Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. Бен Амара, А. А. Владимиров, Об одной задаче четвертого порядка со спектральным и физическим параметрами в граничном условии, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 4, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/im494>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 04:44:14

УДК 517.984

Ж. Бен Амара, А. А. Владимиров

Об одной задаче четвертого порядка со спектральным и физическим параметрами в граничном условии

Рассматривается граничная задача четвертого порядка

$$\begin{aligned} [(py'')' - qy']' &= \lambda ry, \\ y(0) = y'(0) = y''(1) &= [(py'')' - qy'](1) + \lambda my(1) = 0 \end{aligned}$$

со спектральным параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ и физическим параметром $m \in \mathbb{R}$. С задачей связывается зависящий от физического параметра m линейный пучок ограниченных операторов $T_m = T_m(\lambda)$, действующий из пространства $\mathcal{H}_2 = \{y \mid y \in W_2^2[0, 1], y(0) = y'(0) = 0\}$ в дуальное пространство $\mathcal{H}_{-2}$. На основе изучения спектральных свойств пучка T_m описываются свойства собственных значений задачи при различных значениях физического параметра m . В частности, устанавливаются асимптотики собственных значений задачи при $m \nearrow 0$.

Библиография: 13 наименований.

Введение

В настоящей статье изучаются спектральные свойства граничной задачи

$$[(py'')' - qy']' = \lambda ry, \tag{0.1}$$

$$y(0) = y'(0) = y''(1) = [(py'')' - qy'](1) + \lambda my(1) = 0. \tag{0.2}$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, а $m \in \mathbb{R}$ – физический параметр. Далее предполагается, что коэффициенты p, q и r принадлежат пространству $C[0, 1]$, причем функция q вещественна, а функции p и r положительны.

Задача (0.1), (0.2) возникает при разделении переменных в динамической краевой задаче, описывающей малые колебания неоднородного стержня, жестко закрепленного на левом конце и подвергаемого действию следящей силы на правом конце. В частности, случай $m > 0$ отвечает ситуации, когда на правом конце стержня сосредоточена дополнительная масса величины m . Более полные сведения о физическом смысле задачи (0.1), (0.2) можно найти в работах [1]–[3].

Известна аналогичная задаче (0.1), (0.2) задача Штурма–Лиувилля со спектральным и физическим параметрами в граничном условии (см., например, [4]–[6]).

Работа второго автора поддержана РФФИ (гранты № 01-01-00691 и № 03-01-06426).

Однако спектральные свойства задач четвертого порядка, вообще говоря, могут отличаться от спектральных свойств аналогичных задач второго порядка. Например, спектр задачи о малых колебаниях стержня, в отличие от задачи о малых колебаниях струны, может не быть простым (собственное значение $\lambda = 0$ задачи

$$\begin{aligned} y^{(4)} &= \lambda y, \\ y''(0) &= y'''(0) = y''(1) = y'''(1) = 0 \end{aligned}$$

имеет кратность 2). Поэтому результаты, полученные для задач Штурма–Лиувилля, нельзя автоматически применять к задачам четвертого порядка.

В основе проводимого ниже исследования будут лежать известные факты геометрии пространств Понтрягина. Также будут широко использоваться результаты работ [7], [8], связанные с методом дополнительного спектрального параметра.

Структура статьи следующая. В §1 строится операторный пучок, служащий моделью задачи (0.1), (0.2). В §2 дается общая характеристика расположения собственных значений задачи (0.1), (0.2) в комплексной плоскости. При этом основное внимание уделяется случаю $m < 0$ (как наиболее сложному). Наконец, в §3 устанавливаются асимптотики собственных значений задачи (0.1), (0.2), в том числе асимптотики по физическому параметру m при $m \rightarrow 0$. Для задачи Штурма–Лиувилля подобные асимптотики были установлены в работах [9], [2] (для частных случаев) и в работе [6].

§1. Построение операторной модели

Введем в рассмотрение пространство

$$\mathcal{H}_2 = \{y \mid y \in W_2^2[0, 1], y(0) = y'(0) = 0\},$$

снабженное нормой

$$\|y\|_{\mathcal{H}_2} = \sum_{k=0}^2 \|y^{(k)}\|_{L_2[0,1]}.$$

Введем также в рассмотрение дуальное к $\mathcal{H}_2$ относительно $L_2[0, 1]$ пространство $\mathcal{H}_{-2}$, т. е. пополнение $L_2[0, 1]$ по норме

$$\|y\|_{\mathcal{H}_{-2}} = \sup_{\|z\|_{\mathcal{H}_2}=1} |\langle y \mid z \rangle_{L_2[0,1]}|.$$

Здесь и далее через $\langle y \mid z \rangle_{L_2[0,1]}$ обозначено скалярное произведение двух элементов пространства $L_2[0, 1]$, линейное по второму аргументу и полулинейное по первому.

В дальнейшем через $\langle y \mid z \rangle$, где $y \in \mathcal{H}_{-2}$ и $z \in \mathcal{H}_2$, будет обозначаться предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n \mid z \rangle_{L_2[0,1]},$$

где $y_n \in L_2[0, 1]$ таковы, что $y_n \rightarrow y$ в $\mathcal{H}_{-2}$. Очевидно, такой предел всегда существует и единствен.

ЛЕММА 1.1. Пусть фиксировано произвольное $\lambda \in \mathbb{C}$. Пусть оператор $\tilde{T}_m(\lambda): \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_{-2}$ с областью определения

$$\begin{aligned} \text{dom } \tilde{T}_m(\lambda) = \{y \mid y \in C^2[0, 1], py'' \in C^1[0, 1], (py'')' - qy' \in C^1[0, 1], \\ y(0) = y'(0) = y''(1) = [(py'')' - qy'](1) + \lambda ty(1) = 0\} \end{aligned}$$

определен тождеством

$$\tilde{T}_m(\lambda)y = [(py'')' - (qy')] - \lambda ry \quad \forall y \in \text{dom } \tilde{T}_m(\lambda).$$

Тогда оператор $\tilde{T}_m(\lambda)$ продолжается по непрерывности до всюду определенного ограниченного оператора $T_m(\lambda): \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_{-2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрированием по частям устанавливается справедливость тождества

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}_m(\lambda)y \mid z \rangle &= \int_0^1 \overline{py''} z'' dx + \int_0^1 \overline{qy'} z' dx - \int_0^1 \overline{\lambda ry} z dx - \overline{\lambda ty(1)} z(1) \\ &\quad \forall y \in \text{dom } \tilde{T}_m(\lambda), \quad \forall z \in \mathcal{H}_2. \end{aligned}$$

Это тождество показывает, что норма оператора $\tilde{T}_m(\lambda)$ ограничена. Однако $\text{dom } \tilde{T}_m(\lambda)$ плотно в $\mathcal{H}_2$. Следовательно, оператор $\tilde{T}_m(\lambda)$ продолжается до ограниченного оператора $T_m(\lambda): \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_{-2}$.

