Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Васильева, Замкнутые промежутки в векторнозначных функциональных пространствах и их аппроксимативные свойства, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 4, 75–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/im496>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:42:42

УДК 517.982.256

А. А. Васильева

Замкнутые промежутки в векторнозначных функциональных пространствах и их аппроксимативные свойства

Изучаются структурные и аппроксимативные свойства замкнутых промежутков в векторнозначных функциональных пространствах. Рассматриваются вопросы существования и единственности наилучшего приближения пространства замкнутым промежутком и устойчивости метрического проектора.

Библиография: 11 наименований.

§ 1. Введение

В настоящей работе изучаются свойства замкнутых промежутков в функциональных векторнозначных пространствах. Введем необходимые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть T – компакт, X – банахово пространство над $\mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in C(T, X)$. *Интервалом* $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket$ называется множество $\{f \in C(T, X) : f(t) \in [f_1(t), f_2(t)] \forall t \in T\}$. Множество $M \subset C(T, X)$ называется *промежутком*, если для любых $f_1, f_2 \in M$ выполнено включение $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket \subset M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Интервал $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket \subset C(T, \mathbb{R})$ называется *интервалом I-го типа*, если $f_1, f_2 \in C(T, \mathbb{R})$. Если $f_1, f_2 : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ полунепрерывны соответственно сверху и снизу и $f_1(t) \leq f_2(t)$ для любого $t \in T$, то $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket \subset C(T, \mathbb{R})$ называется *интервалом II-го типа*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть отображение $F : T \rightarrow 2^X$ такое, что для любого $t \in T$ множество $F(t)$ непусто, выпукло и замкнуто. *Множеством* S_F в $C(T, X)$ назовем $\{f \in C(T, X) \mid f(t) \in F(t) \forall t \in T\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Отображение $H : T \rightarrow 2^X$ называется *полунепрерывным снизу*, если для любого открытого множества $V \subset X$ множество $\{t \in T : H(t) \cap V \neq \emptyset\}$ открыто в T .

ТЕОРЕМА 1 [5]. Следующие свойства T_1 -пространства T эквивалентны:

- 1) T паракомпактно;
- 2) если X – банахово пространство, то для каждого полунепрерывного снизу отображения F из T в семейство непустых замкнутых выпуклых

Работа выполнена при поддержке гранта ведущих научных школ РФ № НШ-304.2003.1.

подмножеств из X существует функция $f \in C(T, X)$ такая, что $f(t) \in F(t)$ для всех $t \in T$.

Пусть T – пространство с полной σ -аддитивной мерой, $f, g: T \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначим

$$f \sim g \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mu(\{t \in T: f(t) \neq g(t)\}) = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $f_1, f_2 \in L_\varphi(T, X)$. Интервалом $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket$ называется множество функций $f \in L_\varphi(T, X)$ таких, что почти всюду $f(t) \in [f_1(t), f_2(t)]$. Множество $M \subset L_\varphi(T, X)$ называется *промежутком*, если $\llbracket a, b \rrbracket \subset M$ для любых $a, b \in M$.

Докажем корректность определения. Пусть $f_1 \sim g_1, f_2 \sim g_2$. Нужно доказать, что $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket = \llbracket g_1, g_2 \rrbracket$. Докажем, что $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket \subset \llbracket g_1, g_2 \rrbracket$ (обратное включение доказывается аналогично). Пусть $f \in \llbracket f_1, f_2 \rrbracket$. Существуют $T_1 \subset T, T_2 \subset T$ такие, что $\mu(T_1) = \mu(T_2) = \mu(T)$ и $f_1(t) = g_1(t)$ для любых $t \in T_1, f_2(t) = g_2(t)$ для любых $t \in T_2$. Положим

$$T_3 \stackrel{\text{def}}{=} T_1 \cap T_2 \cap \{t \in T: f(t) \in [f_1(t), f_2(t)]\}.$$

Тогда $\mu(T_3) = \mu(T)$ и $f(t) \in [g_1(t), g_2(t)]$ для любых $t \in T_3$, поэтому $f(t) \in [g_1(t), g_2(t)]$ почти всюду, а значит, $f \in \llbracket g_1, g_2 \rrbracket$. Корректность доказана.

В общем случае промежутки в $C(T, \mathbb{R})$ или $L_\varphi(T, \mathbb{R})$ интервалом не является. Например, множество $M \subset C([0, 1], [0, 1])$ такое, что любая функция $f \in M$ принадлежит классу $O(x), x \rightarrow 0$, является промежутком, но не является интервалом. Аналогично строится промежуток из $L_\varphi(T, \mathbb{R})$, не являющийся интервалом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Интервал $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket \subset L_\varphi(T, \mathbb{R})$ называется *интервалом I-го типа*, если $f_1, f_2 \in L_\varphi(T, \mathbb{R})$. Если $f_1, f_2: T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измеримые, то $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket$ называется *интервалом II-го типа*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $F: T \rightarrow 2^X$ такое, что $F(t)$ – непустое выпуклое замкнутое множество для любого $t \in T$. Тогда

$$S_F \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L_\varphi(T, X) \mid \exists g \sim f: g(t) \in F(t) \forall t \in T\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $a, b \in S_F$, то $\llbracket a, b \rrbracket \subset S_F$.

Промежутки обладают следующими свойствами:

- 1) пусть M – промежуток в $C(T, \mathbb{R})$ или в $L_\varphi(T, \mathbb{R})$, $f_1, f_2 \in M$; тогда $\min(f_1, f_2) \in M, \max(f_1, f_2) \in M$;
- 2) пусть M – промежуток в $C(T, X)$ ($L_\varphi(T, X)$), $\alpha \in C(T, \mathbb{R})$ ($L_\varphi(T, \mathbb{R})$), $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ для любого $t \in T$; тогда $\alpha f_1 + (1 - \alpha)f_2 \in M$ для любых $f_1, f_2 \in M$;
- 3) пересечение промежутков является промежутком.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $Y \subset X$. Точка $y \in Y$ называется *наилучшим приближением точки $x \in X$ множеством Y* , если $\rho(x, y) = \rho(x, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{h \in Y} \rho(x, h)$. Если для любой точки $x \in X$ существует ее наилучшее приближение множеством Y , то Y называется *множеством существования в X* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $Y \subset X$ – множество существования в X . *Метрическим проектором на Y* называется отображение $P: X \rightarrow 2^Y$, сопоставляющее каждому $x \in X$ множество всех его наилучших приближений из Y .

Интервалы из $C(T, \mathbb{R})$ рассматривались в [1]–[3] для изучения чебышевских центров. В [2] М. В. Кадец и В. Н. Замятин установили следующие свойства интервалов:

1) пусть $\llbracket u, v \rrbracket \subset C([a, b], \mathbb{R})$ – интервал II-го типа; если $u(t) \neq +\infty$, $v(t) \neq -\infty$ для любого $t \in [a, b]$, то для любого $t_0 \in [a, b]$ существуют $y_1, y_2 \in \llbracket u, v \rrbracket$ такие, что $y_1(t_0) = v(t_0)$, $y_2(t_0) = u(t_0)$;

2) пусть $\llbracket i, s \rrbracket$ – интервал II-го типа, $x \notin \llbracket i, s \rrbracket$, $x \in C[a, b]$; тогда $\rho(x, \llbracket i, s \rrbracket) = \max(\max_t(x(t) - s(t)), \max_t(i(t) - x(t)))$.

При доказательстве свойства 2) строилось наилучшее приближение в $\llbracket i, s \rrbracket$ для функции x , т. е. было доказано, что интервал II-го типа является множеством существования в $C([a, b], \mathbb{R})$.

С. Я. Хавинсон исследовал аппроксимативные свойства интервалов I-го типа в $C(T, \mathbb{R})$. Было доказано, что интервал I-го типа является множеством существования в $C(T, \mathbb{R})$ и что существует выборка из метрического проектора на интервал, удовлетворяющая условию Липшица с константой 1.

Аппроксимативные свойства множеств в $L_\varphi(T, \mathbb{R})$ изучались П. Л. Ульяновым в [7], А. Л. Гаркави в [10] и Д.-А. Г. Камунтавичюсом в [11].

В настоящей работе изучаются:

- 1) структура замкнутого промежутка в $C(T, X)$ и $L_\varphi(T, X)$;
- 2) существование и единственность наилучшего приближения элементов из $C(T, X)$ и $L_\varphi(T, X)$ (где X – гильбертово пространство) замкнутым промежутком и S_F ;
- 3) устойчивость метрического проектора на замкнутый промежуток и на S_F .

В § 2 доказывается, что подмножество $C(T, X)$ является замкнутым промежутком тогда и только тогда, когда оно совпадает с S_F для полунепрерывного снизу отображения F . В частности, множество в $C(T, \mathbb{R})$ является замкнутым промежутком тогда и только тогда, когда оно является интервалом II-го типа. Затем исследуются аппроксимативные свойства множества S_F .

В § 3 исследуются аппроксимативные свойства замкнутых промежутков в пространстве $L_\varphi(T, X)$. Доказывается, что если X сепарабельно, то множество является замкнутым промежутком тогда и только тогда, когда оно совпадает с S_F для некоторого измеримого отображения F . В частности, множество в $L_\varphi(T, \mathbb{R})$ является замкнутым промежутком тогда и только тогда, когда оно является интервалом II-го типа.

§ 2. Замкнутые промежутки в $C(T, X)$

Через $O(t)$ будем обозначать окрестность точки $t \in T$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть T – компакт, X – банахово пространство, $F: T \rightarrow 2^X$ такое, что $F(t)$ – непустое выпуклое замкнутое множество для любого $t \in T$. Тогда $H(t) = \{x \in X \mid \exists f \in S_F: f(t) = x\}$ – выпуклое замкнутое

множество для любого $t \in T$ и отображение $H: T \rightarrow 2^X$ полунепрерывно снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем выпуклость $H(t)$. Пусть $x_1 = f_1(t_0)$, $x_2 = f_2(t_0)$, $f_1, f_2 \in S_F$, $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Докажем, что существует функция $f \in S_F$ такая, что $f(t_0) = x$.

Положим $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha f_1(t) + (1 - \alpha)f_2(t) \in C(T, X)$. Тогда $f(t) \in F(t)$ для любого $t \in T$, так как $F(t)$ выпуклое; поэтому $f \in S_F$.

Докажем замкнутость. Пусть $H(t_0)$ незамкнутое. Тогда существуют $x_0 \notin H(t_0)$ и $\{x_n\} \subset H(t_0)$ такие, что $\rho(x_n, x_0) \leq \frac{1}{2^n}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует функция $g_n \in S_F$ такая, что $g_n(t_0) = x_n$. Положим $f_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} g_1(t)$. Пусть для некоторого $n > 1$ построена функция $f_{n-1} \in S_F$ такая, что $f_{n-1}(t_0) = g_{n-1}(t_0)$. Тогда существует окрестность $O_{(n)}(t_0)$ такая, что

$$\|f_{n-1}(t) - g_n(t)\|_X < \frac{1}{2^{n-2}} \quad \forall t \in O_{(n)}(t_0).$$

Поскольку $\{t_0\}$ и $T \setminus O_{(n)}(t_0)$ замкнуты и не пересекаются, то по лемме Урысона о продолжении существует непрерывная функция $\psi_n: T \rightarrow [0, 1]$ такая, что $\psi_n(t_0) = 0$ и $\psi_n(t) = 1$ для любого $t \in T \setminus O_{(n)}(t_0)$. Положим

$$f_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_n(t)f_{n-1}(t) + (1 - \psi_n(t))g_n(t) \in C(T, X).$$

Так как $g_n \in S_F$ и $f_{n-1} \in S_F$, то $g_n(t) \in F(t)$, $f_{n-1}(t) \in F(t)$ для любого $t \in T$, а так как $F(t)$ выпуклое и $\psi_n(t) \in [0, 1]$, то $f_n(t) \in F(t)$. Значит, $f_n \in S_F$.

Поскольку f_n является последовательностью Коши, то она сходится к $f_0 \in C(T, X)$. Так как $f_n(t) \rightarrow f_0(t)$, $n \rightarrow \infty$, для любого $t \in T$, то из замкнутости $F(t)$ следует, что $f_0(t) \in F(t)$. Поэтому $f_0 \in S_F$. В силу того, что $f_0(t_0) = x_0$, имеем $x_0 \in H(t_0)$.

Докажем полунепрерывность отображения H . Пусть V – открытое множество и существует $t_0 \in T$ такое, что $H(t_0) \cap V \neq \emptyset$. Тогда существует функция $f \in S_F$ такая, что $f(t_0) \in H(t_0) \cap V$. Поскольку f непрерывна, то существует окрестность $O(t_0)$ такая, что $f(t) \in V$ для любого $t \in O(t_0)$. Следовательно, $f(t) \in H(t) \cap V$ для любого $t \in O(t_0)$, т.е. $H(t) \cap V \neq \emptyset$ для любого $t \in O(t_0)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях утверждения 1 для того, чтобы S_F не было пустым, необходимо и достаточно, чтобы существовало полунепрерывное снизу отображение $H: T \rightarrow 2^X$ такое, что $H(t)$ – непустое выпуклое замкнутое множество для любого $t \in T$ и $S_F = S_H$.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях утверждения 1 если множество $S_F \subset C(T, \mathbb{R})$ непусто, то оно является интервалом II-го типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $S_F \neq \emptyset$, то существует полунепрерывное снизу отображение $H: T \rightarrow X$ такое, что $S_F = S_H$ и для любого $t \in T$ множество $H(t)$ является непустым отрезком $[a(t), b(t)] \subset \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $S_F = [a, b]$. В силу полунепрерывности снизу отображения H функции a и b полунепрерывны соответственно сверху и снизу.

ЛЕММА 1. Множество S_F замкнуто в $C(T, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{f_n\} \subset S_F$, $f_n \rightarrow f_0$, $n \rightarrow \infty$. Тогда для любого $t \in T$ имеем

$$f_n(t) \rightarrow f_0(t) \ (n \rightarrow \infty) \Rightarrow f_0(t) \in F(t) \Rightarrow f_0 \in S_F.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть T – компакт, X – банахово пространство. Тогда для того, чтобы множество $M \subset C(T, X)$ являлось непустым замкнутым промежутком, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало с множеством S_F для некоторого полунепрерывного снизу отображения $F: T \rightarrow 2^X$ такого, что $F(t)$ – непустое выпуклое замкнутое множество для любого $t \in T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. По лемме 1 множество S_F замкнуто. Пусть $f_1, f_2 \in S_F$, $f \in [f_1, f_2]$. Тогда f непрерывна и $f(t) \in [f_1(t), f_2(t)] \subset F(t)$ для любого $t \in T$. Значит, $[f_1, f_2] \subset S_F$, т.е. S_F является промежутком. По следствию 1 имеем $S_F \neq \emptyset$.

Необходимость. Пусть M – замкнутый промежуток. Положим

$$F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \exists f \in M: f(t) = x\}.$$

Поскольку $M \neq \emptyset$, то $F(t) \neq \emptyset$. Докажем, что $F(t)$ – выпуклое замкнутое множество для любого $t \in T$. Пусть $x_1, x_2 \in F(t)$. Существуют функции $f_1, f_2 \in M$ такие, что $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t)$. Интервал $[f_1, f_2] \subset M$. Пусть $x \in [x_1, x_2]$. Тогда $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$. Функция $f = \alpha f_1 + (1 - \alpha)f_2$ принадлежит $[f_1, f_2]$, и $f(t) = x$. Значит, $x \in F(t)$, т.е. $F(t)$ выпукло.

Докажем замкнутость. Пусть $x \in F(t_0)$. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset F(t_0)$ такая, что $\|x_n - x\|_X \leq \frac{1}{2^n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует последовательность $\{f_n\} \subset M$ такая, что $f_n(t_0) = x_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Построим сходящуюся последовательность $\{h_n\} \subset M$ такую, что $h_n(t_0) = x_n$ и $\|h_n(t) - h_{n+1}(t)\|_X \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \in T$. Положим $h_1 \stackrel{\text{def}}{=} f_1$. Пусть построена h_n . Так как

$$\|f_{n+1}(t_0) - x\|_X \leq \frac{1}{2^n}, \quad \|h_n(t_0) - x\|_X \leq \frac{1}{2^n},$$

то

$$\|f_{n+1}(t_0) - h_n(t_0)\|_X \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Поскольку f_{n+1} непрерывна, то существует окрестность $O_{(n)}(t_0)$ такая, что для любого $t \in O_{(n)}(t_0)$

$$\|f_{n+1}(t) - h_n(t_0)\|_X \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Так как $\{t_0\}$ и $T \setminus O_{(n)}(t_0)$ замкнуты и не пересекаются, то по лемме Урысона о продолжении существует $\psi_n \in C(T, [0, 1])$ такая, что $\psi_n(t) = 1$, $t \in T \setminus O_{(n)}(t_0)$, и $\psi_n(t_0) = 0$. Положим

$$h_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_n h_n + (1 - \psi_n) f_{n+1}.$$

Тогда $h_{n+1} \in \llbracket h_n, f_{n+1} \rrbracket \subset M$, $h_{n+1}(t_0) = x_{n+1}$ и $\|h_n(t) - h_{n+1}(t)\|_X \leq (\frac{2}{3})^{n-1}$, $t \in T$. Значит, $\{h_n\}$ – последовательность Коши, и она сходится к функции $h \in M$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t_0) = h(t_0)$ и $h_n(t_0) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$, то $x = h(t_0) \in F(t_0)$. Следовательно, $F(t_0)$ замкнуто.

По построению $M \subset S_F$. Докажем обратное включение, т.е. что любая функция $f \in C(T, X)$ такая, что $f(t) \in F(t)$ для любого $t \in T$, принадлежит M . Сначала докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in M$ такая, что $\|f - g\| < \varepsilon$. Поскольку для любого $y \in T$ существует функция $h_y \in M$ такая, что $h_y(y) = f(y)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $O(y)$ такая, что

$$\|f(t) - h_y(t)\|_X < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in O(y).$$

Эти окрестности образуют открытое покрытие множества T , и из них можно выбрать конечное подпокрытие из N окрестностей $O(x_1), \dots, O(x_N)$.

Положим $g_1 \stackrel{\text{def}}{=} h_{x_1}$ и проведем индукционное построение по m последовательности $\{g_m\}_{m=1}^N$. Пусть построена функция $g_m \in M$ такая, что для любого $t \in \bigcup_{i=1}^m \overline{O(x_i)}$

$$\|f(t) - g_m(t)\|_X < \varepsilon$$

($\overline{O(x_i)}$ означает замыкание $O(x_i)$). Построим на T функцию $g_{m+1} \in M$ такую, что $\|f(t) - g_{m+1}(t)\|_X < \varepsilon$ для любого $t \in \bigcup_{i=1}^{m+1} \overline{O(x_i)}$.

