Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Бондал, Симплектический группоид треугольных билинейных форм и группа кос, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 4, 19–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/im495>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 08:11:00

УДК 514.7

А. И. Бондал

Симплектический группоид треугольных билинейных форм и группа кос

Строится симплектический группоид треугольных билинейных форм. Устанавливается его связь с пространством флагов. Изучаются индуцированная скобка Пуассона и центр соответствующего алгеброида Ли.

Библиография: 40 наименований.

Введение

Настоящая работа возникла как результат изучения открытой автором в 1995 г. скобки Пуассона P на пространстве $\mathcal{A}$ билинейных форм, имеющих верхнетреугольную матрицу с единицами на диагонали. Формы считаются заданными на n -мерном векторном пространстве V , определенном над полем k .

Несимметрические (некососимметрические) билинейные формы естественно возникают в теории триангулированных категорий как эйлеровы билинейные формы $\mathcal{X}$ на группе Гротендика K_0 . Если такая категория обладает полной исключительной последовательностью объектов [2], то ее форма Эйлера имеет верхнетреугольную матрицу с единицами на диагонали в базисе, ассоциированном с исключительной последовательностью.

Полная исключительная последовательность в категории не единственна: имеется действие группы кос Артина на множестве исключительных последовательностей (см. § 1). Интересно, что группа кос действует также на пространстве $\mathcal{A}$ (см. п. 2.1). Скобка Пуассона инвариантна относительно этого действия.

Мы строим симплектический группоид Γ с пространством объектов $\mathcal{A}$. Понятие симплектического группоида является квазиклассической версией $\mathbf{C}^*$ -алгебр [34], [39]. Симплектическая структура на пространстве $\mathcal{M}$ морфизмов группоида индуцирует скобку Пуассона P на $\mathcal{A}$ с помощью пуассоновой редукции, стандартной для теории симплектических группOIDов. Симплектические листы скобки Пуассона по существу являются орбитами группоида на его пространстве объектов. Общий лист определяется значениями нескольких функций Казимира, которые обобщают известный многочлен Маркова (см. пп. 2.2, 5.2).

Группоид Γ – это группоид линейных преобразований, сохраняющих предписанный вид матрицы билинейной формы (см. п. 3.2). Пространство $\mathcal{M}$ морфизмов группоида состоит из пар (B, A) невырожденных матриц, $A \in \mathcal{A}$ и $B^{-T}AB^{-1} \in \mathcal{A}$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-01-00468), Фондом поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96085) и INTAS-OPEN-2000-269. Исследования, описанные в настоящей работе, были выполнены при частичной поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF) № RM1-2405-MO-02.

Таким образом, $\mathcal{M}$ – (довольно искривленное) аффинное многообразие. Предложение 3.4 содержит явное описание слоев его алгеброида Ли посредством отождествления кокасательного расслоения к $\mathcal{A}$ с алгеброидом Ли. Это отождествление, скомбинированное с якорным отображением, позволяет получить вышеупомянутую скобку Пуассона P .

В п. 3.5 показано, что $\mathcal{A}$ (соответственно, $\mathcal{M}$) с точностью до некоторой конечной жесткости имеет естественное, не зависящее от координат описание в виде пространства модулей $\mathbf{GL}(V)$ -орбит пар (R, F) (соответственно, троек (R, F_1, F_2)), где R – билинейная форма на V , а F (соответственно, F_1, F_2) – флаг (флаги) в общем положении относительно R . Это описание помогает лучше понять многообразие $\mathcal{M}$. Мы покажем, что оно имеет две компоненты и что каждая компонента может быть представлена как конечное неразветвленное накрытие открытого подмногообразия в $\mathcal{A} \times \mathcal{F}$, где $\mathcal{A}$ – аффинное пространство, а $\mathcal{F}$ – многообразие флагов. Теорема 3.7 утверждает, что орбиты группоида находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с $\mathbf{GL}(V)$ -орбитами невырожденных некососимметрических форм на V .

В п. 3.7 описаны n уравнений, которым удовлетворяет любая матрица B , сохраняющая некоторую матрицу $A \in \mathcal{A}$ верхнетреугольной.

В §4 мы снабжаем многообразие $\mathcal{M}$ симплектической формой и доказываем, что она задает структуру симплектического группоида. Конструкция симплектической формы выглядит загадочно. Связь симплектического группоида с теорией групп Пуассона–Ли и тройками Манина будет описана в следующей работе автора (см. [5]).

В §5 изучаются скобка Пуассона и ее симплектические листы. В п. 5.1 мы получаем формулы для скобки Пуассона P , которая оказывается неоднородной квадратичной, а в п. 5.2 описываем алгебру функций Казимира.

Скобка Пуассона P может быть включена двумя различными способами в пуассонову пару. С одной стороны, она составляет пару с линейной скобкой на двойственном пространстве к алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$. С другой стороны, она может быть включена в пуассонову пару с линейной скобкой алгебры Ли $\mathfrak{sp}(n-1)$ для нечетного n или алгебры Ли группы симплектических операторов, сохраняющих фиксированный вектор, для четного n . Эти скобки линейны в одинаковых аффинных координатах, но с различными точками отсчета, которые соответствуют нулям скобки P .

Неприводимые компоненты орбит действия группоида на пространстве объектов являются симплектическими листами для P . В п. 5.5 мы даем описание разложения в неприводимые компоненты всех s -слоев группоида. В результате получаем описание симплектических листов в терминах классов $\mathbf{GL}(V)$ -эквивалентности билинейных форм. Коразмерность симплектического листа, содержащего данную билинейную форму, совпадает с размерностью стабилизатора формы в $\mathbf{GL}(V)$. Используя категорный подход, мы получаем явную формулу для стабилизатора билинейной формы с предписанным расщеплением в неразложимые формы (см. п. 5.6). Эта формула применяется для описания регулярного пласта скобки Пуассона, т. е. объединения симплектических листов максимальной размерности.

Мы доказываем также теорему 5.13 о том, что отображение, определенное функциями Казимира при ограничении на регулярный пласт, является субмерсией. Доказательство теоремы 5.13 основано на описании характеров группоида, которое

дается в приложении. Эта теорема применяется в § 6 для описания центра алгеброида Ли, что сводится к поиску полиномиально зависящих от коэффициентов A решений $C = C(A)$ матричного уравнения

$$C^T A + AC = 0.$$

Идея написать настоящую работу появилась в результате нахождения формулы для решения этого уравнения при $n = 3$ (см. пример 6.3). Ввиду отождествления алгеброида Ли с кокасательным расслоением элементы центра могут быть выражены в виде $\omega = \sum g_i df_i$, где f_i и g_i – функции Казимира (см. теорему 6.2).

Элементы группы кос интерпретируются как лагранжевы бисечения группоида. Будучи расширенной с помощью группы $\mathbb{Z}_2^n$, которая представляется постоянными бисечениями, группа кос гипотетически охватывает все полиномиальные (лагранжевы) бисечения группоида. Поскольку бисечения лагранжевы, возникает идея определить гамильтонианы кос. Для данной косы ее гамильтониан есть функция на $\mathcal{A}$, которая при поднятии на $\mathcal{M}$ определяет гамильтонов поток такой, что преобразование за единичное время отображает единичное сечение группоида в лагранжево бисечение, ассоциированное с косой.

В случае $n = 2$ гамильтонианы являются целыми кратными квадрата гиперболического арксинуса единственного наддиагонального элемента матрицы $\mathcal{A}$.

Используя бисечения из группы кос, мы показываем в приложении, что группа характеров группоида состоит из двух элементов.

Имеются несколько непосредственно связанных с основной темой настоящей работы вопросов, рассмотрение которых осталось за ее пределами. Во-первых, это обнаруженная автором связь симплектического группоида треугольных форм с группами Пуассона–Ли, которая будет рассмотрена в следующей публикации (см. [5]). Во-вторых, это скобка Пуассона, которая была посчитана М. Угаглия [32] на пространстве матриц Стокса, ассоциированных с мероморфными связностями специального вида на комплексной проективной прямой. Формула для этой скобки совпадает с формулой, приведенной в п. 5.1. Этот факт все еще ждет своего объяснения (ср. [40]). Интерес к такого рода связностям на проективной прямой обусловлен тем, что они позволяют строить локальные инварианты фробениусовых многообразий. Среди других не затронутых здесь тем – интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с упомянутыми выше пуассоновыми парами; алгебра Коно инфинитезимальных кос; сечения Вейерштрасса к слоению симплектическими листами; скобки Вейля–Петерссона на пространстве Тейхмюллера [17] и квантование.

Форму Эйлера можно рассматривать как численный инвариант триангулированной категории. Представленное исследование скобки Пуассона и симплектического группоида билинейных форм мотивировано желанием построить такие численные инварианты триангулированных категорий, которые бы не факторизовались через группу Гротендика и имели отношение к таким объектам, как, например, квантовые когомологии алгебраических многообразий (см. § 1). Предполагается, что квантование симплектического группоида будет способствовать построению естественного объекта, в котором принимал бы значения такой инвариант. В настоящей работе мы развиваем геометрическую интуицию и предлагаем твердое алгебраическое основание, которые могут помочь в достижении этой цели.

Статья изначально была приурочена к 70-летию А. И. Кострикина, моего научного руководителя в аспирантуре. Первый вариант (препринт IHES/2000) был представлен ему автором. С прискорбием вынужден сообщить, что Алексей Иванович Кострикин ушел из жизни. Я посвящаю эту работу его памяти.

Выражаю благодарность В. Фоку, Ю. И. Манину, А. Рослому и П. Шу за полезные обсуждения и М. Леенсону за помощь в компьютерных вычислениях. Особая благодарность Н. Дубовицкой за помощь в переводе этой работы на русский язык и С. Комарову и А. Коршунову за помощь при наборе. Эта работа была написана, когда автор находился в Институте Макса Планка в Бонне и Институте высших научных исследований в Париже. Оба института автор благодарит за гостеприимство.

§ 1. Триангулированные категории, зеркальная симметрия, квантовые когомологии

Здесь мы рассмотрим некоторые мотивационные идеи и перспективы, связанные с темой работы. Основная часть статьи построена логически не зависимо от материала этого параграфа.

1.1. Триангулированные категории, исключительные последовательности, группа Гротендика, действия группы кос. Важная часть исследований в гомологической алгебре посвящена изучению свойств триангулированных категорий. Введенные сначала Дж. Вердье [33] с целью поставить на твердую почву подход Гротендика к алгебраической геометрии, такие категории оказались платформой, объединяющей различные области математики. Причина этого кроется в том, что производные категории от абелевых категорий различной природы оказываются эквивалентны как триангулированные категории.

Мы рассматриваем k -линейные (k – поле) триангулированные категории $\mathcal{D}$ конечного типа, т. е. такие, что для любой пары объектов X, Y в $\mathcal{D}$

$$\dim_k \bigoplus_i \operatorname{Hom}^i(X, Y) < \infty.$$

Напомним, что последовательность $E_1, \dots, E_n$ объектов в триангулированной категории называется *исключительной последовательностью* [2], если все объекты исключительны, т. е.

$$\operatorname{Hom}(E_i, E_i) = k, \quad \operatorname{Hom}^j(E_i, E_i) = 0$$

для $j \neq 0$ и

$$\operatorname{Hom}^j(E_k, E_l) = 0$$

для любого j и любой пары (k, l) при $k > l$.

Исключительная последовательность называется *полной*, если она порождает триангулированную категорию, т. е. если минимальная строго полная триангулированная подкатегория, которая содержит все объекты последовательности, совпадает со всей категорией.

Пример триангулированной категории с полной исключительной последовательностью можно построить с помощью произвольной направленной (упорядоченной) алгебры A , при этом категорией является $\mathcal{D}(\operatorname{mod} A)$ – ограниченная производная категория (правых) модулей над A (см. [2]). Более общим

образом, любая триангулированная категория с полной исключительной последовательностью эквивалентна категории коомологий от категории скрученных комплексов над направленной DG-категорией [7] с конечным числом объектов.

Имеется естественное действие, построенное в [2], группы кос Артина на множестве классов изоморфизма исключительных последовательностей объектов триангулированной категории $\mathcal{D}$. Элементы группы кос действуют перестройками исключительных последовательностей. Важный инвариант триангулированной категории $\mathcal{D}$ – ее группа Гротендика $K_0(\mathcal{D})$. Это свободная абелева группа, порожденная объектами из $\mathcal{D}$ по модулю соотношений $[Y] = [X] + [Z]$, взятых по всем точным треугольникам $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$. Если $\mathcal{D}$ имеет полную исключительную последовательность, то $K_0(\mathcal{D}) = \mathbb{Z}^n$ и любая полная исключительная последовательность дает базис в группе Гротендика.

Группа Гротендика триангулированной категории конечного типа снабжена естественной целочисленной билинейной формой, которая называется *формой Эйлера* $\mathcal{X}$ и определяется по формуле

$$\mathcal{X}([X], [Y]) = \sum_i (-1)^i \dim \operatorname{Hom}(X, Y[i]),$$

где X, Y – объекты категории, а $[X], [Y]$ – соответствующие элементы K_0 .

Базис полной исключительной последовательности полуортонормален по отношению к $\mathcal{X}$, т. е. матрица $\mathcal{X}$ в этом базисе целочисленна и верхнетреугольна с единицами на диагонали.

Переход от триангулированной категории к ее группе Гротендика немедленно дает действие группы кос на полуортонормальных базисах, которое обсуждается в § 2. Оно индуцирует действие группы кос на пространстве $\mathcal{A}$ верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали.

В работе [3] было предложено соотнести гомологические свойства $\mathcal{D}$ численным характеристикам орбиты (под действием группы кос) матрицы формы Эйлера, вычисленной в полуортонормальных базисах. В работе [27] приводятся некоторые интересные вычисления примеров геометрического происхождения для случая, когда ранг K_0 равен 4.

Далее, в [2] было предложено рассматривать перестройки последовательностей как частный случай перестроек последовательностей допустимых подкатегорий. Строить действие в рамках триангулированных категорий позволяет существование сопряженных функторов к функторам вложений подкатегорий. Условия, при которых можно утверждать такое существование, были изучены в [6], где, кроме прочего, было введено понятие функтора Серра. В [14] П. Делинь доказал теорему, из которой следует, что действие группы кос может быть определено как действие моноида на категории последовательностей (подкатегорий) вместо действия на классах изоморфизмов последовательностей, как было определено в [2], [6].

В “численном” подходе настоящей работы вышеупомянутое “категорное” действие соответствует очевидному обобщению действия группы кос на блочные верхнетреугольные билинейные формы, или, другими словами, на полуортогональные разложения векторного пространства V .

Заметим также, что функтор Серра соответствует элементу Кокстера.

1.2. Зеркальная симметрия для многообразий с исключительными последовательностями. Кососимметризация $A \mapsto A - A^T$ отождествляет пространство $\mathcal{A}$ верхнетреугольных матриц, имеющих единицы на диагонали, с пространством кососимметрических билинейных форм. При этом отождествлении группа кос реализуется полиномиальными преобразованиями кососимметрических матриц. Аналогично при симметризации получаются пространство симметрических форм, имеющих 2 на диагонали, и их преобразования. Такое действие группы кос изучалось в теории функций с изолированной особенностью (см. [10]). При этом V – пространство исчезающих циклов, а (косо)симметрическая форма – это форма пересечения. Действие группы кос соответствует действию на множестве отмеченных базисов исчезающих циклов. Для изолированных особенностей не(косо)симметрической билинейной формой является форма Зейферта (см. [1], [16]).

Отсюда возникла следующая программа, предложенная автором более 10 лет назад. Должна существовать естественная триангулированная категория $\mathcal{D}_f$, связанная с изолированной особенностью f (или ее морсовской деформацией), такая, что ее группа Гротендика естественно отождествляется с группой исчезающих циклов особенности. Эта категория должна обладать полными исключительными последовательностями, которые соответствуют отмеченным базисам исчезающих циклов. Форма Зейферта должна соответствовать форме Эйлера на группе Гротендика $K_0(\mathcal{D}_f)$.

Пусть X – гладкое собственное алгебраическое многообразие. Рассмотрим ограниченную производную категорию $\mathcal{D}(X)$ когерентных пучков на X и предположим, что она имеет полную исключительную последовательность. Форма Эйлера для $\mathcal{D}(X)$ вычисляется по формуле Римана–Роха. Заметим, что действие группы кос на исключительных последовательностях (комплексов) когерентных пучков в высшей степени негеометрично: к примеру, ранги исключительных пучков изменяются при этом действии. В качестве попытки придать геометрический смысл действию группы кос в этой ситуации автор предлагал следующий подход: для заданного многообразия X с полным исключительным набором попытаться найти особенность f (возможно, не изолированную) такую, что категория $\mathcal{D}_f$ (подходящим образом определенная) эквивалентна $\mathcal{D}(X)$ как триангулированная категория. Это позволило бы интерпретировать действие группы кос преобразованиями Гурвица и локальными монодромиями для f . Автор также выдвинул идею, что зеркальная симметрия должна интерпретироваться как похожая эквивалентность для триангулированных категорий многообразий Калаби–Яо (КЯ). Однако зеркальная симметрия должна быть другим проявлением этого феномена, поскольку производные категории Калаби–Яо не содержат исключительных объектов.

В настоящее время эта программа приобрела более ясные очертания благодаря математическому осмыслению некоторых физических предсказаний.

Во-первых, предположение, известное как гомологическая зеркальная симметрия, было сформулировано М. Концевичем [22]. Напомним, что согласно этой гипотезе категория $\mathcal{D}(X)$ для КЯ-многообразия X должна быть эквивалентна гипотетической “категории Фукая”, которая должна строиться из двойственного КЯ-многообразия, рассматриваемого как *симплектическое* многообразие. С физической точки зрения объекты категории $\mathcal{D}(X)$ и “категории Фукая” многообра-

зия X суть граничные условия для открытых струн, распространяющихся в X для топологических соответственно A - и B -твистов суперконформных теорий поля.

Во-вторых, А. Капустин и Д. Орлов [18], следуя интуиции физиков, предложили включить в определение категорий, участвующих в зеркальной симметрии, так называемое $\mathcal{B}$ -поле. Это произвольный элемент $\mathcal{B} \in H^2(Y, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$, который допускает подъем в $H^2(Y, \mathbb{R})$. Пусть он представляется 2-формой B на Y . На “симплектической стороне” они предлагают рассмотреть A_∞ -категорию с объектами, состоящими из четверок (L, i, E, ∇) , где L – лагранжево подмногообразие в Y ; i – градуировка, т.е. поднятие L в пространство $\mathcal{L}X$ – расслоение на X со слоем, являющимся универсальным накрытием лагранжева грассманиана касательного пространства к X (такое расслоение может быть выбрано канонически для любого КЯ-многообразия); E – комплексное векторное расслоение на L ; ∇ – связность на E с кривизной $2\pi i \cdot \text{id}_E \otimes B|_L$. Параллельный перенос вдоль ∇ должен иметь собственные значения, равные по модулю единице. Морфизмы в этой категории, когда лагранжевы циклы пересекаются трансверсально, суть $\oplus \text{Hom}(E_x, E'_x)$, где сумма берется по всем точкам пересечения циклов. Композиции (включая высшие) морфизмов определяются путем подсчета с весами, которые учитывают $\mathcal{B}$ -поле, голономии ∇ вдоль границы псевдоголоморфных дисков с граничным условием таким, что дуги между отмеченными точками граничной окружности диска должны лежать на соответствующих лагранжевых циклах (см. [18]).

В этом контексте описанная выше программа может рассматриваться как аналог зеркальной симметрии для многообразий, обладающих исключительным набором. Слои f имеют смысл двойственного к X семейства. Категорию $\mathcal{D}_f$ необходимо представлять как “категорию типа Фукая” двойственного семейства. Отсюда можно сделать первоначальный вывод: симплектическая форма, геометрия лагранжевых циклов и некое $\mathcal{B}$ -поле существенны для построения категории $\mathcal{D}_f$.

Статьи [30], [31] можно рассматривать как отражение исследований, имеющих целью определить категорию $\mathcal{D}_f$. В теории особенностей функция f с изолированной особенностью изучается путем деформации в функцию с элементарными особенностями. П. Зайдель предлагает рассматривать точные расслоения Морса $f: E \rightarrow S$. В общих чертах, это точное симплектическое многообразие E с границей (вертикальной и горизонтальной), расслоенное над комплексной кривой S с границей, так что слои приобретают структуру симплектического многообразия вне конечного числа критических точек f морсовского типа с различными критическими значениями во внутренности S . Предполагается тривиализация f вдоль горизонтальной границы. Кроме того, фиксируются подходящие комплексные структуры вокруг критических точек (см. [30]).

Симплектическая форма определяет связность на расслоении Морса. Последняя позволяет определить исчезающий цикл, связанный с путем $c: [0, 1] \rightarrow S$, начинающимся в некритическом значении $c(0)$ и заканчивающимся в критическом значении $c(1)$. Цикл состоит из точек в E над $c(0)$, которые при параллельном переносе вдоль пути с помощью связности попадают в критическую точку над $c(1)$. В действительности этот исчезающий цикл является лагранжевой сферой $S^n \rightarrow E$ в слое над $c(0)$. Выбранные комплексные структуры позволяют снабдить цикл оснащением, которое состоит в выборе метрики на S^n . Оснащенная лагранжева

сфера в симплектическом многообразии определяет скручивание Дена, которое является симплектоморфизмом многообразия [30].

