не совпадают с графиками $\Gamma(F_c^\pm)$, а множества $\mathcal{E}(U)$ и $\mathcal{E}(U_c)$ не пересекаются, существует открытая подобласть Ω области $\mathbb{B}$, ограниченная графиками $\Gamma(F^\pm)$, $\Gamma(F_c^\pm)$ и отрезками $\mathbb{B} \cap \{z = A_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, такая, что

$$\bar{\mathbb{B}} \times \mathbb{R}_v \setminus (\mathcal{E}(U \times \mathbb{R}_v) \cup \mathcal{E}(U_c \times \mathbb{R}_v)) = \Omega \times \mathbb{R}_v.$$

Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6

Заметим, что граница области $\Omega \times \mathbb{R}_v$ состоит из двух леви-плоских поверхностей: поверхности L_1 , образованной гиперповерхностями $\Gamma(F^\pm) \times \mathbb{R}_v$, расслоенными на голоморфные диски, и полосой $(\mathbb{B} \cap \{z = A_1\}) \times \mathbb{R}_v$, и поверхности L_2 , образованной гиперповерхностями $\Gamma(F_c^\pm) \times \mathbb{R}_v$, расслоенными на голоморфные диски, и полосами $(\mathbb{B} \cap \{z = A_i\}) \times \mathbb{R}_v$, $i = 2, 3, 4$. Леви-плоские поверхности L_1 и L_2 имеют одну и ту же границу $bU \times \mathbb{R}_v$.

В заключение сформулируем вопросы, остающиеся открытыми.

ВОПРОС 1. Как описать множество $\mathcal{E}(U)$ в терминах пространства $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ (т. е. не используя области $G \times \mathbb{R}_v \subset \mathbb{C}_{z,w}^2$ и оболочки $\hat{K}_n$ компактов K_n , исчерпывающих $U \times \mathbb{R}_v$)?

ВОПРОС 2. Как для всякого открытого множества $U \subset bG$ найти максимальное открытое подмножество $\mathcal{E}$ области $\bar{G}$ такое, чтобы всякая функция $\varphi \in C(U)$ имела непрерывное леви-плоское продолжение в $\mathcal{E}$?

Список литературы

1. Bedford E., Gaveau B. Envelopes of holomorphy of certain 2-spheres in $\mathbb{C}^2$ // Amer. J. Math. 1983. V. 105. P. 975–1009.
2. Bedford E., Klingenberg W. On the envelopes of holomorphy of a 2-sphere in $\mathbb{C}^2$ // J. Amer. Math. Soc. 1991. V. 4. P. 623–646.
3. Bishop E. Conditions for the analyticity of certain sets // Mich. Math. J. 1964. V. 11. P. 289–304.

4. *Bremermann H. J.* Die Holomorphiehüllen der Tuben- und Halbtubengebiete // *Math. Ann.* 1954. V. 127. P. 406–423.
5. *Chirka E. M., Shcherbina N. V.* Pseudoconvexity of rigid domains and foliations of hulls of graphs // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*. 1995. V. XXI. P. 707–735.
6. *Eliashberg Y.* Filling by holomorphic discs and its applications // *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 1991. V. 151. P. 45–67.
7. *Ерошкин О. Г.* Об одном топологическом свойстве края аналитического подмножества строго псевдовыпуклой области в $\mathbb{C}^2$ // *Матем. заметки.* 1991. Т. 49. № 5. С. 149–151.
8. *Gamelin T. W.* Uniform algebras. Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1969.
9. *Kerzman N.* Hölder and L^p estimates for solutions of $\bar{\partial}u = f$ in strongly pseudoconvex domains // *Comm. Pure Appl. Math.* 1971. V. 24. P. 301–379.
10. *Kiselman C.* The partial Legendre transformation for plurisubharmonic functions // *Invent. Math.* 1978. V. 49. P. 137–148.
11. *Кружилин Н. Г.* Двумерные сферы на границах строго псевдовыпуклых областей в $\mathbb{C}^2$ // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1991. Т. 55. № 6. С. 1194–1237.
12. *Narasimhan R.* The Levi problem for complex spaces. II // *Math. Ann.* 1962. V. 146. P. 195–216.
13. *Shcherbina N.* On the polynomial hull of a graph // *Indiana Univ. Math. J.* 1993. V. 42. P. 477–503.
14. *Shcherbina N., Tomassini G.* The Dirichlet problem for Levi-flat graphs over unbounded domains // *Internat. Math. Res. Notices.* 1999. P. 111–151.
15. *Stout E. L.* Removable singularities for the boundary values of holomorphic functions // *Several complex variables (Stockholm, 1987/1988)*. *Math. Notes.* V. 38. Princeton – N.J.: Princeton Univ. Press, 1993. P. 600–629.
16. *Casadio Tarabusi E., Trapani S.* Envelopes of holomorphy of Hartogs and circular domains // *Pacific J. Math.* 1991. V. 149. P. 231–249.
17. *Tomassini G.* Sur les algèbres $A^0(\bar{D})$ et $A^\infty(\bar{D})$ d'un domaine pseudoconvexe borné // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*. 1983. V. X. P. 243–256.

E-mail: nikolay@math.chalmers.se

Поступило в редакцию
09.12.2003

Перевод с английского
Н. Г. Кружилина