Пусть $B = \{t \in T : \|h_{x_{m+1}}(t) - f(t)\|_X < \varepsilon\}$. Тогда $A = \bigcup_{i=1}^m \overline{O(x_i)} \setminus B$ замкнуто и не пересекается с $\overline{O(x_{m+1})}$. Значит, по лемме Урысона о продолжении существует непрерывная функция $\alpha_m : T \rightarrow [0, 1]$ такая, что $\alpha_m(t) = 1$ для любого $t \in A$ и $\alpha_m(t) = 0$ для любого $t \in O(x_{m+1})$.

Положим

$$g_{m+1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_m(t)g_m(t) + (1 - \alpha_m(t))h_{x_{m+1}}(t).$$

Поскольку $\alpha_m \in C(T, [0, 1])$, то $g_{m+1} \in \llbracket g_m, h_{x_{m+1}} \rrbracket \subset M$. Если $t \in A$, то $g_{m+1}(t) = g_m(t)$ и $\|g_{m+1}(t) - f(t)\|_X < \varepsilon$. Если $t \in (\bigcup_{i=1}^m \overline{O(x_i)}) \cap B$, то $\|h_{x_{m+1}}(t) - f(t)\|_X < \varepsilon$, поэтому $\|g_{m+1}(t) - f(t)\|_X < \varepsilon$. Если $t \in \overline{O(x_{m+1})}$, то $g_{m+1}(t) = h_{x_{m+1}}(t)$ и $\|g_{m+1}(t) - f(t)\|_X < \varepsilon$. В остальных случаях $t \notin \bigcup_{i=1}^{m+1} \overline{O(x_i)}$.

Положим $g \stackrel{\text{def}}{=} g_N \in O_\varepsilon(f) \cap M$. Значит, g – искомая функция.

Поскольку M – замкнутое множество, то $f \in M$. Следовательно, $M = S_F$.

Докажем, что отображение F полунепрерывно снизу. Пусть $V \subset X$ – открытое множество, $V \cap F(t_0) \neq \emptyset$. Тогда существует функция $f \in M$ такая, что $f(t_0) \in V$. Так как f непрерывна, то существует окрестность $O(t_0)$ такая, что для любого $t \in O(t_0)$ имеем $f(t) \in V$. Значит, множество $\{t \in T : F(t) \cap V \neq \emptyset\}$ открыто.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Замкнутый промежуток в $C(T, \mathbb{R})$ является интервалом II-го типа.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $M_1 \subset X$, $M_2 \subset X$. Хаусдорфовым расстоянием h между M_1 и M_2 называется величина

$$\max \left(\sup_{x \in M_1} \inf_{y \in M_2} \rho(x, y), \sup_{x \in M_2} \inf_{y \in M_1} \rho(x, y) \right).$$

Обозначим через $P(x, M)$ метрическую проекцию точки x на множество M . Если X – гильбертово пространство, а M выпукло и замкнуто, то эта метрическая проекция существует и единственна (см. [9]).

ТЕОРЕМА 3 (см. [4], [9]). Пусть X – гильбертово пространство, h – хаусдорфово расстояние между множествами в X . Тогда:

1) для любых непустых выпуклых замкнутых множеств $M_1, M_2 \subset X$ и для любой точки $x \in X$

$$\|P(x, M_1) - P(x, M_2)\|_X \rightarrow 0, \quad h(M_1, M_2) \rightarrow 0;$$

2) для любых $x_1, x_2 \in X$ и любого непустого выпуклого замкнутого множества $M \subset X$

$$\|P(x_1, M) - P(x_2, M)\|_X \leq \|x_1 - x_2\|_X.$$

Обозначим через $\text{Cl Con v}(X)$ множество всех непустых выпуклых замкнутых подмножеств пространства X с хаусдорфовой метрикой.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть X – гильбертово пространство. Тогда отображение $P|_{X \times \text{Cl Con v}(X)}$ является непрерывным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть X – метрическое пространство, $Y \subset X$ – множество существования в X . Выборкой из метрического проектора P на Y называется отображение $p: X \rightarrow Y$ такое, что $p(x) \in P(x)$ для любого $x \in X$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – гильбертово пространство, $F: T \rightarrow \text{Cl Con v}(X)$ – непрерывное отображение. Тогда существует выборка $p: C(T, X) \rightarrow S_F$ из метрического проектора такая, что

$$\|p(f) - p(g)\| \leq \|f - g\|$$

для любых $f, g \in C(T, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in C(T, X)$. Построим функцию p_f , сопоставив каждому $t \in T$ метрическую проекцию точки $f(t)$ на множество $F(t)$. Докажем, что $p_f \in C(T, X)$.

Рассмотрим отображение $\Phi: T \rightarrow X \times \text{Cl Con v}(X)$, сопоставляющее каждому $t \in T$ пару $(f(t), F(t))$. Это отображение непрерывно как отображение в произведение метрических пространств. Поскольку $p_f(t) = P(\Phi(t))$ и P непрерывно (по следствию 4), то p_f является непрерывной функцией.

Положим $p(f) \stackrel{\text{def}}{=} p_f$. Так как X – гильбертово пространство и множество $F(t)$ выпукло для любого $t \in T$, то для любых $f, g \in C(T, X)$ и $t \in T$

$$\|p_f(t) - p_g(t)\|_X \leq \|f(t) - g(t)\|_X.$$

Следовательно, для любых $f, g \in C(T, X)$

$$\|p(f) - p(g)\| = \|p_f - p_g\| \leq \|f - g\|.$$

Требование непрерывности отображения F является существенным.

ПРИМЕР. Пусть $X = \mathbb{R}$, $T = [0, 1]$, $F(0) = \{0\}$, $F(t) = [0, 1]$, $t \in (0, 1]$, $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{4}$, $t \in T$. Тогда если φ – наилучшее приближение функции f множеством S_F , то $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \in [0, \frac{1}{2}]$, $t \in (0, 1]$. Предположим, что существует наилучшее приближение $\varphi \in S_F$ такое, что для любой функции $g \in C(T, \mathbb{R})$ существует ее наилучшее приближение ψ такое, что $\|\varphi - \psi\| \leq \|f - g\|$. Положим

$$g_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} nt, & t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 1, & t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right). \end{cases}$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ функция g_n имеет единственное наилучшее приближение $\psi_n = g_n$. Для того чтобы выполнялось неравенство $\|\varphi - \psi_n\| \leq \|f - g_n\|$, необходимо, чтобы $\varphi(t) \geq \frac{1}{4}$, $t \geq \frac{1}{n}$. Следовательно, $\varphi(t) \geq \frac{1}{4}$ для любого $t > 0$, и поэтому φ не является наилучшим приближением для f , так как не является непрерывной.

ЛЕММА 2. Пусть $a, b \in C(T, X)$. Тогда существует непрерывное отображение $F: T \rightarrow 2^X$ такое, что $\llbracket a, b \rrbracket = S_F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $F(t) \stackrel{\text{def}}{=} [a(t), b(t)]$ и докажем, что F непрерывно. Поскольку $a, b \in C(T, X)$, то для любых $t_0 \in T$ и $\varepsilon > 0$ существует окрестность $O(t_0)$ такая, что для любого $t \in O(t_0)$

$$\|a(t) - a(t_0)\|_X < \varepsilon, \quad \|b(t) - b(t_0)\|_X < \varepsilon.$$

Рассмотрим произвольное $\alpha \in [0, 1]$. Тогда для любого $t \in O(t_0)$

$$\begin{aligned} \rho(\alpha a(t_0) + (1 - \alpha)b(t_0), [a(t), b(t)]) &\leq \|\alpha a(t_0) + (1 - \alpha)b(t_0) - \alpha a(t) - (1 - \alpha)b(t)\|_X \\ &\leq \alpha \|a(t) - a(t_0)\|_X + (1 - \alpha) \|b(t) - b(t_0)\|_X \\ &< \alpha \varepsilon + (1 - \alpha) \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, для любого $t \in O(t_0)$

$$\sup_{x \in [a(t_0), b(t_0)]} \rho(x, [a(t), b(t)]) \leq \varepsilon.$$

Аналогично доказывается, что для любого $t \in O(t_0)$

$$\sup_{x \in [a(t), b(t)]} \rho(x, [a(t_0), b(t_0)]) \leq \varepsilon.$$

Значит, $h([a(t_0), b(t_0)], [a(t), b(t)]) \leq \varepsilon$, $t \in O(t_0)$. Следовательно, F непрерывно.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если $a, b \in C(T, X)$, то $\llbracket a, b \rrbracket$ является множеством существования в $C(T, X)$.

ЛЕММА 3. Пусть X – гильбертово пространство, $a, b, f \in C(T, X)$, $d \geq \rho(f, [a, b])$, $p_f(t)$ – метрическая проекция точки $f(t)$ на отрезок $[a(t), b(t)]$. Каждому $t \in T$ сопоставим точку $x(t) \in [a(t), p_f(t)]$ такую, что

$$\|x(t) - f(t)\|_X = \min(d, \|a(t) - f(t)\|_X).$$

Тогда $x \in C(T, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное $t_0 \in T$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $O(t_0) = O(t_0, \varepsilon)$ такая, что для любого $t \in O(t_0)$ имеем

$$\|f(t) - f(t_0)\|_X < \varepsilon, \quad \|a(t) - a(t_0)\|_X < \varepsilon, \quad \|p_f(t) - p_f(t_0)\|_X < \varepsilon.$$

1) Если $\|f(t_0) - a(t_0)\|_X < d$, то существует окрестность $O'(t_0)$ такая, что для любого $t \in O'(t_0)$ имеем $\|f(t) - a(t)\|_X < d$. Тогда $x(t) = a(t)$ и $\|x(t_0) - x(t)\|_X < \varepsilon$ для любого $t \in O'(t_0)$.

2) Если $\|f(t_0) - a(t_0)\|_X > d$, то существует окрестность $O'(t_0)$ такая, что для любого $t \in O'(t_0)$ имеем $\|f(t) - a(t)\|_X > d$ и $a(t) \neq p_f(t)$. Тогда $\|f(t) - x(t)\|_X = d$, $t \in O'(t_0)$. Поскольку f, p_f, a непрерывны в t_0 , то $\|f(t) - p_f(t)\|_X$ и $\|a(t) - p_f(t)\|_X$ непрерывны в t_0 . Если $f(t_0) \neq p_f(t_0)$, то функция

$$\varphi(t) = \frac{(f(t) - p_f(t), a(t) - p_f(t))_X}{\|f(t) - p_f(t)\|_X \|a(t) - p_f(t)\|_X}$$

непрерывна в t_0 ; если $f(t_0) = p_f(t_0)$, то

$$\|x(t) - p_f(t)\|_X \rightarrow \|x(t_0) - f(t_0)\|_X.$$

Значит, $\|x(t) - p_f(t)\|_X$ непрерывна в t_0 .

Положим

$$\lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|x(t) - p_f(t)\|_X}{\|a(t) - p_f(t)\|_X}.$$

Тогда λ непрерывна в точке t_0 и $x(t) = \lambda(t)a(t) + (1 - \lambda(t))p_f(t)$. Отсюда следует, что x непрерывна в t_0 .

3) Пусть $\|f(t_0) - a(t_0)\|_X = d$. Тогда $x(t_0) = a(t_0)$. Положим

$$T_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in O(t_0) : \|f(t) - a(t)\|_X \leq d\}, \quad T_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in O(t_0) : \|f(t) - a(t)\|_X > d\}.$$

Если $t \in T_1$, то $x(t) = a(t)$. Пусть $t \in T_2$. Если $p_f(t_0) = a(t_0)$, то

$$\sup_{t \in T_2} \|x(t) - a(t)\|_X \leq \sup_{t \in O(t_0)} \|a(t) - p_f(t)\|_X \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Если $p_f(t_0) \neq a(t_0)$, то

$$\sup_{t \in T_2} \|x(t) - a(t)\|_X \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

(это доказывается так же, как в случае 2)). Значит, x непрерывна в t_0 .

ТЕОРЕМА 5. Пусть X – гильбертово пространство, $F: T \rightarrow X$ такое, что для любого $t \in T$ множество $F(t)$ выпукло и замкнуто. Если S_F непусто, то оно является множеством существования в $C(T, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in C(T, X)$, $\rho(f, S_F) = d$. Если $\rho(g, f) > d$, $g \in S_F$, то существует последовательность $\{g_n\} \subset S_F$ такая, что $\rho(g_n, f) \leq d + \frac{1}{2^n}$. Положим $f_1 \stackrel{\text{def}}{=} g_1$. Проведем индукционное построение по n . Пусть построена $f_{n-1} \in S_F$, $\rho(f_{n-1}, f) \leq d + \frac{1}{2^{n-1}}$. Пусть $h_n(t)$ – проекция $f(t)$ на $[f_{n-1}(t), g_n(t)]$; тогда h_n непрерывна и $\|h_n - f\| \leq d + \frac{1}{2^n}$.

Построим функцию f_n : каждому $t \in T$ сопоставим точку $f_n(t) \in X$ такую, что $f_n(t) \in [f_{n-1}(t), h_n(t)]$ и

$$\|f_n(t) - f(t)\|_X = \min\left(\|f_{n-1}(t) - f(t)\|_X, d + \frac{1}{2^n}\right).$$

Эта функция однозначна, так как $h_n(t)$ – метрическая проекция на $[f_{n-1}(t), g_n(t)]$ и $f_n(t) \in [f_{n-1}(t), h_n(t)]$. Из леммы 3 следует, что f_n непрерывна.

Поскольку $f_n(t) \in [f_{n-1}(t), g_n(t)]$ для любого $t \in T$, то $f_n \in \llbracket f_{n-1}, g_n \rrbracket \subset S_F$.

Докажем, что $\{f_n\}$ – последовательность Коши. Если $\|f(t) - f_{n-1}(t)\|_X \leq d + \frac{1}{2^n}$, то $\|f_n(t) - f_{n-1}(t)\|_X = 0$, в остальных случаях

$$\begin{aligned} \|f_n(t) - f_{n-1}(t)\|_X &= \sqrt{\|f(t) - f_{n-1}(t)\|_X^2 - r^2} - \sqrt{\left(d + \frac{1}{2^n}\right)^2 - r^2} \\ &\leq \sqrt{\left(d + \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 - r^2} - \sqrt{\left(d + \frac{1}{2^n}\right)^2 - r^2}, \end{aligned}$$

где r – расстояние от $f(t)$ до прямой, содержащей точки $f_{n-1}(t)$ и $g_n(t)$. Если

$$\sqrt{\left(d + \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 - r^2} < \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

то $\|f_n(t) - f_{n-1}(t)\|_X < \left(\frac{2}{3}\right)^n$, иначе

$$\begin{aligned} \|f_n(t) - f_{n-1}(t)\|_X &\leq \frac{\left(d + \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 - \left(d + \frac{1}{2^n}\right)^2}{\sqrt{\left(d + \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 - r^2} + \sqrt{\left(d + \frac{1}{2^n}\right)^2 - r^2}} \\ &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{d}{2^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^n}\right). \end{aligned}$$

Значит, $\{f_n\}$ – последовательность Коши, и поэтому она имеет предел $h \in S_F$ (так как S_F замкнуто). Поскольку $\|h - f\| = d$, то h – наилучшее приближение для f в S_F .

ЛЕММА 4. Пусть X – гильбертово пространство, $a, b \in C(T, X)$, P – метрический проектор на интервал $\llbracket a, b \rrbracket$, h – хаусдорфово расстояние в 2^X . Тогда для любых $f_1, f_2 \in C(T, X)$ имеем

$$h(P(f_1), P(f_2)) \leq 2\sqrt{\max(R, R')\|f_1 - f_2\| + \|f_1 - f_2\|^2},$$

где $R = \rho(f_2, \llbracket a, b \rrbracket) = \inf_{v \in \llbracket a, b \rrbracket} \|f_2 - v\|$, $R' = \rho(f_1, \llbracket a, b \rrbracket) = \inf_{v \in \llbracket a, b \rrbracket} \|f_1 - v\|$. Если $X = \mathbb{R}$, то метрический проектор на интервал удовлетворяет условию Липшица с константой 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_1, f_2 \in C(T, X)$, $\|f_1 - f_2\| = r$. Оценим сверху $h(P(f_1), P(f_2))$. Пусть $x \in P(f_1)$. Оценим сверху $\inf_{y \in P(f_2)} \|x - y\|$. Каждому $t \in T$ сопоставим $\alpha(t) \in [a(t), p_{f_2}(t)]$ такое, что

$$\|f_2(t) - \alpha(t)\|_X = \min(R, \|f_2(t) - a(t)\|_X),$$

и $\beta(t) \in [b(t), p_{f_2}(t)]$ такое, что

$$\|f_2(t) - \beta(t)\|_X = \min(R, \|f_2(t) - b(t)\|_X).$$

Из леммы 3 следует, что функции α и β непрерывны, поэтому они принадлежат $\llbracket a, b \rrbracket$. Если $\varphi \in C(T, X)$, то φ является наилучшим приближением для f_2 тогда и только тогда, когда $\varphi \in \llbracket \alpha, \beta \rrbracket$. Значит, чтобы найти $\inf_{y \in P(f_2)} \rho(x, y)$, достаточно взять наилучшее приближение φ для x из $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket$ и найти $\|x - \varphi\|$.

Положим

$$\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \alpha(t) & \text{при } t \text{ таком, что } x(t) \in [\alpha(t), a(t)], \\ \beta(t) & \text{при } t \text{ таком, что } x(t) \in [\beta(t), b(t)], \\ x(t) & \text{при } t \text{ таком, что } x(t) \in [\alpha(t), \beta(t)]. \end{cases}$$

Пусть $x(t) \notin [\alpha(t), \beta(t)]$. Тогда $\varphi(t) = \alpha(t)$ или $\varphi(t) = \beta(t)$, и поэтому $\|f_2(t) - \varphi(t)\|_X = R$.