ЛЕММА 1.2. Операторы $T_m(\lambda)$ зависят от параметра λ линейно, т. е. существует оператор $T'_m: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_{-2}$, для которого справедливо тождество

$$T_m(\lambda) = T_m(0) + \lambda T'_m \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства леммы 1.1 вытекает, что при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} \langle T_m(\lambda)y \mid z \rangle &= \int_0^1 \overline{py''} z'' dx + \int_0^1 \overline{qy'} z' dx - \int_0^1 \overline{\lambda ry} z dx - \overline{\lambda ty(1)} z(1) \\ &\quad \forall y \in \mathcal{H}_2, \quad \forall z \in \mathcal{H}_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Следовательно, оператор T'_m , определенный тождеством

$$\langle T'_m y \mid z \rangle = - \int_0^1 \overline{ry} z dx - \overline{ty(1)} z(1) \quad \forall y \in \mathcal{H}_2, \quad \forall z \in \mathcal{H}_2,$$

удовлетворяет условию леммы.

Из леммы 1.2 следует, что $T_m = T_m(\cdot)$ можно рассматривать как линейный пучок ограниченных операторов.

ЛЕММА 1.3. Пара $\{\lambda, y\}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $y \in \mathcal{H}_2$, является собственной парой пучка T_m в том и только в том случае, когда $y \in \text{dom } \tilde{T}_m(\lambda)$ (см. лемму 1.1) и $\tilde{T}_m(\lambda)y = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $y \in \text{dom } \tilde{T}_m(\lambda)$ и $\tilde{T}_m(\lambda)y = 0$, то $\{\lambda, y\}$ заведомо есть собственная пара пучка T_m , поскольку оператор $T_m(\lambda)$ представляет собой расширение оператора $\tilde{T}_m(\lambda)$.

Обратно, пусть $\{\lambda, y\}$ – собственная пара пучка T_m . Тогда справедливо тождество

$$\langle T_m(\lambda)y \mid z \rangle = 0 \quad \forall z \in \mathcal{H}_2,$$

объединяя которое с тождеством (1.1) и соотношением

$$\forall \varphi \in L_2[0, 1] \quad \exists z \in \mathcal{H}_2: z'' = \varphi,$$

устанавливаем справедливость тождества

$$[py''](x) = - \int_x^1 [qy'](t) dt + \lambda \int_x^1 (t-x)[ry](t) dt + \lambda m(1-x)y(1) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Последнее тождество означает, что выполнено каждое из условий $y \in C^2[0, 1]$, $py'' \in C^1[0, 1]$, $(py'')' - qy' \in C^1[0, 1]$, $y''(1) = 0$, $[(py'')' - qy'](1) + \lambda my(1) = 0$ и $[(py'')' - qy']' = \lambda ry$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 1.3 позволяет использовать выражения “собственная пара граничной задачи (0.1), (0.2)” и “собственная пара пучка T_m ” как синонимы. Тем самым вопрос о спектральных свойствах граничной задачи (0.1), (0.2) сводится к вопросу о спектральных свойствах пучка T_m .

§ 2. Структура спектра

Ниже будет использоваться следующая терминология, обычная в теории линейных операторных пучков:

- спектром $\sigma(T_m)$ пучка T_m называется множество чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $T_m(\lambda)$ не является ограниченно обратимым;
- геометрической кратностью собственного значения $\lambda \in \sigma(T_m)$ называется число $\dim \ker T_m(\lambda)$;
- алгебраической кратностью изолированного собственного значения $\lambda \in \sigma(T_m)$ называется алгебраическая кратность изолированного собственного значения $1/(\xi - \lambda)$ компактного оператора $T_m^{-1}(\xi) T'_m$, где ξ – произвольно фиксированное число из $\mathbb{C} \setminus \sigma(T_m)$;
- полупростым собственным значением пучка T_m называется изолированное собственное значение, алгебраическая кратность которого совпадает с геометрической;
- простым собственным значением пучка T_m называется изолированное собственное значение, алгебраическая кратность которого равна 1;
- собственным значением положительного (соответственно, отрицательного) типа называется собственное значение $\lambda \in \sigma(T_m)$, для которого при любом

ненулевым $y \in \ker T_m(\lambda)$ имеет место неравенство $\langle T'_m y \mid y \rangle < 0$ (соответственно, $\langle T'_m y \mid y \rangle > 0$); здесь T'_m – производная пучка T_m по спектральному параметру, описанная в лемме 1.2;

– *нейтральным собственным значением* называется собственное значение, не являющееся ни собственным значением положительного типа, ни собственным значением отрицательного типа.

Рассмотрим вспомогательную граничную задачу

$$\begin{aligned} [(py'')' - qy']' &= \lambda ry + \mu y, \\ y(0) = y'(0) = y''(1) &= [(py'')' - qy'](1) + \lambda ty(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

с тремя параметрами $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{R}$. Известно (см. [10, гл. V]), что при произвольно фиксированных $\lambda, t \in \mathbb{R}$ спектр задачи (2.1) по дополнительному спектральному параметру μ представляет собой ограниченную снизу последовательность собственных значений

$$\mu_{m,1}(\lambda) \leq \mu_{m,2}(\lambda) \leq \dots \leq \mu_{m,k}(\lambda) \leq \dots,$$

накапливающуюся к $+\infty$. Здесь собственные значения $\mu_{m,k}(\lambda)$ считаются с учетом кратности. При исследовании спектральных свойств пучка T_m ключевую роль будут играть следующие два утверждения.