Рассмотрим петлю γ в S , которая идет вдоль пути c , затем вокруг критического значения $c(1)$ в положительном направлении, а потом назад к $c(0)$ вдоль обратного пути c^{opp} . Из симплектического варианта теории Пикара–Лефшеца следует, что параллельный перенос вдоль γ изотопен скручиванию Дена вдоль оснащенной лагранжевой сферы, которая исчезает вдоль c .

Пусть S – комплексный диск с некоторым числом фиксированных критических значений. Выберем систему простых путей c_i , которые попарно не пересекаются и связывают фиксированное не критическое значение на границе со всеми критическими значениями. Критические значения теперь упорядочены касательными направлениями путей в начальной точке. Пусть S_i – соответствующая последовательность (так называемый отмеченный базис) исчезающих циклов в слое над не критическим значением. Градуировки S_i можно подходящим образом зафиксировать, если выбрать относительный индекс Маслова [30].

Категория $\mathcal{D}_f$ может быть построена формально таким образом, чтобы S_i были полными исключительными последовательностями в $\mathcal{D}_f$. Действительно, согласно [7] после оснащения триангулированной категории DG-структурой, или, что эквивалентно, A_∞ -структурой, триангулированная категория, порожденная исключительной последовательностью, может быть реконструирована из полной подкатегории на объектах последовательности как 0-когомологии категории скрученных комплексов (в [7] рассматривались только DG-категории, однако случай A_∞ -структуры вряд ли сложнее).

Используя этот подход, мы получаем следующую конструкцию категории $\mathcal{D}_f$. Построим A_∞ -категорию на лагранжевых сферах. Для этого предположим, что все объекты S_i исключительны, $\text{Hom}(S_i, S_j) = 0$ при $i > j$, а при $i < j$ определим $\text{Hom}(S_i, S_j)$, дифференциал, композиции и высшие A_∞ -операции так же, как для “категории Фукая”. Если необходимо, добавим в конструкцию $\mathcal{B}$ -поле. Затем возьмем A_∞ -категорию скрученных комплексов над построенной A_∞ -категорией. Ее категория 0-когомологий и есть $\mathcal{D}_f$. Триангулированная структура получается из канонической предтриангулированной структуры на категории скрученных комплексов [7].

Было бы интересно получить более естественную конструкцию этой категории, которая бы подходила не только для морсовских особенностей.

Группа кос реализуется как группа классов отображений диска с n отмеченными точками. Следовательно, она естественным образом действует на отмеченных базисах лагранжевых циклов. Это действие соответствует действию на исключительных наборах.

ЗАМЕЧАНИЕ. Несмотря на то, что не ясно, как в общей ситуации строить зеркальное семейство, т. е. функцию f , для данного многообразия Фано X , обладающего полным исключительным набором, существует формальный способ построения связности на тривиальном расслоении над $H^{1,1}(X)$, которая гипотетически описывает вариацию структур Ходжа зеркального семейства. Данный способ основан на так называемых *малых квантовых когомологиях* многообразия X . Эта

гипотеза была высказана автором много лет назад и являлась реакцией на работу [12] о суперсимметричных теориях поля. Автор надеется посвятить этой гипотезе отдельную публикацию.

§ 2. Действие группы кос и инварианты

В этом параграфе мы построим действие группы кос на множестве базисов векторного пространства. Важнейшим свойством базисов, сохраняющимся при этом действии, является их полуортонормальность относительно фиксированной билинейной формы. Отсюда получается вложение группы кос в группу универсальных преобразований верхнетреугольных билинейных форм с единицами на диагонали.

Если мы зафиксируем полуортонормальный базис, указанное выше вложение будет индуцировать действие группы кос полиномиальными отображениями пространства верхнетреугольных матриц. Это действие не эффективно: центр группы кос действует тривиально.

Мы найдем полиномиальные инварианты такого действия. Это коэффициенты характеристических многочленов $A + \lambda A^T$, где A является верхнетреугольной матрицей размера $n \times n$ с единицами на диагонали. Для четных n существует аддитивный полуинвариант – пфаффиан кососимметризации A . Для $n = 3$ единственным инвариантом является полином Маркова $a^2 + b^2 + c^2 - abc$.

2.1. Полуортонормальные базисы и группа кос. Пусть V – векторное пространство размерности n над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики.

Зафиксируем билинейную форму A на V и выберем упорядоченный базис $(e_1, \dots, e_n)$ в V . Мы используем символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ для обозначения билинейной формы, матрицу формы в выбранном базисе будем обозначать той же буквой A . Так, для пары векторов $x, y \in V$ имеем

$$\langle x, y \rangle = (x, Ay), \quad (2.1)$$

где $(\cdot, \cdot)$ означает стандартное спаривание: $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Упорядоченный базис $(e_1, \dots, e_n)$ называется *полуортонормальным относительно билинейной формы*, если:

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &= 0 \quad \text{для } i > j, \\ \langle e_i, e_i \rangle &= 1 \quad \text{для всех } i. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Матрица A в таком базисе имеет верхнетреугольный вид с единицами на диагонали:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1\ n-1} & a_{1\ n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2\ n-1} & a_{2\ n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1\ n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Мы обозначаем пространство таких матриц через $\mathcal{A}$. Оно является аффинным пространством размерности $\frac{n(n-1)}{2}$ с координатами a_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$.

Рассмотрим следующее преобразование базиса:

$$\varphi_i: \begin{cases} e'_i = e_{i+1} - \langle e_i, e_{i+1} \rangle e_i, \\ e'_{i+1} = e_i, \\ e'_j = e_j \text{ для } j \neq i, i+1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Легко видеть, что если базис $(e_1, \dots, e_n)$ является полуортонормальным относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$, то таким же будет новый базис $(e'_1, \dots, e'_n)$.

Для вектора $v \in V$ введем R_v — оператор проектирования параллельно v на правый ортогонал $v^\perp = \{u \in V \mid \langle v, u \rangle = 0\}$:

$$\begin{aligned} R_v(u) &= u \text{ для } u \in v^\perp, \\ R_v(v) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Обозначим R_{e_i} через R_i . Тогда в (2.4) имеем $e'_i = R_i e_{i+1}$.

Теперь рассмотрим преобразование φ_i как преобразование на множестве полуортонормальных базисов. Оно обратимо по той причине, что обратное преобразование φ_i^{-1} легко записывается через базис $(e'_1, \dots, e'_n)$:

$$\varphi_i^{-1}: \begin{cases} e_i = e'_{i+1}, \\ e_{i+1} = e'_i - \langle e'_i, e'_{i+1} \rangle e'_{i+1}, \\ e_j = e'_j \text{ для } j \neq i, i+1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Фактически мы получаем действие группы *кос* на множестве полуортонормальных базисов.

Напомним стандартное определение группы *кос* $\mathbf{B}_n$ через образующие и соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_n &= \{\sigma_i, 1 \leq i \leq n-1 \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ для } |i-j| > 1, \\ &\quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ для } 1 \leq i \leq n-1\}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Соответствие $\sigma_i \mapsto \varphi_i$ может быть продолжено до действия группы кос автоморфизмами на множестве полуортонормальных базисов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$. Следующая схема описывает преобразования упорядоченных базисов для левой и правой частей равенства элементов группы кос:

Таким образом, соотношения группы кос вытекают из равенства

$$R_1R_2e_3 = R_{R_1e_2}R_1e_3. \quad (2.7)$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что пары (e_1, e_2) и (R_1e_2, e_1) порождают одно и то же двумерное подпространство L в V . Отсюда получаем два способа нахождения проекции $R_L e_3$ вектора e_3 параллельно L на правый ортогонал $L^\perp$ как композицию последовательных проекций. Используя эти два способа, получаем выражения для $R_L e_3$ с помощью правой и левой частей равенства (2.7). Для других соотношений группы кос доказательство аналогично.

Теперь рассмотрим матрицу $\sigma_i(A)$ преобразования (2.6). Она отличается от единичной матрицы одним диагональным блоком размера 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \langle e_i, e_{i+1} \rangle \end{pmatrix},$$

расположенным так, что $\langle e_i, e_{i+1} \rangle = -\langle e'_i, e'_{i+1} \rangle$ является элементом матрицы $\sigma_i(A)$ с номером $(i+1, i+1)$. Поскольку новый базис $(e'_1, \dots, e'_n)$ полуортонормален относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$, то матрица

$$A' = \sigma_i(A)^{-T} A \sigma_i(A)^{-1}$$

формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$, вычисленная в этом базисе, принадлежит $\mathcal{A}$. Здесь мы используем обозначение $C^{-T} := (C^T)^{-1}$, где C^T – транспонированная к C матрица.

Заметим, что наличие коэффициента $\langle e_i, e_{i+1} \rangle = a_{i, i+1}$ влечет зависимость $\sigma_i(A)$ от коэффициентов матрицы A . Точно так же каждому элементу группы кос можно поставить в соответствие матрицу преобразования полуортонормального базиса. Коэффициенты этой матрицы полиномиально зависят от коэффициентов

матрицы билинейной формы, вычисленной в этом базисе. Эта матрица полностью определяет преобразование.

Таким способом мы получаем представление группы кос Артина $\mathbf{B}_n$ универсальными преобразованиями верхнетреугольных билинейных форм, т.е. преобразованиями, сохраняющими форму (2.3) матрицы A . Однако из-за полиномиальной зависимости композиция преобразований не соответствует обычному произведению матриц (см. ниже).

Более строго, рассмотрим множество $\mathcal{B}_0(n)$ матриц $B = B(A)$ размера $n \times n$ с коэффициентами, являющимися многочленами от коэффициентов a_{ij} матрицы $A \in \mathcal{A}$ со свойством

$$A' = B^{-T}(A)AB^{-1}(A) \in \mathcal{A}. \quad (2.8)$$

Множество $\mathcal{B}_0(n)$ может быть естественным образом снабжено структурой полугруппы. Для $B(A), C(A) \in \mathcal{B}_0(n)$ мы определяем композицию:

$$B(A) \cdot C(A) = B(C^{-T}AC^{-1})C(A) \quad (2.9)$$

(в правой части равенства – обычное умножение матриц и обычная обратная матрица). Легко проверить, что композиция корректно определена и ассоциативна.

Обозначим через $\mathcal{B}(n)$ группу элементов $\mathcal{B}_0(n)$, имеющих двусторонний обратный элемент. Эту группу мы назовем *группой универсальных преобразований* верхнетреугольных билинейных форм. Полугруппы $\mathcal{B}_0(n)$ и $\mathcal{B}(n)$ естественным образом действуют полиномиальными преобразованиями на пространстве $\mathcal{A}$:

$$B(A) \cdot A := B^{-T}(A)AB^{-1}(A). \quad (2.10)$$

Из предложения 2.1 следует, что соответствие $\sigma_i \mapsto \sigma_i(A)$ может быть продолжено до гомоморфизма φ группы кос $\mathbf{B}_n$ на $\mathcal{B}(n)$:

$$\varphi: \mathbf{B}_n \rightarrow \mathcal{B}(n). \quad (2.11)$$

Теперь рассмотрим естественное полупрямое произведение $\mathbf{B}_n \times \mathbb{Z}_2^n$ группы кос на конечную группу $\mathbb{Z}_2^n$. Тогда гомоморфизм (2.11) может быть продолжен до гомоморфизма

$$\mathbf{B}_n \times \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathcal{B}(n) \quad (2.12)$$

приписыванием элементу из $\mathbb{Z}_2^n$ диагональной матрицы, имеющей на диагонали ± 1 . Можно показать (используя, например, результаты [24] или [10]), что (2.12) является мономорфизмом.

ГИПОТЕЗА 2.2. *Гомоморфизм в (2.12) является изоморфизмом.*

Автору известно, как это доказать только для $n \leq 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Индуцированное действие группы кос полиномиальными отображениями (2.10) на пространстве $\mathcal{A}$ изучалось в теории функций с изолированной особенностью (см. [10]). Похожее полиномиальное действие группы кос было ранее обнаружено Магнусом [24] в связи с теорией $\mathbf{SL}(2)$ -характеров (или характеров Фрике) свободной группы. Это действие не эффективно. Центр группы кос – элемент Кокстера $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n$ – представлен универсальными преобразованиями $B(A) = A^{-T}A$, которые на A действуют тривиально:

$$B(A) \cdot A = B(A)^{-T}AB(A)^{-1} = AA^{-T}AA^{-1}A^T = A.$$

Несмотря на то, что $\mathcal{A}$ может быть отождествлено (с помощью (косо)симметризации) с соответствующим пространством (косо)симметрических матриц, не существует способа восстановления билинейной верхнетреугольной формы из ее (косо)симметрического двойника, если не зафиксирован базис. В свете гипотезы, описывающей универсальные преобразования верхнетреугольных форм, представляется более естественным рассматривать действие группы кос скорее в контексте верхнетреугольных форм, чем (косо)симметрических.

2.2. Инварианты. Рассмотрим алгебру F полиномиальных функций на A , которые инвариантны относительно преобразований $A' = B^{-T}AB$, сохраняющих свойство матрицы A принадлежать $\mathcal{A}$. Заметим, что поскольку ограничения на B меняются, когда A варьируется, инварианты не являются таковыми относительно действия группы, а только относительно действия группоида (см. §3). Предположим, что мы имеем пару $(n \times n)$ -матриц (B, A) такую, что $A \in \mathcal{A}$ и $B^{-T}AB^{-1} \in \mathcal{A}$. Тогда

$$\det A = \det B^{-T}AB^{-1} = 1.$$

Отсюда

$$(\det B)^2 = 1.$$

Рассмотрим следующий характеристический многочлен для A :

$$f_A(\lambda) = \det(A + \lambda A^T) = \sum_{i=0}^n f_i(A) \lambda^i.$$

Здесь $f_i(A)$ – коэффициенты f_A – являются многочленами от элементов a_{ij} матрицы A .

Если, как и выше, $A \in \mathcal{A}$ и $A' = B^{-T}AB^{-1} \in \mathcal{A}$, то имеем

$$f_{A'}(\lambda) = \det(B^{-T}(A + \lambda A^T)B^{-1}) = \det B^{-2} \det(A + \lambda A^T) = f_A(\lambda),$$

т. е. коэффициенты $f_i(A)$ лежат в F .

Далее, многочлен $f_A(\lambda)$ является взаимным:

$$f_A\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \det\left(A + \frac{1}{\lambda}A^T\right) = \frac{1}{\lambda^n} \det(\lambda A + A^T) = \frac{1}{\lambda^n} \det(A + \lambda A^T) = \frac{1}{\lambda^n} f_A(\lambda).$$

Иными словами,

$$f_{n-i}(A) = f_i(A).$$

Поскольку к тому же $f_0(A) = \det A = 1$, то мы имеем $[\frac{n}{2}]$ инвариантов $f_1, \dots, f_{[\frac{n}{2}]}$, которые в действительности являются алгебраически не зависимыми многочленами от a_{ij} . Другими словами, алгебра F инвариантных многочленов свободна: $F = k[f_1, \dots, f_{[\frac{n}{2}]}]$ (см. п. 5.2).

Перечислим образующие инвариантные многочлены для малых значений n (так как они не всегда совпадают с f_i , мы обозначаем их $g_1, g_2, \dots$):

$$\begin{aligned} n=2, \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_1 = a^2; \\ n=3, \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_1 = a^2 + b^2 + c^2 - abc; \\ n=4, \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1 &= acdf - abd - def - ace - bcf + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2, \\ g_2 &= (af - be + cd)^2. \end{aligned}$$

Так, для $n = 3$ мы имеем многочлен Маркова $a^2 + b^2 + c^2 - abc$, многочлены для больших значений n могут рассматриваться как его обобщение. Проблема чисел Маркова (она пока не решена; см. [25], [11]) показывает глубину теоретико-числовых вопросов, связанных с целыми коэффициентами a_{ij} .

В примерах, приведенных выше, можно заметить, что для четного n среди инвариантов существует многочлен, который является квадратом некоторого многочлена. Объяснение этому следующее. Мы уже знаем, что $\det B = \pm 1$. Рассмотрим только те матрицы B , у которых $\det B = 1$. Тогда для четных n соответствующая алгебра инвариантов равна $\tilde{F} = F[\text{Pf}]$, где Pf – пфаффиан кососимметризации:

$$\text{Pf} = \text{Pf}(A - A^T).$$

Очевидно, что квадрат пфаффиана, равный $\det(A - A^T)$, принадлежит F .

Алгебры F и $\tilde{F}$ являются свободными коммутативными. Для F множество $\{f_1, \dots, f_{[\frac{n}{2}]}\}$ является множеством свободных образующих, для $\tilde{F}$ один из инвариантов f_i должен быть заменен пфаффианом.

Элементы F инвариантны при действии группы кос и ее расширения с помощью $\mathbb{Z}_2^n$. Пфаффиан является полуинвариантом с характером $\det B$. Далее мы построим скобку Пуассона на пространстве $\mathcal{A}$, которая инвариантна относительно действия группы кос. Ее симплектические листы общего положения являются совместными множествами уровня инвариантов из F для четного n и из $\tilde{F}$ для нечетного n .

§3. Алгебраический группоид Ли и его алгеброид Ли

Здесь мы введем основной объект изучения настоящей работы – алгебраический группоид Ли, который естественным образом связан с линейными преобразованиями верхнетреугольных билинейных форм. Интересным фактом является гладкость его пространства морфизмов. После того как будут явно описаны слои соответствующего алгеброида Ли (см. предложение 3.4), мы докажем гладкость группоида (см. п. 3.4).

Покажем в п. 3.5, что пространство $\mathcal{A}$ (соответственно, $\mathcal{M}$) можно интерпретировать, с точностью до некоторой конечной жесткости, как пространство модулей $\mathbf{GL}(V)$ -орбит пар (R, F) (соответственно, троек (R, F_1, F_2)), где R является билинейной формой на V , а F (соответственно, F_1, F_2) является флагом (флагами), находящимся в общем положении по отношению к R .

Необходимую жесткость обеспечивает полуортонормальный базис, согласующийся с данным флагом. Для фиксированной пары (R, F) существует 2^n таких базисов. Это описание помогает лучше понять строение многообразия $\mathcal{M}$. Покажем, что оно имеет две компоненты, каждая из которых может быть представлена как неразветвленное накрытие открытого подмногообразия в $\mathcal{A} \times \mathcal{F}$, где $\mathcal{A}$ – рассматриваемое аффинное пространство, а $\mathcal{F}$ – многообразие флагов. Теорема 3.7 утверждает, что орбиты группоида находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с $\mathbf{GL}(V)$ -орбитами невырожденных некосимметрических билинейных форм на V .

В п. 3.7 мы приведем n общих уравнений, которым удовлетворяет любая матрица B такая, что для некоторого $A \in \mathcal{A}$ пара (B, A) является морфизмом группоида.

3.1. Общие сведения об алгебраических группоидах. Напомним, что группоид – это категория, в которой все морфизмы являются изоморфизмами. Нас интересуют алгебраические группоиды, т.е. те, в которых объекты и морфизмы суть алгебраические схемы над полем k . Структура группоида должна быть согласована с алгебро-геометрической структурой.

Сформулируем это определение в других терминах.

Алгебраический группоид состоит из:

- i) пары схем: *схемы объектов* $\mathcal{A}$ и *схемы морфизмов* $\mathcal{M}$;
- ii) набора регулярных морфизмов схем: *отображения начала* $s: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$, *отображения конца* $t: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$, *единичного отображения* $e: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$;
- iii) *отображения умножения* $m: \mathcal{M}^{(2)} \rightarrow \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}^{(2)}$ определяется как расслоенный квадрат:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^{(2)} & \xrightarrow{p_2} & \mathcal{M} \\ \downarrow p_1 & & \downarrow s \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{t} & \mathcal{A} \end{array}$$

(здесь p_1 и p_2 – естественные проекции);

- iv) *отображения обращения* $i: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$.

Отображения s и t сопоставляют морфизму соответственно начальный или конечный объект. Отображение e сопоставляет объекту его тождественный морфизм. Расслоенный квадрат $\mathcal{M}^{(2)}$ параметризует пары компонентных морфизмов; m сопоставляет такой паре ее композицию. Отображение i сопоставляет морфизму обратный ему морфизм.

Эти отображения удовлетворяют следующим условиям:

- i) $s \cdot e = \text{id}_{\mathcal{A}}$, $t \cdot e = \text{id}_{\mathcal{A}}$, т.е. e является сечением по отношению и к отображению s , и к t ;
- ii) $m(x, es(x)) = m(et(x), x) = x$ для любого $x \in \mathcal{M}$, где $(x, es(x))$ и $(et(x), x)$ рассматриваются как точки $\mathcal{M}^{(2)}$;
- iii) $s \cdot m = s \cdot p_1$, $t \cdot m = t \cdot p_2$;
- iv) $m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$ для любых трех точек из $\mathcal{M}$ таких, что (x, y) и (y, z) принадлежат $\mathcal{M}^{(2)}$ (ассоциативный закон);
- v) $s \cdot i = t$, $t \cdot i = s$;
- vi) $m(x, i(x)) = et(x)$, $m(i(x), x) = es(x)$ для любого $x \in \mathcal{M}$.