Докажем, что $\|f_1 - x\| \leq R + r$. Поскольку $x \in P(f_1)$, то $\|f_1 - x\| = \|f_1 - p_{f_1}\|$. Кроме того, для любого $t \in T$

$$\|f_1(t) - p_{f_1}(t)\|_X \leq \|f_1(t) - p_{f_2}(t)\|_X \leq \|f_1(t) - f_2(t)\|_X + \|f_2(t) - p_{f_2}(t)\|_X \leq R + r.$$

Пусть $u_{f_1}(t)$, $u_{f_2}(t)$ – проекции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно на прямую, содержащую $a(t)$ и $b(t)$, $d = \|f_1(t) - u_{f_1}(t)\|_X$, $c = \|f_2(t) - u_{f_2}(t)\|_X$. Тогда

$$\|x(t) - \varphi(t)\|_X \leq \|x(t) - u_{f_1}(t)\|_X + \|u_{f_1}(t) - u_{f_2}(t)\|_X - \|u_{f_2}(t) - \varphi(t)\|_X.$$

Так как векторы $u_{f_1}(t) - u_{f_2}(t)$ и $f_1(t) - u_{f_1}(t) + f_2(t) - u_{f_2}(t)$ ортогональны, то

$$\|u_{f_1}(t) - u_{f_2}(t)\|_X^2 = \|f_1(t) - f_2(t)\|_X^2 - \|f_1(t) - u_{f_1}(t) + f_2(t) - u_{f_2}(t)\|_X^2,$$

причем $|d - c| \leq \|f_1(t) - u_{f_1}(t) + f_2(t) - u_{f_2}(t)\|_X \leq d + c$. Значит,

$$\begin{aligned} \|x(t) - \varphi(t)\|_X &\leq \sqrt{\|f_1(t) - x(t)\|_X^2 - d^2} \\ &\quad + \sqrt{\|f_1(t) - f_2(t)\|_X^2 - \|f_1(t) - u_{f_1}(t) + f_2(t) - u_{f_2}(t)\|_X^2 - \sqrt{R^2 - c^2}} \\ &\leq \sqrt{(R + r)^2 - d^2} + \sqrt{r^2 - (d - c)^2} - \sqrt{R^2 - c^2} \stackrel{\text{def}}{=} g(c). \end{aligned}$$

Найдем максимум $g(c)$ на ее области определения.

1) Пусть $g'(c) = 0$. Тогда $c = \frac{Rd}{R+r}$ или $c = \frac{Rd}{R-r}$. В первом случае

$$g(c) = \frac{2r}{R+r} \sqrt{(R+r)^2 - d^2} \leq 2r.$$

Во втором случае

$$g(c) = \sqrt{(R+r)^2 - d^2} - \sqrt{(R-r)^2 - d^2} \leq 2\sqrt{Rr}.$$

2) Пусть $c = R$. Тогда $g(c) = \sqrt{(R+r)^2 - d^2} + \sqrt{r^2 - (R-d)^2} \leq 2\sqrt{r^2 + Rr}$.

3) Пусть $(c-d)^2 = r^2$. Тогда $g(c) \leq \sqrt{(R+r)^2 - d^2} - \sqrt{R^2 - (r+d)^2} \leq 2\sqrt{Rr}$.

Поэтому $\max g(c) \leq 2\sqrt{r^2 + Rr}$, и если $d = \frac{R^2 + Rr}{2r + R}$, то это значение достигается. Значит, для любого $x \in P(f_1)$

$$\inf_{y \in P(f_2)} \|y - x\| \leq 2\sqrt{Rr + r^2},$$

для любого $x \in P(f_2)$

$$\inf_{y \in P(f_1)} \|y - x\| \leq 2\sqrt{R'r + r^2},$$

поэтому

$$h(P(f_1), P(f_2)) \leq 2\sqrt{r \max(R, R') + r^2}.$$

Если $X = \mathbb{R}$, то $d = c = 0$, и $\|x(t) - \varphi(t)\|_X \leq 2r$ для любого $t \in T$.

Пусть $X = \mathbb{R}$, $T = \{t_1, t_2\}$, $a(t_1) = a(t_2) = 0$, $b(t_1) = 0$, $b(t_2) = 2\delta + \varepsilon$, $f_1(t_1) = \varepsilon$, $f_1(t_2) = 0$, $f_2(t_1) = \varepsilon + \delta$, $f_2(t_2) = \delta$, $\varepsilon < \delta$. Тогда $h(P(f_1), P(f_2)) = 2\delta$, т. е. константа Липшица 2 достигается.

ТЕОРЕМА 6. Пусть P – метрический проектор на S_F . Тогда

$$\begin{aligned} h(P(f_1), P(f_2)) &\leq 2\sqrt{\max(\rho(f_1, S_F), \rho(f_2, S_F))\|f_1 - f_2\| + \|f_1 - f_2\|^2} \\ &\quad \forall f_1, f_2 \in C(T, X). \end{aligned}$$

Если $X = \mathbb{R}$, то метрический проектор на S_F удовлетворяет условию Липшица с константой 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x, y – наилучшие приближения из S_F для f_1 и f_2 соответственно. Тогда

$$\inf_{z \in P(f_2)} \|x - z\| \leq \inf_{z \in [x, y] \cap P(f_2)} \|x - z\| \leq 2\sqrt{Rr + r^2},$$

где $r = \|f_1 - f_2\|$, $R = \rho(f_2, [x, y])$. Поскольку $\rho(f_2, S_F) = R$, то

$$\inf_{z \in P(f_2)} \rho(x, z) \leq 2\sqrt{r\rho(f_2, S_F) + r^2}.$$

Если $X = \mathbb{R}$, то

$$\inf_{z \in P(f_2)} \rho(x, z) \leq \inf_{z \in [x, y] \cap P(f_2)} \rho(x, z) \leq 2r.$$

В силу произвольности x получаем, что

$$\sup_{x \in P(f_1)} \inf_{z \in P(f_2)} \|x - z\| \leq 2\sqrt{r\rho(f_2, S_F) + r^2},$$

а если $X = \mathbb{R}$, то

$$\sup_{x \in P(f_1)} \inf_{z \in P(f_2)} \|x - z\| \leq 2r.$$

§ 3. Замкнутые промежутки в $L_\varphi(T, X)$

Сначала введем необходимые определения и докажем некоторые свойства пространства $L_\varphi(T, X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Пусть $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – четная, неубывающая на $[0, +\infty)$, непрерывная в нуле функция такая, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(u) > 0$ для любого $u \neq 0$. Множество таких функций обозначим Φ . Для $\varphi \in \Phi$ классом $L_\varphi(T, \mathbb{R})$ называется множество измеримых функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $\int_T \varphi(f(t)) dt < \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Функция $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет условию Δ_α , если $\varphi(\alpha u) = O(\varphi(u))$, $u \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 7 [6]. Пусть $\varphi \in \Phi$, $\alpha > 1$. Тогда для того, чтобы функция φ удовлетворяла условию Δ_α , необходимо и достаточно, чтобы φ удовлетворяла условию Δ_2 .

ТЕОРЕМА 8 [6]. Пусть $\varphi \in \Phi$. Тогда для того, чтобы класс $L_\varphi(T, \mathbb{R})$ являлся линейным пространством, необходимо и достаточно, чтобы функция φ удовлетворяла условию Δ_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Пусть $f, g \in L_\varphi(T, \mathbb{R})$. Тогда

$$\rho_\varphi(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_T \varphi(f(t) - g(t)) dt$$

называется φ -расстоянием между f и g .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В общем случае φ -расстояние не задает метрику на $L_\varphi(T, \mathbb{R})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть T – пространство с мерой, X – банахово пространство. Функция $f: T \rightarrow X$ называется *простой*, если она принимает не более чем счетное число значений и для любого $x \in f(T)$ множество $\{t \in T: f(t) = x\}$ измеримо.

Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ функций $f: T \rightarrow X$ таких, что существует последовательность простых функций $\{f_n\}$, равномерно сходящаяся к f на множестве полной меры. Тогда если $f \in \mathcal{F}$, то существует функция $\tilde{f} \sim f$ такая, что существует последовательность простых функций, сходящаяся к $\tilde{f}$ равномерно на T .

ЛЕММА 5. Множество $\mathcal{F}$ является векторным пространством. Если $f \in \mathcal{F}$, то функция $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \|f(t)\|_X$ измерима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f_n и h_n сходятся равномерно к f и h соответственно, то $f_n + h_n$ сходится равномерно к $f + h$ и λf_n сходится равномерно к λf для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. Значит, $\mathcal{F}$ – векторное пространство.

Докажем измеримость $g(t)$. Пусть $c > 0$. Тогда множество $\{t \in T: \|f(t)\|_X < c\}$ представимо в виде $\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (0, c)} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \{t \in T: \|f_n(t)\|_X < c - q\}$, поэтому оно измеримо.

ЛЕММА 6. Пусть $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ сходится к функции f почти всюду. Тогда $f \in \mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку f_n сходится к f почти всюду, то для любого $r \in \mathbb{N}$

$$\mu\left(\left\{t \in T \mid \exists N \in \mathbb{N}: \|f_n(t) - f_m(t)\|_X < \frac{1}{r} \quad \forall m, n \geq N\right\}\right) = \mu(T).$$

Поэтому

$$\mu\left(\left\{t \in T \mid \|f_n(t) - f_m(t)\|_X < \frac{1}{r} \quad \forall m, n \geq N\right\}\right) \rightarrow \mu(T), \quad N \rightarrow \infty.$$

Значит, для любых $\delta > 0$ и $r \in \mathbb{N}$ существует $N_r \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\mu\left(\left\{t \in T \mid \|f_n(t) - f_m(t)\|_X < \frac{1}{r} \quad \forall m, n \geq N_r\right\}\right) \geq \mu(T) - \frac{\delta}{2r}.$$

Положим $T_\delta = \{t \in T \mid \|f_n(t) - f_m(t)\|_X < \frac{1}{r} \quad \forall r \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_r\}$. Тогда $\mu(T_\delta) \geq \mu(T) - \delta$. При этом f_n сходится к f равномерно на T_δ .

Пусть $\delta_n \rightarrow 0$. Тогда $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_{\delta_n}) = \mu(T)$. Поскольку для любого $m \in \mathbb{N}$ функция f_n сходится к f равномерно на $(\bigcup_{k=1}^m T_{\delta_k}) \setminus (\bigcup_{k=1}^{m-1} T_{\delta_k})$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует f_{n_m} такая, что для любого $t \in (\bigcup_{k=1}^m T_{\delta_k}) \setminus (\bigcup_{k=1}^{m-1} T_{\delta_k})$ имеем $\|f_{n_m}(t) - f(t)\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $f_{n_m} \in \mathcal{F}$, то существует простая функция $f_{n_m}^*$ такая, что для любого $t \in T$ имеем $\|f_{n_m}^*(t) - f_{n_m}(t)\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $g(t) = f_{n_m}^*(t)$ при $t \in (\bigcup_{k=1}^m T_{\delta_k}) \setminus (\bigcup_{k=1}^{m-1} T_{\delta_k})$. Тогда g – простая функция, и почти всюду на T выполнено неравенство $\|f(t) - g(t)\|_X < \varepsilon$. Следовательно, $f \in \mathcal{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Пусть $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет условию Δ_2 . *Пространством* $L_\varphi(T, X)$ называется множество $\{f \in \mathcal{F}: \|f(t)\|_X \in L_\varphi(T, \mathbb{R})\}$ с расстоянием

$$\rho_\varphi(f, g) = \int_T \varphi(\|f(t) - g(t)\|_X) dt.$$

Из условия Δ_2 следует, что $L_\varphi(T, X)$ является векторным пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Последовательность $\{f_n\} \subset L_\varphi(T, X)$ называется *сходящейся* к $f \in L_\varphi(T, X)$ по расстоянию ρ_φ , если $\rho_\varphi(f_n, f) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Множество $E \subset L_\varphi(T, X)$ называется *замкнутым*, если предел любой последовательности $\{f_n\} \subset E$, сходящейся по расстоянию ρ_φ , принадлежит E .

ЛЕММА 7. Пусть $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет условию Δ_2 , последовательность $\{f_n\} \subset L_\varphi(T, \mathbb{R})$ сходится к нулю по расстоянию ρ_φ . Тогда $\{\alpha f_n\} \subset L_\varphi(T, \mathbb{R})$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится к нулю по расстоянию ρ_φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку φ удовлетворяет условию Δ_2 , то по теореме 7 φ удовлетворяет условию Δ_α . Следовательно, существуют $u_0 > 0$ и $C > 0$ такие, что $\varphi(\alpha u) \leq C\varphi(u)$ для всех $u \geq u_0$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Докажем, что существует $\delta \in (0, \varepsilon]$ такое, что если $\varphi(u) < \delta$, то $\varphi(\alpha u) < \varepsilon$. Положим $u_1 = \inf\{u > 0: \varphi(u) \geq \varepsilon\}$, $\delta = \min(\varphi(\frac{u_1}{\max(1, |\alpha|)}), \varepsilon)$. Так как $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = 0$, то $u_1 > 0$, и поэтому $\delta > 0$. Если $\varphi(u) < \delta$, то $u < \frac{u_1}{\max(1, |\alpha|)}$. Значит, $\alpha u < u_1$ и $\varphi(\alpha u) < \varepsilon$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\begin{aligned} T_1(n) &= \{t \in T: |f_n(t)| \geq u_0\}, \\ T_2(n) &= \{t \in T: |f_n(t)| < u_0 \text{ \& } \varphi(f_n(t)) < \delta\}, \\ T_3(n) &= \{t \in T: |f_n(t)| < u_0 \text{ \& } \varphi(f_n(t)) \geq \delta\}. \end{aligned}$$

Поскольку $f_n \xrightarrow{\rho_\varphi} 0$, то существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\rho_\varphi(f_n, 0) < \delta^2$ для любого $n \geq N$. Тогда

$$\int_{T_1(n)} \varphi(\alpha f_n(t)) dt \leq \int_{T_1(n)} C\varphi(f_n(t)) dt \leq C \int_T \varphi(f_n(t)) dt < C\delta^2.$$

Так как $\varphi(f_n(t)) < \delta$ для любого $t \in T_2(n)$, то $\varphi(\alpha f_n(t)) < \varepsilon$ и поэтому

$$\int_{T_2(n)} \varphi(\alpha f_n(t)) dt < \varepsilon \mu(T_2(n)) \leq \varepsilon \mu(T).$$

Поскольку

$$\int_{T_3(n)} \varphi(f_n(t)) dt \leq \int_T \varphi(f_n(t)) dt < \delta^2,$$

то $\mu(T_3(n)) < \delta$ и

$$\int_{T_3(n)} \varphi(\alpha f_n(t)) dt < \varphi(\alpha u_0) \delta.$$

Значит, при $n \geq N$

$$\begin{aligned} \int_T \varphi(\alpha f_n(t)) dt &= \sum_{i=1}^3 \int_{T_i(n)} \varphi(\alpha f_n(t)) dt \leq C\delta^2 + \varepsilon\mu(T) + \delta\varphi(\alpha u_0) \\ &\leq C\varepsilon^2 + \varepsilon\mu(T) + \varepsilon\varphi(\alpha u_0) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 8. Пусть $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет условию Δ_2 , $\{f_n\}, \{g_n\} \subset L_\varphi(T, \mathbb{R})$ сходятся к нулю по расстоянию ρ_φ . Тогда $f_n + g_n$ сходится к нулю по расстоянию ρ_φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T_{1,n} = \{t \in T: f_n(t) \geq g_n(t)\}$, $T_{2,n} = \{t \in T: f_n(t) < g_n(t)\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_T \varphi(f_n(t) + g_n(t)) dt &\leq \int_T \varphi(2 \max(f_n(t), g_n(t))) dt \\ &= \int_{T_{1,n}} \varphi(2f_n(t)) dt + \int_{T_{2,n}} \varphi(2g_n(t)) dt \\ &\leq \int_T \varphi(2f_n(t)) dt + \int_T \varphi(2g_n(t)) dt. \end{aligned}$$

По лемме 7 имеем

$$\int_T \varphi(2f_n(t)) dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \int_T \varphi(2g_n(t)) dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

поэтому

$$\int_T \varphi(f_n(t) + g_n(t)) dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

ЛЕММА 9. Пусть $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет условию Δ_2 . Тогда для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon^* > 0$ такое, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ и $x_\varepsilon \in L_\varphi(T, \mathbb{R})$ имеем

$$\int_T \varphi(x_\varepsilon(t)) dt < \varepsilon \Rightarrow \int_T \varphi(x_\varepsilon(t) + \varepsilon) dt < \delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку φ удовлетворяет условию Δ_2 , то существуют $C > 0$, $u_0 > \varepsilon$ такие, что для любого $u \geq u_0$ выполнено неравенство $\varphi(2u) \leq C\varphi(u)$. Для каждой функции x_ε такой, что $\int_T \varphi(x_\varepsilon(t)) dt < \varepsilon$, положим

$$\begin{aligned} T_1(x_\varepsilon) &= \{t \in T: |x_\varepsilon(t)| \geq u_0\}, \\ T_2(x_\varepsilon) &= \{t \in T: |x_\varepsilon(t)| < u_0 \text{ \& } \varphi(|x_\varepsilon(t)|) \geq \sqrt{\varepsilon}\}, \\ T_3(x_\varepsilon) &= \{t \in T: |x_\varepsilon(t)| < u_0 \text{ \& } \varphi(|x_\varepsilon(t)|) < \sqrt{\varepsilon}\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_{T_1(x_\varepsilon)} \varphi(|x_\varepsilon(t)| + \varepsilon) dt \leq \int_{T_1(x_\varepsilon)} \varphi(2|x_\varepsilon(t)|) dt \leq C \int_T \varphi(|x_\varepsilon(t)|) dt < C\varepsilon < \frac{\delta}{3}$$

при $\varepsilon < \varepsilon_1$. Так как

$$\int_{T_2(x_\varepsilon)} \varphi(|x_\varepsilon(t)|) dt \leq \int_T \varphi(|x_\varepsilon(t)|) dt < \varepsilon,$$

то $\mu(T_2(x_\varepsilon)) < \sqrt{\varepsilon}$, и поэтому при $\varepsilon < \varepsilon_2$

$$\int_{T_2(x_\varepsilon)} \varphi(|x_\varepsilon(t)| + \varepsilon) dt < \varphi(u_0 + \varepsilon)\sqrt{\varepsilon} < \frac{\delta}{3}.$$

Поскольку $\varphi(u) > 0$ при любом $u > 0$, то для любого $\alpha > 0$ существует $\varepsilon_0(\alpha) > 0$ такое, что $\varphi(u) < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |u| < \alpha$ для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Выберем $\gamma > 0$ такое, что $\gamma\mu(T) < \frac{\delta}{3}$. Докажем, что существует $\varepsilon_3 > 0$ такое, что $\varphi(u) < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \varphi(u + \varepsilon) < \gamma$ для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$. Действительно, существует $\alpha > 0$ такое, что $\varphi(u) < \gamma$ для любого $u \in [-\alpha, \alpha]$.