ЛЕММА 2.1. *Имеют место следующие утверждения:*

- 1) *при произвольно фиксированных $t \in \mathbb{R}$ и $k = 1, 2, \dots$ функция $\mu_{m,k}$ непрерывна на $\mathbb{R}$;*
- 2) *если $\lambda \in \sigma(T_m)$ – собственное значение положительного типа и k таково, что $\mu_{m,k}(\lambda) = 0$, то функция $\mu_{m,k}$ убывает в точке λ ;*
- 3) *если $\lambda \in \sigma(T_m)$ – собственное значение отрицательного типа и k таково, что $\mu_{m,k}(\lambda) = 0$, то функция $\mu_{m,k}$ возрастает в точке λ .*

ЛЕММА 2.2. *Пусть фиксированы произвольные $\lambda \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$ и $\hat{\mu} \in \mathbb{R}$. Тогда неравенство $\mu_{m,k}(\lambda) \leq \hat{\mu}$ имеет место в том и только в том случае, если существует k -мерное подпространство $M \subset \mathcal{H}_2$, на котором квадратичная форма $\langle T_m(\lambda) \cdot \mid \cdot \rangle - \hat{\mu} \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{L_2[0,1]}$ неположительна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. Доказательство леммы аналогично доказательству теоремы 6 из [8]. Утверждения о поведении функций $\mu_{m,k}$ в собственных значениях пучка T_m могут быть выведены также из утверждения 6 работы [7].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.2. Число $\mu_{m,k}(\lambda)$ представляет собой k -е снизу (с учетом кратности) собственное значение некоторого полуограниченного самосопряженного оператора в пространстве $L_2[0, 1]$ (см., например, [10, гл. V]). Замыкание квадратичной формы этого оператора определено на $\mathcal{H}_2$ и имеет вид $\langle T_m(\lambda) \cdot \mid \cdot \rangle$ (см., например, [8, лемма 5]). С учетом этих фактов утверждение леммы следует из известного вариационного принципа (см. [11, гл. 1, теорема 13^{bis}]).

Если функции p , q и r являются достаточно гладкими, то из результатов работы [12] следует, что спектр задачи (0.1), (0.2) дискретен. Мы дадим независимое доказательство этого факта для рассматриваемого нами более общего случая.

ТЕОРЕМА 2.1. *Спектр пучка T_m чисто дискретен, т. е. представляет собой последовательность изолированных собственных значений конечной кратности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если существует $\xi \in \mathbb{C}$, для которого оператор $T_m(\xi)$ обладает ограниченным обратным, то утверждение теоремы заведомо справедливо. Действительно, тогда соотношение $\lambda \in \sigma(T_m)$ эквивалентно соотношению $1/(\xi - \lambda) \in \sigma(T_m^{-1}(\xi) T'_m)$ и чистая дискретность спектра пучка T_m следует из компактности оператора T'_m .

Покажем, что $\xi \in \mathbb{C}$, для которого $T_m(\xi)$ ограниченно обратим, действительно существует.

Рассмотрим оператор $P: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_{-2}$, определенный тождеством

$$\langle Py \mid z \rangle = \int_0^1 \overline{py''} z'' dx \quad \forall y \in \mathcal{H}_2, \quad \forall z \in \mathcal{H}_2.$$

Оператор P обладает ограниченным обратным. Действительно, существует такая постоянная C , что для любой функции $z \in \mathcal{H}_2$ справедливо неравенство

$$\|z\|_{\mathcal{H}_2} \leq C \|z''\|_{L_2[0,1]}.$$

Поэтому согласно теореме Рисса для любой фиксированной $y \in \mathcal{H}_{-2}$ существует и единственна такая функция $\varphi(y) \in L_2[0, 1]$, для которой $\|\varphi(y)\|_{L_2[0,1]} \leq C \|y\|_{\mathcal{H}_{-2}}$ и справедливо тождество

$$\langle y \mid z \rangle = \langle \varphi(y) \mid z'' \rangle_{L_2[0,1]} \quad \forall z \in \mathcal{H}_2.$$

Оператор $P^{-1}: \mathcal{H}_{-2} \rightarrow \mathcal{H}_2$, определенный тождеством

$$[P^{-1}y]'' = \frac{\varphi(y)}{p} \quad \forall y \in \mathcal{H}_{-2},$$

и является ограниченным обратным к оператору P .

Далее, из (1.1) следует, что при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ найдется такая непрерывная на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ функция ψ , что будет справедливо тождество

$$\langle (T_m(\lambda) - P)y \mid z \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \overline{\psi(s, t) y''(s)} z''(t) ds dt \quad \forall y \in \mathcal{H}_2, \quad \forall z \in \mathcal{H}_2.$$

На основе этого тождества нетрудно установить, что оператор $T_m(\lambda) - P$ может быть сколь угодно точно приближен (в равномерной операторной топологии) линейной комбинацией операторов вида $K_{a,b}$, определяемых соотношением

$$\langle K_{a,b} y \mid z \rangle = \overline{y'(a)} z'(b) \quad \forall y \in \mathcal{H}_2, \quad \forall z \in \mathcal{H}_2.$$

Здесь a и b – произвольно фиксированные числа из отрезка $[0, 1]$. Тем самым оператор $T_m(\lambda) - P$ компактен, и потому оператор $T_m(\lambda)$ не имеет ограниченного обратного в том и только в том случае, когда $\ker T_m(\lambda) \neq \{0\}$.

Из сказанного выше следует, что в случае $\mathbb{R} \subseteq \sigma(T_m)$ должны найтись такое число $k = 1, 2, \dots$ и такой непустой интервал (α, β) , что функция $\mu_{m,k}$ тождественно обращается в нуль на (α, β) . Согласно лемме 2.1 это означает, что все собственные значения из интервала (α, β) нейтральны. Однако последнее невозможно, поскольку отвечающие различным вещественным собственным значениям собственные функции пучка T_m ортогональны в метрике $-\langle T'_m \cdot | \cdot \rangle$, имеющей конечный индекс инерции. Тем самым для некоторого $\xi \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение $\ker T_m(\xi) = \{0\}$, означающее ограниченную обратимость оператора $T_m(\xi)$. Теорема доказана.