Естественно представлять себе пространство морфизмов $\mathcal{M}$ группоида “действующим” на пространстве объектов $\mathcal{A}$ следующим образом: каждый морфизм $x \in \mathcal{M}$ сопоставляет элементу $s(x)$ элемент $t(x)$. *Орбитой* точки $a \in \mathcal{A}$ относительно этого действия является t -образ $s^{-1}(a)$. *Централизатор* точки $a \in \mathcal{A}$ в $\mathcal{M}$ является пересечением s - и t -слоев над A . Он имеет естественную структуру группы. Как и в случае обычного действия, эти группы (не канонически) изоморфны вдоль орбиты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Назовем алгебраический группоид *гладким*, или *группоидом Ли*, если обе схемы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$ являются гладкими алгебраическими многообразиями и оба отображения s и t являются субмерсиями, т.е. их дифференциалы индуцируют эпиморфизмы на касательные пространства в каждой точке $\mathcal{M}$.

Для группоидов Ли пространство $\mathcal{M}^{(2)}$, а также слои отображений s и t являются гладкими многообразиями. Отсюда следует, что орбиты действия $\mathcal{M}$ на $\mathcal{A}$ тоже гладкие.

3.2. Группоид верхнетреугольных билинейных форм. Группоид Γ , естественным образом связанный с билинейными формами типа (2.3), описывается следующим образом. Схема объектов $\mathcal{A}$, как и в п. 2.1, – это верхнетреугольные формы A с единицами на диагонали.

Схема морфизмов $\mathcal{M}$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{M} = \{(B, A) \mid B \in \mathbf{GL}(V), A \in \mathcal{A}, B^{-T}AB^{-1} \in \mathcal{A}\}. \quad (3.1)$$

Отображения начала и конца определяются соответственно формулами

$$\begin{aligned} s: (B, A) &\mapsto A, \\ t: (B, A) &\mapsto B^{-T}AB^{-1}. \end{aligned}$$

Единичный морфизм e и морфизм обращения i задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} e(A) &= (E, A), \\ i(B, A) &= (B^{-1}, B^{-T}AB^{-1}), \end{aligned}$$

где E – единичная матрица.

Наконец, умножение двух компонентных морфизмов (B, A) и $(C, B^{-T}AB^{-1})$ определяется по формуле

$$m((C, B^{-T}AB^{-1}), (B, A)) = (CB, A).$$

ТЕОРЕМА 3.2. *Пара $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ с отображениями s, t, e, m, i определяет гладкий алгебраический группоид.*

То, что пара $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ является алгебраическим группоидом, вполне понятно. Это в действительности является примером следующей общей конструкции.

Предположим, мы имеем пространство X с действием группы Ли G на нем. Зафиксируем подпространство Y в X . Группа G может не действовать на Y , так как элементы из G , вообще говоря, не сохраняют Y . Можно изменить это действие, взяв для элемента $y \in Y$ только те элементы $g \in G$, для которых $g \cdot y \in Y$. Существует очевидная частичная композиция на множестве таких пар (g, y) , которая определяет структуру группоида. В рассматриваемом случае $G = \mathbf{GL}(V)$, X – пространство билинейных форм, $Y = \mathcal{A}$.

Гладкость схемы $\mathcal{A}$ очевидна, остается доказать гладкость $\mathcal{M}$. Идея доказательства близка к идее доказательства гладкости групп Ли. Напомним, что, используя левые (или правые) сдвиги, гладкость группы Ли можно вывести из ее гладкости в единице. Касательное пространство группы Ли в единице является ее алгеброй Ли. Аналог алгебры Ли в теории группоидов – это алгеброид Ли.

3.3. Алгеброид Ли.

Прежде всего напомним определение алгеброида Ли. Для гладкого многообразия X обозначим T_X касательный пучок со стандартной структурой алгебры Ли на его локальных сечениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. *Алгеброид Ли над гладким многообразием X состоит из локально свободного пучка (векторного расслоения) $\mathfrak{g}$ над X с k -линейной структурой алгебры Ли на его локальных сечениях и $\mathcal{O}_X$ -морфизмом пучков $a: \mathfrak{g} \rightarrow T_X$, называемым *якорным отображением*, удовлетворяющим следующим условиям:*

- i) морфизм a коммутирует со структурами алгебры Ли на $\mathfrak{g}$ и T_X ;
- ii) для пары локальных сечений $Z, Y \in \mathcal{O}(U, \mathfrak{g})$, где U – открытое множество в X , и $f \in \mathcal{O}(U)$ выполнено равенство

$$[Z, fY] = f[Z, Y] + (a(Z) \cdot f)Y \quad (3.2)$$

(здесь $a(Z) \cdot f$ – производная Ли от f вдоль векторного поля $a(Z)$).

Если группоид $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ гладкий, то он определяет алгеброид Ли.

В качестве многообразия X – базы алгеброида – рассмотрим схему $\mathcal{A}$, которую можно отождествить с его образом в $\mathcal{M}$ при отображении e .

Определим $\mathfrak{g}$ как относительное касательное расслоение для отображения s , ограниченное с $\mathcal{M}$ на $\mathcal{A}$ (ядро отображения ds вдоль $\mathcal{A}$). Якорное отображение есть дифференциал dt морфизма конца t в применении к расслоению $\mathfrak{g}$.

Чтобы определить скобку Ли на сечениях, нам понадобится понятие правоинвариантного (левоинвариантного) векторного поля на группоиде Ли. Заметим, что

поскольку умножение элементов $\mathcal{M}$ определено лишь частично, то понятие, скажем, правой инвариантности применимо лишь к s -вертикальным векторным полям на $\mathcal{M}$, т. е. к тем, которые являются касательными к s -слоям. Любой элемент $x \in \mathcal{M}$ с помощью правого умножения $y \mapsto yx$ определяет гладкое отображение R_x из s -слоя над $t(x)$ в s -слой над $s(x)$.

Назовем s -вертикальное векторное поле на $\mathcal{M}$ *правоинвариантным*, если оно инвариантно по отношению к дифференциалам dR_x для всех $x \in \mathcal{M}$. Аналогично, t -вертикальное векторное поле на $\mathcal{M}$ назовем *левоинвариантным*, если оно инвариантно по отношению к dL_x для всех $x \in \mathcal{M}$, где L_x – отображение умножения слева $y \mapsto xy$ из t -слоя над $s(x)$ в t -слой над $t(x)$.

Теперь любое сечение g из $\mathfrak{g}$ над $\mathcal{A}$ может быть единственным образом продолжено до инвариантного справа s -вертикального поля $\tilde{g}$ на $\mathcal{M}$:

$$\tilde{g}(x) = dR_x(g(t(x))). \quad (3.3)$$

Таким образом, мы получаем отождествление (глобальных) сечений $\mathfrak{g}$ с (глобальными) правоинвариантными векторными полями на $\mathcal{M}$. Поскольку коммутатор правоинвариантных векторных полей является правоинвариантным, это отождествление определяет скобку Ли на сечениях $\mathfrak{g}$. Очевидно, эта скобка локальна, т. е. может быть определена на локальных сечениях. Выполнение аксиом группоида Ли влечет выполнение аксиом алгеброида Ли.

Для рассматриваемого в настоящей статье группоида дифференцированием выражения условия того, что $B^{-T}AB^{-1}$ принадлежит $\mathcal{A}$, получаем, что ядро ds в точке $(B, A) = (E, A)$ естественным образом отождествляется с пространством матриц:

$$\mathfrak{g}_A = \{g \in \text{End } V \mid Ag + g^T A \text{ строго верхнетреугольная}\}.$$

Касательное пространство T_A к $\mathcal{A}$ в каждой точке $A \in \mathcal{A}$ отождествляется с пространством строго верхнетреугольных матриц. Точно так же пространство Ω_A^1 дифференциальных 1-форм на $\mathcal{A}$ в каждой точке A отождествляется со строго нижнетреугольными матрицами. При этом отождествлении якорное отображение a преобразует элемент $g \in \mathfrak{g}_A$ следующим образом:

$$a: g \mapsto -(Ag + g^T A).$$

Следующее предложение утверждает, что расслоение $\mathfrak{g}$ над $\mathcal{A}$ со слоями $\mathfrak{g}_A$ над всеми точками $A \in \mathcal{A}$ является в действительности векторным расслоением. Предложение также содержит точное описание $\mathfrak{g}_A$ и изоморфизма $\mathfrak{g}_A \simeq \Omega_A^1$ (Ω_A^1 – это расслоение 1-форм на $\mathcal{A}$), составляющего существенную часть конструкции скобки Пуассона, которая будет рассмотрена в §5.

Введем систему обозначений: пусть p_- , p_+ , diag – проекторы в пространстве матриц, которые каждой матрице сопоставляют ее строго нижний треугольник, строго верхний треугольник и диагональ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Для верхнетреугольной матрицы A , имеющей единицы на диагонали, выполнены следующие утверждения:*

- i) $\mathfrak{g}_A$ имеет постоянный ранг, равный $\frac{n(n-1)}{2}$ (независимо от точки $A \in \mathcal{A}$);

ii) пусть форма $\omega \in \Omega_A^1$ представлена строго нижнетреугольной матрицей; тогда соответствие $\varphi: \omega \mapsto g$, где

$$g = p_-(\omega A) + \frac{1}{2} \text{diag}(\omega A - A\omega) - p_+(\omega^T A^T),$$

задает изоморфизм $\Omega_A^1 \simeq \mathfrak{g}_A$, обратный к которому имеет вид

$$\psi: g \mapsto \omega = p_-(gA^{-1});$$

iii) спаривание $\mathfrak{g}_A \otimes T_A \mapsto k$, задаваемое формулой

$$(g, \xi) = \text{Tr } gA^{-1}\xi,$$

где $g \in \mathfrak{g}_A$, $\xi \in T_A$, является невырожденным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g принадлежит $\mathfrak{g}_A$. Разложим матрицу gA^{-1} на составляющие:

$$gA^{-1} = \omega + \omega_+,$$

где ω – строго нижнетреугольная, а ω_+ – (не строго) верхнетреугольная матрицы, в частности

$$\omega = p_-(gA^{-1}).$$

Тогда

$$g = \omega A + C_0 + C_+, \quad (3.4)$$

где матрица C_0 диагональна, а C_+ – строго верхнетреугольная.

Далее получаем, что матрица

$$\begin{aligned} Ag + g^T A &= A(\omega A + C_0 + C_+) + (A^T \omega^T + C_0^T + C_+^T)A \\ &= (A\omega + A^T \omega^T + C_0^T + C_+^T)A + A(C_0 + C_+) \end{aligned} \quad (3.5)$$

является строго верхнетреугольной.

Обозначим $D = A\omega + A^T \omega^T + C_0^T + C_+^T$. Применяя проектор p_- к (3.5), получаем

$$p_-(DA) = 0.$$

Поскольку A является верхнетреугольной матрицей с единицами на диагонали, то $p_-(D) = 0$, т. е.

$$C_+^T = -p_-(A\omega + A^T \omega^T),$$

или, после транспонирования,

$$C_+ = -p_+(\omega A + \omega^T A^T).$$

Так как $p_-(D) = 0$, то $\text{diag } DA = \text{diag } D$. Применяя проектор diag к (3.5), получаем

$$\text{diag}(DA) + C_0 = \text{diag } D + C_0 = 0.$$

Следовательно, $\text{diag}(A\omega + A^T\omega^T) + 2C_0 = 0$. Таким образом,

$$C_0 = -\frac{1}{2} \text{diag}(A\omega + A^T\omega^T) = -\frac{1}{2} \text{diag}(A\omega + \omega A).$$

Далее, вычисляя p_- , p_+ и diag , из (3.4) получаем формулу

$$g = p_-(\omega A) + \frac{1}{2} \text{diag}(\omega A - A\omega) - p_+(\omega^T A^T).$$

Поскольку $\omega = p_-(gA^{-1})$, то $\varphi\psi$ является тождественным отображением на $\mathfrak{g}_A$. Однако φ является мономорфизмом, так как самые нижние ненулевые диагонали проекторов $p_-(\omega A)$ и ω (а также $\varphi(\omega)$) совпадают. Поэтому φ и ψ – взаимно обратные изоморфизмы.

Так как пространство строго нижнетреугольных матриц имеет размерность $\frac{n(n-1)}{2}$, эту же размерность имеет и векторное пространство $\mathfrak{g}_A$.

Поскольку отображение $\psi: g \mapsto \omega = p_-(gA^{-1})$ устанавливает изоморфизм $\mathfrak{g}_A$ и пространства строго нижнетреугольных матриц, то спаривание

$$\langle g, \xi \rangle = \text{Tr } gA^{-1}\xi = \text{Tr } \omega\xi,$$

где $\xi \in T_A$ является строго верхнетреугольной, невырождено. Предложение доказано.

Сечение $g(A)$ над $\mathcal{A}$ можно рассматривать как функцию на $\mathcal{A}$ со значениями в пространстве матриц. Тогда под $dg(A)$ мы подразумеваем матричную 1-форму на $\mathcal{A}$. Она может быть спарена с векторным полем ξ на $\mathcal{A}$, что дает новую матричнозначную функцию $\langle dg, \xi \rangle$ на $\mathcal{A}$ (которая необязательно является сечением $\mathfrak{g}$).

Мы используем эту систему обозначений, чтобы выписать формулу для скобки Ли в алгеброиде.

Если снова $g(A)$ – сечение $\mathfrak{g}$, то для $(B, A) \in \mathcal{M}$ по формуле (3.3) соответствующее правоинвариантное векторное поле $\tilde{g}$ имеет следующую матричную форму:

$$\tilde{g}(B, A) = (g(B^{-T}AB^{-1})B, 0).$$

Теперь возьмем коммутатор двух таких векторных полей, соответствующих сечениям $g_1(A)$ и $g_2(A)$, и, проводя непосредственные вычисления, получим формулу для скобки Ли:

$$[g_1(A), g_2(A)] = [g_2, g_1](A) + \langle dg_2, a(g_1) \rangle - \langle dg_1, a(g_2) \rangle.$$

Здесь в первом слагаемом справа стоит обычный коммутатор матричнозначных функций, в то время как в остальных слагаемых – описанное выше спаривание 1-форм с соответствующими якорными векторными полями.

3.4. Гладкость группоида. Теперь докажем теорему 3.2, в которой утверждается гладкость группоида.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Необходимо доказать гладкость $\mathcal{M}$ и эпиморфность дифференциалов ds и dt в каждой точке $x \in \mathcal{M}$. Пространство $\mathcal{M}$ является схемой пар (B, A) матриц размера $n \times n$, обладающих тем свойством, что и A , и $A' = B^{-T}AB^{-1}$ принадлежат $\mathcal{A}$. Свойство матриц принадлежать $\mathcal{A}$ задается $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнениями для коэффициентов матрицы. Таким образом, $\mathcal{M}$ является аффинной подсхемой аффинного пространства размерности $2n^2$, определяемой $n(n+1)$ уравнениями. Отсюда следует, что любая компонента $\mathcal{M}$ (даже после приведения) имеет размерность не менее $n(n-1)$.

Теперь возьмем любую точку $x \in \mathcal{M}$ и рассмотрим ядро линейного отображения $ds: T_x \rightarrow T_{s(x)}$. Напомним, что отображение умножения справа $R_x: x' \mapsto x' \cdot x$ является обратимым отображением из s -слоя над $t(x)$ в s -слой над $s(x)$. Таким образом, дифференциал dR_x в точке $et(x)$ является изоморфизмом между ядром отображения ds в $et(x)$ и ядром ds в x . Ядро ds в $A' = et(x)$ — это $g_{A'}$, слой алгеброида Ли над точкой $A' \in \mathcal{A}$. Согласно предложению 3.4 оно имеет размерность $\frac{n(n-1)}{2}$. Следовательно, такую же размерность имеет ядро ds в каждой точке $x \in \mathcal{M}$.

Образ ds является подпространством в касательном пространстве к $\mathcal{A}$ в $s(x)$, значит, он не может иметь размерность больше, чем $\frac{n(n-1)}{2}$. Поскольку было получено ограничение на размерность компонент $\mathcal{M}$, мы видим, что касательные пространства в каждой точке $\mathcal{M}$ имеют размерность $n(n-1)$, причем ds является эпиморфизмом. Поскольку те же соображения справедливы и для схемы, которая получается из $\mathcal{M}$ редуцированием, мы получаем, что $\mathcal{M}$ является приведенной и гладкой схемой.

Поскольку $t = s \cdot i$, имеем $dt = ds \cdot di$. Так как i обратимо, то обратимо и di , т.е. эпиморфность dt следует из эпиморфности ds . Это завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим в качестве A единичную матрицу E . Тогда s -слой над этой точкой параметризуется матрицами B такими, что $B^{-T}B^{-1} \in \mathcal{A}$. Учитывая, что $B^{-T}B^{-1}$ симметрична, получаем, что $B^{-T}B^{-1} = E$. Таким образом, s -слой над E совпадает с t -слоем и как группа изоморфен ортогональной группе $O(V)$.

Можно также рассмотреть больший группоид Γ_b с пространством объектов $\mathcal{A}_b$ — пространством верхнетреугольных матриц с ± 1 на диагонали — и пространством морфизмов $\mathcal{M}_b = \{(B, A), A \in \mathcal{A}_b, B^{-T}AB^{-1} \in \mathcal{A}_b\}$. Это также гладкий алгебраический группоид. Пространство $\mathcal{M}$ состоит из двух неприводимых компонент пространства $\mathcal{M}_b$.

3.5. Флаги и билинейные формы. Многообразия $\mathcal{M}$ и $\mathcal{A}$ тесно связаны с инвариантно определенными пространствами, являющимися пространствами модулей взаимных расположений билинейных форм и флагов в векторном пространстве V .

Рассмотрим пространство $\mathcal{A}'$, параметризующее $GL(V)$ -орбиты в многообразии пар (R, F) , где R — билинейная форма на V , а F — (полный) флаг в V в общем положении относительно R , т.е. такой, что R невырождена при ограничении на любое подпространство флага.

Точно так же рассмотрим пространство $\mathcal{M}'$, параметризующее $\mathbf{GL}(V)$ -орбиты в многообразии упорядоченных троек (R, F_1, F_2) , где R – билинейная форма, а (F_1, F_2) – пара флагов в общем положении относительно R .

Заметим, что не требуется, чтобы F_1 и F_2 находились в общем положении относительно друг друга. В частности, равенство $F_1 = F_2$ соответствует тождественному сечению.

Аналоги отображений начала и конца определяются проекциями:

$$s: (R, F_1, F_2) \longmapsto (R, F_1), \quad t: (R, F_1, F_2) \longmapsto (R, F_2).$$

Аналог отображения обращения меняет местами F_1 и F_2 в тройке.

Два элемента x и y из $\mathcal{M}'$ являются “компонруемыми”, если в соответствующих $\mathbf{GL}(V)$ -орбитах можно найти тройки (R, F_1, F_2) для x и (R', F'_1, F'_2) для y такие, что $R = R'$ и $F_1 = F'_2$. В этом случае желательно определить композицию $x \cdot y$ как $\mathbf{GL}(V)$ -орбиту тройки (R, F'_1, F_2) . К сожалению, эта композиция многозначна: из нее получается конечное множество $\mathbf{GL}(V)$ -орбит. Требуется зафиксировать необходимую жесткость, чтобы построить группоид Γ .

Пусть задана пара $(R, F) \in \mathcal{A}'$. Рассмотрим все базисы $\{e_i\}$ в V , удовлетворяющие свойствам:

- i) матрица формы R относительно базиса является верхнетреугольной с единицами на диагонали;
- ii) базис согласуется с флагом F , т. е. векторные подпространства F^i флага совпадают с координатными подпространствами:

$$F^i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle. \quad (3.6)$$

Легко видеть, что существуют 2^n таких базисов. Они составляют орбиту группы $\mathbb{Z}_2^n$, действующей переменной знаков базисных векторов. Такой базис задает требуемую жесткость для пары (R, F) . Действительно, если базис зафиксирован, то матрица формы однозначно определяет соответствующую $\mathbf{GL}(V)$ -орбиту (R, F) .

Иными словами, если мы рассмотрим пространство $\tilde{\mathcal{A}}$, параметризующее $\mathbf{GL}(V)$ -орбиты троек $(R, F, \{e_i\})$, где $(R, F) \in \mathcal{A}'$, а $\{e_i\}$ – базис, согласующийся с парой (R, F) в смысле свойств i), ii), то, опуская соответственно F и $\{e_i\}$, мы получаем отображения забывания

$$\mathcal{A} \leftarrow \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}',$$

первое из которых является изоморфизмом, а второе – конечным (разветвленным) накрытием. Слои результирующего отображения $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ являются орбитами действия $\mathbb{Z}_2^n$ на $\mathcal{A}$, которое задается сопряжением с помощью диагональных матриц, имеющих на диагонали ± 1 . Отсюда следует, что для $n \geq 3$ пространство $\mathcal{A}'$ имеет орбифолдные особенности. Общий слой отображения $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ состоит из 2^{n-1} точек, поскольку $-E$ действует тривиально.