Положим $\varepsilon_3 \stackrel{\text{def}}{=} \min(\varepsilon_0(\frac{\alpha}{2}), \frac{\alpha}{2})$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$

$$\varphi(u) < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |u| < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \varphi(u + \varepsilon) \leq \varphi(\alpha) < \gamma.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$

$$\int_{T_3(x_\varepsilon)} \varphi(|x_\varepsilon(t)| + \varepsilon) dt < \gamma\mu(T) < \frac{\delta}{3}.$$

Положим $\varepsilon^* = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$

$$\begin{aligned} \int_T \varphi(|x_\varepsilon(t)| + \varepsilon) dt &= \int_{T_1(x_\varepsilon)} \varphi(|x_\varepsilon(t)| + \varepsilon) dt + \int_{T_2(x_\varepsilon)} \varphi(|x_\varepsilon(t)| + \varepsilon) dt \\ &\quad + \int_{T_3(x_\varepsilon)} \varphi(|x_\varepsilon(t)| + \varepsilon) dt \leq C\varepsilon + \varphi(u_0 + \varepsilon)\sqrt{\varepsilon} + \gamma\mu(T) < \delta. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Последовательность $\{f_n\} \subset L_\varphi(T, X)$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\rho_\varphi(f_n, f_m) < \varepsilon$ для любых $n, m \geq N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Пространство $L_\varphi(T, X)$ называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность $\{f_n\} \subset L_\varphi(T, X)$ сходится по расстоянию ρ_φ к функции $f \in L_\varphi(T, X)$.

ЛЕММА 10. Пусть $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет условию Δ_2 . Тогда пространство $L_\varphi(T, X)$ является полным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{x_n\} \subset L_\varphi(T, X)$ такова, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $m, n \geq N(\varepsilon)$

$$\int_T \varphi(\|x_n(t) - x_m(t)\|_X) dt < \varepsilon.$$

Построим последовательность $\{n_r\}_{r=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ такую, что $n_r > N\left(\frac{1}{2^r} \varphi\left(\frac{1}{2^r}\right)\right)$. Тогда

$$\int_T \varphi(\|x_{n_{r+1}} - x_{n_r}\|_X) dt < \frac{1}{2^r} \varphi\left(\frac{1}{2^r}\right).$$

Следовательно, $\mu\left(\left\{t \in T: \|x_{n_{r+1}}(t) - x_{n_r}(t)\|_X \geq \frac{1}{2^r}\right\}\right) < \frac{1}{2^r}$. Поэтому существует множество $T_r \subset T$ такое, что для любых $t \in T_r$ и $k \geq r$

$$\|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)\|_X < \frac{1}{2^k}, \quad \mu(T \setminus T_r) < \sum_{k=r}^\infty \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{r-1}}.$$

Тогда $\mu\left(T \setminus \left(\bigcup_{r=1}^\infty T_r\right)\right) = 0$. Поскольку для любых $r \in \mathbb{N}$, $s > m > r$ и $t \in T_r$

$$\|x_{n_m}(t) - x_{n_s}(t)\|_X \leq \sum_{k=m}^{s-1} \|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)\|_X < \sum_{k=m}^{s-1} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

то последовательность $\{x_{n_s}\}$ сходится равномерно на T_r при всех $r \in \mathbb{N}$. Положим

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}(t), & t \in \bigcup_{r=1}^\infty T_r, \\ 0, & t \notin \bigcup_{r=1}^\infty T_r. \end{cases}$$

Докажем, что $x \in \mathcal{F}$. Положим $T'_r = T_r \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{r-1} T_k\right)$. Докажем, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует простая функция y_m такая, что $\|x(t) - y_m(t)\|_X < \frac{1}{m}$ для всех $t \in T$. Действительно, так как для любого $r \in \mathbb{N}$ последовательность x_{n_k} сходится равномерно на T'_r к x , то для любого $r \in \mathbb{N}$ существует $k(r)$ такое, что для любого $t \in T'_r$

$$\|x_{n_{k(r)}}(t) - x(t)\|_X < \frac{1}{m}.$$

Так как $x_{n_{k(r)}} \in L_\varphi(T, X)$, то существует простая функция y_{rm} такая, что $\|y_{rm}(t) - x_{n_{k(r)}}(t)\|_X < \frac{1}{m}$ для всех $t \in T'_r$. Положим

$$y_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} y_{rm}(t), & t \in T'_r, \\ 0, & t \in T \setminus \left(\bigcup_{r=1}^\infty T_r\right). \end{cases}$$

Тогда y_m — простая функция и $\|y_m(t) - x(t)\|_X < \frac{1}{m}$ для любых $t \in T$. Следовательно, $x \in \mathcal{F}$.

Докажем, что для любого $\delta > 0$ существует N_0 такое, что для любых $r \in \mathbb{N}$ и $m > N_0$

$$\int_{T_r} \varphi(\|x_m(t) - x(t)\|_X) dt < \delta.$$

Действительно, для любых $\varepsilon > 0$ и $m, n_k \geq N(\varepsilon)$

$$\int_{T_r} \varphi(\|x_m(t) - x_{n_k}(t)\|_X) dt < \varepsilon$$

и существует $K \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $k \geq K$ и $t \in T_r$ выполнено неравенство $\|x_{n_k}(t) - x(t)\|_X < \varepsilon$. Тогда для любых $k \geq \max(N(\varepsilon), K)$ и $m \geq N(\varepsilon)$

$$\int_{T_r} \varphi(\|x_m(t) - x(t)\|_X) dt \leq \int_{T_r} \varphi(\|x_m(t) - x_{n_k}(t)\|_X + \varepsilon) dt.$$

По лемме 9 для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon^* > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$

$$\int_{T_r} \varphi(\|x_m(t) - x_{n_k}(t)\|_X + \varepsilon) dt < \delta,$$

и поэтому для любого $m > N(\varepsilon)$

$$\int_{T_r} \varphi(\|x_m(t) - x(t)\|_X) dt < \delta.$$

Поскольку $T_r \subset T_{r+1}$, $r \in \mathbb{N}$, то $\int_T \varphi(\|x_m(t) - x(t)\|_X) dt \leq \delta$. Следовательно, $x \in L_\varphi(T, X)$ и $\{x_m\}$ сходится к x по расстоянию ρ_φ .

ЛЕММА 11. Пусть $f \in L_\varphi(T, X)$, $\alpha: T \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая ограниченная функция. Тогда $\alpha f \in L_\varphi(T, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f \in \mathcal{F}$, α — измеримая функция, то существуют последовательности простых функций f_n и α_n , сходящиеся равномерно к f и α соответственно. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ функция $\alpha_n f_n$ является простой. Так как последовательность $\{\alpha_n f_n\}$ равномерно сходится к αf , то $\alpha f \in \mathcal{F}$. Поскольку α ограничена, то существует $c > 0$ такое, что $|\alpha(t)| < c$, $t \in T$. Значит, $\varphi(\|\alpha(t)f(t)\|_X) \leq \varphi(c\|f(t)\|_X) \in L_1(T, \mathbb{R})$, т.е. $\alpha f \in L_\varphi(T, X)$.

ЛЕММА 12. Пусть $f, g \in L_\varphi(T, X)$, $T' \subset T$ — измеримое множество. Положим

$$h(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(t), & t \in T', \\ g(t), & t \in T \setminus T'. \end{cases}$$

Тогда $h \in L_\varphi(T, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{f_n\}, \{g_n\}$ — последовательности простых функций, равномерно сходящихся к f и g соответственно. Положим

$$h_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f_n(t), & t \in T', \\ g_n(t), & t \in T \setminus T'. \end{cases}$$

Тогда $\{h_n\}$ равномерно сходится к h и, следовательно, $h \in L_\varphi(T, X)$.

ЛЕММА 13. Пусть X – гильбертово пространство, $f \in L_\varphi(T, X)$. Каждому $t \in T$ сопоставим метрическую проекцию точки $f(t)$ на шар B с центром в нуле радиуса R и получим функцию $g(t)$. Тогда $g \in L_\varphi(T, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{f_n\}$ – последовательность простых функций, равномерно сходящаяся к f . Пусть $g_n(t)$ – метрическая проекция точки $f_n(t)$ на B . Тогда g_n является простой функцией. Так как метрический проектор на шар в гильбертовом пространстве удовлетворяет условию Липшица с константой 1, то $\{g_n\}$ равномерно сходится к g . Следовательно, функция $g \in L_\varphi(T, X)$ в силу её ограниченности.

ЛЕММА 14. Пусть $F: T \rightarrow 2^X$ такое, что $F(t)$ – выпуклое замкнутое множество для любого $t \in T$. Тогда S_F замкнуто в $L_\varphi(T, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует последовательность $\{f_m\} \subset S_F$ такая, что $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$. Тогда

$$\int_T \varphi(\|f_m(t) - f(t)\|_X) dt \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

и поэтому существуют последовательность $\{m_k\} \subset \mathbb{N}$ и множество $T' \subset T$ такие, что $\mu(T') = \mu(T)$, и для любого $t \in T'$

$$\|f_{m_k}(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Так как $F(t)$ замкнуто для всех $t \in T$ и $f_{m_k}(t) \in F(t)$ почти всюду для любого m_k , то $f(t) \in F(t)$ почти всюду, и поэтому $f \in S_F$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $F: T \rightarrow 2^X$ такое, что для любого $t \in T$ множество $F(t)$ выпукло и замкнуто. Тогда S_F является замкнутым промежутком.

ЛЕММА 15. Пусть X – гильбертово пространство, M – замкнутый промежуток в $L_\varphi(T, X)$, $0 \in M$, $f_0 \in L_\varphi(T, X)$ – ограниченная функция, $d: T \rightarrow \mathbb{R}_+$ – измеримая и ограниченная функция. Тогда:

- 1) существует измеримое множество $T' \subset T$ такое, что:
 - а) существует $h \in M$ такая, что $\|h(t) - f_0(t)\|_X \geq d(t)$ для любого $t \in T'$;
 - б) $\mu(\{t \in T \setminus T' : \|f(t) - f_0(t)\|_X \geq d(t)\}) = 0$ для любой $f \in M$;
- 2) существует измеримое множество $T'' \subset T$ такое, что:
 - а) существует функция $h' \in M$ такая, что $\|h'(t) - f_0(t)\|_X \leq d(t)$ для любого $t \in T''$;
 - б) $\mu(\{t \in T \setminus T'' : \|f(t) - f_0(t)\|_X \leq d(t)\}) = 0$ для любой $f \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1) (утверждение 2) доказывается аналогично).

Рассмотрим все измеримые подмножества множества T , для которых выполняется а), и возьмем точную верхнюю грань их мер μ_0 . Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $T_n \subset T$ такое, что $\mu(T_n) \geq \mu_0 - \frac{1}{2^n}$, и существует $g_n \in M$ такое, что $\|g_n(t) - f_0(t)\|_X \geq d(t)$ для любого $t \in T_n$.

Так как функции d и f_0 ограничены, то существует $C > 0$ такое, что $|d(t)| \leq C$ и $\|f_0(t)\|_X \leq C$ для любого $t \in T$. Каждому $t \in T$ сопоставим точку $g_n^*(t)$ – метрическую проекцию точки $g_n(t)$ на шар с центром в нуле радиуса $2C$. Тогда $g_n^* \in L_\varphi(T, X)$. Поскольку $g_n^* \in \llbracket 0, g_n \rrbracket$, то $g_n^* \in M$. Докажем, что $\|g_n^*(t) - f_0(t)\|_X \geq d(t)$, $t \in T_n$. Действительно, если $\|g_n(t)\|_X \leq 2C$, то $g_n^*(t) = g_n(t)$ и $\|g_n^*(t) - f_0(t)\|_X \geq d(t)$, а если $\|g_n(t)\|_X > 2C$, то $\|g_n^*(t)\|_X = 2C$, и поэтому

$$\|g_n^*(t) - f_0(t)\|_X \geq \|g_n^*(t)\|_X - \|f_0(t)\|_X \geq 2C - C = C \geq d(t).$$

Проведем индукционное построение последовательности $\{h_n\} \subset L_\varphi(T, X)$. Положим

$$h_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} g_1^*(t), \quad h_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} g_n^*(t), & t \in T_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} T_k, \\ h_{n-1}(t), & t \notin T_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} T_k. \end{cases}$$

Поскольку $g_n^*(t) \in M$ и T_n – измеримое множество, то $h_n \in M$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \in \bigcup_{k=1}^n T_k$ выполнено неравенство $\|h_n(t) - f_0(t)\|_X \geq d(t)$. По построению последовательности $\{h_n\}$, если $t \in \bigcup_{k=1}^{n-1} T_k$ или $t \notin \bigcup_{k=1}^{n+m} T_k$, то $h_n(t) = h_{n+m}(t)$. В остальных случаях $\|h_n(t)\|_X \leq 2C$, $\|h_{n+m}(t)\|_X \leq 2C$.

Так как $\mu_0 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq \mu(\bigcup_{k=1}^{n-1} T_k) \leq \mu_0$ и $\mu_0 - \frac{1}{2^{n+m}} \leq \mu(\bigcup_{k=1}^{n+m} T_k) \leq \mu_0$, то

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+m} T_k \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} T_k\right) \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Значит, для любых $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_T \varphi(\|h_n(t) - h_{n+m}(t)\|_X) dt &\leq \int_{\bigcup_{k=1}^{n+m} T_k \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} T_k} \varphi(4C) dt \\ &= \varphi(4C) \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+m} T_k \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} T_k\right) \leq \frac{\varphi(4C)}{2^{n-1}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\{h_n\}$ – последовательность Коши, поэтому $\{h_n\}$ сходится к функции $h \in M$.

Положим $T' \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$. Тогда $\mu(T') = \mu_0$ и $h = h_n$ для любого $t \notin T_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^n T_k$, поэтому для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \in \bigcup_{k=1}^n T_k$ выполнено неравенство $\|h(t) - f_0(t)\|_X \geq d(t)$ и, значит, $\|h(t) - f_0(t)\|_X \geq d(t)$, $t \in T'$.

Пусть существует $f \in M$ такая, что $\mu(\{t \in T \setminus T': \|f(t) - f_0(t)\|_X \geq d(t)\}) > 0$. Положим

$$\psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} h(t), & t \in T', \\ f(t), & t \in T \setminus T'. \end{cases}$$

Тогда $\psi(t) \in M$ и $\mu(\{t \in T: \|\psi(t) - f_0(t)\|_X \geq d(t)\}) > \mu_0$, т.е. μ_0 не является верхней гранью мер множеств, для которых выполняется а). Значит, для T' выполнено б).

ТЕОРЕМА 9. Пусть X – гильбертово пространство. Тогда непустой замкнутый промежуток является множеством существования в $L_\varphi(T, X)$, и если функция φ строго возрастает на $[0, +\infty)$, то он является чебышевским множеством в $L_\varphi(T, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – данный промежуток. Без потери общности можно считать, что $0 \in M$. Пусть $f_0 \in L_\varphi(T, X)$ и существует $C > 0$ такое, что $\|f_0(t)\|_X \leq C$, $t \in T$. Найдем наилучшее приближение для f_0 .

Положим $f_1 \stackrel{\text{def}}{=} 0$, $T_1 \stackrel{\text{def}}{=} T$ и построим последовательность $\{f_m\} \subset M$ по индукции. Пусть при $m \geq 2$ функция $f_{m-1} \in M$ определена и удовлетворяет неравенству $\|f_{m-1}(t) - f_0(t)\|_X \leq C$ при всех $t \in T$. Так как f_0 ограничена, то f_{m-1} тоже ограничена. По лемме 15 для любого $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, существуют $T_m \subset T$ и $h_m \in M$ такие, что для любого $t \in T_m$

$$\|h_m(t) - f_0(t)\|_X \leq \|f_{m-1}(t) - f_0(t)\|_X - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{m-1}},$$

и для любого $f \in M$

$$\mu\left(\left\{t \in T \setminus T_m : \|f(t) - f_0(t)\|_X \leq \|f_{m-1}(t) - f_0(t)\|_X - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{m-1}}\right\}\right) = 0.$$

Тогда $h_m(t)$ ограничена на T_m .

Построим на T_m функцию g_m . Каждому $t \in T_m$ сопоставляем точку $g_m(t) \in [f_{m-1}(t), h_m(t)]$ такую, что

$$\|f_0(t) - g_m(t)\|_X = \|f_{m-1}(t) - f_0(t)\|_X - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{m-1}}.$$

Тогда определена измеримая функция $\alpha_m : T_m \rightarrow [0, 1]$ такая, что $g_m(t) = \alpha_m(t) \times f_{m-1}(t) + (1 - \alpha_m(t))h_m(t)$ для любого $t \in T_m$. Поскольку f_{m-1} , h_m и α_m ограничены, то $g_m \in L_\varphi(T_m, X)$. Положим

$$f_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} g_m(t), & t \in T_m, \\ f_{m-1}(t), & t \notin T_m. \end{cases}$$

По построению имеем $\|f_m(t) - f_0(t)\|_X \leq \|f_{m-1}(t) - f_0(t)\|_X$ почти всюду.

Так как $g_m \in L_\varphi(T_m, X)$, $f_m(t) = f_{m-1}(t) \in [f_{m-1}(t), h_m(t)]$ для любого $t \in T \setminus T_m$ и $f_m(t) = g_m(t) \in [f_{m-1}(t), h_m(t)]$ для любого $t \in T_m$, то $f_m \in [f_{m-1}, h_m] \subset M$. Поскольку $\|f_{m-1}(t) - f_0(t)\|_X \leq C$ и $\|g_m(t) - f_0(t)\|_X \leq C$, то $\|f_m(t) - f_0(t)\|_X \leq C$, $t \in T$.

Поскольку для любого $t \in T_m$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \|f_{m-1}(t) - g_m(t)\|_X \leq \\ & \leq \left(\|f_{m-1}(t) - f_0(t)\|_X^2 - \left(\|f_{m-1}(t) - f_0(t)\|_X - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{m-1}} \right)^2 \right)^{1/2} \leq \frac{C}{(\sqrt{2})^{m-2}}, \end{aligned}$$

то $\|f_{m-1}(t) - f_m(t)\|_X \leq \frac{C}{(\sqrt{2})^{m-2}}$, $t \in T_m$, и, следовательно, $\|f_{m-1}(t) - f_m(t)\|_X \leq \frac{C}{(\sqrt{2})^{m-2}}$, $t \in T$. Значит,

$$\begin{aligned} \int_T \varphi(\|f_m(t) - f_{m+n}(t)\|_X) dt &\leq \int_T \varphi\left(\frac{C}{(\sqrt{2})^{m-1}} + \dots + \frac{C}{(\sqrt{2})^{m+n-2}}\right) dt \\ &\leq \mu(T) \varphi\left(\frac{C}{(\sqrt{2})^{m-2}(\sqrt{2}-1)}\right) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому $\{f_m\}$ – последовательность Коши.