Для более детального описания $\sigma(T_m)$ удобно рассмотреть отдельно случаи $m \geq 0$ и $m < 0$.

1. Случай $m \geq 0$. Этот случай описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть фиксировано произвольное $m \geq 0$. Тогда $\sigma(T_m)$ чисто веществен и ограничен снизу. Все собственные значения пучка T_m полупросты, и кратность любого из них не более двух.*

При доказательстве теоремы 2.2 будет применяться следующая лемма.

ЛЕММА 2.3. *Пусть фиксировано произвольное $m \geq 0$. Тогда существует такое $\xi \in \mathbb{R}$, что при любом $\lambda < \xi$ справедливо неравенство $\mu_{m,1}(\lambda) > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равномерной положительности определенной при доказательстве теоремы 2.1 квадратичной формы $\langle P \cdot | \cdot \rangle$, а также из компактности оператора $T_m(0) - P$ и отрицательности квадратичной формы $\langle T'_m \cdot | \cdot \rangle$ следует, что найдется такое $\xi \in \mathbb{R}$, для которого при любом $\lambda < \xi$ квадратичная форма $\langle T_m(\lambda) \cdot | \cdot \rangle$ будет положительна. Из этого факта и из леммы 2.2 немедленно вытекает утверждение доказываемой леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Из отрицательности квадратичной формы $\langle T'_m \cdot | \cdot \rangle$ следует, что для любой собственной пары $\{\lambda, y\}$ пучка T_m справедливо соотношение

$$\lambda = -\frac{\langle T_m(0)y | y \rangle}{\langle T'_m y | y \rangle} \in \mathbb{R}.$$

Тем самым $\sigma(T_m)$ веществен. Его полуограниченность автоматически вытекает из леммы 2.3.

Далее, пусть $\lambda \in \sigma(T_m)$ и $\xi \in \mathbb{R} \setminus \sigma(T_m)$. Обозначим через $\mathcal{S}_\lambda$ корневое подпространство оператора $T_m^{-1}(\xi) T'_m$, отвечающее собственному значению $1/(\xi - \lambda)$. Сужение оператора $T_m^{-1}(\xi) T'_m$ на $\mathcal{S}_\lambda$ представляет собой оператор, симметрический в положительно определенной метрике $-\langle T'_m \cdot | \cdot \rangle$. Это означает, что собственное значение $1/(\xi - \lambda) \in \sigma(T_m^{-1}(\xi) T'_m)$, а тем самым и собственное значение $\lambda \in \sigma(T_m)$, полупросто.

Наконец, если бы пучок T_m обладал собственным значением λ геометрической кратности 3, то начальная задача

$$\begin{aligned} [(py'')' - qy']' &= \lambda ry, \\ y(0) &= y'(0) = 0 \end{aligned}$$

имела бы три линейно независимых решения, что невозможно. Тем самым теорема доказана.

2. Случай $m < 0$. Этот случай более сложен, чем предыдущий. Здесь справедливы следующие два утверждения.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть фиксировано произвольное $m < 0$. Тогда:

1) если $\sigma(T_m)$ не чисто веществен, то он состоит из пары взаимно сопряженных простых невещественных собственных значений и из ограниченной снизу последовательности вещественных собственных значений положительного типа; все собственные значения положительного типа полупросты и кратность любого из них не более двух;

2) если $\sigma(T_m)$ чисто веществен, то он состоит из одного собственного значения неположительного типа и ограниченной снизу последовательности собственных значений положительного типа; все собственные значения положительного типа полупросты и кратность любого из них не более двух.

ТЕОРЕМА 2.4. Существует такое $\varepsilon > 0$, что при любом $m \in (-\varepsilon, 0)$ спектр пучка T_m чисто веществен, причем его наименьшее собственное значение просто и имеет отрицательный тип, а прочие собственные значения имеют положительный тип.

При доказательстве теорем 2.3 и 2.4 будут применяться следующие леммы.

ЛЕММА 2.4. Пусть фиксировано произвольное $m < 0$. Тогда существует такое $\xi \in \mathbb{R}$, что при любом $\lambda < \xi$ справедливы неравенства $\mu_{m,1}(\lambda) < 0$ и $\mu_{m,2}(\lambda) > 0$.

ЛЕММА 2.5. Пусть фиксированы произвольные $\lambda < 0$ и $k = 1, 2, \dots$. Тогда величина $\mu_{m,k}(\lambda)$ зависит от m непрерывным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.4. Фиксируем произвольную $y \in \mathcal{H}_2$, для которой справедливо неравенство $\langle T'_m y \mid y \rangle > 0$. Тогда при любом $\lambda < \xi_1$, где число ξ_1 определяется соотношением

$$\xi_1 = -\frac{\langle T_m(0)y \mid y \rangle}{\langle T'_m y \mid y \rangle},$$

будет справедливо неравенство $\langle T_m(\lambda)y \mid y \rangle < 0$. Согласно лемме 2.2 это означает, что при любом $\lambda < \xi_1$ справедливо неравенство $\mu_{m,1}(\lambda) < 0$.

Пусть теперь ξ_2 таково, что при любом $\lambda < \xi_2$ справедливо неравенство $\mu_{0,1}(\lambda) > 0$. Существование такого ξ_2 гарантировано леммой 2.3. Предположим, что при каком-либо $\lambda < \xi_2$ справедливо неравенство $\mu_{m,2}(\lambda) \leq 0$. Из леммы 2.2 следует, что для такого λ найдется ненулевая функция $y \in \mathcal{H}_2$, удовлетворяющая соотношениям $y(1) = 0$ и $\langle T_m(\lambda)y \mid y \rangle \leq 0$. Но в таком случае будет иметь место неравенство $\langle T_0(\lambda)y \mid y \rangle \leq 0$, противоречащее неравенству $\mu_{0,1}(\lambda) > 0$. Тем самым, при любом $\lambda < \xi_2$ справедливо неравенство $\mu_{m,2}(\lambda) > 0$.