Точно так же существует сюръективное отображение $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$, которое переводит пару $(B, A) \in \mathcal{M}$ в $\mathbf{GL}(V)$ -орбиту тройки (R, F_1, F_2) , где R – билинейная форма на V с матрицей A относительно базиса $\{e_i\}$, первый флаг определяется

формулой (3.6), а второй флаг получается применением оператора B^{-1} к первому флагу:

$$F_2^i = \langle B^{-1}e_1, \dots, B^{-1}e_i \rangle. \quad (3.7)$$

Отображения $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$, $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ согласуются с отображениями начала, конца, единичного отображения и отображения обращения. В частности, коммутирование с отображением конца соответствует тому, что пары (A, F_2) и $(B^{-T}AB^{-1}, F_1)$ с флагами F_1 и F_2 , определенными формулами (3.6) и (3.7), лежат в одной $\mathbf{GL}(V)$ -орбите.

Многообразие $\mathcal{M}'$ является фактором $\mathcal{M}$ по действию группы $\mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n$ на пары (B, A) . Элемент $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n$ действует соответствующими диагональными матрицами Q_α и Q_β , имеющими на диагонали ± 1 , следующим образом:

$$(\alpha, \beta): (B, A) \mapsto (Q_\beta B Q_\alpha, Q_\alpha A Q_\alpha). \quad (3.8)$$

Общий слой этого действия имеет 2^{2n-1} точек: пара $(Q_\alpha, Q_\beta) = (-E, -E)$ действует тривиально.

Далее, рассмотрим промежуточное пространство $\mathcal{M}_s$, состоящее из пар (A, F_2) , где $A \in \mathcal{A}$, а F_2 – флаг в V , находящийся в общем положении относительно билинейной формы, задаваемой матрицей A . Другими словами, $\mathcal{M}_s$ – это пространство $\mathbf{GL}(V)$ -орбит троек $(R, F_1, F_2) \in \mathcal{M}$ с фиксированной жесткостью первого флага F_1 .

Заметим, что $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_s$ определены для фиксированного базиса $(e_1, \dots, e_n)$, в отличие от $\mathcal{M}'$. Пространство $\mathcal{M}_s$ имеет то преимущество, что оно является открытым подпространством хорошо изученного гладкого многообразия:

$$\mathcal{M}_s \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{F},$$

где $\mathcal{A} = \mathbf{A}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ – аффинное пространство, а $\mathcal{F}$ – многообразие флагов.

Можно определить очевидные *отображения забывания жесткости*

$$\mathcal{M} \xrightarrow{p_s} \mathcal{M}_s \rightarrow \mathcal{M}'. \quad (3.9)$$

Первое отображение p_s переводит пару (B, A) в пару (A, F) с той же матрицей A и флагом F , определенным, как в (3.7). Второе отображение переводит (A, F) в $\mathbf{GL}(V)$ -орбиту тройки (A, F_1, F_2) , где флаг F_1 определен, как в (3.6), а F_2 – как в (3.7).

Отображение p_s является проекцией на фактор $\mathcal{M}$ по действию $\mathbb{Z}_2^n$. Для $\beta \in \mathbb{Z}_2^n$ это действие на (B, A) определяется следующим образом:

$$(B, A) \mapsto (Q_\beta B, A). \quad (3.10)$$

Поскольку действие свободно, то p_s является *неразветвленным* накрытием степени 2^n .

Теперь можно доказать следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. i) Многообразие $\mathcal{M}$ имеет только две компоненты:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= \{(B, A) \in \mathcal{M}, \det B = 1\}, \\ \mathcal{M}_2 &= \{(B, A) \in \mathcal{M}, \det B = -1\}.\end{aligned}$$

ii) Над общей точкой s -слой (а также t -слой) имеет две компоненты, определяемые его пересечением с $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3.10) $\mathbb{Z}_2^n$ действует на $\mathcal{M}$ вдоль s -слоев. Другими словами, мы имеем разложение морфизма s в коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{M} & \xrightarrow{p_s} & \mathcal{M}_s \\ & \searrow s & \swarrow s' \\ & \mathcal{A} & \end{array}$$

где отображение s' является проекцией $\mathcal{M}_s \subset \mathcal{A} \times \mathcal{F}$ на $\mathcal{A}$.

Напомним, что пространство $\mathcal{M}_s$ является открытой областью в $\mathcal{A} \times \mathcal{F}$. Следовательно, оно имеет только одну компоненту. Поскольку $p_s: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_s$ является неразветвленным накрытием, число компонент $\mathcal{M}$ не больше, чем число компонент прообраза любого (замкнутого) подмногообразия $\mathcal{M}_s$.

Возьмем $X = (s')^{-1}E$, где $E \in \mathcal{A}$ — единичная матрица. Известно, что $p_s^{-1}(X) = s^{-1}(E) = \mathbf{O}(V)$ — ортогональная группа, которая имеет две компоненты. Поэтому $\mathcal{M}$ имеет не более чем две компоненты. Эти компоненты различаются определителем $\det B = \pm 1$, что доказывает утверждение i) предложения.

Точно так же s' -слой над точкой $\mathcal{A}$ является открытым подмногообразием в $\mathcal{F}$ и потому неприводим. Снова ввиду того, что p_s — неразветвленное отображение, число компонент s -слоя над общей точкой схемы $\mathcal{A}$ не больше, чем над любой специальной точкой. Выбор E в качестве специальной точки завершает доказательство предложения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. При использовании тех же аргументов доказывается, что s -слой над общей точкой любого неприводимого подмногообразия в $\mathcal{A}$, содержащего E , имеет две компоненты. Ниже, в теореме 5.5, мы приведем полное описание компонент s -слоев.

Теперь рассмотрим другой экземпляр $\mathcal{M}_t$ многообразия $\mathcal{M}_s$, который по смыслу есть выбор жесткости второго флага, т. е. считаем, что базис $(e_1, \dots, e_n)$ согласуется со вторым флагом. Тогда мы имеем отображения забывания жесткости:

$$\mathcal{M} \xrightarrow{p_t} \mathcal{M}_t \rightarrow \mathcal{M}'. \quad (3.11)$$

Первое отображение p_t переводит пару (B, A) в пару $(B^{-T}AB^{-1}, F)$, где $F = BF_1$ и F_1 определяется по формуле (3.6). Второе отображение переводит пару (A, F) в $\mathbf{GL}(V)$ -орбиту тройки (A, F, F_1) , где флаг F_1 определен, как в (3.6).

Отображение p_t является проекцией на фактор $\mathcal{M}$ по действию $\mathbb{Z}_2^n$, причем $\alpha \in \mathbb{Z}_2^n$ действует на (B, A) следующим образом:

$$(B, A) \mapsto (B Q_\alpha, Q_\alpha A Q_\alpha).$$

Объединяя отображения из (3.9) и (3.11), получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M} & \\ \swarrow^{2^n:1} p_s & & \searrow^{2^n:1} p_t \\ \mathcal{M}_s & & \mathcal{M}_t \\ \searrow^{2^{n-1}:1} & & \swarrow^{2^{n-1}:1} \\ & \mathcal{M}' & \end{array}$$

где рядом со стрелками отмечены степени соответствующих отображений.

Расслоенное произведение $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_s \times \mathcal{M}_t$ над $\mathcal{M}'$ является фактором $\mathcal{M}$ по действию инволюции $(B, A) \mapsto (-B, A)$. Так как инволюция не имеет неподвижных точек, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ – гладкое. Оно имеет одну или две компоненты в зависимости от четности n . Это позволяет рассматривать $(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$ как гладкий алгебраический группоид $\widetilde{\Gamma}$.

Из следующей теоремы получаем описание орбит группоида Γ .

ТЕОРЕМА 3.7. *Орбиты группоида Γ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с $\mathbf{GL}(V)$ -орбитами невырожденных некососимметрических билинейных форм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению орбиты группоида Γ являются пересечением орбит группы $\mathbf{GL}(V)$, действующей на пространстве билинейных форм, с пространством $\mathcal{A}$. Следовательно, необходимо показать, что орбита невырожденной билинейной формы пересекает $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда форма R не является кососимметрической. Как мы уже видели, это эквивалентно существованию полного флага в общем положении относительно R . Если форма R кососимметрическая, то такого флага не существует: R вырождена на любом пространстве нечетной размерности.

Предположим, что все полные флаги вырождены относительно данной билинейной формы R . Если для некоторого i существует векторное подпространство в V размерности i в общем положении относительно R , то множество таких подпространств является открытым подмногообразием в грассманиане $G(i, V)$. Его прообраз при естественном эпиморфизме $\mathcal{F} \rightarrow G(i, V)$ – плотное открытое подмногообразие $\mathcal{F}_i$. Далее, если для любого i , $1 \leq i \leq n$, существует подпространство размерности i в общем положении относительно R , то, взяв пересечение $\mathcal{F}_i$ по всем i , мы увидим, что искомый флаг существует.

Таким образом, мы свели задачу к случаю, когда R вырождена на каждом подпространстве в V фиксированной размерности $i \leq n$.

Предположим, что i четно, $i = 2k$. Пусть U – произвольное подпространство в V размерности $i + 1 = 2k + 1$. Рассмотрим билинейную форму $\Lambda^{2k}A$, ограниченную на $\Lambda^{2k}U$. Любой вектор h из $\mathbb{P}(\Lambda^{2k}U)$ соответствует подпространству $U_h \subset U$ размерности $2k$: $h = \Lambda^{2k}U_h$. Тогда значение $\langle h, h \rangle_{\Lambda^i A}$ равно нулю, потому что (с точностью до константы) оно равно определителю формы A , ограниченной на U_h . Значит, $\Lambda^i A|_{\Lambda^i U}$ кососимметрична. Поскольку $\dim \Lambda^i U = 2k + 1$, то $\Lambda^i A|_{\Lambda^i U}$ вырождена. Следовательно, $A|_U$ вырождена. Отсюда $\text{rk } \Lambda^i A|_{\Lambda^i U} \leq 1$ (см., например, лемму 3.9 для $i = 1$). Однако так как $\Lambda^i A|_{\Lambda^i U}$ кососимметрична, то она равна нулю. Значит, $\text{rk } A|_U \leq i - 1$.

Следовательно, для любого подпространства $U \subset V$ размерности $i + 1$ ядро формы $A|_U$ по крайней мере двумерно. Отсюда выводим, что для любого подпространства $U' \subset V$ размерности $i + 2$ ограничение A на U' вырождено. По индукции получаем, что A вырождена на V .

Теперь предположим, что $i = 2k - 1$, т. е. нечетно. Опять рассмотрим подпространство $U \subset V$ размерности $i + 1$. Как и выше, получаем, что форма $\Lambda^i A|_{\Lambda^i U}$ кососимметрическая. Если $A|_U$ вырождена, то те же рассуждения, что и выше, позволяют нам сделать индуктивный шаг к $i = 2k + 1$.

Если $A|_U$ невырождена, то, используя тот факт, что (с точностью до детерминанта) $\Lambda^i U \xrightarrow{\sim} U^*$ и $\Lambda^i A = A^*$, получаем, что A кососимметрична на U . Поскольку $U \subset V$ – произвольное подпространство размерности $i + 1$, то матрица A кососимметрична.

3.6. Случай $n = 2$. В этом случае матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен выглядит следующим образом:

$$f_A(\lambda) = \det(A + \lambda A^T) = \lambda^2 + (2 - a^2)\lambda + 1.$$

Поэтому a^2 является единственным инвариантом.

Многообразие $\mathcal{M}$ состоит из двух компонент $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, как в предложении 3.5. Действие $\mathcal{M}_1$ на $\mathcal{A}$, очевидно, сохраняет пфаффиан $\text{Pf}(A - A^T) = a$. Поэтому $\mathcal{M}_1$ является групповой схемой над аффинной прямой $\mathcal{A}$.

Если $(B, A) \in \mathcal{M}_1$, то B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix},$$

где $\det B = ps - qr = 1$. Следовательно,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Условие “ $B^{-T}AB^{-1}$ принадлежит $\mathcal{A}$ ” записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} s^2 - asr + r^2 &= 1, \\ q^2 - apq + p^2 &= 1, \\ -sq + aqr - pr &= 0. \end{aligned}$$

Умножая третье уравнение на p , получаем

$$-psq + (apq - p^2)r = 0.$$

Подставляя в это уравнение $1 - qr$ вместо ps и $q^2 - 1$ вместо $apq - p^2$ (из второго уравнения), имеем

$$q + r = 0. \quad (3.13)$$

Заменив r на $-q$ в уравнениях, мы окончательно получаем, что (B, A) лежит в $\mathcal{M}_1$ тогда и только тогда, когда

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p - aq \end{pmatrix},$$

где a, p и q удовлетворяют соотношению

$$p^2 - apq + q^2 = 1.$$

Отсюда следует, что геометрически s -слой (равный t -слою) $\mathcal{M}_1$ над точкой A с параметром $a \neq \pm 2$ является аффинной коникой, в то время как над точками со значениями параметра $a = \pm 2$ он является парой параллельных прямых.

Многообразие флагов в этом случае равно $\mathbb{P}^1$. Отображение

$$\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_s \subset \mathcal{A} \times \mathcal{F} = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$$

можно записать в координатах

$$a = a, \quad \xi = \frac{p}{q},$$

где ξ – аффинная координата на $\mathbb{P}^1$.

3.7. Общие уравнения для матриц перехода. В этом пункте мы обобщим уравнение (3.13) на случай произвольного n .

Рассмотрим проекцию из пространства морфизмов $\mathcal{M}$ на $\mathbf{GL}(V)$, задаваемую отображением $(B, A) \mapsto B$. Мы опишем здесь образ этой проекции. Поскольку размерность $\mathcal{M}$ равна $n(n-1)$, а размерность $\mathbf{GL}(V)$ равна n^2 , то естественно ожидать, что образ $\mathcal{M}$ в $\mathbf{GL}(V)$ является подмногообразием коразмерности n , и это действительно так: он является (незамкнутым) подмногообразием с замыканием, определенным n независимыми уравнениями.

Приведем их точное описание. Для любого i , $1 \leq i \leq n$, рассмотрим разбиение матрицы оператора B в базисе $(e_1, \dots, e_n)$ на четыре блока:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} F_i & G_i \\ \hline - & - \\ \hline H_i & I_i \end{array} \right),$$

где G_i и H_i – квадратные матрицы размеров $(n-i) \times (n-i)$ и $i \times i$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Для любого $B \in \mathbf{GL}(V)$ такого, что существует матрица $A \in \mathcal{A}$ со свойством $A' = B^{-T}AB^{-1}$, и для любого i , $1 \leq i \leq n$, выполнено равенство

$$\det H_i = (-1)^{i(n-i)} \det G_i \det B^{-1}. \quad (3.14)$$

При доказательстве мы используем результат из линейной алгебры, который сформулируем в виде леммы.

Пусть Q – спаривание $\Lambda^i V \otimes \Lambda^{n-i} V \rightarrow \Lambda^n V$, задаваемое внешним произведением. Фиксированный базис $(e_1, \dots, e_n)$ в V порождает стандартные базисы в пространствах $\Lambda^k V$. В этих базисах матрица формы Q представлена полностью антисимметрическим тензором.

ЛЕММА 3.9. Для любого оператора $B \in \text{End } V$ выполнено тождество

$$(\Lambda^{n-i} B^T) Q \Lambda^i B = (\det B) Q. \quad (3.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тождество может быть записано следующим образом: для любых $u \in \Lambda^i V$, $u' \in \Lambda^{n-i} V$ имеем

$$\langle \Lambda^{n-i} B(u'), \Lambda^i B(u) \rangle_Q = \det B \langle u', u \rangle_Q.$$

Достаточно проверить это равенство для полностью разложимых u и u' . В этом случае оно, очевидно, вытекает из определения входящих величин (в частности, $\det B := \Lambda^n B$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.8. Рассмотрим две билинейные формы на V :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_A &= (x, Ay), \\ \langle x, y \rangle_{A'} &= (x, A'y). \end{aligned}$$

Равенство $B^{-T}A = A'B$ может быть интерпретировано как соотношение между оператором B и этими билинейными формами (см. (2.1)):

$$\langle B^{-1}x, y \rangle_A = \langle x, By \rangle_{A'}. \quad (3.16)$$

Пусть $x = e_n$ и $y = e_1$. Поскольку базис $(e_1, \dots, e_n)$ является полуортонормальным относительно обеих билинейных форм, из (2.2) следует, что при разложении $B^{-1}e_n = \sum \lambda_i e_i$ в левую часть (3.16) нетривиальный вклад даст только коэффициент λ_1 , который совпадает с $(1, n)$ -м элементом $\hat{b}_{1n}$ матрицы B^{-1} . Аналогично, в правую часть даст вклад элемент b_{n1} матрицы B . Следовательно, имеем

$$\hat{b}_{1n} = b_{n1}.$$

Поскольку $\hat{b}_{1n} = (-1)^{n-1} \det B^{-1} G_1$, $b_{n1} = H_1$, то для $i = 1$ равенство (3.14) доказано.

Далее, приведенные выше рассуждения можно обобщить на случай любого i . Для этого рассмотрим i -ю внешнюю степень $\Lambda^i V$ пространства V . Билинейные формы на пространстве V естественным образом индуцируют билинейные формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda^i A}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda^i A'}$ на пространстве $\Lambda^i V$. Из уравнения

$$(\Lambda^i B^{-T})(\Lambda^i A) = (\Lambda^i A')(\Lambda^i B)$$

мы получаем уравнение, аналогичное (3.16):

$$\langle \Lambda^i B^{-1}x, y \rangle_{\Lambda^i A} = \langle x, \Lambda^i B y \rangle_{\Lambda^i A'}.$$

Положив в этой формуле $x = e_{n-i+1} \wedge e_{n-i+2} \wedge \dots \wedge e_n$, $y = e_1 \wedge \dots \wedge e_i$, делаем вывод, что коэффициент $\Lambda^i B(x)$ при $e_{n-i+1} \wedge \dots \wedge e_n$ равен коэффициенту $\Lambda^i B^{-1}(y)$ при $e_1 \wedge \dots \wedge e_i$. Первый коэффициент является левой частью равенства (3.14). Между тем из (3.15) вытекает

$$\Lambda^i B^{-1} = \det B^{-1} Q^{-1} (\Lambda^{n-i} B)^T Q.$$

Легко видеть, что второй коэффициент является правой частью равенства (3.14).

§ 4. Симплектическая структура

В этом параграфе мы снабдим рассматриваемый группоид симплектической структурой, согласованной со структурой группоида, и проверим все необходимые свойства.

4.1. Общие сведения о симплектических группоидах. Напомним, что для любого группоида $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ существуют три естественных отображения m , p_1 , p_2 из пространства компонуемых пар $\mathcal{M}^{(2)}$ в $\mathcal{M}$ (см. п. 3.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Симплектический группоид* – это гладкий группоид, снабженный симплектической 2-формой $w \in \Omega^2 \mathcal{M}$ на многообразии морфизмов $\mathcal{M}$, которая удовлетворяет условию согласованности:

$$m^* w = p_1^* w + p_2^* w, \tag{4.1}$$

рассматриваемому как равенство 2-форм на $\mathcal{M}^{(2)}$.

Это понятие появилось в работе М. В. Карасева [19], затем оно было формализовано и развито А. Вайнштейном [34].

По-видимому, симплектические группоиды являются вполне удовлетворительным квазиклассическим аналогом $\mathbf{C}^*$ -алгебр (см. [37]–[39]), когда категория комплексных векторных пространств и линейных операторов заменяется “некатегорией” симплектических многообразий и канонических соответствий [35].

Из условия согласованности (4.1) вытекают замечательные свойства, связывающие w со структурными отображениями группоида. В частности, единичное отображение e осуществляет вложение $\mathcal{A}$ как лагранжева подмногообразия в $\mathcal{M}$. Размерность пространства морфизмов $\mathcal{M}$ симплектического группоида в два раза больше размерности пространства объектов $\mathcal{A}$.

Если рассматривать скобку Пуассона $\pi = w^{-1} \in H^0(\mathcal{M}, \Lambda^2 T_{\mathcal{M}})$, определяемую 2-формой w , как бивекторное поле на $\mathcal{M}$, то π имеет проекцию на $\mathcal{M}$ вдоль s и t (пуассонова редукция), т. е. образ дифференциала ds отображения s , примененного к π , не зависит от точки s -слоя (то же верно и для отображения t). Это определяет бивекторное поле $P \in H^0(\mathcal{A}, \Lambda^2 T_{\mathcal{A}})$. Оно, в свою очередь, тоже является скобкой Пуассона. Аналогичная скобка, построенная с помощью проекции вдоль t , отличается от P знаком.

Функции на $\mathcal{A}$, поднятые на $\mathcal{M}$ с помощью отображений s и t , определяют две подалгебры в алгебре функций на $\mathcal{M}$, которые коммутируют между собой относительно структуры Пуассона, индуцированной π . В действительности они являются взаимными аннуляторами (см. [13]).