Положим $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} f_m \in M$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ почти всюду $\|\beta(t) - f_0(t)\|_X \leq \|f_m(t) - f_0(t)\|_X$ и без потери общности можно считать, что для любых $m \in \mathbb{N}$ и $t \in T$

$$\|\beta(t) - f_0(t)\|_X \leq \|f_m(t) - f_0(t)\|_X.$$

Пусть существует функция $f \in M$ такая, что

$$\mu(\{t \in T: \|f(t) - f_0(t)\|_X < \|\beta(t) - f_0(t)\|_X\}) > 0.$$

Тогда существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\mu\left(T_0 = \left\{t \in T: \|f(t) - f_0(t)\|_X < \|\beta(t) - f_0(t)\|_X - \frac{C}{2^{m-1}}\right\}\right) > 0.$$

Поскольку для любого $t \in T_0$

$$\begin{aligned} \|f(t) - f_0(t)\|_X &< \|\beta(t) - f_0(t)\|_X - \frac{C}{2^{m-1}} \leq \|f_{m-1}(t) - f_0(t)\|_X - \frac{C}{2^{m-1}} \\ &\leq \|f_{m-1}(t) - f_0(t)\|_X - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{m-1}}, \end{aligned}$$

то $\mu(T_0 \setminus T_m) = 0$, поэтому $\mu(T_0 \cap T_m) = \mu(T_0)$.

Докажем, что $\mu(T_0 \cap (\bigcap_{i=k}^m T_i)) = \mu(T_0)$ для любого $k \leq m$ и для любого $t \in T_0 \cap (\bigcap_{i=k}^m T_i)$

$$\|f(t) - f_0(t)\|_X < \|f_{k-1}(t) - f_0(t)\|_X - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{k-1}}.$$

Проведем индукцию по k . При $k = m$ утверждение доказано. Пусть $\mu(T_0 \cap (\bigcap_{i=k+1}^m T_i)) = \mu(T_0)$ и для любого $t \in T_0 \cap (\bigcap_{i=k+1}^m T_i)$

$$\|f(t) - f_0(t)\|_X < \|f_k - f_0(t)\|_X - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^k}.$$

Докажем, что $\mu(T_0 \cap (\bigcap_{i=k}^m T_i)) = \mu(T_0)$ и для любого $t \in T_0 \cap (\bigcap_{i=k}^m T_i)$

$$\|f(t) - f_0(t)\|_X < \|f_{k-1}(t) - f_0(t)\|_X - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{k-1}}.$$

Действительно, для любого $t \in T_0 \cap (\bigcap_{i=k+1}^m T_i)$

$$\begin{aligned} \|\beta(t) - f_0(t)\|_X &\leq \|f_m(t) - f_0(t)\|_X \leq \|f_{m-1}(t) - f_0(t)\|_X - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{m-1}} \\ &\leq \|f_{m-2}(t) - f_0(t)\|_X - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{m-2}} - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{m-1}} \leq \dots \\ &\dots \leq \|f_{k+1}(t) - f_0(t)\|_X - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{k+1}} \\ &\quad - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{k+2}} - \dots - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{m-2}} - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{m-1}} \\ &\leq \|f_k(t) - f_0(t)\|_X - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^k} - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{k+1}} - \dots - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{m-1}}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|f(t) - f_0(t)\|_X &< \|f_k(t) - f_0(t)\|_X - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^k} \\ &\quad - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{k+1}} - \dots - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{m-1}} - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{m-1}} \\ &= \|f_k(t) - f_0(t)\|_X - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{k-1}} \leq \|f_{k-1}(t) - f_0(t)\|_X - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

и, следовательно, $\mu(T_0 \setminus (\bigcap_{i=k}^m T_i)) = 0$ и $\mu(T_0 \cap (\bigcap_{i=k}^m T_i)) = \mu(T_0)$.

Завершая индукцию, при $k = 2$ получаем, что $\mu(T_0) = \mu(T_0 \cap (\bigcap_{i=2}^m T_i))$. Тогда для любого $t \in T_0 \cap (\bigcap_{i=2}^m T_i)$

$$\|\beta(t) - f_0(t)\|_X \leq \|f_0(t)\|_X - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2} - \dots - \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{m-1}} = \frac{\|f_0(t)\|_X}{2^{m-1}}.$$

Значит, $\|f(t) - f_0(t)\|_X < \|\beta(t) - f_0(t)\|_X - \frac{C}{2^{m-1}} \leq 0$, что невозможно.

Пусть f^* — произвольная функция из $L_\varphi(T, X)$. Найдем ее наилучшее приближение из M . Положим

$$T'_m \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in T : \|f^*(t)\|_X \in [m-1, m)\}.$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует функция $\beta_m : T'_m \rightarrow X$ такая, что для любого $f \in M$

$$\mu(\{t \in T'_m : \|\beta(t) - f^*(t)\|_X \leq \|f(t) - f^*(t)\|_X\}) = \mu(T'_m).$$

Положим $\beta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_m(t)$, $t \in T'_m$. Докажем, что $\beta \in M$. Так как для любого $t \in T$

$$\|f^*(t) - \beta(t)\|_X \leq \|f^*(t)\|_X, \quad \|f^*(\cdot)\|_X \in L_\varphi(T, \mathbb{R}),$$

то $\|f^*(\cdot) - \beta(\cdot)\|_X \in L_\varphi(T, \mathbb{R})$. Следовательно, $\|\beta(\cdot)\|_X \in L_\varphi(T, \mathbb{R})$. Значит,

$$\int_T \varphi(\|\beta(t)\|_X) dt = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{T'_m} \varphi(\|\beta(t)\|_X) dt.$$

Положим

[illegible]

Тогда для всех $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, имеем $\alpha_m, \alpha_n \in M$ и

$$\begin{aligned} \int_T \varphi(\|\alpha_n(t) - \alpha_m(t)\|_X) dt &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{T_i} \varphi(\|\alpha_n(t) - \alpha_m(t)\|_X) dt \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{\infty} \int_{T_i} \varphi(\|\beta(t)\|_X) dt \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Значит, $\{\alpha_m\}$ фундаментальна, а так как $\{\alpha_m\}$ сходится к β почти всюду, то $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \beta$, и поэтому $\beta \in M$ и $\rho_\varphi(\beta, f^*) \leq \rho_\varphi(f, f^*)$ для любого $f \in M$. Следовательно, β является наилучшим приближением для f^* .

Пусть φ строго возрастает на $[0, +\infty)$. Докажем единственность наилучшего приближения. Пусть α – еще одно наилучшее приближение для f^* и существует $T' \subset T_0$ такое, что $\mu(T') > 0$ и $\alpha(t) \neq \beta(t)$ для любого $t \in T'$. Поскольку для любой функции $f \in M$ такой, что $f(t) \in [\alpha(t), \beta(t)]$ для любого $t \in T$, выполнено неравенство

$$\|f(t) - f^*(t)\|_X \geq \|\beta(t) - f^*(t)\|_X,$$

то $\|\alpha(t) - f^*(t)\|_X > \|\beta(t) - f^*(t)\|_X$ при всех $t \in T'$, поэтому при $t \in T'$

$$\varphi(\|\alpha(t) - f^*(t)\|_X) > \varphi(\|\beta(t) - f^*(t)\|_X)$$

и, значит, $\rho_{\varphi}(\alpha, f^*) > \rho_{\varphi}(\beta, f^*)$, т. е. α не является наилучшим приближением.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из построения функции β следует, что для каждой функции $f \in L_\varphi(T, X)$ существует ее наилучшее приближение $p_f \in M$ такое, что почти всюду $\|p_f(t) - f(t)\|_X \leq \|g(t) - f(t)\|_X$ для любой функции $g \in M$.

ЛЕММА 16. Пусть X – гильбертово пространство, $a, b, f \in L_\varphi(T, X)$, $[a, b] \subset L_\varphi(T, X)$. Каждому $t \in T$ сопоставим точку $p(t)$, являющуюся метрической проекцией $f(t)$ на $[a(t), b(t)]$. Тогда p является наилучшим приближением для f из $[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что $p \in L_\varphi(T, X)$. Действительно, $p(t) = \alpha(t)a(t) + (1 - \alpha(t))b(t)$, $t \in T$, где $\alpha: T \rightarrow [0, 1]$ — измеримая функция. Значит, по лемме 11 имеем $p \in L_\varphi(T, X)$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть X – гильбертово пространство, $M \subset L_\varphi(T, X)$ – замкнутый промежуток. Тогда существует выборка $P: L_\varphi(T, X) \rightarrow M$ из метрического проектора, удовлетворяющая условию Липшица с константой 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию 3 для каждого $f \in L_\varphi(T, X)$ существует наилучшее приближение $p_f \in M$ такое, что для любого $g \in M$

$$\|p_f(t) - f(t)\|_X \leq \|g(t) - f(t)\|_X$$

почти всюду. Положим $P(f) \stackrel{\text{def}}{=} p_f$. Докажем, что P удовлетворяет условию Липшица с константой 1. Пусть $f_1, f_2 \in L_\varphi(T, X)$. Интервал $\llbracket p_{f_1}, p_{f_2} \rrbracket \subset M$. Каждому $t \in T$ сопоставляем метрическую проекцию точки $f_i(t)$, $i = 1, 2$, на $\llbracket p_{f_1}(t), p_{f_2}(t) \rrbracket$ и получаем функции $g_i \in \llbracket p_{f_1}, p_{f_2} \rrbracket$. Тогда g_i являются метрическими проекциями f_i на M . Поскольку $\|p_{f_i}(t) - f_i(t)\|_X \leq \|g_i(t) - f_i(t)\|_X$ почти всюду, то p_{f_i} эквивалентны g_i . Так как метрический проектор на отрезок в X удовлетворяет условию Липшица с константой 1, то для почти всех $t \in T$

$$\|p_{f_1}(t) - p_{f_2}(t)\|_X = \|g_1(t) - g_2(t)\|_X \leq \|f_1(t) - f_2(t)\|_X,$$

и поэтому $\rho_\varphi(p_{f_1}, p_{f_2}) \leq \rho_\varphi(f_1, f_2)$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть X – гильбертово пространство, φ строго возрастает, $M \subset L_\varphi(T, X)$ – замкнутый промежуток, $P: L_\varphi(T, X) \rightarrow 2^M$ – метрический проектор. Тогда для любых $f_1, f_2 \in L_\varphi(T, X)$ выполнено неравенство $h(P(f_1), P(f_2)) \leq \rho_\varphi(f_1, f_2)$, где h – хаусдорфово расстояние между множествами.

СЛЕДСТВИЕ 8. Множество S_F является множеством существования в $L_\varphi(T, X)$. Если φ строго возрастает на $[0, +\infty)$, то S_F является чебышевским множеством в $L_\varphi(T, X)$ и метрический проектор на него удовлетворяет условию Липшица с константой 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть существуют $u_1 < u_2 \in (0, +\infty)$ такие, что $\varphi(u) = \varphi(u_2)$ для всех $u \in (u_1, u_2]$ и $\varphi(u_1 - \varepsilon) < \varphi(u_1 + 0)$ для всех $\varepsilon \in (0, u_1]$. Тогда существует замкнутый промежуток $M \subset L_\varphi(T, \mathbb{R})$, метрический проектор на который разрывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \llbracket u_1, u_2 \rrbracket$, P – метрический проектор на M . Докажем, что P разрывен в точке $f \equiv 0$.

Пусть $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$. Возьмем $f_1 \equiv \varepsilon \in (0, \min(u_1, u_2 - u_1))$, $f_2 \equiv 0$. Тогда $P(f_1) \subset \llbracket u_1, u_1 + \varepsilon \rrbracket$, $P(f_2) = M$. Значит, $h(P(f_1), P(f_2)) \geq \varphi(u_2 - u_1 - \varepsilon) \not\rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть $\varphi(u_1) < \varphi(u_2)$. Возьмем $f_1 \equiv 0$, $f_2 \equiv -\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, u_2 - u_1)$. Тогда $P(f_1) = \{u_1\}$, $P(f_2) \supset \llbracket u_1, u_2 - \varepsilon \rrbracket$, поэтому $h(P(f_1), P(f_2)) \geq \varphi(u_2 - u_1 - \varepsilon) \not\rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть X – сепарабельное банахово пространство, $F: T \rightarrow X$ таково, что для любого $t \in T$ $F(t)$ – непустое выпуклое замкнутое множество.

Скажем, что F удовлетворяет условию (*), если для любых $f \in L_\varphi(T, X)$ и $\varepsilon > 0$ множество $\{t \in T: f(t) \in \overline{O_\varepsilon(F(t))}\}$ измеримо.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если F удовлетворяет условию (*), то для любого $f \in L_\varphi(T, X)$ множество $\{t \in T: f(t) \in F(t)\}$ измеримо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для любого $t \in T$ множество $F(t)$ замкнуто, то

$$\begin{aligned} \{t \in T: f(t) \in F(t)\} &= \{t \in T: \forall n \in \mathbb{N} \ f(t) \in \overline{O_{1/n}(F(t))}\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{t \in T: f(t) \in \overline{O_{1/n}(F(t))}\}, \end{aligned}$$

а это множество измеримо.

Через $B(x, r)$ обозначим замкнутый шар с центром в точке x радиуса r .

ЛЕММА 17. Пусть $M \subset L_\varphi(T, X)$ – замкнутый промежуток, $S_F \subset M$, F удовлетворяет условию $(*)$ и $f \in M$. Пусть $0 \in F(t)$ и существует $C > 0$ такое, что $\|f(t)\|_X \leq C$ и $F(t) \subset B(0, C)$ для любого $t \in T$. Каждому $t \in T$ сопоставим замкнутую выпуклую оболочку $F_1(t)$ множеств $\{f(t)\}$ и $F(t)$. Тогда F_1 удовлетворяет условию $(*)$ и $S_{F_1} \subset M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что $F_1(t) = \bigcup_{x \in F(t)} [x, f(t)]$, $t \in T$.

Для этого достаточно доказать, что $G(t) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in F(t)} [x, f(t)]$ является выпуклым замкнутым множеством. Если $f(t) \in F(t)$, то $G(t) = F(t)$. Пусть $f(t) \notin F(t)$. Докажем выпуклость $G(t)$. Пусть $x_1, x_2 \in G(t)$. Тогда существуют $y_1, y_2 \in F(t)$ такие, что $x_1 \in [y_1, f(t)]$, $x_2 \in [y_2, f(t)]$. Поскольку для любого $x \in [x_1, x_2]$ существует $y \in [y_1, y_2]$ такое, что $x \in [y, f(t)]$, то $x \in G(t)$ в силу выпуклости $F(t)$. Значит, $G(t)$ выпукло.

Докажем замкнутость $G(t)$. Пусть $f(t) \notin F(t)$ и $\{g_n\} \subset G(t)$ сходится к g . Докажем, что $g \in G(t)$. Для каждого n существует точка $x_n \in F(t)$ такая, что $g_n = \alpha_n f(t) + (1 - \alpha_n)x_n$, $\alpha_n \in [0, 1]$. Существует подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}$, сходящаяся к $\alpha \in [0, 1]$. Если $\alpha = 1$, то $g_{n_k} \rightarrow f(t) \in G(t)$. Если $\alpha \neq 1$, то $x_{n_k} = \frac{g_{n_k} - \alpha_{n_k} f(t)}{1 - \alpha_{n_k}}$ сходится к $x \in F(t)$, причем $g = \alpha f(t) + (1 - \alpha)x \in G(t)$.

Докажем, что $F_1(t)$ удовлетворяет условию $(*)$. Выберем в X счетное всюду плотное множество S . Возьмем произвольные $\varepsilon > 0$ и $g \in L_\varphi(T, X)$. Тогда

$$\begin{aligned} g(t) \in \overline{O_\varepsilon(F_1(t))} &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x \in O_\varepsilon(F_1(t)) \cap O_{1/n}(g(t)) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \exists s \in S \cap O_\varepsilon(F_1(t)) \cap O_{1/n}(g(t)). \end{aligned}$$

Множество $\{t \in T: s \in O_{1/n}(g(t))\}$ измеримо, поэтому достаточно доказать, что для любого $x \in X$ множество $\{t \in T: x \in O_\varepsilon(F_1(t))\}$ измеримо. Запишем эквивалентные условия:

$$\begin{aligned} x \in O_\varepsilon(F_1(t)) &\Leftrightarrow \exists y \in F_1(t): x \in O_\varepsilon(y) \Leftrightarrow \exists z \in F(t): x \in O_\varepsilon([z, f(t)]) \\ &\Leftrightarrow \exists z \in F(t): \exists v \in O_\varepsilon(z), \exists w \in O_\varepsilon(f(t)): x \in [v, w]. \end{aligned}$$

Поскольку S всюду плотно в X , то последнее условие эквивалентно тому, что

$$\exists z \in F(t): \exists v \in O_\varepsilon(z), \exists q \in S \cap O_\varepsilon(0): x \in [v, f(t) + q].$$

Поэтому достаточно доказать, что для любого $q \in S \cap O_\varepsilon(0)$ множество $\{t \in T: \exists v(t) \in O_\varepsilon(F(t)): x \in [v(t), f(t) + q]\}$ измеримо. Если $x \neq f(t) + q$ (а это выполнено

на измеримом множестве), то условие $\exists v \in O_\varepsilon(F(t)): x \in [v, f(t) + q]$ эквивалентно тому, что $\exists \lambda \geq 1: f(t) + q + \lambda(x - f(t) - q) \in O_\varepsilon(F(t))$. Так как $O_\varepsilon(F(t))$ является открытым множеством, то последнее условие эквивалентно условию

$$\exists \lambda \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty): f(t) + q + \lambda(x - f(t) - q) \in O_\varepsilon(F(t)).$$

Поскольку $O_\varepsilon(F(t)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}, n > \frac{1}{\varepsilon}} \overline{O_{\varepsilon - \frac{1}{n}}(F(t))}$, то достаточно доказать измеримость множества

$$T_{n,\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ t \in T: \exists n \in \mathbb{N} \cap \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty \right): f(t) + q + \lambda(x - f(t) - q) \in \overline{O_{\varepsilon - \frac{1}{n}}(F(t))} \right\}.$$

В силу условия (*) для всех λ, δ множество $\{t \in T: f(t) + q + \lambda(x - f(t) - q) \in \overline{O_\delta(F(t))}\}$ измеримо, поэтому измеримо множество $T_{n,\lambda}$. Значит, F_1 удовлетворяет условию (*).