Объединяя полученные результаты, убеждаемся в справедливости утверждения леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.5. Из тождества (1.1) следует, что найдется такое (зависящее от λ) число $C > 0$, что квадратичная форма

$$\langle (T_m(\lambda) - T_{m_1}(\lambda)) \cdot | \cdot \rangle + C|m - m_1| \langle | \cdot \rangle_{L_2[0,1]}$$

будет неотрицательна независимо от выбора $m, m_1 \in \mathbb{R}$. Из леммы 2.2 поэтому следует справедливость неравенства

$$|\mu_{m,k}(\lambda) - \mu_{m_1,k}(\lambda)| \leq C|m - m_1|,$$

означающего непрерывность зависимости величины $\mu_{m,k}(\lambda)$ от параметра m . Тем самым лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Отметим сразу, что полуограниченность вещественной части $\sigma(T_m)$ немедленно вытекает из леммы 2.4.

Фиксируем теперь произвольное $\xi \in \mathbb{R} \setminus \sigma(T_m)$. Оператор $T_m^{-1}(\xi) T'_m$ является симметрическим в индефинитной метрике $-\langle T'_m \cdot | \cdot \rangle$. Поэтому корневые подпространства $\mathcal{S}_{\lambda_1}$ и $\mathcal{S}_{\lambda_2}$, отвечающие собственным значениям $1/(\xi - \lambda_1)$ и $1/(\xi - \lambda_2)$ оператора $T_m^{-1}(\xi) T'_m$, ортогональны в метрике $-\langle T'_m \cdot | \cdot \rangle$, если $\lambda_2 \neq \bar{\lambda}_1$.

Поскольку индекс инерции квадратичной формы $-\langle T'_m \cdot | \cdot \rangle$ равен 1, то из сказанного выше следует невозможность существования двух невещественных $\lambda_1 \in \sigma(T_m)$ и $\lambda_2 \in \sigma(T_m)$, удовлетворяющих неравенству $\lambda_2 \neq \bar{\lambda}_1$. С другой стороны, если $\{\lambda, y\}$, где $\lambda \notin \mathbb{R}$, есть собственная пара пучка $T_m(\lambda)$, то оператор $T_m(\bar{\lambda})$ не имеет ограниченного обратного в силу легко проверяемого тождества

$$\langle T_m(\bar{\lambda})z | y \rangle = 0 \quad \forall z \in \mathcal{H}_2.$$

Положительность типа всех вещественных собственных значений в случае не чистой вещественности $\sigma(T_m)$ также следует из того факта, что индекс инерции квадратичной формы $-\langle T'_m \cdot | \cdot \rangle$ равен 1.

Предположим теперь, что $\sigma(T_m)$ чисто веществен. Предположим также, что все собственные значения пучка T_m имеют положительный тип. Фиксируем произвольное $\xi < \sigma(T_m)$, для которого $\mu_{m,1}(\xi) < 0$. Тогда согласно [7, теорема 1] найдется собственная пара $\{\lambda, y\}$ пучка T_m , для которой будет справедливо неравенство $\langle T_m(\xi)y | y \rangle < 0$. Следовательно, будет справедливо соотношение

$$\langle T'_m y | y \rangle = \frac{1}{\xi - \lambda} \langle T_m(\xi)y | y \rangle > 0,$$

противоречащее предположению о положительности типа всех собственных значений пучка T_m . С другой стороны, в силу отмеченных в начале доказательства фактов пучок T_m не может обладать двумя различными вещественными собственными значениями неположительного типа.

Полупростота и оценка кратности для собственных значений положительного типа устанавливаются так же, как при доказательстве теоремы 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. Фиксируем произвольное $\xi \in \mathbb{R}$, для которого квадратичная форма $\langle T_0(\xi) \cdot | \cdot \rangle$ положительна. Согласно лемме 2.2 при этом справедливо неравенство $\mu_{0,1}(\xi) > 0$. Тогда согласно лемме 2.5 существует $\varepsilon > 0$, для которого при любом $m \in (-\varepsilon, 0)$ справедливо неравенство $\mu_{m,1}(\xi) > 0$. Из лемм 2.1 и 2.4 теперь следует, что при любом $m \in (-\varepsilon, 0)$ левее точки ξ расположено по меньшей мере одно собственное значение пучка T_m .

Пусть теперь $\{\lambda, y\}$ – произвольная собственная пара пучка T_m , удовлетворяющая неравенству $\lambda < \xi$. Поскольку из неравенства $\mu_{m,1}(\xi) > 0$ вытекает положительность квадратичной формы $\langle T_m(\xi) \cdot | \cdot \rangle$, то справедливо соотношение

$$\langle T'_m y | y \rangle = \frac{1}{\xi - \lambda} \langle T_m(\xi) y | y \rangle > 0,$$

означающее, что λ – собственное значение отрицательного типа. Тогда согласно теореме 2.3 все отличные от λ собственные значения имеют положительный тип, а потому расположены правее точки ξ . Простота собственного значения отрицательного типа следует из того факта, что индекс инерции квадратичной формы $-\langle T'_m \cdot | \cdot \rangle$ равен 1. Тем самым теорема доказана.

3. *Случай $m < 0$ с дополнительными условиями.* При наложении на коэффициенты p, q и r дополнительных условий можно получить более детальное описание спектра пучка T_m при $m < 0$. В частности, справедливы следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 2.5. *Пусть наименьшее собственное значение пучка T_0 положительно. Тогда при любом $m < 0$ спектр пучка T_m состоит из одного простого отрицательного собственного значения отрицательного типа и последовательности положительных собственных значений положительного типа.*

ТЕОРЕМА 2.6. *Пусть наименьшее собственное значение пучка T_0 отрицательно, и пусть среди отвечающих этому собственному значению собственных функций имеется функция y , удовлетворяющая неравенству $y(1) \neq 0$. Тогда существует число $m_0 < 0$ со следующими свойствами:*

- 1) *если $m \in (m_0, 0)$, то $\sigma(T_m)$ чисто веществен, наименьшее собственное значение пучка T_m имеет отрицательный тип и является простым;*
- 2) *если $m = m_0$, то $\sigma(T_m)$ чисто веществен, наименьшее собственное значение пучка T_m нейтрально, причем имеет геометрическую кратность 1 и алгебраическую кратность 2;*
- 3) *если $m \in (m_0 - \varepsilon, m_0)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $\sigma(T_m)$ не чисто веществен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.5. Из теоремы 2.2 и лемм 2.1, 2.3 следует, что квадратичная форма $\langle T_0(0) \cdot | \cdot \rangle$ положительна. Поэтому для доказательства теоремы достаточно повторить рассуждения из доказательства теоремы 2.4, положив $\xi = 0$ и учитывая тот факт, что при любом $m \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $T_m(0) = T_0(0)$.