4.2. Формулы для симплектической структуры. Рассмотрим форму Маурера–Картана $\mu = A^{-1}dA$ на $\mathcal{A}$ со значениями в $\text{End } E$, E является тривиальным векторным расслоением над $\mathcal{A}$ со слоем V , где V – исходное векторное пространство. Поскольку V снабжено базисом $(e_1, \dots, e_n)$, то μ является матричной 1-формой. Рассматривая ее обратный образ по отношению к отображению t , мы получаем следующую форму на M :

$$\begin{aligned} t^*\mu &= BA^{-1}B^T d(B^{-T}AB^{-1}) \\ &= -dB B^{-1} + BA^{-1}dA B^{-1} - BA^{-1}dB^T B^{-T}AB^{-1}. \end{aligned}$$

Обозначим через α, β, γ слагаемые в этом выражении:

$$\begin{aligned} \alpha &= dB B^{-1}, \\ \beta &= -BA^{-1}dA B^{-1}, \\ \gamma &= BA^{-1}dB^T B^{-T}AB^{-1}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Прямым вычислением получаем

$$\begin{aligned} d\alpha &= \alpha^2, \\ d\beta &= \beta^2 + \alpha\beta + \beta\alpha, \\ d\gamma &= \gamma^2 + \alpha\gamma + \gamma\alpha + \gamma\beta + \beta\gamma. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Заметим, что правые части равенств могут быть записаны как суперкоммутаторы (в супералгебре Ли матричнозначных косых форм).

Мы строим форму w на $\mathcal{M}$ как след квадратичной комбинации от α, β и γ :

$$w = \text{Tr}(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma), \tag{4.4}$$

или, более явно,

$$w = \text{Tr}(-dB A^{-1}dA B^{-1} + dB A^{-1}dB^T B^{-T}AB^{-1} - dA A^{-1}dB^T B^{-T}), \tag{4.5}$$

где слагаемые в скобках рассматриваются как кососимметрические 2-формы с матричными коэффициентами; дифференциал d всегда применяется только к следующему за ним символу.

В случае $n = 2$ симплектическая форма на $\mathcal{M}_1$ в функциях p, q, a (как в п. 3.6) записывается следующим образом:

$$w = 2(pdq - qdp) \wedge da.$$

Для группоида Γ , рассмотренного в п. 3.2, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.2. *Форма w снабжает группоид Γ структурой симплектического группоида.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Соотношение (4.5) инвариантно при преобразованиях из (3.8). Поэтому пространства $\mathcal{M}_s$, $\mathcal{M}_t$ и $\mathcal{M}'$ (в гладких точках) снабжены симплектической структурой, индуцируемой w .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2. Непосредственным, хотя и трудоемким, вычислением, используя (4.5), можно проверить, что w согласуется со структурой группоида, т. е.

$$m^*w = p_1^*w + p_2^*w.$$

Заметим, что при этой проверке нет необходимости использовать ограничения на A и B . Иными словами, условие согласованности выполняется на большем группоиде пар (B, A) , где A – произвольная билинейная форма, B – произвольный линейный оператор в V . Однако на этом группоиде не выполнены условия замкнутости и невырожденности w : существенным является треугольный вид билинейных форм. Доказательству этих двух свойств будут посвящены оставшиеся два пункта этого параграфа.

4.3. Замкнутость. В следующих вычислениях мы используем формулы (4.3) и цикличность следа:

$$\begin{aligned} d \operatorname{Tr}(\alpha\beta) &= \operatorname{Tr}(d\alpha\beta - \alpha d\beta) = \operatorname{Tr}(-\alpha^2\beta - \alpha\beta^2), \\ d \operatorname{Tr}(\alpha\gamma) &= \operatorname{Tr}(d\alpha\gamma - \alpha d\gamma) = \operatorname{Tr}(-\alpha\gamma^2 - \alpha^2\gamma - \alpha\gamma\beta - \alpha\beta\gamma), \\ d \operatorname{Tr}(\beta\gamma) &= \operatorname{Tr}(d\beta\gamma - \beta d\gamma) = \operatorname{Tr}(-\beta\gamma^2 - \beta^2\gamma). \end{aligned}$$

Теперь, используя (4.4), получаем

$$dw = -\operatorname{Tr}(\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + \alpha\gamma^2 + \alpha^2\gamma + \beta\gamma^2 + \beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma + \alpha\gamma\beta).$$

Далее, так как μ – строго верхнетреугольная (как матрица 1-форм), то строго верхнетреугольной является и $t^*\mu$. Следовательно,

$$\operatorname{Tr} t^*\mu^3 = -\operatorname{Tr}(\alpha + \beta + \gamma)^3 = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(\alpha + \beta + \gamma)^3 &= \operatorname{Tr}(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + \alpha\gamma^2 + \alpha^2\gamma \\ &\quad + \beta\gamma^2 + \beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma + \alpha\gamma\beta)) \\ &= \operatorname{Tr}(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) - 3dw = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Покажем, что $\operatorname{Tr}(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) = 0$.

Действительно, $\mu = A^{-1}dA$ – строго верхнетреугольная, и согласно (4.2) матрица β сопряжена $-\mu$. Поэтому $\operatorname{Tr} \beta^3 = 0$. Более того, γ сопряжена $dB^T B^{-T}$. Следовательно,

$$\operatorname{Tr} \gamma^3 = \operatorname{Tr}(dB^T B^{-T})^3 = \operatorname{Tr}(B^{-T} dB^T)^3 = \operatorname{Tr}(\alpha^3)^T = -\operatorname{Tr} \alpha^3.$$

Здесь мы использовали формулу

$$\operatorname{Tr} \nu^T = (-1)^{\frac{\deg \nu (\deg \nu - 1)}{2}} \operatorname{Tr} \nu.$$

Из (4.6) следует, что w замкнута.

4.4. Невырожденность. Напомним, что замкнутые точки схемы $\mathcal{M}^{(2)} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ являются компонентными парами морфизмов, т. е. $\mathcal{M}^{(2)}$ состоит из пар $(y, x) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ таких, что $t(x) = s(y)$.

Далее, для гладких группоидов $\mathcal{M}^{(2)}$ тоже гладко. Касательное пространство в точке (y, x) описывается следующим образом:

$$T_{\mathcal{M}^{(2)}}(y, x) = \{(v, u) \mid u \in T_{\mathcal{M}}(x), v \in T_{\mathcal{M}}(y), dt(u) = ds(v)\}. \quad (4.7)$$

Сведем вопрос о невырожденности 2-формы w (согласованной со структурой группоида) к вопросу о невырожденности спаривания, получаемого ограничением w с многообразия $\mathcal{M}$ на $\mathcal{A}$. Более точно, речь идет о спаривании Θ в формуле (4.10), приведенной ниже.

В следующей лемме мы будем обозначать через w_x ограничение формы w в точке $x \in \mathcal{M}$.

ЛЕММА 4.4. *Пусть x – произвольная точка $\mathcal{M}$, v – касательный вектор в x и u – s -вертикальный касательный (к $\mathcal{M}$) вектор в $t(x)$. Тогда*

$$w_x(v, dR_x(u)) = w_{t(x)}(dt(v), u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точку $(t(x), x)$ в $\mathcal{M}^{(2)}$. Векторы $(dt(v), v)$ и $(u, 0)$ лежат в $T_{\mathcal{M}^{(2)}}(t(x), x)$. Спарим их с помощью 2-формы

$$m^*w = p_1^*w + p_2^*w.$$

Запишем левую часть данного равенства в следующем виде:

$$m^*w((dt(v), v), (u, 0)) = w(dm(dt(v), v), dm(u, 0)) = w_x(v, dR_x(u)),$$

поскольку, как легко заметить, $dm(dt(v), v) = v$, $dm(u, 0) = dR_x(u)$.

Теперь запишем правую часть:

$$p_1^*w((dt(v), v), (u, 0)) = w_{t(x)}(dt(v), u), \quad p_2^*w((dt(v), v), (u, 0)) = 0.$$

Объединяя это, получаем доказательство леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Формула (4.7) и утверждение леммы 4.4 (как и ее доказательство) справедливы для любого алгебраического группоида и 2-формы w , согласованной со структурой группоида.

Пусть $T_s(x)$ и $T_t(x)$ – подпространства в $T_{\mathcal{M}}$ соответственно s - и t -вертикальных касательных векторов в x . Если v принадлежит $T_t(x)$, т. е. $t_*v = 0$, то в силу леммы 4.4 имеем

$$w_x(v, dR_x(u)) = 0.$$

Поскольку dR_x задает изоморфизм $T_s(t(x))$ на $T_s(x)$, то $T_t(x)$ и $T_s(x)$ ортогональны относительно w . Таким образом, w индуцирует два спаривания:

$$(T_{\mathcal{M}}/T_t) \otimes T_s \longrightarrow k, \quad (4.8)$$

$$(T_{\mathcal{M}}/T_s) \otimes T_t \longrightarrow k. \quad (4.9)$$

Так как размерности T_t и T_s в два раза меньше размерности $T_{\mathcal{M}}$, то невырожденность w эквивалентна одновременной невырожденности этих двух спариваний. Однако из формулы леммы 4.4 следует, что оператор $dt \otimes (dR_x)^{-1}$, который отождествляет $(T_{\mathcal{M}}/T_t) \otimes T_s$ в точке x с пространством $T_{\mathcal{A}} \otimes T_s$ в точке $t(x)$, переводит форму (4.8) в форму

$$\Theta: T_{\mathcal{A}} \otimes T_s \longrightarrow k, \quad (4.10)$$

являющуюся ограничением w на $T_{\mathcal{A}}$ и T_s вдоль $\mathcal{A}$. Поскольку $t(x)$ лежит в образе единичного сечения $e: \mathcal{A} \longrightarrow M$, то $T_s = \mathfrak{g}$ является слоем алгеброида Ли над $t(x)$.

Аналогично, спаривание (4.9) приводит к спариванию

$$T_{\mathcal{A}} \otimes T_t \longrightarrow k,$$

которое с точностью до знака совпадает с Θ при отождествлении T_s и T_t посредством дифференциала отображения обращения i .

Таким образом мы свели задачу к доказательству невырожденности спаривания Θ .

Вернемся к рассматриваемому группоиду. Положим $B = 1$ в формуле (4.5):

$$w|_{\mathcal{A}} = \text{Tr}(-dB A^{-1} dA + dB A^{-1} dB^T A - dA A^{-1} dB^T).$$

Если мы потребуем, чтобы первый аргумент $w|_{\mathcal{A}}$ принадлежал T_s , а второй $-T_{\mathcal{A}}$, то получим формулу

$$\Theta = \text{Tr}(dA dB A^{-1} - dA A^{-1} dB^T),$$

где dB, dB^T принадлежат $\text{Hom}(T_s, \text{End } E)$, а dA принадлежит $\text{Hom}(T_{\mathcal{A}}, \text{End } E)$.

Мы знаем, что для вектора из $T_s = \mathfrak{g}$ матрица $A dB + dB^T A$ строго верхнетреугольна: это просто якорное отображение. Учитывая, что dA также верхнетреугольна, а A^{-1} верхнетреугольна с единицами на диагонали, получаем

$$0 = \text{Tr}(dA A^{-1}(A dB + dB^T A)A^{-1}) = \text{Tr}(dA dB A^{-1} + dA A^{-1} dB^T),$$

откуда имеем

$$\text{Tr}(dA dB A^{-1}) = -\text{Tr}(dA A^{-1} dB^T).$$

Следовательно,

$$\Theta = 2 \text{Tr}(dA dB A^{-1}).$$

Невырожденность этого спаривания была доказана в предложении 3.4. Теорема 4.2 доказана.

§ 5. Скобка Пуассона на $\mathcal{A}$

Мы уже упоминали, что для любого симплектического группоида существует каноническая скобка Пуассона на пространстве объектов. Несколько полезных формул для скобки Пуассона будут приведены в п. 5.1.

Выбирая подходящее сечение к (особому) слоению симплектическими листами, мы докажем, что алгебра функций Казимира (т.е. функций, постоянных на симплектических листах) является алгеброй инвариантов, построенной в п. 2.2.

Мы увидим, что скобка Пуассона линейно-квадратична в координатах a_{ij} . Раскладывая ее на линейную и квадратичную части: $P = P_1 + P_2$, получим пуассонову пару (т.е. $[P_1, P_1]_s = [P_2, P_2]_s = [P_1, P_2]_s = 0$, где $[\ , \]_s$ обозначает скобку Схоутена на поливекторных полях), причем линейная часть P_1 является стандартной скобкой в двойственном пространстве алгебры Ли $\mathfrak{so}_n$. Другими словами, любая линейная комбинация P_1 с P (или P_2) является скобкой Пуассона.

Иной способ включить P в пуассонову пару – сделать аффинное преобразование координат так, чтобы начало координат сместилось в другую точку, которая является нулем скобки Пуассона. Такие точки описаны далее, в п. 5.4. В результате мы получим линейное семейство, содержащее P и скобку Пуассона алгебры Ли $\mathfrak{sp}(n-1)$ в случае нечетного n или алгебры Ли $\mathfrak{sp}(n-2) \times (k^{n-2} \cdot k)$ в случае четного n . В последнем случае алгебра Ли – это полупрямое произведение $\mathfrak{sp}(n-2)$ и алгебры Ли, являющейся центральным расширением k с помощью коммутативной алгебры Ли k^{n-2} . Это расширение не является полупрямым и задается 2-коциклом, определяющим невырожденной кососимметрической билинейной формой на k^{n-2} .

Неприводимые компоненты орбит действия группоида на пространстве объектов являются симплектическими листами для P . Далее, в п. 5.5, мы дадим описание разложения на неприводимые компоненты всех s -слоев группоидов. В результате получим описание симплектических листов в терминах классов $\mathbf{GL}(V)$ -эквивалентности билинейных форм.

Коразмерность симплектического листа, который содержит данную билинейную форму, совпадает с размерностью стабилизатора формы в $\mathbf{GL}(V)$. Используя категорный подход, мы получим точную формулу для размерности стабилизатора билинейной формы с заданным представлением в виде суммы неразложимых форм (см. п. 5.6). Эта формула применяется для описания регулярного пласта скобки Пуассона, т.е. объединения симплектических листов максимальной размерности.

Мы также докажем теорему о том, что отображение, задаваемое функциями Казимира и ограниченное на регулярный пласт, является субмерсией. Доказательство этой теоремы основано на описании характеров группоида, приведенном в приложении. В следующем параграфе мы используем эту теорему для вычисления центра алгеброида Ли.

5.1. Формулы для скобки Пуассона. Как уже было замечено, скобка Пуассона P на пространстве объектов может быть задана проекцией на $\mathcal{A}$ вдоль s скобки Пуассона $\pi = \omega^{-1}$ на пространстве объектов $\mathcal{M}$, которая индуцирована симплектической формой ω . В действительности P может быть определена исключительно в терминах соответствующего алгеброида Ли $\mathfrak{g}$ и спаривания $\mathfrak{g}$ с $T_{\mathcal{A}}$, заданного симплектической структурой.

Рассмотрим $\mathcal{A}$ как подмногообразие $\mathcal{M}$, вложенное с помощью единичного отображения e . Заметим, что $T_{\mathcal{M}}|_{\mathcal{A}}$ – касательное расслоение на $\mathcal{M}$, ограниченное на $\mathcal{A}$, – имеет три естественных подрасслоения: $T_{\mathcal{A}}$ – касательное расслоение на $\mathcal{A}$, T_s – s -вертикальные поля и T_t – t -вертикальные поля. Мы отождествляем алгеброид Ли $\mathfrak{g}$ с T_s . Далее, имеем разложение $T_{\mathcal{M}}|_{\mathcal{A}} = \mathfrak{g} \oplus T_{\mathcal{A}}$. Поскольку $\mathcal{A}$ является лагранжевым многообразием, симплектическая форма равна нулю на $T_{\mathcal{A}}$. Следовательно, она задает невырожденное билинейное спаривание $\mathfrak{g} \otimes T_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, т.е. изоморфизм $\varphi: \Omega_{\mathcal{A}}^1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$. В композиции с якорным отображением $\mathfrak{g} \rightarrow T_{\mathcal{A}}$ оно дает указанную выше структуру Пуассона $P: \Omega_{\mathcal{A}}^1 \rightarrow T_{\mathcal{A}}$.

Таким образом, если рассматривать бивектор Пуассона P как 2-форму на $\Omega_{\mathcal{A}}^1$, то ее значение на паре $\mu, \nu \in \Omega_{\mathcal{A}}^1$ задается формулой

$$\langle \mu, \nu \rangle_P = \langle a\varphi(\mu), \nu \rangle. \quad (5.1)$$

Для рассматриваемого группоида спаривание $\mathfrak{g} \otimes T_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ и изоморфизм $\varphi: \Omega_{\mathcal{A}}^1 \rightarrow \mathfrak{g}$ те же, что и в предложении 3.4 (с точностью до умножения на 2). Напомним, что $\Omega_{\mathcal{A}}^1$ (в каждой точке $A \in \mathcal{A}$) отождествляется с пространством строго нижнетреугольных матриц с помощью спаривания Киллинга. Тогда для пары (Q_1, Q_2) строго нижнетреугольных матриц по формуле (5.1) получаем

$$\begin{aligned} \langle Q_1, Q_2 \rangle_P = \text{Tr} & \left[-p_+(Q_1 A) p_-(Q_2 A) - \frac{1}{2} \text{diag}(Q_1 A) \text{diag}(Q_2 A - A Q_2) \right. \\ & + p_-(Q_1 A) p_-(Q_2^T A^T) - p_-(A Q_1) p_+(A^T Q_2^T) \\ & \left. - \frac{1}{2} \text{diag}(A Q_1) \text{diag}(Q_2 A - A Q_2) + p_+(A Q_1) p_-(A Q_2) \right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Представим это выражение в сравнительно простом *кососимметрическом* виде. Выпишем очевидное тождество

$$\text{Tr}(A Q_1)(A Q_2) = \text{Tr}(Q_1 A)(Q_2 A).$$

Применяя к нему формулу

$$\text{Tr} XY = \text{Tr}(p_+ X p_- Y + p_- X p_+ Y + \text{diag} X \text{diag} Y),$$

находим

$$\begin{aligned} & \text{Tr} [p_+(A Q_1) p_-(A Q_2) + p_-(A Q_1) p_+(A Q_2) + \text{diag}(A Q_1) \text{diag}(A Q_2)] \\ & = \text{Tr} [p_+(Q_1 A) p_-(Q_2 A) + p_-(Q_1 A) p_+(Q_2 A) + \text{diag}(Q_1 A) \text{diag}(Q_2 A)]. \end{aligned}$$

Используя это соотношение, из формулы (5.2) получим кососимметрическую запись для скобки Пуассона:

$$\begin{aligned} \langle Q_1, Q_2 \rangle_P = \text{Tr} & \left[\frac{1}{2} p_+(A Q_1) p_-(A Q_2) - \frac{1}{2} p_+(Q_1 A) p_-(Q_2 A) \right. \\ & \left. + p_-(Q_1 A) p_-(Q_2^T A^T) + \frac{1}{2} \text{diag}(Q_1 A) \text{diag}(A Q_2) \right] - \text{perm}, \end{aligned}$$

где pern обозначает сумму членов, которая получается из выписанной части формулы перестановкой Q_1 и Q_2 .

Также удобно описать (а еще проще вычислить) скобку в координатах a_{ij} , $i < j$. При спаривании Киллинга дифференциал da_{ij} соответствует элементарной матрице E_{ji} . Тогда согласно предложению 3.4, ii) φ отображает его в матрицу

$$\varphi(da_{ij}) = \sum_{k < j} a_{ik} E_{jk} + \frac{1}{2} (a_{ij} E_{jj} - a_{ij} E_{ii}) - \sum_{i < k} a_{kj} E_{ik}.$$

Теперь, используя якорное отображение $a: g \mapsto -(Ag + g^T A)$, выводим формулу для P , которая в стандартных обозначениях для скобки Пуассона $\{a_{ij}, a_{kl}\}$, где $i < j$ и $k < l$, выглядит следующим образом:

$$\{a_{ij}, a_{kl}\} = \begin{cases} 0 & \text{для } j < k, \\ 0 & \text{для } k < i, \quad j < l, \\ a_{ik}a_{jl} - a_{kj}a_{il} & \text{для } i < k < j < l, \\ \frac{1}{2} a_{ij}a_{jl} - a_{il} & \text{для } j = k, \\ a_{jl} - \frac{1}{2} a_{ij}a_{il} & \text{для } i = k, \quad j < l, \\ a_{ik} - \frac{1}{2} a_{ij}a_{kj} & \text{для } j = l, \quad i < k, \end{cases} \quad (5.3)$$

остальные коммутаторы получаются из условия кососимметричности.

5.2. Функции Казимира. Напомним, что *функция Казимира* на многообразии Пуассона – это функция, принадлежащая центру пуассоновой алгебры Ли функций. Другими словами, это функция, которая постоянна на всех симплектических листах. Поскольку симплектические листы для P являются неприводимыми компонентами орбит группоид Γ , инварианты из п.2.2 – это функции Казимира для скобки Пуассона. В действительности они порождают всю алгебру полиномиальных функций Казимира для P .

Напомним, что в п. 2.2 мы ввели для нечетных n алгебру F , порожденную коэффициентами характеристического многочлена, и для четных n – алгебру $\tilde{F}$, являющуюся расширением F с помощью пфаффиана. Обе алгебры являются свободными.