Докажем, что $S_{F_1} \subset M$. Для этого достаточно доказать, что для любого $g \in S_{F_1}$ существует $h \in S_F$ такое, что $g \in \llbracket f, h \rrbracket$. Множество $T' \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in T: f(t) \neq g(t)\}$ измеримо, поэтому достаточно доказать, что существует $h \in S_F$ такое, что для любого $t \in T'$ существует $\lambda \geq 1$ такое, что $h(t) = f(t) + \lambda(g(t) - f(t))$. Поскольку можно считать, что $g(t) \in F_1(t)$ для всех $t \in T'$, то для любого $t \in T'$ существует $\lambda \geq 1$ такое, что $f(t) + \lambda(g(t) - f(t)) \in F(t)$. Положим

$$T_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in T': \exists \lambda \in [1, +\infty) \cap \mathbb{Q}: f(t) + \lambda(g(t) - f(t)) \in F(t)\}, \quad T_2 \stackrel{\text{def}}{=} T' \setminus T_1.$$

Так как $f(t) + \lambda(g(t) - f(t)) \in L_\varphi(T, X)$, то T_1 и T_2 измеримы в силу утверждения 3. Занумеруем элементы λ_n множества $[1, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ и для каждого $t \in T_1$ положим $h(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t) + \lambda_n(g(t) - f(t))$, если $f(t) + \lambda_k(g(t) - f(t)) \notin F(t)$, для любого $k < n$, и $f(t) + \lambda_n(g(t) - f(t)) \in F(t)$. Тогда поскольку $F(t) \subset B(0, C)$, $t \in T$, то $h \in L_\varphi(T_1, X)$. Так как $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$, то для любого $t \in T_2$ существует и единственно $\lambda_t \geq 1$ такое, что $f(t) + \lambda_t(g(t) - f(t)) \in F(t)$. Пусть $l = \{f(t) + \lambda(g(t) - f(t)): \lambda \geq 1\}$. Тогда

$$\{f(t) + \lambda_t(g(t) - f(t))\} = l \cap F(t) = l \cap \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{O_{\frac{1}{m}} F(t)} \right) = \bigcap_{m=1}^{\infty} (l \cap \overline{O_{\frac{1}{m}} F(t)}).$$

Значит, для любого $t \in T_2$

$$\{f(t) + \lambda(g(t) - f(t)) \in \overline{O_{\frac{1}{m}} F(t)}\} = l \cap \overline{O_{\frac{1}{m}} F(t)}$$

является отрезком длины, стремящейся к нулю при $m \rightarrow \infty$. Для любых $m \in \mathbb{N}$, $t \in T_2$ положим $h_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t) + \lambda_n(g(t) - f(t))$, если $f(t) + \lambda_k(g(t) - f(t)) \notin \overline{O_{\frac{1}{m}} F(t)}$, $k < n$, и $f(t) + \lambda_n(g(t) - f(t)) \in \overline{O_{\frac{1}{m}} F(t)}$. Тогда $h_m \in L_\varphi(T_2, X)$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{h_m(t)\}$ сходится к $h(t) \in F(t)$ при всех $t \in T_2$. Значит, $h|_{T_2} \in \mathcal{F}$ (по лемме 6) и в силу ограниченности принадлежит $L_\varphi(T_2, X)$. Таким образом, определена функция $h \in L_\varphi(T', X)$ такая, что для любого $t \in T'$ имеем $h(t) \in F(t)$ и $g(t) \in [f(t), h(t)]$. Если $t \in T \setminus T'$, то положим $h(t) \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

ЛЕММА 18. Пусть X – банахово пространство. Тогда замыкание промежутка в $L_\varphi(T, X)$ является промежутком.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – данный промежуток, $a, b \in \overline{M}$. Тогда для любого $\delta > 0$ существуют $a', b' \in M$ такие, что $\rho_\varphi(a, a') < \delta$, $\rho_\varphi(b, b') < \delta$. Положим $T' \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in T: a(t) \neq b(t)\}$.

Пусть $f \in \llbracket a, b \rrbracket$. Докажем, что $f \in \overline{M}$. Положим

$$\lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\|b(t) - f(t)\|_X}{\|a(t) - b(t)\|_X}, & t \in T', \\ 1, & t \in T \setminus T'. \end{cases}$$

Функция $\lambda(t)$ измерима, и $0 \leq \lambda(t) \leq 1$ и $f(t) = \lambda(t)a(t) + (1 - \lambda(t))b(t)$ для любого $t \in T$. Положим $f'(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(t)a'(t) + (1 - \lambda(t))b'(t) \in M$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho_\varphi(f, f') &= \int_T \varphi(\|\lambda(t)(a(t) - a'(t)) + (1 - \lambda(t))(b(t) - b'(t))\|_X) dt \\ &\leq \int_T \varphi(\lambda(t)\|a(t) - a'(t)\|_X + (1 - \lambda(t))\|b(t) - b'(t)\|_X) dt \\ &\leq \int_T \varphi(\|a(t) - a'(t)\|_X + \|b(t) - b'(t)\|_X) dt. \end{aligned}$$

По лемме 8 для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} \int_T \varphi(\|a(t) - a'(t)\|_X) dt < \delta, \quad \int_T \varphi(\|b(t) - b'(t)\|_X) dt < \delta \\ \Rightarrow \int_T \varphi(\|a(t) - a'(t)\|_X + \|b(t) - b'(t)\|_X) dt < \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $f \in \overline{M}$. Лемма доказана.

Пусть $M \subset L_\varphi(T, X)$ – замкнутый промежуток. Положим

$$M_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L_\varphi(T, X): \exists g \in M: \mu(\{t \in T: \|g(t) - f(t)\|_X \geq \varepsilon\}) = 0\}.$$

ЛЕММА 19. Множество M_ε является промежутком.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in M_\varepsilon$, $f \in \llbracket a, b \rrbracket$. Положим

$$\lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\|b(t) - f(t)\|_X}{\|a(t) - b(t)\|_X}, & a(t) \neq b(t), \\ 1, & a(t) = b(t). \end{cases}$$

Тогда λ измерима и $f(t) = \lambda(t)a(t) + (1 - \lambda(t))b(t)$ для любого $t \in T$. Из определения множества M_ε следует, что существуют функции $a', b' \in M$ такие, что $\|a(t) - a'(t)\|_X < \varepsilon$, $\|b(t) - b'(t)\|_X < \varepsilon$ для всех $t \in T$, и если $a(t) = b(t)$, то $a'(t) = b'(t)$. Положим

$$f' \stackrel{\text{def}}{=} \lambda a' + (1 - \lambda) b' \in M.$$

Тогда для любого $t \in T$

$$\begin{aligned} \|f(t) - f'(t)\|_X &= \|\lambda(t)(a(t) - a'(t)) + (1 - \lambda(t))(b(t) - b'(t))\|_X \\ &\leq \lambda(t)\|a(t) - a'(t)\|_X + (1 - \lambda(t))\|b(t) - b'(t)\|_X < \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $f \in M_\varepsilon$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Отображение $F: T \rightarrow 2^X$ называется *измеримым*, если для любого открытого множества $B \subset X$ множество $\{t \in T: B \cap F(t) \neq \emptyset\}$ измеримо.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если на T задана такая топология, что любое открытое множество измеримо, то любое полунепрерывное снизу отображение измеримо.

ЛЕММА 20. Для того чтобы отображение $F: T \rightarrow 2^X$ было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $f \in L_\varphi(T, X)$ и любого $c > 0$ множество $\{t \in T: O_c(f(t)) \cap F(t) \neq \emptyset\}$ было измеримым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Сначала докажем, что для любой простой функции f множество $\{t \in T: O_c(f(t)) \cap F(t) \neq \emptyset\}$ измеримо. Так как f простая, то существует разбиение множества T на непересекающиеся измеримые множества T_n , $n \in \mathbb{N}$, такие, что $f(t) = q_n$ при $t \in T_n$. Значит,

$$\{t \in T: O_c(f(t)) \cap F(t) \neq \emptyset\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t \in T_n: O_c(q_n) \cap F(t) \neq \emptyset\}$$

измеримо, так как для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $O_c(q_n)$ является открытым.

Пусть f – произвольная функция из $L_\varphi(T, X)$. Тогда существует последовательность простых функций $\{f_n\}$, равномерно сходящихся к f . Докажем, что $O_c(f(t)) \cap F(t) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда существует $q \in \mathbb{Q} \cap (0, c)$ такое, что

$$\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \quad O_{c-q}(f_n(t)) \cap F(t) \neq \emptyset.$$

Отсюда будет следовать, что $\{t \in T: O_c(f(t)) \cap F(t) \neq \emptyset\}$ измеримо.

Если $x \in O_c(f(t)) \cap F(t)$, то

$$\exists \varepsilon > 0, \exists q \in \mathbb{Q} \cap (0, c): \forall y \in O_\varepsilon(f(t)) \quad \|x - y\|_X < c - q.$$

Значит, если существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\|f_n(t) - f(t)\|_X < \varepsilon$, $n \geq N$, то $x \in O_{c-q}(f_n(t)) \cap F(t)$, $n \geq N$. Пусть

$$\exists q \in \mathbb{Q} \cap (0, c): \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \quad O_{c-q}(f_n(t)) \cap F(t) \neq \emptyset.$$

Возьмем такое $n \in \mathbb{N}$, что $\|f_n(t) - f(t)\|_X < q$ и существует $x \in F(t) \cap O_{c-q}(f_n(t))$. Тогда

$$\|x - f(t)\|_X \leq \|x - f_n(t)\|_X + \|f_n(t) - f(t)\|_X < c$$

и, следовательно, $x \in O_c(f(t)) \cap F(t)$.

Достаточность. Поскольку функция $f(t) \equiv x$ принадлежит $L_\varphi(T, X)$, то для любого $c > 0$ множество $\{t \in T: O_c(x) \cap F(t) \neq \emptyset\}$ измеримо. Так как X является сепарабельным метрическим пространством, то любое открытое в X множество представимо как не более чем счетное объединение открытых шаров, и поэтому для любого множества U , открытого в X , множество $\{t \in T: U \cap F(t) \neq \emptyset\}$ измеримо.

ЛЕММА 21. Пусть $M \subset L_\varphi(T, X)$ – замкнутый промежуток. Тогда для любого $x \in X$ существует измеримое множество $T' \subset T$ такое, что:

- 1) существует $f \in M$, $f|_{T'} \equiv x$;
- 2) $\mu(\{t \in T \setminus T' : g(t) = x\}) = 0$ для любой функции $g \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть d – точная верхняя грань мер тех измеримых множеств, для которых выполняется 1). Существует последовательность $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ измеримых множеств таких, что существует функция $f_n \in M$, $f_n|_{T_n} \equiv x$, и $d - \frac{1}{2^n} \leq \mu(T_n) \leq d$. Положим

$$g_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & t \in \bigcup_{k=1}^n T_k, \\ 0, & t \in T \setminus \bigcup_{k=1}^n T_k. \end{cases}$$

Поскольку $d - \frac{1}{2^n} \leq \mu(\bigcup_{k=1}^n T_k) \leq d$, $n \in \mathbb{N}$, то $0 \leq \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^\infty T_k\right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n T_k\right)\right) \leq \frac{1}{2^n}$, поэтому $\{g_n\}$ сходится по расстоянию ρ_φ к функции

$$g(t) = \begin{cases} x, & t \in \bigcup_{k=1}^\infty T_k, \\ 0, & t \in T \setminus \bigcup_{k=1}^\infty T_k. \end{cases}$$

Так как M замкнут, то $g \in M$, и поэтому для $\bigcup_{k=1}^\infty T_k$ выполнено утверждение 1).

Пусть существует функция $h \in M$ такая, что $\mu(T' = \{t \in T \setminus \bigcup_{k=1}^\infty T_k : h(t) = x\}) \neq 0$. Положим

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & t \in \bigcup_{k=1}^\infty T_k, \\ h(t), & t \in T \setminus \bigcup_{k=1}^\infty T_k. \end{cases}$$

Тогда $h \in M$, и если $t \in T' \cup (\bigcup_{k=1}^\infty T_k)$, то $h(t) = x$. Поскольку $\mu(T' \cup (\bigcup_{k=1}^\infty T_k)) > d$, то d не является точной верхней гранью мер тех множеств, для которых выполнено 1). Значит, для $\bigcup_{k=1}^\infty T_k$ выполнено 2).

ЛЕММА 22. Пусть $M \subset L_\varphi(T, X)$ – замкнутый промежуток, $0 \in M$ и существует $C > 0$ такое, что для любого $f \in M$ имеем $\mu(\{t \in T : \|f(t)\|_X > C\}) = 0$. Тогда существует измеримое отображение $F : T \rightarrow 2^X$ такое, что $F(t)$ – выпуклое замкнутое множество для любого $t \in T$ и $M = S_F$. Если $M^1, M^2, \dots, M^n, \dots$ – замкнутые промежутки такие, что $M^n \subset M^{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то существуют измеримые отображения $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(n)}, \dots$ такие, что $M^n = S_{F^{(n)}}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $F^{(n)}(t) \subset F^{(n+1)}(t)$ для любого $t \in T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В окрестности $O_{2C+1}(0)$ выберем счетное всюду плотное множество S . Для каждого $m \in \mathbb{N}$ множество $\overline{M_{1/m}}$ является замкнутым промежутком. Тогда по лемме 21 для каждого $s \in S$ существует измеримое множество $T_s^m = T_s^m(M)$ такое, что:

- 1) существует $f \in \overline{M_{1/m}}$ такое, что $f(t) = s$ для любого $t \in T_s^m$;
- 2) $\mu(\{t \in T \setminus T_s^m : g(t) = s\}) = 0$ для любого $g \in \overline{M_{1/m}}$.

Если $\mu(T_s^m) = \mu(T)$, то положим $T_s^m = T$. Занумеруем элементы множества $S = \{s_n\}$. Положим

$$f_n^m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} s_n, & t \in T_{s_n}^m, \\ 0, & t \in T \setminus T_{s_n}^m. \end{cases}$$

Построим по индукции отображение $F_{m,M}^n = F_m^n : T \rightarrow 2^X$. Пусть $F_m^0 = \{0\}$. Это отображение удовлетворяет условию (*). Пусть построено отображение F_m^{n-1} , удовлетворяющее условию (*), причем $F_m^{n-1}(t)$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество для любого $t \in T$ и $S_{F_m^{n-1}} \subset \overline{M_{1/m}}$. Для каждого $t \in T$ определим $F_m^n(t)$ как замкнутую выпуклую оболочку множеств $F_m^{n-1}(t)$ и $\{f_n^m(t)\}$. Тогда по лемме 17 множество F_m^n удовлетворяет условию (*) и $S_{F_m^n} \subset \overline{M_{1/m}}$. Положим

$$F_{m,M}(t) = F_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_m^n(t)}.$$

Тогда $F_m(t)$ является выпуклым замкнутым множеством для любого $t \in T$. Докажем, что для любого $t \in T$ множество $F_m(t)$ имеет непустую внутренность. Поскольку $0 \in M$, то для любого $x \in O_{1/m}(0)$ функция $f \equiv x$ принадлежит $\overline{M_{1/m}}$. Поэтому для любого $s \in S \cap O_{1/m}(0)$ множество T_s^m совпадает с T , т. е. $S \cap O_{1/m}(0) \subset F_m(t)$ для любого $t \in T$, откуда следует, что $O_{1/m}(0) \subset F_m(t)$.

Докажем, что $\{t \in T : s_n \in F_m(t)\}$ измеримо для любого $s_n \in S$. Так как для любого $k \in \mathbb{N}$ множество $F_m^k(t)$ удовлетворяет условию (*), то для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\left\{t \in T : s_n \in O_{1/l}(F_m^k(t))\right\} = \left\{t \in T : s_n \in \bigcup_{p=l+1}^{\infty} \overline{O_{1/l-1/p}(F_m^k(t))}\right\}$$

измеримо. Значит, для любого $l \in \mathbb{N}$ множество

$$\left\{t \in T : s_n \in O_{1/l}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_m^k(t)\right)\right\} = \left\{t \in T : s_n \in \bigcup_{k=1}^{\infty} O_{1/l}(F_m^k(t))\right\}$$

измеримо. Следовательно, множество

$$\{t \in T : s_n \in F_m(t)\} = \left\{t \in T : s_n \in \bigcap_{l=1}^{\infty} O_{1/l}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_m^k(t)\right)\right\}$$

измеримо.

Докажем, что $S_{F_m} = \overline{M_{1/m}}$. Пусть $f \in S_{F_m}$. Тогда $f(t) \in F_m(t)$ почти всюду, и поэтому можно считать, что $f(t) \in F_m(t)$ для любого $t \in T$. Значит, можно считать, что $\|f(t)\|_X \leq 2C + 1$ для любого $t \in T$. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in \overline{M_{1/m}}$ такая, что $\|f(t) - g(t)\|_X \leq \varepsilon$ для любых $t \in T$. Так как для любого $t \in T$ множество $F_m(t)$ выпуклое и имеет непустую внутренность $F_m^\circ(t)$, то $O_\varepsilon(f(t)) \cap F_m^\circ(t) \neq \emptyset$. Значит, для любого $t \in T$ существует $s_n \in S$

такое, что $s_n \in O_\varepsilon(f(t)) \cap F_m(t)$. Построим функцию g_n по индукции. Положим $T_1 = \{t \in T : s_1 \in O_\varepsilon(f(t)) \cap F_m(t)\}$ и

$$g_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} s_1, & t \in T_1, \\ 0, & t \notin T_1. \end{cases}$$

Пусть построены функция $g_n \in \overline{M_{1/m}}$ и множества T_k при $1 \leq k \leq n$. Положим $T_{n+1} = \{t \in T \setminus (\bigcup_{k=1}^n T_k) : s_{n+1} \in O_\varepsilon(f(t)) \cap F_m(t)\}$ и

$$g_{n+1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} g_n(t), & t \in \bigcup_{k=1}^n T_k, \\ s_{n+1}, & t \in T_{n+1} \\ 0, & t \in T \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} T_k. \end{cases}$$

Поскольку $\mu(T) < \infty$ и для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \in T$ выполнено неравенство $g_n(t) \leq 2C + 1$, то $\{g_n\}$ сходится по расстоянию ρ_φ к функции $g(t) = g_n(t)$ при $t \in T_n$. В силу замкнутости $\overline{M_{1/m}}$ функция g принадлежит $\overline{M_{1/m}}$. Так как для любого $t \in T$ существует $s_n \in S$ такое, что $s_n \in O_\varepsilon(f(t)) \cap F_m(t)$, то $\|g(t) - f(t)\|_X \leq \varepsilon$ для любого $t \in T$. Таким образом, доказано, что $S_{F_m} \subset \overline{M_{1/m}}$.

