Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Городенцев, С. А. Кулешов, А. Н. Рудаков, t -стабильности и t -структуры на триангулированных категориях, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 4, 117–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/im497>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:58:27

УДК 512.581+512.772.3

А. Л. Городенцев, С. А. Кулешов, А. Н. Рудаков

t-стабильности и t-структуры на триангулированных категориях

Вводится новое понятие t-стабильности в триангулированной категории, обобщающее данные стабильности Бриджленда [6], и изучается связь между t-стабильностями и t-структурами. Дается полная классификация t-стабильностей и ограниченных t-структур на производных категориях когерентных пучков на $\mathbb{P}_1$ и на эллиптической кривой.

Библиография: 15 наименований.

§ 1. Введение

Около десяти лет назад авторы пытались обобщить гизекеровскую концепцию стабильности для когерентных пучков без кручения так, чтобы она стала применима и к объектам производных категорий когерентных пучков, а также для более общих линейных триангулированных категорий, что позволяет строить в них канонические фильтрации, ставить и исследовать соответствующие проблемы модулей и т. п. Однако удовлетворительного определения обобщенных стабильностей нам тогда получить не удалось.

Ситуация изменилась после недавней работы [6], в которой Т. Бриджленд предложил эффективный способ обобщения фильтрации Гардера–Нарасимхана на триангулированные категории и сформулировал новую концепцию стабильности, основанную на своего рода “комплексификации” мамфордского наклона $\mu = c_1/r$, названной Бриджлендом *центральной зарядом*. Работы [6], [7] были мотивированы тем, чтобы, во-первых, придать точный смысл идеям М. Р. Дугласа, изложенным в серии весьма туманных с математической точки зрения, но чрезвычайно вдохновляющих статей (см., например, [9]), а во-вторых, связать автоэквивалентности производных категорий и явления типа действия группы кос на исключительных наборах с преобразованиями монодромии, возникающими при вариации данных стабильности. Попытка построить такое конечномерное “многообразие модулей” данных стабильности является главной целью работ [6], [7], что привело Т. Бриджленда к необходимости наложить на основной модулярный параметр – центральный заряд – ряд существенных ограничений, не очень естественных в контексте классической теории пучков. Например, данные стабильности Бриджленда не включают в себя стабильность по Гизекеру, а также ряд других геометрически интересных функториальных фильтраций.

Работа С. Кулешова частично поддержана грантом INTAS OPEN-2000-269.

Комбинируя подход Т. Бриджленда с нашими предыдущими исследованиями (частично опубликованными в работе [15]), мы предлагаем в настоящей статье понятие стабильности в триангулированной категории (или, короче, *t-стабильности*), которое обобщает определение Т. Бриджленда и позволяет единообразно рассматривать (как частные случаи дестабилизирующих, в нашем смысле, фильтраций) и канонические фильтрации Гардера–Нарасимхана, возникающие из наклонных гизекеровского типа, и фильтрацию Гротендика пучка подпучками кручения чистой коразмерности, и ортогональное разложение объекта производной категории по исключительному базису. Таким образом, нас интересует, прежде всего, функториальное разложение объектов в башню Постникова (каноническая *t-фильтрация*), задаваемое данными стабильности, а не модулярные свойства центрального заряда.

Содержание работы следующее. В § 2 мы напоминаем основные свойства данных стабильности на абелевой категории и обсуждаем различные способы задания таких данных. В § 3 даем определение *t-стабильности* в триангулированной категории и рассматриваем несколько базисных примеров задания *t-стабильности* на производных категориях. В частности, стабильность по Гизекеру, а также ортогональное разложение объекта по исключительному базису (см. предложение 3.6) являются такими примерами *t-стабильностей* на производных категориях когерентных пучков. В § 4 мы изучаем свойства дестабилизирующих систем Постникова, ассоциированных с *t-стабильностью* и обобщающих понятие фильтрации Гардера–Нарасимхана. В § 5 мы вводим частичный порядок на множестве всех *t-стабильностей* на данной триангулированной категории и обсуждаем процедуры огрубления и утоньшения *t-стабильностей*. В § 6 мы описываем все *t-стабильности* в производной категории когерентных пучков на проективной прямой $\mathbb{P}_1$ и в качестве следствия получаем полный список ограниченных *t-структур* на $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1)$. В § 7 аналогичная классификация строится для производной категории когерентных пучков на эллиптической кривой.