Доказательство теоремы 2.6 будет опираться на следующие две леммы.

ЛЕММА 2.6. Пусть фиксировано произвольное $\lambda < 0$. Тогда величина $\mu_{m,1}(\lambda)$ не возрастает при убывании параметра m .

ЛЕММА 2.7. Пусть фиксированы произвольные $\lambda, m \in \mathbb{R}$. Тогда имеет место неравенство $\mu_{m,2}(\lambda) \geq \mu_{0,1}(\lambda)$.

Эти леммы представляют собой несложные следствия тождества (1.1) и леммы 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.6. Шаг 1. Из теоремы 2.2 и лемм 2.1, 2.3, 2.4 следует, что при любом $m < 0$ функция $\mu_{m,1}$ отрицательна в окрестности точек $-\infty$ и 0. Однако, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2.4, устанавливаем, что при достаточно малом по абсолютной величине $m < 0$ максимальное значение функции $\mu_{m,1}$ на полуоси $(-\infty, 0)$ положительно.

С другой стороны, при $m \ll 0$ функция $\mu_{m,1}$ отрицательна на полуоси $(-\infty, 0)$. Действительно, фиксируем произвольную $y \in \mathcal{H}_2$, удовлетворяющую соотношениям $\langle T_m(0)y | y \rangle < 0$ и $y(1) \neq 0$. При $m \ll 0$ такая функция будет удовлетворять неравенству $\langle T'_m y | y \rangle > 0$. Следовательно, при любом $\lambda < 0$ будет справедливо неравенство $\langle T_m(\lambda)y | y \rangle < 0$, которое и означает отрицательность функции $\mu_{m,1}$.

Из лемм 2.5 и 2.6 теперь следует, что существует число $m_0 < 0$, для которого максимальное значение функции $\mu_{m_0,1}$ на полуоси $(-\infty, 0)$ равно нулю. При этом значение 0 достигается функцией $\mu_{m_0,1}$ в единственной точке полуоси $(-\infty, 0)$. Действительно, согласно лемме 2.1 любой нуль функции $\mu_{m_0,1}$ представляет собой нейтральное собственное значение пучка T_{m_0} , а согласно теореме 2.3 пучок T_{m_0} не может обладать более чем одним нейтральным собственным значением.

Шаг 2. Обозначим единственный нуль функции $\mu_{m_0,1}$ из полуоси $(-\infty, 0)$ через λ_{m_0} . Геометрическая кратность собственного значения $\lambda_{m_0} \in \sigma(T_{m_0})$ равна 1. Действительно, иначе было бы справедливо равенство $\mu_{m_0,2}(\lambda_{m_0}) = 0$, которое согласно лемме 2.7 влечет за собой неравенство $\mu_{0,1}(\lambda_{m_0}) \leq 0$. Из леммы 2.6 тогда следовала бы справедливость равенства $\mu_{0,1}(\lambda_{m_0}) = 0$, означающего, что λ_{m_0} — наименьшее собственное значение пучка T_0 . Но тогда, по условию теоремы, нашлась бы функция y со свойствами $\langle T_0(\lambda_{m_0})y | y \rangle = 0$ и $y(1) \neq 0$. Однако для такой функции из тождества (1.1) вытекает неравенство $\langle T_{m_0}(\lambda_{m_0})y | y \rangle < 0$, противоречащее равенству $\mu_{m_0,1}(\lambda_{m_0}) = 0$.

Шаг 3. Для всякой ненулевой функции $y \in \mathcal{H}_2$, удовлетворяющей равенству $y(1) = 0$, очевидно, справедливо неравенство $\langle T'_{m_0} y | y \rangle < 0$. Поэтому из результатов предыдущих шагов следует, что для любой ненулевой функции $y \in \ker T_{m_0}(\lambda_{m_0})$ справедливо неравенство $y(1) \neq 0$. Из тождества (1.1) теперь следует, что при любом $m > m_0$ квадратичная форма $\langle T_m(\lambda_{m_0}) \cdot | \cdot \rangle$ положительна. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2.4 при $\xi = \lambda_{m_0}$, убеждаемся в справедливости первого утверждения теоремы.

Для завершения доказательства фиксируем произвольную функцию $y \in \ker T_{m_0}(\lambda_{m_0})$ со свойством $y(1) \neq 0$. Тогда при любом $m < m_0$ имеет место неравенство $\langle T_m(\lambda_{m_0})y | y \rangle < 0$. Следовательно, найдется $\delta > 0$, для которого при любых $\lambda \in (\lambda_{m_0} - \delta, \lambda_{m_0} + \delta)$ и $m \in (m_0 - \delta, m_0)$ справедливы неравенства $\mu_{m,1}(\lambda) < 0 < \mu_{m,2}(\lambda)$. Тем самым, при $m \in (m_0 - \delta, m_0)$ интервал $(\lambda_{m_0} - \delta, \lambda_{m_0} + \delta)$ свободен от собственных значений пучка T_m . С другой стороны,

при любом $\xi \notin \sigma(T_{m_0})$ оператор $T_m^{-1}(\xi) T'_m$ зависит от m , изменяющегося в малой окрестности точки m_0 , непрерывным образом. Поэтому найдется такое $\varepsilon \in (0, \delta)$, что при $m \in (m_0 - \varepsilon, m_0)$ алгебраическая кратность части спектра пучка T_m , заключенной в комплексной δ -окрестности точки λ_{m_0} , равна алгебраической кратности собственного значения $\lambda_{m_0} \in \sigma(T_{m_0})$. Следовательно, при $m \in (m_0 - \varepsilon, m_0)$ спектр пучка T_m не является чисто вещественным. Из теоремы 2.3 теперь следует, что при $m \in (m_0 - \varepsilon, m_0)$ комплексная δ -окрестность точки λ_{m_0} содержит два простых собственных значения, и, тем самым, алгебраическая кратность собственного значения $\lambda_{m_0} \in \sigma(T_{m_0})$ равна двум. Теорема полностью доказана.