ТЕОРЕМА 5.1. *Алгебра F для нечетного n и алгебра $\tilde{F}$ для четного n являются алгебрами функций Казимира для P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай четного n , $n = 2k$, и покажем, что любая функция Казимира принадлежит $\tilde{F}$. Случай нечетного n рассматривается аналогично.

Возьмем подпространство $\mathcal{H}$ в $\mathcal{A}$, элементы которого имеют блочную матричную форму:

$$A = \begin{pmatrix} E & D \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

размер всех блоков равен $k \times k$, E – единичная матрица, а D – диагональная матрица $(d_1, \dots, d_k)$.

Легко показать, что симплектические листы, которые пересекаются с $\mathcal{H}$, замещают плотное (в топологии Зариского) подмножество в $\mathcal{A}$. Следовательно, любая функция Казимира определяется своим ограничением на $\mathcal{H}$.

В группоиде имеются некоторые преобразования $A' = B^{-T}AB^{-1}$, сохраняющие $\mathcal{H}$. Во-первых, любое преобразование с диагональной матрицей B , у которой на диагонали стоят ± 1 , действует на $\mathcal{H}$, изменяя знаки d_i . Во-вторых, если B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} B_\sigma & 0 \\ 0 & B_\sigma \end{pmatrix},$$

где B_σ – мономиальная матрица перестановки $\sigma \in S_k$, то B также сохраняет $\mathcal{H}$, переставляя d_i . Следовательно, эти преобразования индуцируют действие $G = \mathbb{Z}_2^k \times S_k$ (полупрямое произведение) на $\mathcal{H}$. Полиномиальные инварианты на $\mathcal{H}$ относительно этого действия – это симметрические многочлены от d_i^2 .

Далее, вспомним, что согласно предложению 3.5 пространство морфизмов группоида имеет две неприводимые компоненты, отличающиеся значением $\det B = \pm 1$. Симплектический лист группоида – это образ при отображении конца t неприводимой компоненты s -слоя, которая содержит элемент вида (E, A) . Из замечания 3.6 вытекает, что для общей точки в $\mathcal{H}$ эта компонента является пересечением s -слоя с компонентой $\mathcal{M}_1 = \{\det B = 1\}$ группоида. Следовательно, ограничение функции Казимира с $\mathcal{A}$ на $\mathcal{H}$ инвариантно при действии подгруппы $G_1 = \mathbb{Z}_2^{k-1} \times S_k$ в G , являющейся ядром гомоморфизма $G \rightarrow \mathbb{Z}_2$, который задается определителем.

На пространстве G_1 -инвариантных функций естественным образом действует $\mathbb{Z}_2$ -фактор от G , что дает единственное разложение любой G_1 -инвариантной функции в сумму G -инвариантной функции и функции, на которую для любого i подстановка

$$d_i \mapsto -d_i, \quad d_j \mapsto d_j, \quad j \neq i, \quad (5.4)$$

действует как умножение на -1 . Последняя функция делится на произведение $d_1 \dots d_k$. Если мы ее разделим, то получим G -инвариантную функцию.

Таким образом, алгебра G_1 -инвариантных функций на $\mathcal{H}$ порождается $d_1 \dots d_k$ и симметрическими многочленами от d_i^2 .

Теперь, вычисляя характеристический многочлен для матрицы A из подпространства $\mathcal{H}$, получаем

$$\det(A + \lambda A^T) = \prod_{i=1}^k ((1 + \lambda)^2 - \lambda d_i^2).$$

Следовательно, ввиду основной теоремы о симметрических функциях ограничение на $\mathcal{H}$ коэффициентов характеристического многочлена порождает пространство симметрических многочленов от d_i^2 . С другой стороны, ограничение пфаффиана равно $d_1 \dots d_k$. Это завершает доказательство теоремы.

5.3. Пуассонова пара. Как показано в п. 3.4, точка $E \in \mathcal{A}$ с координатами $a_{ij} = 0$ является орбитой группоида, а слой $\mathcal{M}$ над E является ортогональной группой. Следовательно, слой $\mathfrak{g}_E$ алгеброида Ли над E имеет естественную структуру алгебры Ли $\mathfrak{so}_n$. Симплектическая форма отождествляет касательное пространство к $\mathcal{A}$ в точке E с $\mathfrak{g}_E^*$. Отождествление задается кососимметризацией dA . Это объясняет, почему линейная часть скобки Пуассона P является стандартной скобкой Ли на коприсоединенном представлении $\mathfrak{so}_n$.

Из формулы (5.3) видно, что скобка Пуассона P имеет только линейную и квадратичную части:

$$P = P_1 + P_2.$$

Поскольку P – скобка Пуассона, то она удовлетворяет уравнению

$$[P, P]_s = 0,$$

где $[,]_s$ обозначает скобку Схоутена на поливекторных полях. Из соображений однородности следует, что

$$[P_1, P_1]_s = [P_1, P_2]_s = [P_2, P_2]_s = 0,$$

т.е. P_1, P_2 образуют пуассонову пару. Это означает, что $\lambda P_1 + \mu P_2$ является скобкой Пуассона для любых $\lambda, \mu \in k$.

Слагаемые наименьшей степени образующих алгебры функций Казимира являются стандартными инвариантными многочленами на коприсоединенном представлении алгебры Ли $\mathfrak{so}_n$. Например, для $n = 3$ в многочлене Маркова $a^2 + b^2 + c^2 - abc$ слагаемые наименьшей степени образуют многочлен

$$a^2 + b^2 + c^2 = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(A - A^T)^2.$$

Мы надеемся исследовать интегрируемые системы, связанные с этой и другой (см. п. 5.4) пуассоновой парой в отдельной публикации.

Рассмотрим проективную компактификацию $\mathcal{A}$, т.е. вложим $\mathcal{A}$ как аффинное пространство в проективное пространство $\mathbb{P}$ размерности $\frac{n(n-1)}{2}$. Поскольку P линейно-квадратична, она имеет продолжение до неособой (т.е. без полюсов) скобки Пуассона на $\mathbb{P}$. Эта скобка касается бесконечной гиперплоскости, которая естественным образом отождествляется с $\mathbb{P}(\mathcal{A})$. Другими словами, эта гиперплоскость является объединением симплектических листов. Скобка на бесконечной гиперплоскости задается квадратичной частью исходной скобки путем спуска с аффинного пространства $\mathcal{A}$ на $\mathbb{P}(\mathcal{A})$ (см. [4]).

Было бы интересно найти такую компактификацию пространства объектов, которая бы продолжалась до частичной компактификации пространства морфизмов, согласованной со структурами группоида и скобки Пуассона.

5.4. Симплектические листы нулевой размерности и еще одна пуассонова пара. Согласно общей теории симплектических группоидов симплектические листы скобки Пуассона P являются неприводимыми компонентами орбит действия группоида Γ на $\mathcal{A}$. Симплектический лист, который содержит данную точку $A \in \mathcal{A}$, – это t -проекция неприводимой компоненты s -слоя над A , содержащей (E, A) (s -слои могут иметь несколько компонент в $\mathcal{M}$).

Опишем симплектические листы, которые являются изолированными точками. Для $n = 2$ скобка Пуассона тривиальна, следовательно, все точки $\mathcal{A}$ – симплектические листы. Исключим этот случай из дальнейшего рассмотрения в настоящем пункте.

Как уже отмечалось, E является орбитой группоида. Из формулы (5.3) для скобки Пуассона (см. далее лемму 5.4) несложно вывести, что она равна нулю вне E только для $A \in \mathcal{A}$ вида $A = A_2$ со всеми наддиагональными элементами, равными 2, а также для тех матриц, которые получаются из A_2 преобразованиями

$$A' = Q_\alpha A Q_\alpha,$$

где Q_α , $\alpha \in \mathbb{Z}_2^n$, – диагональные матрицы, имеющие на диагонали ± 1 .

Выражая это в терминах п. 3.5, получаем следующий интересный результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. *С точностью до $\mathbf{GL}(V)$ -эквивалентности существует билинейная форма R на V , обладающая тем свойством, что флаги, находящиеся в общем положении по отношению к R , образуют единственную орбиту относительно линейных преобразований, сохраняющих R , и таких форм в точности две.*

В инвариантных терминах первая форма, соответствующая E , – это просто невырожденная симметрическая форма. Вторая форма R , соответствующая матрице A_2 (с элементами над диагональю, равными 2) и ее сопряженным аналогам, может быть описана следующим образом.

Обозначим через R_+ и R_- симметрическую и кососимметрическую части R . Пусть L – ядро R_+ , а l – ортогонал к L относительно R_- .

Случай четного n . Условие, налагаемое на R , следующее:

(*) R_+ имеет ранг 1 и R_- невырождена.

Можно показать, что две формы такого типа $\mathbf{GL}(V)$ -эквивалентны и что R удовлетворяет этому условию. Заметим, что L является гиперплоскостью, а l – прямая в L . Пространство $T = L/l$ снабжено кососимметрической формой, индуцированной R_- . Симметрическая часть R_+ , рассматриваемая как квадратичная форма, является квадратом линейной формы. Переходя к двойственному пространству, мы видим, что группа линейных операторов, сохраняющих R , – это группа симплектических операторов в V^* , сохраняющих (с точностью до знака) вектор из V^* . Связной компонентой единицы для этой группы является

$$G_R = \mathbf{Sp} T \times (T \cdot k) = \mathbf{Sp} (n - 2) \times (k^{n-2} \cdot k)$$

– полупрямое произведение $\mathbf{Sp} T$ и группы $T \cdot k$, которая является центральным расширением T с помощью k (предположим, что на обеих группах рассматривается аддитивная структура). Расширение не является полупрямым и задается 2-коциклом, определенным кососимметрической формой $R_-|_T$.

Используя такие же, как в п. 5.3, рассуждения, получим, что линеаризация скобки Пуассона P в A_2 является скобкой Ли на двойственном пространстве к $\mathfrak{g}_R = \mathfrak{sp} T \times (T \cdot k)$. То же справедливо для всех остальных точек $\mathbb{Z}_2^n$ -орбиты A_2 .

Случай нечетного n . Условие, налагаемое на R , следующее:

(**) R_+ имеет ранг 1 и R_- невырождена на L .

Снова можно показать, что любые две формы такого типа $\mathbf{GL}(V)$ -эквивалентны и что R удовлетворяет этому условию. И снова L является гиперплоскостью, а l – прямой, но уже не лежащей в L . Пусть x – вектор в l такой, что $\langle x, x \rangle_R = 1$. Группа операторов, сохраняющих R , состоит из операторов, являющихся симплектическими в L и сохраняющих x с точностью до знака. Связная компонента единицы такой группы – это просто $\mathbf{Sp}(L) = \mathbf{Sp}(n-1)$.

Таким образом, линеаризация скобки Пуассона P в A_2 (и в любой другой точке $\mathbb{Z}_2^n$ -орбиты A_2) является скобкой Ли на двойственном пространстве симплектической алгебры Ли $\mathfrak{sp}(n-1)$.

Сдвигая начало координат в эту точку, мы получим, как и в п. 5.3, согласованную пару линейной и квадратичной скобок Пуассона, причем линейная часть равна $\mathfrak{g}_R$ или $\mathfrak{sp}(n-1)$ в зависимости от четности n .

5.5. Слои группоида и описание симплектических листов. В этом пункте поле k предполагается алгебраически замкнутым.

Здесь мы дадим полное описание симплектических листов группоида с помощью исследования неприводимых компонент s -слоев группоида.

Для $n = 2$ все точки схемы $\mathcal{A}$ являются симплектическими листами, хотя в п. 3.6 было показано, что s -слой схемы $\mathcal{M}$ над точкой a имеет четыре компоненты в случае $a = \pm 2$ и две компоненты в противном случае.

ПРИМЕР 5.3. Пусть $n = 3$. Если, как и в п. 2.2, в матрице A над диагональю стоят элементы (a, b, c) , то симплектические листы могут быть описаны следующим образом:

- i) $(a, b, c) = (0, 0, 0)$;
- ii) $(a, b, c) = (\pm 2, \pm 2, \pm 2)$ с четным количеством плюсов;
- iii) $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 0$, но не выполнен п. i);
- iv) $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$, но не выполнен п. ii);
- v) $a^2 + b^2 + c^2 - abc = \text{const} \neq 0, 4$.

Первые два варианта содержат в совокупности пять точечных листов, что соответствует результатам предыдущих пунктов. В остальных вариантах получаются поверхности, являющиеся, по существу, линиями уровня функции Казимира (многочлена Маркова).

Как было доказано в теореме 3.7, орбиты группоида Γ находятся в естественном соответствии с невырожденными некососимметрическими билинейными формами на V , взятыми с точностью до $\mathbf{GL}(V)$ -эквивалентности. Симплектические листы для P являются неприводимыми компонентами орбит. Поскольку орбита, которая содержит данную точку A , – это t -проекция s -слоя над A , необходимо описать неприводимые компоненты s -слоя.

Как мы видели в п. 3.5, этот слой имеет неразветвленное накрытие степени $2^n : 1$ открытого множества U_A в пространстве флагов $\mathcal{F}$. Когда флаг в общем

положении относительно A зафиксирован, слой F_A этого накрытия состоит из 2^n полуортонормальных базисов пространства V , согласованных с флагом. Множество таких базисов является орбитой эффективного действия группы $\mathbb{Z}_2^n$, состоящего в замене знаков элементов базиса. Элемент $\beta \in \mathbb{Z}_2^n$ действует на матрицу B по формуле

$$B \mapsto Q_\beta B,$$

где Q_β – диагональная матрица, имеющая на диагонали ± 1 .

Поскольку пространство флагов имеет лишь одну неприводимую компоненту, то компоненты в s -слое соответствуют орбитам в слое F_A группы Галуа накрытия. Геометрический смысл таков: двигаясь вокруг дивизоров в $\mathcal{F}$, которые лежат в дополнении к U_A , мы переходим от одного базиса к другому.

Выясним, какую часть $\mathbb{Z}_2^n$ содержит группа Галуа. Прежде всего, так как по предложению 3.5 группоид содержит две компоненты $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, которые отличаются знаком $\det B$, мы должны ограничиться рассмотрением подгруппы $\mathbb{Z}_2^{n-1} \subset \mathbb{Z}_2^n$ элементов с четным количеством -1 . Эта подгруппа порождается элементами β_i , у которых на i -м и $(i+1)$ -м местах стоит -1 , а на остальных местах стоит 1 . Теперь посмотрим, как можно получить матрицу $B = Q_{\beta_i}$, двигаясь вдоль слоя группоида. Попытаемся изменять только элементы e_i и e_{i+1} в полуортонормальном базисе. Чтобы сохранить свойство их полуортонормальности по отношению к другим векторам базиса, будем их сдвигать в пределах двумерной плоскости, которую они порождают. Используя вычисления из п. 3.6, получим, что если $a_{i,i+1} \neq \pm 2$, то для этой плоскости (2×2) -матрицы $B = E$ и $B = -E$ лежат в одной компоненте слоя. Следовательно, если ни один из $a_{i,i+1}$ не равен ± 2 , то вся группа $\mathbb{Z}_2^{n-1}$ содержится в группе Галуа.

ЛЕММА 5.4. *Если для всех A из симплектического листа для некоторого i выполнено $a_{i,i+1} = \pm 2$, то матрица A имеет вид $A = Q_\alpha A_2 Q_\alpha$, где $A_2 \in \mathcal{A}$ – матрица, у которой все элементы над диагональю равны 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (набросок). Для $n = 2$ утверждение тривиально. Для $n = 3$ оно следует из описания симплектических листов, приведенных в примере 5.3.

При $n > 3$ легко увидеть, что любая подматрица размера 3×3 , полученная из A выбором любых трех векторов базиса, имеет форму ii) примера 5.3. Любая такая матрица A имеет требуемую форму.

Из леммы 5.4 следует, что если A не является симплектическим листом нулевой размерности, рассмотренным в п. 5.4, то можно выбрать другого представителя A' из симплектического листа, для которого $a_{i,i+1} \neq \pm 2$ при всех i . Следовательно, для любой матрицы A , которая не имеет вид $A = Q_\alpha A_2 Q_\alpha$, мы доказали, что группа Галуа накрытия содержит $\mathbb{Z}_2^{n-1}$.

Таким образом, мы доказали первую часть следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5.5. i) *Над матрицей A , не имеющей вид $A = Q_\alpha A_2 Q_\alpha$, s -слой (а также t -слой) имеет две неприводимые компоненты, являющиеся его пересечением с компонентами $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ группоида.*

ii) *Число компонент s -слоя над матрицей вида $A = Q_\alpha A_2 Q_\alpha$ равно 2^n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Осталось доказать утверждение ii). Прежде всего, так как накрытие имеет степень 2^n , то в каждом s -слое существуют не более чем 2^n неприводимых компонент. Если применить отображение t к s -слою над точкой A вида $Q_\alpha A_2 Q_\alpha$, то в образе мы получим все 2^{n-1} точки того же вида. Пересечение t - и s -слоев над такой точкой является группой автоморфизмов билинейной формы. Эта группа была вычислена в п. 5.4, она содержит две компоненты как для четных, так и для нечетных n . Утверждение доказано.

Как следствие этой теоремы, получается полное описание симплектических листов.

ТЕОРЕМА 5.6. *Симплектические листы скобки Пуассона, которые не являются отдельными точками вида $A = Q_\alpha A_2 Q_\alpha$, взаимно однозначно соответствуют классам $\mathbf{GL}(V)$ -эквивалентности билинейных форм, которые невырождены, некососимметричны и не являются формами вида, описанного в п. 5.4 (т. е. не тех форм, симметрическая часть которых имеет ранг 1, а кососимметрическая часть невырождена на всем пространстве в случае четного n или невырождена на ядре симметрической части в случае нечетного n).*

5.6. Размерность симплектических листов. Поскольку для симплектического группоида размерность алгеброида $\text{Ли } \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \Omega^1$ совпадает с размерностью касательного расслоения T на $\mathcal{A}$, то размерности ядра и коядра для якорного отображения $a: \mathfrak{g}_A \rightarrow T_A$ над любой точкой $A \in \mathcal{A}$ равны. Ядро является алгеброй Ли централизатора A в группоиде, в то время как образ якорного отображения является касательным пространством к симплектическому листу, который содержит A . Следовательно, коразмерность симплектического листа равна размерности централизатора.

Для группоида Γ треугольных билинейных форм централизатор в Γ для $A \in \mathcal{A}$ совпадает, по определению Γ , с обычным централизатором в $\mathbf{GL}(V)$ билинейной формы A . Таким образом, для того чтобы найти в $\mathcal{A}$ симплектические листы данной (ко)размерности, необходимо изучить централизаторы (в алгебре Ли) билинейных форм.

Напомним некоторые стандартные факты о разложении отдельной билинейной формы. Любой невырожденной билинейной форме A можно инвариантно сопоставить оператор

$$S_A = A^{-T} A.$$

Действительно, если A преобразуется по правилу $A' = B^{-T} A B^{-1}$, то S_A преобразуется по правилу $S_{A'} = B S_A B^{-1}$. Отсюда следует, что жорданова форма S_A является инвариантом класса изоморфизма билинейной формы A . Мы будем обозначать через $J_{\lambda, k}$ жорданову клетку размера $k \times k$ с собственным значением λ .

Если A – билинейная форма, то любая пара корневых подпространств V_λ и V_μ для S_A с собственными значениями λ, μ , $\lambda\mu \neq 1$, биортогональна относительно A . Отсюда можно получить полное описание неразложимых билинейных форм.

Жорданова форма оператора S_A для неразложимой невырожденной билинейной формы над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики имеет один из следующих видов:

- i) $J_{\lambda,k} \oplus J_{\lambda^{-1},k}$, $\lambda \neq 0, (-1)^{k+1}$;
- ii) $J_{(-1)^{k+1},k}$.

В действительности существует единственная с точностью до изоморфизма неразложимая невырожденная билинейная форма такая, что соответствующий оператор S_A имеет одну из приведенных выше жордановых форм. Мы обозначим ее $K_{\lambda,k}$ в первом случае и $L_{(-1)^{k+1},k}$, или просто L_k , во втором. Заметим, что $K_{\lambda,k}$ изоморфна $K_{\lambda^{-1},k}$.

Обозначим через $\mathcal{C}_A$ централизатор формы A в алгебре Ли, т.е. пространство операторов C на V таких, что

$$C^T A + AC = 0. \quad (5.5)$$

Обозначим через $\mathcal{C}'_A$ централизатор оператора S_A , состоящий из операторов, коммутирующих с S_A . Тогда $\mathcal{C}_A \subset \mathcal{C}'_A$. Действительно, из (5.5) следует

$$C^T A^T = -A^T C, \quad A^{-T} AC = -A^{-T} C^T A = CA^{-T} A.$$

Более того, $\mathcal{C}_A$ является подпространством элементов, антиинвариантных относительно инволюции $*$, которая действует на $\mathcal{C}'_A$ по формуле

$$C^* = A^{-1} C^T A.$$

Отсюда возникает идея ввести аддитивную категорию $\mathcal{P}$, объектами которой являются пары (V, A) , состоящие из векторного пространства V и невырожденной билинейной формы A на V . Морфизмами в $\mathcal{P}$ из (V, A) в (U, A') являются линейные операторы $C: U \rightarrow V$ такие, что

$$S_{A'} C = C S_A.$$

Категория $\mathcal{P}$ обладает инволютивным контравариантным функтором $*$, который сохраняет объекты и обращает направление морфизмов следующим образом: если $C: V \rightarrow U$ определяет морфизм из (V, A) в (U, A') , то

$$C^* = A^{-1} C^T A',$$

где $C^T: U^* \rightarrow V^*$ – обычный сопряженный к C оператор. Легко видеть, что C^* определяет морфизм в $\mathcal{P}$ из (U, A') в (V, A) и что $*$ – контравариантный функтор.