Докажем обратное включение. Пусть $f \in \overline{M_{1/m}}$. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in S_{F_m}$ такая, что $\rho_\varphi(f, g) < \varepsilon$ (отсюда будет следовать, что $f \in S_{F_m}$ в силу замкнутости S_{F_m}). Действительно, для любого $\delta > 0$ существует $h \in M_{1/m}$ такая, что $\rho_\varphi(h, f) < \delta$. Тогда существует $\tilde{h} \in M$ такая, что для любого $t \in T$ выполнены неравенства $\|\tilde{h}(t)\|_X \leq C$, $\|h(t) - \tilde{h}(t)\|_X < 1/m$ и для любых $\delta > 0$ и $t \in T$ существует $s_n \in S$ такое, что $s_n \in O_\delta(h(t)) \cap O_{1/m}(\tilde{h}(t))$. Положим

$$\begin{aligned} T_{s_1}^{m, \delta} &\stackrel{\text{def}}{=} \{t \in T_{s_1}^m : s_1 \in O_\delta(h(t)) \cap O_{1/m}(\tilde{h}(t))\}, \\ T_{s_n}^{m, \delta} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ t \in T_{s_n}^m \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} T_{s_j}^{m, \delta} : s_n \in O_\delta(h(t)) \cap O_{1/m}(\tilde{h}(t)) \right\}, \\ g_1^\delta(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} s_1, & t \in T_{s_1}^{m, \delta}, \\ 0, & t \in T \setminus T_{s_1}^{m, \delta}, \end{cases} \quad g_n^\delta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} g_{n-1}^\delta(t), & t \in \bigcup_{j=1}^{n-1} T_{s_j}^{m, \delta}, \\ s_n, & t \in T_{s_n}^{m, \delta}, \\ 0, & t \in T \setminus \bigcup_{j=1}^n T_{s_j}^{m, \delta}. \end{cases} \end{aligned}$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено включение $g_n^\delta \in S_{F_m}$. Последовательность $\{g_n^\delta\}$ сходится по расстоянию ρ_φ к функции $g \in S_{F_m}$ такой, что $g(t) = g_n^\delta(t)$ при $t \in T_{s_n}^{m, \delta}$.

Докажем, что $\mu(\{t \in T \setminus T_{s_n}^m : s_n \in O_\delta(h(t)) \cap O_{1/m}(\tilde{h}(t))\}) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Если это не выполнено, то существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\mu(\tilde{T} = \{t \in T \setminus T_{s_n}^m : s_n \in O_{1/m}(\tilde{h}(t))\}) > 0$. Положим

$$\tilde{g}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} s_n, & t \in \tilde{T}, \\ 0, & t \in T \setminus \tilde{T}. \end{cases}$$

Тогда $\tilde{g} \in M_{1/m}$ и $\mu(\{t \in T \setminus T_{s_n}^m : \tilde{g}(t) = s_n\}) > 0$, что противоречит построению множества $T_{s_n}^m$.

Докажем, что $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_{s_n}^{m,\delta}) = \mu(T)$. Положим

$$T_{s_n}'^{m,\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ t \in T \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} T_{s_j}^{m,\delta} : s_n \in O_{\delta}(h(t)) \cap O_{1/m}(\tilde{h}(t)) \right\},$$

$$T_{s_n}''^{m,\delta} \stackrel{\text{def}}{=} T_{s_n}'^{m,\delta} \setminus T_{s_n}^{m,\delta}.$$

Поскольку $T_{s_n}''^{m,\delta} \subset \{t \in T \setminus T_{s_n}^m : s_n \in O_{\delta}(h(t)) \cap O_{1/m}(\tilde{h}(t))\}$, то $\mu(T_{s_n}''^{m,\delta}) = 0$. Следовательно, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_{s_n}''^{m,\delta}) = 0$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $T_{s_n}^{m,\delta} \subset T_{s_n}'^{m,\delta}$, поэтому

$$T_{s_n}'^{m,\delta} \supset \left\{ t \in T \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} T_{s_j}'^{m,\delta} : s_n \in O_{\delta}(h(t)) \cap O_{1/m}(\tilde{h}(t)) \right\}.$$

Пусть $t \in T$. Тогда существует s_n такое, что $s_n \in O_{\delta}(h(t)) \cap O_{1/m}(\tilde{h}(t))$. Если $t \notin \bigcup_{j=1}^{n-1} T_{s_j}'^{m,\delta}$, то $t \notin \bigcup_{j=1}^{n-1} T_{s_j}^{m,\delta}$, и поэтому $t \in T_{s_n}'^{m,\delta}$. Следовательно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_{s_n}'^{m,\delta} = T$. Значит,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_{s_n}^{m,\delta}\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (T_{s_n}'^{m,\delta} \setminus T_{s_n}''^{m,\delta})\right) \\ &\geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_{s_n}'^{m,\delta} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T_{s_n}''^{m,\delta}\right) = \mu(T). \end{aligned}$$

Стало быть, $\|g(t) - h(t)\|_X < \delta$ почти всюду и

$$\begin{aligned} \int_T \varphi(\|g(t) - f(t)\|_X) dt &\leq \int_T \varphi(\|g(t) - h(t)\|_X + \|h(t) - f(t)\|_X) dt \\ &\leq \int_T \varphi(\|h(t) - f(t)\|_X + \delta) dt. \end{aligned}$$

По лемме 9 для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\int_T \varphi(\|h(t) - f(t)\|_X + \delta) dt < \varepsilon.$$

Положим $F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m(t)$. Поскольку для любых $m \in \mathbb{N}$ и $t \in T$ множество $F_m(t)$ выпукло и замкнуто, то $F(t)$ выпукло и замкнуто для любого $t \in T$. Докажем, что $S_F = M$. Запишем эквивалентные условия:

$$f \in S_F \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} \quad f(t) \in F_m(t) \text{ п.в.} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} \quad f \in S_{F_m} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} \quad f \in \overline{M_{1/m}}.$$

Если $f \in M$, то $f \in \overline{M_{1/m}}$ для любого $m \in \mathbb{N}$, поэтому $M \subset S_F$. Докажем, что для любого $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, имеем $\overline{M_{1/m}} \subset M_{1/(m-1)}$. Действительно, пусть $f \in \overline{M_{1/m}}$. Тогда существует последовательность $\{h_n\} \subset M_{1/m}$ такая, что $\rho_{\varphi}(h_n, f) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Существует подпоследовательность $\{h_{n_k}\} \subset \{h_n\}$,

сходящаяся к f почти всюду. Тогда по теореме Егорова для любых $T' \subset T$ и $\delta > 0$ существует $T_\delta \subset T'$ такое, что $\mu(T' \setminus T_\delta) = \delta$, $h_{n_k} \rightarrow f$ равномерно на T_δ . Возьмем $\delta_1 = \frac{\mu(T)}{2}$ и ему соответствующее $T_{\delta_1} \subset T$. Для каждого $l \in \mathbb{N}$ берем $\delta_l = \frac{\mu(T)}{2^l}$ и находим $T_{\delta_l} \subset T \setminus (\bigcup_{j=1}^{l-1} T_{\delta_j})$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ находим функцию $g_k \in M$ такую, что $\|g_k(t) - h_{n_k}(t)\|_X < 1/m$, $t \in T$. В силу равномерной сходимости $\{h_{n_k}\}$ на каждом из T_{δ_l} для любого $l \in \mathbb{N}$ существует k_l такое, что для любых $j \geq k_l$ и $t \in T_{\delta_l}$ выполнено неравенство $\|g_{k_l}(t) - h_{n_j}(t)\|_X < \frac{2m-1}{2m(m-1)}$. Положим

$$f_l(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} g_{k_j}(t), & t \in T_{\delta_j}, \quad 1 \leq j \leq l, \\ 0, & t \in T \setminus \bigcup_{j=1}^l T_{\delta_j}. \end{cases}$$

Последовательность $\{f_l\} \subset M$ сходится по расстоянию ρ_φ к функции $g \in M$ такой, что $g(t) = f_l(t)$ при $t \in T_{\delta_l}$. Почти всюду на T существует $k(t)$ такое, что $\|g(t) - h_{n_j}(t)\|_X < \frac{2m-1}{2m(m-1)}$ для всех $j \geq k(t)$. Следовательно, почти всюду на T выполнено неравенство $\|g(t) - f(t)\|_X \leq \frac{2m-1}{2m(m-1)}$, а значит, $f \in M_{1/(m-1)}$. Отсюда следует, что если $f \in \overline{M_{1/m}}$ для любого $m \in \mathbb{N}$, то $f \in M_{1/m}$ для любого $m \in \mathbb{N}$, и поэтому $f \in M$. Таким образом, доказано, что $S_F \subset M$, а значит, $S_F = M$.

Докажем, что для любых $f \in L_\varphi(T, X)$ и $c > 0$ множество $\{t \in T: O_c(f(t)) \cap F(t) \neq \emptyset\}$ является измеримым. Если $O_c(f(t)) \cap F(t) \neq \emptyset$, то существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\overline{O_{c-\frac{1}{n}}(f(t))} \cap F(t) \neq \emptyset$, и поэтому существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\overline{O_{c-\frac{1}{n}}(f(t))} \cap F_m(t) \neq \emptyset$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Положим

$$T_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in T \mid \exists n \in \mathbb{N}: \overline{O_{c-\frac{1}{n}}(f(t))} \cap F_m(t) \neq \emptyset \quad \forall m \in \mathbb{N}\}.$$

Если $t \in T_0$, то для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $x(t) \in \overline{O_{c-\frac{1}{n}}(f(t))} \cap F_m(t)$. Так как $x(t)$ является внутренней точкой множества $\overline{O_{c-\frac{1}{n+1}}(f(t))}$, то множество $\overline{O_{c-\frac{1}{n+1}}(f(t))} \cap F_m(t)$ имеет непустую внутренность, и поэтому существует $s_k \in S \cap \overline{O_{c-\frac{1}{n+1}}(f(t))} \cap F_m(t)$. Значит,

$$T_0 = \{t \in T \mid \exists n \in \mathbb{N}: \forall m \in \mathbb{N} \exists s_k \in S: s_k \in \overline{O_{c-\frac{1}{n+1}}(f(t))} \cap F_m(t)\}.$$

Поскольку множества $\{t \in T: s_k \in F_m(t)\}$ и $\{t \in T: s_k \in \overline{O_{c-\frac{1}{n+1}}(f(t))}\}$ измеримы, то T_0 измеримо. Положим

$$\begin{aligned} T_{1,n} &\stackrel{\text{def}}{=} \{t \in T_0: s_1 \in \overline{O_{c-\frac{1}{n+1}}(f(t))} \cap F_{n+3}(t)\}, \\ T_{k,n} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{t \in T_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} T_{j,n}: s_k \in \overline{O_{c-\frac{1}{n+1}}(f(t))} \cap F_{n+3}(t)\right\}, \\ T_n &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} T_{k,n}, \end{aligned}$$

$$h_{1,n}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} s_1, & t \in T_{1,n}, \\ 0, & t \in T \setminus T_{1,n}, \end{cases} \quad h_{k,n} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} h_{k-1}(t), & t \in \bigcup_{j=1}^{k-1} T_{j,n}, \\ s_k, & t \in T_{k,n}, \\ 0, & t \in T \setminus \bigcup_{j=1}^k T_{j,n}. \end{cases}$$

Последовательность $\{h_{k,n}\}$ сходится по расстоянию ρ_φ к функции

$$h_n(t) = \begin{cases} h_{k,n}, & t \in T_{k,n}, \\ 0, & t \in T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_{k,n}. \end{cases}$$

Поскольку $h_{k,n} \in S_{F_{n+3}}$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то $h_n \in S_{F_{n+3}} = \overline{M_{1/(n+3)}} \subset M_{1/(n+2)}$, поэтому $h_n \in M_{1/(n+2)}$. Значит, существует функция $g_n \in M$ такая, что для любого $t \in T$ выполнено неравенство $\|g_n(t) - h_n(t)\|_X < \frac{1}{n+2}$. Кроме того, $h_n(t) \in \overline{O_{c-\frac{1}{n+1}}(f(t))}$ для любого $t \in T_n$. Так как $M = S_F$, то $g_n(t) \in F(t)$ почти всюду на T , поэтому $g_n(t) \in F(t) \cap \overline{O_{c-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}}(f(t))} \subset F(t) \cap O_c(f(t))$ почти всюду на T_n . Поскольку $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = T_0$, то $F(t) \cap O_c(f(t)) \neq \emptyset$ почти всюду на T_0 . Следовательно, $\{t \in T: F(t) \cap O_c(f(t)) \neq \emptyset\}$ измеримо. По лемме 20 отображение F измеримо.

Пусть $M^1, \dots, M^N, \dots$ – замкнутые промежутки и $M^N \subset M^{N+1}$ для любого $N \in \mathbb{N}$. Построим отображения $F^{(N)}$ по индукции.

Положим $F^{(1)}(t) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{m,M^1}^n(t)}$. Тогда $M^1 = S_{F^{(1)}}$, $F^{(1)}(t)$ – выпуклое замкнутое множество для любого $t \in T$, и отображение $F^{(1)}$ измеримо. Пусть построены отображения $F^{(k)}(t) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{m,M^k}^n(t)}$ для $1 \leq k \leq N$ такие, что для любых $t \in T$, $m \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем $F_{m,M^k}^n(t) \subset F_{m,M^{k+1}}^n(t)$ (отсюда следует, что $F^{(k)}(t) \subset F^{(k+1)}(t)$ для любого $t \in T$).

Построим отображение $F^{(N+1)}(t)$. Так как $M^N \subset M^{N+1}$, то $M_{1/m}^N \subset M_{1/m}^{N+1}$ и $\overline{M_{1/m}^N} \subset \overline{M_{1/m}^{N+1}}$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Для каждого $s_n \in S$ находим $T_{s_n}^m(M^{N+1})$ и положим $T_{s_n}'^m(M^{N+1}) = T_{s_n}^m(M^{N+1}) \cup T_{s_n}^m(M^N)$. Тогда существуют функции $f_N \in \overline{M_{1/m}^N}$ и $f_{N+1} \in \overline{M_{1/m}^{N+1}}$ такие, что $f_N(t) = s_n$ для любого $t \in T_{s_n}^m(M^N)$ и $f_{N+1}(t) = s_n$ для любого $t \in T_{s_n}^m(M^{N+1})$. Поскольку $\overline{M_{1/m}^N} \subset \overline{M_{1/m}^{N+1}}$, то $f_N \in \overline{M_{1/m}^{N+1}}$, и поэтому существует $f^* \in \overline{M_{1/m}^{N+1}}$ такая, что для любого $t \in T_{s_n}'^m(M^{N+1})$ имеем $f^* = s_n$. Кроме того, для любого $f \in \overline{M_{1/m}^{N+1}}$

$$\mu(\{t \in T \setminus T_{s_n}'^m(M^{N+1}): f(t) = s_n\}) \leq \mu(\{t \in T \setminus T_{s_n}^m(M^{N+1}): f(t) = s_n\}) = 0.$$

Так как $f^*(t) = s_n$ для любого $t \in T_{s_n}'^m(M^{N+1}) \setminus T_{s_n}^m(M^{N+1})$, то $\mu(T_{s_n}'^m(M^{N+1}) \setminus T_{s_n}^m(M^{N+1})) = 0$. Поэтому если $\mu(T_{s_n}'^m(M^{N+1})) = \mu(T)$, то $\mu(T_{s_n}^m(M^{N+1})) = \mu(T)$, откуда следует, что $T_{s_n}^m(M^{N+1}) = T$ и $T_{s_n}'^m(M^{N+1}) = T$. Значит, при

построении отображения $F^{(N+1)}$ можно рассматривать множество $T_{s_n}^m(M^{N+1})$ вместо $T_{s_n}^m(M^{N+1})$. Тогда $F_{m,M^N}^n(t) \subset F_{m,M^{N+1}}^n(t)$ для любого $t \in T$. Положим

$$F^{(N+1)}(t) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{m,M^{N+1}}^n(t)}.$$

Тогда $F^{(N+1)}(t)$ – выпуклое замкнутое множество для любого $t \in T$ и отображение $F^{(N+1)}$ измеримо.

ТЕОРЕМА 11. Пусть X – сепарабельное банахово пространство. Тогда для того, чтобы множество $M \subset L_\varphi(T, X)$ являлось замкнутым промежутком, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало с множеством S_F для некоторого измеримого отображения $F: T \rightarrow X$ такого, что для любого $t \in T$ множество $F(t)$ выпукло и замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность выполняется в силу следствия 6.

Необходимость. Сначала предположим, что $0 \in M$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$M_m \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in M: \mu(\{t \in T: \|f(t)\|_X > m\}) = 0\}.$$

Докажем, что M_m является замкнутым промежутком. Действительно, если $a, b \in M_m$, то почти всюду $\|a(t)\|_X \leq m$, $\|b(t)\|_X \leq m$, и поэтому если $f \in [a, b]$, то почти всюду $\|f(t)\|_X \leq m$, т.е. $f \in M_m$. Докажем замкнутость M_m . Пусть $\{f_n\} \subset M_m$ – последовательность, сходящаяся по расстоянию ρ_φ к функции f . Тогда существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящаяся к f почти всюду. Поскольку $\mu(\{t \in T: \forall k \in \mathbb{N} \ f_{n_k}(t) \leq m\}) = \mu(T)$, то $f(t) \leq m$ почти всюду, и поэтому $f \in M_m$.