§ 3. Асимптотики собственных значений

1. *Асимптотики по номеру собственного значения.* Из результатов предыдущего параграфа следует, что, каково бы ни было $m \in \mathbb{R}$, найдется такое k_0 , что при $k > k_0$ функция $\mu_{m,k}$ имеет на $\mathbb{R}$ один нуль. Обозначим этот нуль через $\lambda_{m,k}$. Ясно, что последовательность

$$\lambda_{m,k_0+1} \leq \lambda_{m,k_0+2} \leq \dots$$

представляет собой занумерованную в порядке возрастания (с учетом кратности) последовательность всех собственных значений пучка T_m на полуоси $[\lambda_{m,k_0+1}, +\infty)$.

Главный член асимптотики таких собственных значений при больших k определяется следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3.1. *При $k \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика*

$$\lambda_{m,k} = \left(\frac{\pi k}{\alpha} \right)^4 + o(k^4), \quad \alpha = \int_0^1 \sqrt[4]{\frac{r}{p}} dx. \quad (3.1)$$

В случае достаточно гладких p , q и r асимптотика (3.1) следует из результатов работы [12]. Приведем независимое доказательство этой асимптотики для рассматриваемого более общего случая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Если p , q и r – многочлены, то асимптотика собственных значений пучка T_0 хорошо известна (см., например, [10, §4, п. 11]) и совпадает с (3.1). Поэтому в случае, когда p , q и r являются многочленами, индекс инерции квадратичной формы $\langle T_0(\lambda) \cdot | \cdot \rangle$ имеет при $\lambda \rightarrow +\infty$ асимптотическое представление

$$\sqrt[4]{\lambda} \left(\frac{\alpha}{\pi} + o(1) \right), \quad (3.2)$$

получаемое обращением асимптотики (3.1).

Зафиксируем теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Из теоремы Вейерштрасса следует, что для любых непрерывных функций $p > 0$, q и $r > 0$ найдутся многочлены $p^\pm$, $q^\pm$ и $r^\pm$ такие, что будут справедливы неравенства

$$0 < p^- \leq p \leq p^+, \quad q^- \leq q \leq q^+, \quad 0 < r^- \leq r \leq r^+, \quad (3.3)$$

$$\sqrt[4]{\frac{r}{p}} - \varepsilon < \sqrt[4]{\frac{r^-}{p^+}}, \quad \sqrt[4]{\frac{r^+}{p^-}} < \sqrt[4]{\frac{r}{p}} + \varepsilon.$$

При этом, как следует из (1.1), для любого $\lambda > 0$ квадратичная форма $\langle T_0(\lambda) \cdot | \cdot \rangle$ будет оцениваться сверху квадратичной формой

$$\langle T_0^+(\lambda)y | y \rangle = \int_0^1 p^+ |y''|^2 dx + \int_0^1 q^+ |y'|^2 dx - \int_0^1 \lambda r^- |y|^2 dx \quad \forall y \in \mathcal{H}_2.$$

Соответственно, снизу квадратичная форма $\langle T_0(\lambda) \cdot | \cdot \rangle$ будет оцениваться квадратичной формой

$$\langle T_0^-(\lambda)y | y \rangle = \int_0^1 p^- |y''|^2 dx + \int_0^1 q^- |y'|^2 dx - \int_0^1 \lambda r^+ |y|^2 dx \quad \forall y \in \mathcal{H}_2.$$

Применяя асимптотику (3.2) к квадратичным формам $\langle T_0^\pm(\lambda) \cdot | \cdot \rangle$, устанавливаем при помощи неравенств (3.3), что индекс инерции квадратичной формы $\langle T_0(\lambda) \cdot | \cdot \rangle$ при произвольных p , q и r асимптотически оценивается сверху величиной

$$\sqrt[4]{\lambda} \left(\frac{\alpha}{\pi} + \varepsilon \right)$$

и асимптотически оценивается снизу величиной

$$\sqrt[4]{\lambda} \left(\frac{\alpha}{\pi} - \varepsilon \right).$$

Ввиду произвольности выбора ε полученные оценки означают, что асимптотика (3.2) имеет место при произвольных p , q и r .

Поскольку индексы инерции квадратичных форм $\langle T_0(\lambda) \cdot | \cdot \rangle$ и $\langle T_m(\lambda) \cdot | \cdot \rangle$ различаются не более чем на 1, то тем самым асимптотика (3.2) справедлива и для индекса инерции квадратичной формы $\langle T_m(\lambda) \cdot | \cdot \rangle$. Вновь обращая асимптотику (3.2), убеждаемся в справедливости утверждения теоремы.

2. Асимптотики по физическому параметру. Изучим теперь вопрос о поведении собственных значений пучка T_m при $m \rightarrow 0$.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\{\lambda_0, y\}$ – собственная пара пучка T_0 , и пусть собственное значение λ_0 является простым. Тогда найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что при $|m| < \varepsilon$ существует и единственно собственное значение $\lambda_m \in \sigma(T_m)$ со свойством $|\lambda_m - \lambda_0| < \delta$. Кроме того, при $m \rightarrow 0$ будет справедлива асимптотика

$$\lambda_m = \lambda_0 + m \lambda_0 \frac{|y(1)|^2}{\langle T_0' y | y \rangle} + O(m^2). \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное вещественное число $\xi \notin \sigma(T_0)$. Ограниченный оператор $T_m^{-1}(\xi) T'_m$ аналитически зависит от параметра m , изменяющегося в достаточно малой окрестности точки 0. Применяя к этому оператору результаты из [13, гл. VII, § 1.5] и [13, гл. II, формула (2.32)], устанавливаем, что при достаточно малых m в окрестности точки λ_0 находится одно простое собственное значение пучка T_m , подчиняющееся асимптотике

$$\frac{1}{\xi - \lambda_m} = \frac{1}{\xi - \lambda_0} + m \operatorname{Sp}\{T_0^{-1}(\xi) \Delta(\xi T_0^{-1}(\xi) T'_0 - 1) Q\} + O(m^2), \quad (3.5)$$

где $\Delta: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_{-2}$ – оператор умножения на функцию $\delta(\cdot - 1)$, а Q – перестановочный с $T_0^{-1}(\xi) T'_0$ проектор на линейную оболочку вектора y .