Очевидно, что $\mathcal{C}'_A = \text{End}_{\mathcal{P}}(A)$ является пространством эндоморфизмов объекта (V, A) , инволюция на $\mathcal{C}'_A$ совпадает с инволюцией, определенной функтором.

Пусть N – полугруппа, элементы которой являются классами изоморфизма билинейных форм, а умножение индуцировано операцией прямой суммы. Тогда N – свободная коммутативная полугруппа, порожденная классами изоморфизма неразложимых билинейных форм.

Поскольку размерность $d(A)$ стабилизатора $\mathcal{C}_A$ сохраняется при изоморфизмах, d является корректно определенной функцией на N .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. *Функция d линейно-квадратична на N , т. е. является суммой линейной и квадратичной форм, при этом квадратичная часть определяется симметрической билинейной формой*

$$q(A, A') = \frac{1}{2} \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{P}}(A, A'). \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Критерий того, что d линейно-квадратична, заключается в том, что

$$q(v, u) := \frac{1}{2} (d(v + u) - d(v) - d(u)) \quad (5.7)$$

является симметрической билинейной формой. Проверим это.

Рассмотрим пару билинейных форм A и A' . Поскольку $\mathcal{P}$ – аддитивная категория, то

$$\mathcal{C}'_{A+A'} = \operatorname{End}_{\mathcal{P}}(A \oplus A') = \operatorname{End}_{\mathcal{P}}(A) \oplus \operatorname{End}_{\mathcal{P}}(A') \oplus \operatorname{Hom}_{\mathcal{P}}(A, A') \oplus \operatorname{Hom}_{\mathcal{P}}(A', A).$$

Инволюция $*$ сохраняет первые два члена разложения и переставляет последние два. Так как $\mathcal{C}_{A+A'}$ является антиинвариантной частью $\mathcal{C}'_{A+A'}$ относительно $*$, то, следовательно,

$$\dim \mathcal{C}_{A+A'} = \dim \mathcal{C}_A + \dim \mathcal{C}_{A'} + \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{P}}(A, A').$$

Таким образом, из (5.7) следует, что

$$q(A, A') = \frac{1}{2} \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{P}}(A, A').$$

Очевидно, эта форма билинейна. Значит, d линейно-квадратична. Поскольку для линейно-квадратичной функции d квадратичная часть может быть вычислена с помощью (5.7), предложение доказано.

Из предложения 5.7 вытекает, что линейная часть функции d имеет вид

$$l(A) = d(A) - \frac{1}{2} \dim \mathcal{C}'_A. \quad (5.8)$$

Пусть A имеет разложение в прямую сумму (которое можно рассматривать как разложение в полугруппе N):

$$A = \sum n_{\lambda, k} K_{\lambda, k} + \sum m_{(-1)^{k+1}, k} L_k, \quad (5.9)$$

где $n_{\lambda, k}$ (соответственно, $m_{(-1)^{k+1}, k}$) являются кратностями $K_{\lambda, k}$ (соответственно, L_k) в A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.8. *Размерность стабилизатора S_A билинейной формы A с разложением вида (5.9) выражается формулой*

$$\begin{aligned} d(A) = & \sum_{\lambda \neq \pm 1} \min(k, l) n_{\lambda, k} n_{\lambda, l} + 2 \sum_{\lambda = \pm 1} \min(k, l) n_{\lambda, k} n_{\lambda, l} \\ & + \sum_{\lambda = \pm 1} \min(k, l) n_{\lambda, k} m_{\lambda, l} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\lambda = \pm 1} \min(k, l) m_{\lambda, l} m_{\lambda, k} - \frac{1}{2} \sum m_{1, l}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Здесь суммирование ведется по всем возможным значениям k и l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы вычислить квадратичную часть, заметим, что ввиду (5.6) матрица соответствующей билинейной формы определяется гомоморфизмами в $\mathcal{P}$ между неразложимыми объектами. Эти гомоморфизмы являются сплетающими операторами между S_A .

Размерность пространства сплетающих операторов между $J_{\lambda, k}$ и $J_{\mu, l}$ равна $\min(k, l)$ в случае $\lambda = \mu$ и нулю в противном случае. Поэтому приведенное выше жорданово разложение S_A для $A = K_{\lambda, k}$ или $A = L_k$ приводит к вычислению квадратичной части, которая состоит из первых четырех членов формулы (5.10).

Коэффициенты линейной части l функции d могут быть вычислены с помощью (5.8) на конкретных неразложимых объектах в $\mathcal{P}$. Проверяя случай за случаем, получаем, что $l(L_{1, 2k+1}) = -\frac{1}{2}$ и что l равна нулю на всех остальных неразложимых объектах. Отсюда находим последний член в формуле (5.10).

Для формы A , определенной формулой (5.9), имеем

$$n = \dim V = \sum 2k n_{\lambda, k} + \sum k m_{(-1)^{k+1}, k}. \quad (5.11)$$

Эти разложения n , за одним исключением, дают все симплектические листы в группоиде Γ . Если форма A кососимметрическая, то она является суммой нескольких экземпляров $K_{-1, 1}$. По теореме 3.7 это единственный случай, который нужно исключить из рассмотрения:

$$A \neq n_{-1, 1} K_{-1, 1}. \quad (5.12)$$

Для данного элемента $A \in N$, удовлетворяющего (5.12), можно найти верхнетреугольную матрицу из соответствующего симплектического листа (если он единственный; см. теорему 5.6): сначала выбрать флаг в общем положении относительно A , затем зафиксировать жесткость – полуортонормальный базис, согласованный с флагом, и вычислить матрицу Грама для A в этом базисе.

Далее в обозначении $K_{\lambda, k}$ мы всегда подразумеваем, что $\lambda \neq \pm 1$.

ПРИМЕР 5.9. Пусть $n = 2$. Имеются три возможных разложения формы A : $2L_{1, 1}$, $L_{-1, 2}$ и $K_{\lambda, 1}$, они соответствуют случаям $a = 0$, $a = \pm 2$ и $a \neq 0, \pm 2$, где a – наддиагональный элемент матрицы A , как в п. 3.6. Все стабилизаторы одномерны.

ПРИМЕР 5.10. Пусть $n = 3$. Здесь имеются пять возможных разложений формы A : $3L_{1,1}$, $K_{-1,1} + L_{1,1}$, $L_{1,3}$, $L_{-1,2} + L_{1,1}$ и $K_{\lambda,1} + L_{1,1}$.

Функция $d(A)$ для первых двух орбит равна 3, для остальных она равна 1. Этот список согласуется со списком, приведенным в примере 5.3.

5.7. Пласты. Пусть G – алгебраическая группа Ли, а $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Геометрию коприсоединенного действия G на $\mathfrak{g}^*$ можно изучать с помощью пластов. Это неприводимые компоненты схемы, которые как множества являются объединением орбит данной размерности.

Известно, что в случае $G = \mathbf{SL}(n)$ пласты являются гладкими попарно непесекающимися многообразиями. Они находятся во взаимно однозначном соответствии со всеми разбиениями числа n . Фактор любого пласта по действию G является аффинным пространством (см. [15], [29], [23], [8]).

Орбиты коприсоединенного действия являются симплектическими листами стандартной линейной скобки Пуассона на $\mathfrak{g}^*$. Это подсказывает, как распространить понятие пластов на произвольное пуассоново многообразие. Для данного алгебраического пуассонова многообразия и целого числа d рассмотрим объединение симплектических листов размерности d . Очевидно, оно является подсхемой X_d в X . Неприводимые компоненты X_d для всех d мы назовем *пластами* X . Вообще говоря, пласты могут быть особыми, а могут иметь нетривиальное пересечение, как показывает случай линейных скобок Пуассона для других полупростых алгебр Ли (см. [9]). Было бы интересно понять, как устроены пласты скобки Пуассона треугольных форм.

Заметим, что благодаря пуассоновой паре из п. 5.3 скобку P можно рассматривать как деформацию стандартной линейной скобки Пуассона, связанной с $\mathfrak{so}_n$.

Пусть X – неприводимое пуассоново многообразие. Очевидно, что объединение всех симплектических листов максимальной размерности является открытым подмногообразием в X . Оно называется *регулярным пластом*.

Из предложений 5.7 и 5.8 легко получить описание регулярного пласта в $\mathcal{A}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.11. *Билинейная форма $A \in \mathcal{A}$ лежит в регулярном пласте тогда и только тогда, когда ее разложение (5.9) содержит не более одного слагаемого типа $K_{\lambda,i}$ для произвольного $\lambda \neq 0, \pm 1$, не более одного слагаемого типа $L_{-1,2k}$, не более одного слагаемого типа $L_{1,2k+1}$ и не содержит слагаемых типа $K_{\pm 1,i}$.*

Заметим, что слагаемые типа $L_{1,2k+1}$ встречаются только в случае нечетного n .

ПРИМЕР 5.12. Пусть $n = 4$. Возможные разложения для регулярной формы A таковы:

- i) $K_{\lambda,1} \oplus K_{\mu,1}$, $\lambda \neq \mu \neq 0, \pm 1$;
- ii) $K_{\lambda,1} \oplus L_{-1,2}$, $\lambda \neq 0, \pm 1$;
- iii) $K_{\lambda,2}$, $\lambda \neq 0, \pm 1$;
- iv) $L_{-1,4}$.

В общем случае ясно, что коразмерность всех остальных пластов не меньше трех. Действительно, размерность симплектического листа уменьшается по меньшей мере на 2, а число параметров, от которых зависят симплектические листы,

уменьшается по меньшей мере на 1. Поскольку листов конечное число, то, следовательно, коразмерность дополнения регулярного пласта не меньше трех (в действительности она равна трем).

Рассмотрим отображение Казимира $\mathcal{A} \rightarrow k^{[\frac{n}{2}]}$, определенное функциями Казимира, где $k^{[\frac{n}{2}]}$ – аффинное пространство размерности $[\frac{n}{2}]$, являющееся $\text{Sрес } \tilde{F}$ для четного n и $\text{Sрес } F$ для нечетного n . Очевидно, что это отображение постоянно на всех симплектических листах в $\mathcal{A}$.

Из следующей теоремы, которая будет использована в §6, получим, что это отображение не имеет нередуцированных слоев в регулярном пласте.

Полезно сравнить эту теорему и ее доказательство с похожими утверждениями Д. Панюшева [28] и Ф. Кнопа [20] о действии полупростых групп.

ТЕОРЕМА 5.13. *При ограничении на регулярный пласт отображение Казимира является субмерсией (т. е. его дифференциал эпиморфен в каждой точке регулярного пласта).*

Стратегия доказательства этой теоремы близка к той, которую использовал Ф. Кноп [20] для изучения действия полупростых групп. Во-первых, покажем, что locus вырождения для отображения Казимира, если не пуст, является дивизором. Во-вторых, продемонстрируем, что функция f , которая задает неприводимую компоненту этого дивизора, определяет характер группоида. В-третьих, используя группу кос, докажем (в приложении), что группа характеров группоида по существу тривиальна (состоит из двух элементов: 1 и $\det$). Из этого будет следовать, что f является функцией Казимира, откуда легко получить доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в регулярном пласте произвольную точку x , в которой отображение Казимира вырождено. Возьмем точку z в t -слое над x и какое-нибудь максимальное подпространство V в $T_{\mathcal{M}, z}$, которое не имеет ядра при проекции с помощью дифференциалов ds и dt . Пусть S_z – локальное гладкое подмногообразие, которое содержит z и касательное пространство которого в z есть V . Тогда t -образ для S_z есть содержащее x локальное трансверсальное сечение S к расслоению на орбиты группоида. При ограничении на это сечение locus вырождения отображения Казимира является дивизором нулей якобиана. Слои, которые пересекаются с этим locusом, заматают дивизор, на котором отображение Казимира вырождено. Отсюда следует, что locus вырождения в $\mathcal{A}$ является дивизором в окрестности x , а значит, и везде на регулярном пласте.

Теперь возьмем неприводимую компоненту этого дивизора. Пусть f – функция на $\mathcal{A}$, которая определяет соответствующий приведенный дивизор D . Она однозначна с точностью до умножения на константу, так как дополнение к регулярному пласту имеет коразмерность не меньше трех. Рассмотрим функцию χ на компоненте $\mathcal{M}_1$ группоида (см. предложение 3.5), которая является отношением прообразов f при отображениях начала и конца:

$$\chi = \frac{s^* f}{t^* f}.$$

По теореме 5.5 прообразы D в $\mathcal{M}_1$ при отображениях s и t являются неприводимыми дивизорами. Они совпадают, так как D инвариантно относительно действия $\mathcal{M}_1$. Значит, χ не равно нулю на $\mathcal{M}_1$.

Используя соотношения для структурных отображений группоида, описанные в п. 3.1, получаем

$$m^* \chi = \frac{m^* s^* f}{m^* t^* f} = \frac{p_1^* s^* f}{p_2^* t^* f} = \frac{p_1^* s^* f}{p_1^* t^* f} \cdot \frac{p_2^* s^* f}{p_2^* t^* f} = p_1^* \chi \cdot p_2^* \chi,$$

т. е. $\chi: \mathcal{M}_1 \rightarrow k^*$ является характером компоненты $\mathcal{M}_1$ группоида (см. приложение).

В приложении показано, что такой характер тривиален. Следовательно, $s^* f = t^* f$, т. е. f является функцией Казимира.

Отсюда следует, что образ D при отображении Казимира принадлежит дивизору $D_f := \{f = 0\}$. Пусть $D \rightarrow D_f$ — доминантный морфизм. Тогда можно выбрать точку $y \in D$ такую, что D гладко в y , т. е. $df_y \neq 0$, и ограничение отображения Казимира $D \rightarrow D_f$ гладко в y .

Обозначим образ y при отображении Казимира в $k^{[\frac{n}{2}]}$ через z . Функция f корректно определена на $k^{[\frac{n}{2}]}$. Тогда мы имеем следующую коммутативную диаграмму с точными последовательностями в строках и вертикальными морфизмами, индуцированными дифференциалом отображения Казимира:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T_{D,y} & \longrightarrow & T_{A,y} & \xrightarrow{df_y} & k \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & T_{D_f,z} & \longrightarrow & T_{k^{[\frac{n}{2}],z}} & \xrightarrow{df_z} & k \longrightarrow 0 \end{array}$$

Правая вертикальная стрелка является тождественным морфизмом. Поскольку левая вертикальная стрелка является эпиморфизмом по выбору y , то и средняя стрелка является эпиморфизмом. Следовательно, отображение Казимира является субмерсией в y . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 5.14. *Для любой точки из симплектического листа максимальной размерности образ отображения $P: \Omega^1 \rightarrow T$ совпадает с ядром дифференциала отображения Казимира.*

Если в определении пласта заменить слова “симплектические листы” на “неприводимые компоненты орбит группоида”, мы получим определение *пластов* (и *регулярного пласта*) для любого гладкого алгебраического группоида. Конечно, для симплектических группоидов эти определения совпадают.

Если ограниченное на D отображение Казимира $D \rightarrow D_f$ не доминантно, то размерность его слоев будет больше размерности максимальных орбит. В то же время отображение Казимира разделяет максимальные орбиты. Действительно, коэффициенты характеристического многочлена оператора S_A являются функциями Казимира. Они однозначно с точностью до перестановки определяют собственные значения для S_A . Из описания максимальных орбит в предложении 5.11 следует, что такие орбиты однозначно определяются собственными значениями оператора S_A .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.15. Другой известный из теории инвариантов подход к такого рода задачам состоит в построении подходящего сечения к отображению (см. [21]). Сечение Вейерштрасса к отображению Казамира будет описано в другой статье.

§ 6. Центр алгеброида

Для любого группоида $\mathfrak{g}$ пространство глобальных сечений $H^0(X, \mathfrak{g})$ является алгеброй Ли. В этом параграфе мы дадим описание центра такой алгебры Ли для алгеброида Ли, соответствующего группоиду Ли Γ , в терминах функций Казамира.

Этот подход применим к другим алгеброидам, построенным из скобок Пуассона.

Для любой скобки Пуассона P на X можно построить алгеброид Ли $\mathfrak{g}^P$ (даже биагеброид Ли; см. [26]) следующим образом. Как векторное расслоение $\mathfrak{g}^P$ является кокасательным расслоением Ω^1 на X . Якорное отображение совпадает с пуассоновой структурой. Структура алгебры Ли для пары локальных сечений ω, θ из Ω^1 определена с помощью P следующим образом:

$$[\omega, \theta]_P = L_{P(\omega)}\theta - L_{P(\theta)}\omega - d(\langle P(\omega), \theta \rangle), \quad (6.1)$$

где L_ξ – производная Ли вдоль векторного поля ξ , или, что эквивалентно,

$$[\omega, \theta]_P = i_{P(\omega)} d\theta - i_{P(\theta)} d\omega + d(\langle P(\omega), \theta \rangle). \quad (6.2)$$

Здесь i_ξ обозначает внутреннее произведение с векторным полем ξ .

Если $\mathfrak{g}$ – алгеброид Ли, соответствующий симплектическому группоиду, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^P$ для индуцированной пуассоновой структуры P на пространстве объектов. Отождествление $\varphi: \Omega^1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ описано в начале п. 5.1.

Для алгеброида Ли $\mathfrak{g}$ рассмотрим ядро $\mathcal{K}$ якорного отображения $a: \mathfrak{g} \rightarrow T$, которое можно считать морфизмом локально свободных пучков $\mathcal{O}_X$ -модулей. Тогда $\mathcal{K}$ является когерентным пучком. Назовем его *централизатором алгеброида Ли $\mathfrak{g}$* . Пространство (локальных) сечений $\mathcal{K}$ является идеалом Ли в алгебре Ли (локальных) сечений $\mathfrak{g}$. Более того, из (3.2) следует, что структура алгебры Ли на сечениях $\mathcal{K}$ (и, более того, присоединенное действие $\mathcal{K}$ на $\mathfrak{g}$) $\mathcal{O}_X$ -линейна.

Кроме того, на ядре линейного отображения $\mathfrak{g}_x \rightarrow T_x$ над каждой точкой $x \in X$ существует структура алгебры Ли. Над точкой общего положения x геометрический слой $\mathcal{K}_x$ совпадает с ядром $\mathfrak{g}_x \rightarrow T_x$ (но не над произвольной точкой).

Для алгеброида Ли треугольных билинейных форм геометрический слой $\mathcal{K}$ над точкой $A \in \mathcal{A}$ из регулярного пласта является централизатором $\mathcal{C}_A$, определенным (5.5). Стабилизатор билинейной формы – это алгебраический тор размерности $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Далее до конца этого параграфа для простоты считаем X гладким аффинным многообразием.

Рассмотрим алгебру Ли $H^0(\mathfrak{g})$ глобальных сечений $\mathfrak{g}$ над X . Обозначим через $Z(\mathfrak{g})$ центр этой алгебры. Если алгеброид Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^P$ построен из скобки Пуассона, то $\mathfrak{g} = \Omega^1$ и локальные сечения $\mathcal{K}$ над регулярным пластом являются 1-формами, которые равны нулю на векторах, касательных к симплектическим листам. Из (6.1) легко следует, что $H^0(\mathcal{K})$ – коммутативный идеал Ли в $H^0(\mathfrak{g})$.

Для скобки Пуассона $P: \Omega^1 \rightarrow T$ определим морфизм пучков

$$\tilde{P}: \Omega^2 \rightarrow T \otimes \Omega^1$$

по формуле

$$\tilde{P}(\omega_1 \wedge \omega_2) = P(\omega_1) \otimes \omega_2 - P(\omega_2) \otimes \omega_1.$$

Если $\theta \in \Omega^1$ — 1-форма и $\mu \in T \otimes \Omega^1$, то обозначим через $\langle \theta, \mu \rangle \in \Omega^1$ 1-форму, которая получается естественным спариванием θ с первым тензорным аргументом в μ .

Из определения $\tilde{P}$ следует равенство

$$i_{P(\theta)}\nu = \langle \theta, \tilde{P}(\nu) \rangle$$

для любых локальных сечений $\theta \in \Omega^1$ и $\nu \in \Omega^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Если P — скобка Пуассона на гладком аффинном многообразии, то 1-форма ω принадлежит $Z(\mathfrak{g}^P)$ тогда и только тогда, когда:*

- i) $P(\omega) = 0$;
- ii) $\tilde{P}(d\omega) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если условия i) и ii) выполнены, то согласно (6.2) имеем $\omega \in Z(\mathfrak{g}^P)$.

Докажем обратное. Рассмотрим $\omega \in Z(\mathfrak{g}^P)$, произвольную 1-форму θ и функцию f . Используя равенство (3.2), получим

$$0 = [\omega, f\theta]_P = -i_{P(\theta)}d\omega = -\langle \theta, \tilde{P}d\omega \rangle.$$

Поскольку θ произвольная, то $\tilde{P}d\omega = 0$. Предложение доказано.