Значит, по лемме 22 для любого $m \in \mathbb{N}$ существует измеримое отображение $F_m: T \rightarrow 2^X$ такое, что $M_m = S_{F_m}$, $F_m(t)$ выпукло и замкнуто для любого $t \in T$, и при $m_1 < m_2$ для любого $t \in T$ имеем $F_{m_1}(t) \subset F_{m_2}(t)$. Положим $F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m(t)$. Так как $F_m(t) \subset F_{m+1}(t)$ для любых $m \in \mathbb{N}$ и $t \in T$, то $F(t)$ выпукло для любого $t \in T$. Пусть $\{x_n\} \subset F(t)$ – сходящаяся последовательность. Тогда $\{x_n\}$ ограничена, и поэтому существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\{x_n\} \subset F_m(t)$. Значит, предел последовательности $\{x_n\}$ принадлежит $F_m(t) \subset F(t)$ и, следовательно, $F(t)$ замкнуто. Докажем, что $M = S_F$. Пусть $f \in M$. Положим

$$T_m \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in T: f(t) \leq m\}, \quad f_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(t), & t \in T_m, \\ 0, & t \in T \setminus T_m. \end{cases}$$

Тогда $f_m \in M_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$, и поэтому $f_m \in S_{F_m}$. Значит, почти всюду $f_m(t) \in F_m(t)$ и, следовательно, почти всюду $f(t) \in F(t)$. Таким образом, $M \subset S_F$.

Пусть $g \in S_F$. Положим

$$T'_m \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in T: g(t) \in F_m(t)\}, \quad g_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} g(t), & t \in T'_m, \\ 0, & t \in T \setminus T'_m. \end{cases}$$

Тогда $g_m \in S_{F_m}$ для любого $m \in \mathbb{N}$ и, значит, $g_m \in M$. Поскольку $T = \bigcup_{m=1}^{\infty} T'_m$ и $\mu(T) < \infty$, то

$$\rho_{\varphi}(g_m, g) = \int_T \varphi(\|g_m(t) - g(t)\|_X) dt = \int_{T \setminus T'_m} \varphi(\|g(t)\|_X) dt \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Поэтому $g \in M$ и $M = S_F$.

Пусть $h \in L_{\varphi}(T, X)$, $c > 0$. Тогда

$$\{t \in T: O_c(h(t)) \cap F(t)\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{t \in T: O_c(h(t)) \cap F_m(t)\},$$

а это множество измеримо.

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть существует $f_0 \in M$. Докажем существование отображения F . Множество $M' = \{f \in L_{\varphi}(T, X): f + f_0 \in M\}$ является замкнутым промежутком, причем $0 \in M'$, поэтому M' совпадает с $S_{F'}$ для некоторого F' . Рассмотрим отображение $F: T \rightarrow 2^X$ такое, что $F(t) = \{x \in X: x = f_0(t) + y, y \in F'(t)\}$. Тогда $F(t)$ – выпуклое замкнутое множество для любого $t \in T$. Возьмем произвольные $f \in L_{\varphi}(T, X)$, $c > 0$. Множество $\{t \in T: O_c(f(t)) \cap F(t) \neq \emptyset\}$ измеримо, так как оно совпадает с множеством $\{t \in T: O_c(f(t) - f_0(t)) \cap F'(t) \neq \emptyset\}$. Следовательно, F измеримо. Поскольку для любого $g \in L_{\varphi}(T, X)$

$$\begin{aligned} g \in M &\Leftrightarrow g - f_0 \in M' \Leftrightarrow g - f_0 \in S_{F'} \Leftrightarrow \mu(\{t \in T: g(t) - f_0(t) \notin F'(t)\}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mu(\{t \in T: g(t) \notin F(t)\}) = 0 \Leftrightarrow g \in S_F, \end{aligned}$$

то $M = S_F$.

ЛЕММА 23. Пусть $F: T \rightarrow 2^X$ – измеримое отображение такое, что для любого $t \in T$ $F(t)$ – непустое выпуклое и замкнутое множество. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $c > 0$ и $f \in L_{\varphi}(T, X)$ множество $\{t \in T: O_c(f(t)) \cap \overline{O_{\varepsilon}(F(t))} \neq \emptyset\}$ измеримо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для любого $t \in T$ множество $\overline{O_{\varepsilon}(F(t))}$ имеет непустую внутренность и выпукло, то если $O_c(f(t))$ и $\overline{O_{\varepsilon}(F(t))}$ имеют непустое пересечение, то это пересечение имеет непустую внутренность. Значит, $O_c(f(t)) \cap \overline{O_{\varepsilon}(F(t))} \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда существует $s_n \in S \cap O_c(f(t)) \cap O_{\varepsilon}(F(t))$. Так как $f \in L_{\varphi}(T, X)$, то множество $\{t \in T: s_n \in O_c(f(t))\}$ измеримо. Условие $s_n \in O_{\varepsilon}(F(t))$ эквивалентно тому, что $O_{\varepsilon}(s_n) \cap F(t) \neq \emptyset$, а это выполняется на измеримом множестве в силу измеримости отображения F . Отсюда следует, что множество

$$\{t \in T: O_c(f(t)) \cap \overline{O_{\varepsilon}(F(t))} \neq \emptyset\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t \in T: s_n \in O_c(f(t)) \cap O_{\varepsilon}(F(t))\}$$

измеримо.

СЛЕДСТВИЕ 9. Если $F: T \rightarrow 2^X$ удовлетворяет условиям леммы 23, то F удовлетворяет условию (*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Банахово пространство X называется *равномерно выпуклым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x, y \in X$ таких, что $\|x\| = \|y\| = 1$, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1 - \delta$, выполнено $\|x - y\| < \varepsilon$.

В частности, гильбертово пространство является равномерно выпуклым, и если $\|x\| = \|y\| = 1$, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1 - \delta$, то $\|x - y\| \leq \sqrt{8\delta - 4\delta^2}$.

ЛЕММА 24 [8]. В равномерно выпуклом пространстве любая гиперплоскость, отстоящая от центра единичной сферы на расстоянии $1 - \delta$, отсекает от этой сферы множество с диаметром, не превосходящим ε (где ε, δ – такие, как в определении равномерно выпуклого пространства).

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть X – гильбертово пространство, $E \subset X$ – выпуклое замкнутое множество, $a \in X \setminus E$, l – расстояние от точки a до множества E , B – замкнутый шар с центром в точке a радиуса $l + \varepsilon$. Тогда

$$\sup_{x, y \in E \cap B} \|x - y\|_X \leq \sqrt{8l\varepsilon + 4\varepsilon^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p_a – метрическая проекция точки a на множество E . Проведем через p_a гиперплоскость $(x, x_0) = c$, перпендикулярную отрезку $[a, p_a]$. Пусть $(a, x_0) > c$. Тогда $(x, x_0) \leq c$ для любого $x \in E$ в силу выпуклости E . Положим

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in B : (x, x_0) \leq c\}, \quad A' \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : \|x - a\|_X = l + \varepsilon, (x, x_0) \leq c\}.$$

По лемме 24

$$\sup_{x, y \in A'} \|x - y\|_X \leq (l + \varepsilon) \sqrt{8 \frac{\varepsilon}{l + \varepsilon} - 4 \frac{\varepsilon^2}{(l + \varepsilon)^2}} = \sqrt{8l\varepsilon + 4\varepsilon^2}.$$

Так как диаметр множества равен диаметру его выпуклой оболочки, то

$$\sup_{x, y \in A} \|x - y\|_X = \sup_{x, y \in A'} \|x - y\|_X \leq \sqrt{8l\varepsilon + 4\varepsilon^2},$$

откуда следует, что

$$\sup_{x, y \in E \cap B} \|x - y\|_X \leq \sqrt{8l\varepsilon + 4\varepsilon^2}.$$

ТЕОРЕМА 12. Пусть X – сепарабельное гильбертово пространство, $F: T \rightarrow 2^X$ – измеримое отображение такое, что для любого $t \in T$ множество $F(t)$ выпукло и замкнуто, $S_F \neq \emptyset$, и пусть $f \in L_\varphi(T, X)$. Каждому $t \in T$ сопоставим точку $p_f(t)$, являющуюся метрической проекцией точки $f(t)$ на множество $F(t)$. Тогда $p_f \in S_F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку X – гильбертово пространство, то $p_f(t)$ определена при всех $t \in T$. Достаточно доказать, что $p_f \in L_\varphi(T, X)$. Для каждого $t \in T$, $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим $\overline{O_{1/m}(F(t))}$. Обозначим через $p_{f,m}(t)$ метрическую проекцию точки $f(t)$ на $\overline{O_{1/m}(F(t))}$. Докажем, что тогда существует точка

$g_m(t) \in F(t)$ такая, что $\|g_m(t) - p_{f,m}(t)\|_X \leq \frac{2}{m}$. Действительно, существуют точки $h(t) \in O_{1/m}(F(t))$ и $g_m(t) \in F(t)$ такие, что

$$\|h(t) - g_m(t)\|_X < \frac{1}{m}, \quad \|h(t) - p_{f,m}(t)\|_X < \frac{1}{m},$$

и поэтому

$$\|g_m(t) - p_{f,m}(t)\|_X \leq \frac{2}{m}.$$

Оценим сверху величину $|\|f(t) - p_f(t)\|_X - \|f(t) - p_{f,m}(t)\|_X|$. Так как $F(t) \subset \overline{O_{1/m}(F(t))}$, то

$$\begin{aligned} \|f(t) - p_{f,m}(t)\|_X &\leq \|f(t) - p_f(t)\|_X \leq \|f(t) - g_m(t)\|_X \\ &\leq \|f(t) - p_{f,m}(t)\|_X + \|p_{f,m}(t) - g_m(t)\|_X \\ &\leq \frac{2}{m} + \|f(t) - p_{f,m}(t)\|_X. \end{aligned}$$

Значит,

$$|\|f(t) - p_f(t)\|_X - \|f(t) - p_{f,m}(t)\|_X| \leq \frac{2}{m}.$$

Положим $d_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \|f(t) - p_{f,m}(t)\|_X$. Тогда для любого $c \geq 0$ имеем

$$\{t \in T: d_m(t) < c\} = \{t \in T: O_c(f(t)) \cap \overline{O_{1/m}(F(t))} \neq \emptyset\},$$

а это множество измеримо (по лемме 23), и поэтому функция d_m измерима.

Положим

$$T_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in T: f(t) \in F(t)\}, \quad T_l \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in T: \|f(t) - p_f(t)\|_X \in (l-1, l]\}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Каждое из этих множеств измеримо. Докажем, что для любых $l \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ существует простая функция $u_{l,m}: T_l \rightarrow X$ такая, что $\|p_{f,m}(t) - u_{l,m}(t)\|_X < \varepsilon$ для любого $t \in T_l$. Пусть $B_{m,\delta}(t)$ – замкнутый шар с центром в точке $f(t)$ радиуса $d_m(t) + \delta$, $\delta > 0$. Тогда $\overline{O_{1/m}(F(t))} \cap B_{m,\delta}(t) \neq \emptyset$ для любого $t \in T$, а так как $\overline{O_{1/m}(F(t))}$ имеет непустую внутренность и выпукло, то $\overline{O_{1/m}(F(t))} \cap B_{m,\delta}(t)$ имеет непустую внутренность, и поэтому существует $s_n \in S \cap \overline{O_{1/m}(F(t))} \cap B_{m,\delta}(t)$. Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $\{t \in T_l: s_n \in \overline{O_{1/m}(F(t))}\}$ измеримо (в силу следствия 9) и множество

$$\{t \in T_l: s_n \in B_{m,\delta}(t)\} = \{t \in T_l: \|s_n - f(t)\|_X \leq d_m(t) + \delta\}$$

измеримо, то и $\{t \in T_l: s_n \in \overline{O_{1/m}(F(t))} \cap B_{m,\delta}(t)\}$ измеримо. Положим

$$\begin{aligned} T_{l,m,1} &\stackrel{\text{def}}{=} \{t \in T_l: s_1 \in \overline{O_{1/m}(F(t))} \cap B_{m,\delta}(t)\}, \\ T_{l,m,n} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{t \in T_l \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} T_{l,m,k}: s_n \in \overline{O_{1/m}(F(t))} \cap B_{m,\delta}(t)\right\}, \\ u_{l,m,\delta}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} s_n \end{aligned}$$

при $t \in T_{l,m,n}$. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $t \in T_l$ выполнено неравенство $\|u_{l,m,\delta}(t) - p_{f,m}(t)\|_X < \varepsilon$. Если $f(t) \in \overline{O_{1/m}(F(t))}$, то

$$\|u_{l,m,\delta}(t) - p_{f,m}(t)\|_X = \|u_{l,m,\delta}(t) - f(t)\|_X \leq \delta.$$

Если $f(t) \notin \overline{O_{1/m}(F(t))}$, то по следствию 10

$$\|u_{l,m,\delta}(t) - p_{f,m}(t)\|_X \leq \sqrt{8d_m(t)\delta + 4\delta^2}.$$

Так как d_m ограничена на T_l , то $\|u_{l,m,\delta}(t) - p_{f,m}(t)\|_X \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, равномерно на T_l .

Оценим величину $\|p_{f,m}(t) - p_f(t)\|_X$. Пусть $B(t)$ – шар с центром в точке $f(t)$ радиуса $\|f(t) - p_f(t)\|_X$. Поскольку $p_f(t)$ и $p_{f,m}(t)$ принадлежат $\overline{O_{1/m}(F(t))} \cap B(t)$ для любого $t \in T_l$ и $0 \leq \|f(t) - p_f(t)\|_X - \|f(t) - p_{f,m}(t)\|_X \leq \frac{2}{m}$, то по следствию 10

$$\|p_f(t) - p_{f,m}(t)\|_X \leq \sqrt{8d_m(t)\frac{2}{m} + 4\left(\frac{2}{m}\right)^2},$$

а эта величина стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$ равномерно на T_l .

Отсюда следует, что для любых $l \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ существует простая функция $u_l: T_l \rightarrow X$ такая, что $\|u_l(t) - p_f(t)\|_X < \varepsilon$ для любого $t \in T_l$. Так как $f \in L_\varphi(T_0, X)$, то существует простая функция $u_0: T_0 \rightarrow X$ такая, что $\|u_0(t) - p_f(t)\|_X < \varepsilon$ для любого $t \in T_0$. Положим $u(t) \stackrel{\text{def}}{=} u_l(t)$ при $t \in T_l$. Тогда $u(t)$ – простая функция и $\|u(t) - p_f(t)\|_X < \varepsilon$ для любого $t \in T$.

Докажем, что $\|p_f(\cdot)\|_X \in L_\varphi(T, \mathbb{R})$. Поскольку $S_F \neq \emptyset$, то существует $f_0 \in S_F$. Для любого $t \in T$

$$\begin{aligned} \|p_f(t)\|_X &\leq \|f_0(t) - p_f(t)\|_X + \|f_0(t)\|_X \\ &\leq \|f_0(t) - f(t)\|_X + \|f(t) - p_f(t)\|_X + \|f_0(t)\|_X \\ &\leq 2\|f_0(t) - f(t)\|_X + \|f_0(t)\|_X \in L_\varphi(T, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Так как $\|p_f(\cdot)\|_X$ – измеримая функция, то $\|p_f(\cdot)\|_X \in L_\varphi(T, \mathbb{R})$, и поэтому $p_f \in L_\varphi(T, X)$.

ЛЕММА 25. Пусть задано отображение $F: T \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ такое, что $F(t)$ – выпуклое замкнутое множество для любого $t \in T$ и $S_F \neq \emptyset$. Положим $a(t) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{x \in F(t)\}$, $b(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{x \in F(t)\}$. Тогда для того, чтобы отображение F было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы функции a и b были измеримыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Поскольку $S_F \neq \emptyset$, то существует функция $f_0 \in L_\varphi(T, \mathbb{R})$ такая, что $a(t) \leq f_0(t) \leq b(t)$ для любого $t \in T$. Докажем измеримость b (измеримость a доказывается аналогично). Возьмем произвольное $c > 0$. Тогда множество

$$\begin{aligned} \{t \in T: b(t) - f_0(t) < c\} &= \left\{t \in T \mid \exists n \in \mathbb{N}: b(t) - f_0(t) \leq c - \frac{1}{n}\right\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{t \in T: O_{\frac{1}{2n}}\left(f_0(t) + c - \frac{1}{2n}\right) \cap F(t) = \emptyset\right\} \end{aligned}$$

измеримо в силу измеримости F и леммы 20. Так как $f_0(t) \leq b(t)$ для любого $t \in T$, то $b - f_0$ измерима, и поэтому b измерима.

Достаточность. Пусть $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда множество

$$\begin{aligned} \{t \in T: [a(t), b(t)] \cap (x, y) \neq \emptyset\} &= \{t \in T: a(t) < y \text{ \& } b(t) > x\} \\ &= \{t \in T: a(t) < y\} \cap \{t \in T: b(t) > x\} \end{aligned}$$

измеримо. Поскольку открытое множество в $\mathbb{R}$ является не более чем счетным объединением интервалов, то отображение F измеримо.

СЛЕДСТВИЕ 11. *Множество $M \subset L_\varphi(T, \mathbb{R})$ является замкнутым промежутком тогда и только тогда, когда M является интервалом II-го типа.*

В заключение автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю И. Г. Царькову за постановку задачи, а также А. С. Кочурову за подробное обсуждение полученных результатов.

Список литературы

1. Franchetti C., Cheney E. W. The embedding of proximal sets // J. Approxim. Theory. 1986. V. 48. № 2. P. 213–223.
2. Кадец М. В., Замятин В. Н. Чебышевские центры в пространстве $C[a, b]$ // Теория функций, функциональный анализ и прилож. 1968. № 7. С. 20–26.
3. Гаркави А. Л., Замятин В. Н. Условный чебышевский центр ограниченного множества непрерывных функций // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 1. С. 67–76.
4. Бердышев В. И. Непрерывность оператора метрического проектирования и его обобщений // Тр. конф. “Конструктивная теория функций ’77”. София, 1980. С. 29–34.
5. Michael E. Continuous selections // Ann. Math. Ser. 2. 1956. V. 63. № 2. P. 361–381.
6. Matuszewska W. On generalized Orlicz spaces // Bull. Acad. Polon. Ser. Math. 1960. V. 8. № 6. P. 349–353.
7. Ульянов П. Л. Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ // УМН. 1972. Т. 27. № 2. С. 3–52.
8. Кадец М. И. О топологической эквивалентности равномерно выпуклых пространств // УМН. 1955. Т. 10. № 4. С. 137–141.
9. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975.
10. Гаркави А. Л. Теорема существования элемента наилучшего приближения в пространствах типа (F) с интегральной метрикой // Матем. заметки. 1970. Т. 8. № 5. С. 583–594.
11. Камунтавичюс Д.-А. Г. Вопросы единственности наилучшего приближения в пространстве L_φ : Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1990.

Поступило в редакцию
27.05.2003