Используя равенство

$$T_0^{-1}(\xi) T'_0 y = \frac{1}{\xi - \lambda_0} y$$

и тождество

$$\langle T'_0 T_0^{-1}(\xi) z \mid y \rangle = \langle z \mid T_0^{-1}(\xi) T'_0 y \rangle \quad \forall z \in \mathcal{H}_{-2},$$

нетрудно установить, что след из правой части формулы (3.5) равен

$$\frac{\lambda_0}{\xi - \lambda_0} \frac{\langle y(1) \delta(\cdot - 1) \mid T_0^{-1}(\xi) T'_0 y \rangle}{\langle T'_0 y \mid y \rangle} = \frac{\lambda_0}{(\xi - \lambda_0)^2} \frac{|y(1)|^2}{\langle T'_0 y \mid y \rangle}.$$

Отсюда и из асимптотики (3.5) получим асимптотику (3.4). Тем самым теорема доказана.

Далее, согласно теореме 2.4 при $m \nearrow 0$ пучок T_m обладает простым собственным значением отрицательного типа. Для такого собственного значения также можно выписать асимптотику по m .

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $m < 0$, и пусть $\lambda_m \in \sigma(T_m)$ – собственное значение отрицательного типа. Тогда при $m \nearrow 0$ справедлива асимптотика

$$\lambda_m = -\frac{p(1)r^3(1)}{4m^4} + o(m^{-4}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие обозначения:

$$\omega_0 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_1 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_3 = \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

$$\mu = \sqrt[4]{-\lambda}, \quad X(x) = \int_0^x \sqrt[4]{\frac{r}{p}} dt.$$

Если p , q и r – многочлены, то, как следует из теоремы [10, § 4, теорема 1], при $\lambda \rightarrow -\infty$ уравнение (0.1) обладает фундаментальной системой решений y_k вида

$$y_k^{(l)} = \left(\mu \omega_k \sqrt[4]{\frac{r}{p}} \right)^l e^{\mu \omega_k X} (1 + o(1)), \quad k, l = 0, 1, 2, 3. \quad (3.6)$$

Подставляя решения (3.6) в краевые условия (0.2), получаем (после несложных преобразований) уравнение

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{p(1)r^3(1)} \begin{vmatrix} [1] & [1] & [1] & [1] \\ \omega_0[1] & \omega_1[1] & \omega_2[1] & \omega_3[1] \\ \omega_0^2 e^{\mu\omega_0 X(1)}[1] & \omega_1^2 e^{\mu\omega_1 X(1)}[1] & \omega_2^2 e^{\mu\omega_2 X(1)}[1] & \omega_3^2 e^{\mu\omega_3 X(1)}[1] \\ \omega_0^3 e^{\mu\omega_0 X(1)}[1] & \omega_1^3 e^{\mu\omega_1 X(1)}[1] & \omega_2^3 e^{\mu\omega_2 X(1)}[1] & \omega_3^3 e^{\mu\omega_3 X(1)}[1] \end{vmatrix} \\ &= \mu t \begin{vmatrix} [1] & [1] & [1] & [1] \\ \omega_0[1] & \omega_1[1] & \omega_2[1] & \omega_3[1] \\ \omega_0^2 e^{\mu\omega_0 X(1)}[1] & \omega_1^2 e^{\mu\omega_1 X(1)}[1] & \omega_2^2 e^{\mu\omega_2 X(1)}[1] & \omega_3^2 e^{\mu\omega_3 X(1)}[1] \\ e^{\mu\omega_0 X(1)}[1] & e^{\mu\omega_1 X(1)}[1] & e^{\mu\omega_2 X(1)}[1] & e^{\mu\omega_3 X(1)}[1] \end{vmatrix}, \quad (3.7) \end{aligned}$$

при записи которого использовано обычное сокращение $[1] = 1 + o(1)$. После вычисления определителей уравнение (3.7) приводится к виду

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{p(1)r^3(1)} (\omega_1 - \omega_0) (\omega_3^3 \omega_2^2 - \omega_2^3 \omega_3^2) e^{\mu(\omega_2 + \omega_3)X(1)}[1] \\ &= \mu t (\omega_1 - \omega_0) (\omega_2^2 - \omega_3^2) e^{\mu(\omega_2 + \omega_3)X(1)}[1]. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения немедленно вытекает асимптотика

$$\sqrt[4]{-\lambda_m} = -\frac{\sqrt[4]{p(1)r^3(1)} \omega_2^2 \omega_3^2}{m(\omega_2 + \omega_3)} (1 + o(1)),$$

означающая справедливость утверждения теоремы в случае, когда p , q и r являются многочленами.

Обобщение утверждения теоремы на случай произвольных p , q и r производится при помощи теоремы Вейерштрасса, аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 3.1.

Список литературы

1. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968.
2. Тимошенко С. П. Прочность и колебания элементарных конструкций. М.: Наука, 1975.
3. Roseau F. Theory of vibration in mechanical systems. N.Y.: Springer-Verlag, 1983.
4. Walter J. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions // Math. Z. 1973. V. 133. P. 301–312.
5. Binding P. A., Brown P. J., Seddighi K. Sturm–Liouville problems with eigenparameter dependent boundary condition // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2). 1993. V. 37. P. 57–72.
6. Бен Амара Ж., Шкаликков А. А. Задача Штурма–Лиувилля с физическим и спектральным параметрами в граничном условии // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 2. С. 163–172.
7. Lancaster P., Shkalikov A., Qiang Ye. Strongly definitizable linear pencils in Hilbert space // Integr. Equat. Oper. Th. 1993. V. 17. P. 338–360.

8. *Владимиров А. А.* Оценки числа собственных значений самосопряженных оператор-функций // Матем. заметки. 2003. Т. 74. № 6. С. 839–848.
9. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. М.: Изд-во АН СССР, 1932.
10. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
11. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963.
12. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 140–166.
13. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

Faculté des Sciences de Bizerte, Tunisie
МГУ им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: jamel.benamara@yahoo.fr,
vladimi@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
28.10.2003