Заметим, что если f — функция Казимира для P и $\omega \in Z(\mathfrak{g}^P)$, то согласно (3.2) $f\omega \in Z(\mathfrak{g}^P)$. Таким образом, $Z(\mathfrak{g}^P)$ является модулем над алгеброй функций Казимира.

ТЕОРЕМА 6.2. *Центр $Z(\mathfrak{g}^P)$ алгеброида Ли $\mathfrak{g}^P$ треугольных билинейных форм является свободным модулем над алгеброй функций Казимира с множеством образующих df_i , где $\{f_i\}_{i=1, \dots, [\frac{n}{2}]}$ — образующие алгебры функций Казимира.*

Другими словами, любая форма $\omega \in Z(\mathfrak{g}^P)$ имеет единственное разложение

$$\omega = \sum g_i df_i, \tag{6.3}$$

где g_i — функции Казимира, а f_i , $i = 1, \dots, [\frac{n}{2}]$, — образующие алгебры функций Казимира, скажем те, которые были описаны в п. 2.2. И наоборот, любая форма ω такого вида лежит в центре.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, если ω – форма вида (6.3), где g_i и f_i – функции Казимира, то из предложения 6.1 легко следует, что $\omega \in Z(\mathfrak{g}^P)$.

Наоборот, предположим, что $\omega \in Z(\mathfrak{g}^P)$. Снова из предложения 6.1 получаем, что $P(\omega) = 0$, т.е. $\omega \in H^0(\mathcal{K})$.

Мы утверждаем, что $H^0(\mathcal{K})$ является свободным $k[\mathcal{A}]$ -модулем со свободными образующими df_i , $i = 1, \dots, [\frac{n}{2}]$, где f_i – образующие алгебры функций Казимира.

Рассмотрим подпучок $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ -модулей $\mathcal{K}_0$ в $\mathcal{K}$, порожденных df_i . Как пучок $\mathcal{K}_0$ является свободным $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ -модулем: $\mathcal{K}_0 \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{[\frac{n}{2}]}$. Поскольку согласно следствию 5.14 для любой точки регулярного пласта df_i порождают конормальное пространство к симплектическому листу, содержащему эту точку, то носитель $\mathcal{K}/\mathcal{K}_0$ находится в дополнении к регулярному пласту. Это дополнение имеет коразмерность не меньше трех (см. п. 5.7). Таким образом, любое сечение s из $\mathcal{K}$ индуцирует сечение из $\mathcal{K}_0$, корректно определенное вне коразмерности три. Поскольку пучок $\mathcal{K}_0$ является свободным, то последнее имеет единственное расширение до сечения s_0 из $\mathcal{K}_0$, которое корректно определено всюду. Тогда $s - s_0$ является сечением кручения в Ω^1 , а значит, оно тривиально.

Таким образом, $\mathcal{K}_0 \simeq \mathcal{K}$ и $\mathcal{K}$ свободно порождается df_i , $i = 1, \dots, [\frac{n}{2}]$.

Итак, мы доказали, что ω имеет разложение $\omega = \sum g_i df_i$, где f_i – образующие алгебры Казимира.

Из предложения 6.1 имеем

$$\tilde{P}(d\omega) = \tilde{P}\left(\sum dg_i \wedge df_i\right) = \sum P dg_i \otimes df_i = 0.$$

Поскольку df_i независимы над $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, то $P dg_i = 0$, т.е. g_i являются функциями Казимира.

ПРИМЕР 6.3. Пусть $n = 3$. Если матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то минимальное полиномиальное решение линейного уравнения $C^T A + AC = 0$, единственное с точностью до постоянного множителя, задается матрицей

$$C = \begin{pmatrix} abc - a^2 - b^2 & ac^2 - 2a - bc & -2b + ac \\ 2a - bc & a^2 - c^2 & ab - 2c \\ 2b - ac & 2c - a^2c + ab & b^2 + c^2 - abc \end{pmatrix}.$$

Настоящая работа появилась как результат попытки понять смысл коэффициентов этой матрицы. Используя приведенное выше описание центра алгеброида, получим следующий алгоритм:

1) возьмем образующую алгебры многочленов Казимира

$$f = a^2 + b^2 + c^2 - abc;$$

2) рассмотрим ее дифференциал

$$df = (2a - bc) da + (2b - ac) db + (2c - ab) dc;$$

3) интерпретируем da , db , dc как элементарные нижнетреугольные матрицы E_{21} , E_{31} , E_{32} соответственно;

4) применим к ним отображение φ по формуле из предложения 3.4, ii);

5) заменим получившимися матрицами дифференциалы da , db , dc в формуле для df .

В результате получим приведенную выше формулу для C .

§ 7. Лагранжевы бисечения и гамильтонианы кос

В этом параграфе мы приведем интерпретацию группы кос и ее расширения с помощью $\mathbb{Z}_n^2$ как регулярных лагранжевых бисечений группоида треугольных билинейных форм.

7.1. Реализация группы кос лагранжевыми бисечениями. *Бисечением* гладкого алгебраического группоида $\Gamma = (\mathcal{M}, \mathcal{A})$ называется гладкое подмногообразие пространства морфизмов $\mathcal{M}$, которое является сечением и для s , и для t . Будем рассматривать бисечение как отображение $\gamma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$, являющееся сечением s , т.е. $s\gamma = \text{id}_{\mathcal{A}}$.

Множество $\text{Bisec}(\Gamma)$ всех бисечений группоида Γ имеет естественную структуру группы: произведение $\gamma = \gamma_2 \cdot \gamma_1$ для γ_2 и γ_1 по определению является отображением $\gamma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ таким, что

$$\gamma(x) = (\gamma_2 \circ t \circ \gamma_1)(x) \cdot \gamma_1(x)$$

для любого $x \in \mathcal{A}$. Единичное сечение e является единицей в этой группе, обратным элементом для $\gamma \in \text{Bisec}(\Gamma)$ будет $\gamma^{-1}(x) := i(z)$, где $z \in \text{Im } \gamma$ однозначно определяется из условий $z \in \text{Im } \gamma$ и $t(z) = x$ для любого $x \in \mathcal{A}$.

Любое бисечение γ группоида индуцирует регулярное обратимое отображение на пространстве объектов $\mathcal{A}$. Это отображение переводит элемент $x \in \mathcal{A}$ в $(t \circ \gamma)(x)$.

В этих терминах реализация расширенной группы кос $\mathbf{B}_n \times \mathbb{Z}_2^n$ универсальными преобразованиями верхнетреугольных билинейных форм (см. п. 2.1) интерпретируется как вложение

$$\mathbf{B}_n \times \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \text{Bisec}(\Gamma)$$

расширенной группы кос в группу бисечений группоида Γ верхнетреугольных билинейных форм. Действительно, отображение $\mathbf{B}_n \times \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathcal{B}(n)$ из (2.12) представляет элементы расширенной группы кос в виде матриц $B(A)$, которые можно считать бисечениями группоида. Далее, умножение универсальных преобразований из (2.9) повторяет умножение в группе бисечений.

Напомним, что пространство $\mathcal{M}$ снабжено симплектической структурой ω . Бисечение называется *лагранжевым*, если соответствующее подмногообразие в $\mathcal{M}$ является лагранжевым относительно ω . Если бисечение симплектического группоида лагранжево, то соответствующее отображение на пространстве объектов $\mathcal{A}$ сохраняет индуцированную пуассонову структуру. Лагранжевы бисечения образуют подгруппу в группе всех бисечений.

Предложение 7.1. *Элементы расширенной группы кос представляются лагранжевыми бисечениями в Γ .*

Доказательство. Поскольку лагранжевы бисечения образуют группу, справедливость утверждения достаточно проверить для стандартных образующих $\{\sigma_i\}$ группы кос и элементов из $\mathbb{Z}_2^n$. Для σ_i это можно сделать, заметив, что все три члена в (4.5) равны нулю при подстановке $B = \sigma_i(A)$. Элементы группы $\mathbb{Z}_2^n$ представляются постоянными диагональными матрицами Q_α , имеющими на диагонали ± 1 .

Следствие 7.2. *Группа кос действует пуассоновыми преобразованиями на $\mathcal{A}$.*

Замечание 7.3. А. Вайнштейн и П. Шу реализовали в [36] квазиклассический предел R -матриц как лагранжево бисечение некоторого группоида. Поскольку R -матрица в композиции с оператором перестановки тензорных аргументов удовлетворяет соотношению в группе кос, можно отметить внешнее сходство их действия с приведенным выше построением.

7.2. Гамильтонианы кос. Обозначим через L_ξ производную Ли вдоль векторного поля ξ .

Любая функция f на пространстве объектов $\mathcal{A}$ симплектического группоида может быть поднята вдоль отображения конца t до функции $\tilde{f} = t^*f$ на $\mathcal{M}$. Как обычно, функции $\tilde{f}$ можно сопоставить гамильтоново векторное поле $\xi_{\tilde{f}}$ на симплектическом многообразии $\mathcal{M}$, удовлетворяющее условию

$$L_{\xi_{\tilde{f}}}g = \{\tilde{f}, g\}$$

для любой гладкой функции g на $\mathcal{M}$. Это поле касательно к s -слоям и правоинвариантно. Поскольку правоинвариантные векторные поля на группоиде отождествляются с сечениями соответствующего алгеброида Ли, то можно интерпретировать гамильтоново векторное поле $\xi_{\tilde{f}}$ как сечение касательного алгеброида Ли. Так как для симплектических группоидов касательный алгеброид Ли естественным образом изоморфен кокасательному расслоению к $\mathcal{A}$ (см. п. 5.1), то мы получаем 1-форму на $\mathcal{A}$. Заметим, что эта форма – просто дифференциал f . Проекция $\xi_{\tilde{f}}$ вдоль t дает векторное поле, которое является гамильтоновым относительно скобки Пуассона на $\mathcal{A}$ с гамильтонианом f .

Элементы потока φ_t вдоль $\xi_{\tilde{f}}$, когда они корректно определены, отображают единичное сечение в лагранжевы сечения группоида. Следовательно, можно попытаться найти функцию на $\mathcal{A}$ такую, что отображение φ_1 потока за единичное время вдоль индуцированного гамильтонова векторного поля на $\mathcal{M}$ преобразовывало бы единичное сечение в лагранжево бисечение, соответствующее произвольно выбранному элементу из группы кос. Назовем такую функцию *гамильтонианом косы* и обозначим ее через H_b .

Вычисление (которое мы опускаем) показывает, что гамильтонианы для стандартных образующих группы кос являются квадратами гиперболических арксинусов наддиагональных элементов матрицы A . Найти формулы для всех элементов группы кос – интересная задача.

Приложение. Характеры группоида

Характером алгебраического группоида над полем k называется регулярное отображение χ из пространства морфизмов $\mathcal{M}$ группоида в k^* , которое обладает свойством мультипликативности

$$\chi(ab) = \chi(a) \cdot \chi(b)$$

для любой пары компонентных морфизмов a и b .

Группоид имеет два очевидных характера, которые рассматривались в настоящей работе. Это тривиальный характер и характер

$$\chi(B, A) := \det B = \pm 1,$$

который мы будем обозначать $\det B$.

В следующей теореме мы для простоты предполагаем, что поле определения k алгебраически замкнуто характеристики нуля.

ТЕОРЕМА П.1. *Группа характеров группоида Γ треугольных билинейных форм равна $\mathbb{Z}_2 = \{1, \det B\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было объяснено в п. 7.1, каждый элемент расширенной группы кос $\mathbf{B}_n \times \mathbb{Z}_2^n$ определяет бисечение $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ группоида. В композиции с характером $\chi: \mathcal{M} \rightarrow k$ он дает регулярное отображение $\mathcal{A} \rightarrow k$. Поскольку $\mathcal{A}$ является аффинным пространством, это отображение постоянно на $\mathcal{A}$. Таким образом, мы получаем отображение χ_0 из расширенной группы кос в k , которое в действительности является групповым гомоморфизмом.

Слой группоида над единичной матрицей $E \in \mathcal{A}$ является ортогональной группой $\mathbf{O}(n, k)$. При ограничении на эту группу характер группоида должен быть обычным регулярным групповым характером. Для $n \geq 3$ группа характеров равна $\mathbb{Z}_2$ и состоит из тривиального характера и определителя (коммутант группы является неприводимой компонентой единицы, задаваемой уравнением $\det = 1$).

Пусть $n \geq 3$. Поскольку любое бисечение группоида пересекает слой над E , то мы видим, что χ совпадает с одним из двух характеров, 1 или $\det B$, на объединении всех бисечений из расширенной группы кос. Покажем, что это объединение плотно по Зарискому в многообразии $\mathcal{M}$.

Для $x \in \mathcal{A}$ обозначим через F_x множество точек в s -слое над x , в которых сечения из расширенной группы кос пересекают слой.

Заметим, что множество F_E конечно. Точнее, F_E является подгруппой $\mathbf{S}_n \times \mathbb{Z}_2^n$ в $\mathbf{O}(n, k)$, представленной мономиальными матрицами, ненулевые элементы которых равны ± 1 . Напротив, легко видеть, что F_{A_2} плотно в топологии Зариского в s -слое над A_2 . Скажем, для нечетных n это, по существу, подгруппа $\mathbf{Sp}(n-1, \mathbb{Z})$ в $\mathbf{Sp}(n-1, k)$ (см. п. 5.4).

Предположим, что существует ненулевая регулярная функция f на $\mathcal{M}$, равная нулю на всех бисечениях, соответствующих расширенной группе кос. Из сказанного выше следует, что такая функция должна быть равна нулю на s -слое над A_2 . Согласно предложению 3.5 $\mathcal{M}$ имеет только две неприводимые компоненты, и обе имеют общие точки с $s^{-1}A_2$. Следовательно, можно найти гладкую кривую X

в $\mathcal{A}$, проходящую через A_2 и такую, что f не равна нулю на $Y = s^{-1}(X)$. Пусть $d > 0$ – порядок f вдоль дивизора $s^{-1}A_2$ в некотором открытом по Зарискому множестве в Y . Можно найти локальную функцию g , задающую (локально) дивизор $s^{-1}A_2$. Тогда $f' = \frac{f}{g^d}$ является локальной регулярной функцией, которая не содержит $s^{-1}A_2$ в своем дивизоре нулей, но, тем не менее, равна нулю на всех бисечениях из расширенной группы кос, ограниченных на наше открытое множество в Y (вне s -слоя над A_2 , следовательно, и везде). Поскольку F_{A_2} плотно по Зарискому в s -слое над A_2 , то получаем противоречие.

Таким образом, объединение всех бисечений из расширенной группы кос плотно по Зарискому в $\mathcal{M}$. Это доказывает теорему для $n \geq 3$.

Для $n = 2$ можно заменить расширенную группу кос ее подгруппой индекса 4, состоящей из тех бисечений, которые пересекают слой над единичной матрицей $A = E$ в двух точках, в которых B – одна из двух мономимальных матриц с ненулевыми элементами, равными 1. Тогда при ограничении на эту подгруппу характер χ_0 совпадает с одним из двух характеров, 1 или $\det$. Для всех остальных n доказательство аналогично приведенному.

При ограничении на связную компоненту $\mathcal{M}_1$ группоида группа характеров тривиальна.

Список литературы

1. Арнольд В. И., Гусейн-Заде С. М., Варченко А. Н. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1984.
2. Бондал А. И. Представления ассоциативных алгебр и когерентные пучки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 1. С. 25–44.
3. Бондал А. И. Квадратичные алгебры и когерентные пучки: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М.: МИАН СССР, 1989.
4. Bondal A. I. Non-commutative deformations and Poisson brackets on projective spaces. Preprint № 67. Bonn: Max-Planck-Institut, 1993.
5. Бондал А. И. Симплектические группоиды, связанные с группами Пуассона–Ли // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2004. Т. 246. С. 43–63.
6. Бондал А. И., Капранов М. М. Представимые функторы, функторы Серра и их перестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 6. С. 1183–1205.
7. Бондал А. И., Капранов М. М. Оснащенные триангулированные категории // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 5. С. 669–684.
8. Bongartz K. Schichten von Matrizen sind rationale Varietäten // Math. Ann. 1989. V. 283. P. 53–64.
9. Borho W. Über Schichten halbeinfacher Lie-Algebren // Invent. Math. 1981. V. 65. P. 283–317.
10. Brieskorn E. Automorphic sets and braids and singularities // Contemp. Math. 1988. V. 78. P. 45–115.
11. Cassels J. W. S. An introduction to Diophantine approximation. Cambridge: Cambridge University Press, 1957.
12. Cecotti S., Vafa C. On classification of $N = 2$ supersymmetric theories // Commun. Math. Phys. 1993. V. 158. P. 569–644.
13. Coste A., Dazord P., Weinstein A. Groupoïdes Symplectiques // Publ. du Dept. de Math. de l'Université de Lyon 1.
14. Deligne P. Action de groupe des tresses sur une categorie // Invent. Math. 1997. V. 128. № 1. P. 159–175.
15. Dixmier J. Polarisation dans les algebres de Lie semi-simples complexes // Bull. Sci. Math. 1975. V. 99. P. 45–63.

16. *Durfee A.* Fibred knots and algebraic singularities // *Topology*. 1974. V. 13. P. 47–59.
17. *Fock V. V.* Dual Teichmueller spaces. dg-ga/9702018.
18. *Kapustin A., Orlov D.* Vertex algebras, mirror symmetry, and D -branes: the case of complex tori // *Commun. Math. Phys.* 2003. V. 233. № 1. P. 79–136.
19. *Карасев М. В.* Аналогии объектов теории групп Ли для нелинейных скобок Пуассона // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1986. Т. 50. № 3. С. 508–538.
20. *Knop F.* Über die Glattheit von Quotientenabbildungen // *Manuscripta Math.* 1986. V. 56. P. 419–427.
21. *Kostant B.* Lie group representations in polynomial rings // *Amer. J. Math.* 1963. V. 85. P. 327–404.
22. *Kontsevich M.* Homological algebra of mirror symmetry // *Proceedings of ICM, Zurich*. Basel: Birkhauser, 1995. P. 120–139.
23. *Kraft H.* Parametrisierung von Konjugationsklassen in $\mathfrak{sl}_n$ // *Math. Ann.* 1978. V. 234. P. 209–220.
24. *Magnus W.* Rings of Fricke Characters and Automorphism Groups of Free Groups // *Math. Z.* 1980. V. 170. P. 91–103.
25. *Markov A. A.* Sur les formes binaires indefinies // *Math. Ann.* 1980. V. 17. P. 379–399.
26. *Mackenzie K. C. H., Xu P.* Lie bialgebroids and Poisson groupoids // *Duke Math. J.* 1994. V. 73. P. 415–452.
27. *Nogin D. Y.* Helices on some Fano threefolds: constructivity of semi-orthogonal bases of K_0 // *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 1994. V. 27. P. 1–44.
28. *Панюшев Д. И.* Регулярные элементы в пространствах линейных представлений редуцированных алгебраических групп // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1984. Т. 48. № 2. С. 411–419.
29. *Peterson D.* Geometry of the Adjoint Representation of a Complex Semisimple Lie-Algebra: Ph.D. Thesis. Harvard University, 1978.
30. *Seidel P.* Vanishing cycles and mutations // *Proceedings of the 3rd European Congress of Mathematics*. Barcelona, 2000.
31. *Seidel P.* More about vanishing cycles and mutation // *Symplectic geometry and mirror symmetry*. Proceedings of the 4th KIAS annual international conference, Seoul, South Korea, August 14–18, 2000. Singapore: World Scientific, 2001. P. 429–465.
32. *Ugaglia M.* On a Poisson structure on the space of Stokes matrices // *Int. Math. Res. Not.* 1999. № 9. P. 473–493.
33. *Verdier J.-L.* Categories derivees, SGA 4 $\frac{1}{2}$ // *Lecture Notes in Math.* V. 569. N.Y.: Springer-Verlag, 1977. P. 262–311.
34. *Weinstein A.* Symplectic groupoids and Poisson manifolds // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1987. V. 16. P. 101–104.
35. *Weinstein A.* The symplectic “category” // *Lecture Notes in Math.* V. 905. N.Y.: Springer-Verlag, 1982. P. 45–51.
36. *Weinstein A., Xu P.* Classical solutions of the Quantum Yang–Baxter Equation // *Commun. Math. Phys.* 1992. V. 148. P. 309–343.
37. *Zakrzewski S.* Quantum and classical pseudogroups. Part 1. Union pseudogroups and their quantization // *Commun. Math. Phys.* 1990. V. 134. P. 347–370.
38. *Zakrzewski S.* Quantum and classical pseudogroups. Part 2. Differential and symplectic pseudogroups // *Commun. Math. Phys.* 1990. V. 134. P. 371–395.
39. *Zakrzewski S.* On relations between Poisson and quantum groups // *Lecture Notes in Math.* V. 1510. N.Y.: Springer-Verlag, 1992. P. 326–334.
40. *Boalch P. P.* Stokes matrices, Poisson–Lie groups and Frobenius manifolds // *Invent. Math.* 2001. V. 146. № 3. P. 479–506.