§ 2. Данные стабильности на абелевых категориях

Понятие стабильности в категории когерентных пучков было введено Мамфордом при построении многообразий модулей векторных расслоений на кривых средствами геометрической теории инвариантов и затем неоднократно обобщалось в связи с необходимостью строить компактные семейства когерентных пучков на произвольных алгебраических многообразиях (см., например, [10], [13], [14]). В общих чертах, задача построения таких семейств сводится (например, путем представления всех пучков семейства в виде пучка нулевых когомологий некоторого комплекса локально свободных пучков, элементы которого фиксированы, но дифференциалы могут меняться, давая искомые модули) к задаче описания проективного фактора по действию редуктивной алгебраической группы на векторном пространстве (в нашем примере – это действие автоморфизмов элементов комплекса на пространстве дифференциалов). При этом *стабильными* называются пучки, орбиты которых замкнуты, а *полустабильными* – пучки, замыкание орбиты которых не содержит нуля. Известный геометрический критерий стабильности

Гильберта, который сводит исследование стабильности данного вектора к анализу его разложения по собственным подпространствам действия максимального тора, обычно удается переформулировать в терминах исходной категории пучков, где он превращается в набор арифметических условий на дискретные (топологические) инварианты пучка. А именно, каждому пучку без кручения F сопоставляется вектор $\mu(F)$ (иногда однокомпонентный, т. е. просто число), так что F называется полустабильным (в смысле геометрической теории инвариантов) тогда и только тогда, когда для любого его подпучка $E \subset F$ выполняется неравенство $\mu(E) \leq \mu(F)$ (векторы сравниваются лексикографически), и полустабильный пучок F будет стабильным, если он прост (т. е. $\text{Hom}(F, F) = \mathbb{C}$).

Компонентами вектора наклона являются отношения подходящих аддитивных функций на группе Гротендика $K_0(\text{Coh})$ категории когерентных пучков. Поэтому вектор наклона всегда удовлетворяет следующей ключевой лемме о качелях:

$$\begin{aligned} \mu(E) < \mu(F) &\Leftrightarrow \mu(F) < \mu(G), \\ \mu(E) = \mu(F) &\Leftrightarrow \mu(F) = \mu(G), \\ \mu(E) > \mu(F) &\Leftrightarrow \mu(F) > \mu(G) \end{aligned} \quad (2.1)$$

для любой точной последовательности пучков без кручения

$$0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0,$$

из которой вытекают следующие два, уже чисто категорных, следствия:

- (i) $\text{Hom}(E, F) = 0$, если E и F полустабильны и $\mu(E) > \mu(F)$;
- (ii) каждый пучок без кручения X обладает канонической фильтрацией Гардера–Нарасимхана

$$\begin{array}{ccccccc} X = F^0 X & \hookleftarrow & F^1 X & \hookleftarrow & F^2 X & \hookleftarrow & \dots & \hookleftarrow & F^n X & \hookleftarrow & F^{n+1} X = 0, \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ G_1 & & G_2 & & G_3 & & & & G_{n+1} & & \end{array}$$

все факторы которой $G_i = F^{i-1}X/F^iX$ полустабильны и $\mu(G_i) < \mu(G_j)$ для всех $i < j$ (здесь каждый вертикальный эпиморфизм – часть короткой точной последовательности $0 \rightarrow F^i X \rightarrow F^{i-1} X \rightarrow G_i \rightarrow 0$).

Именно эти свойства были взяты в качестве определяющих в первой, предпринятой в [15], попытке ввести абстрактные данные стабильности на произвольной абелевой категории.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Скажем, что на абелевой категории $\mathcal{A}$ задана структура стабильности, если на ее объектах определен такой предпорядок, что всякая короткая точная последовательность $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ удовлетворяет лемме о качелях:

- 1) либо $A \prec B \Leftrightarrow A \prec C \Leftrightarrow B \prec C$;
- 2) либо $A \succ B \Leftrightarrow A \succ C \Leftrightarrow B \succ C$;
- 3) либо $A \asymp B \Leftrightarrow A \asymp C \Leftrightarrow B \asymp C$.

Ненулевой объект $A \in \mathcal{A}$ назовем полустабильным, если включение $0 \neq B \subset A$ влечет неравенство $B \preceq A$.

Далее, в работе [15] была доказана

Например, пара $(\mathrm{rk}, \deg)$ является положительной исчерпывающей системой аддитивных функций на категории $\mathcal{Coh} C$ когерентных пучков на гладкой алгебраической кривой C , а тройка $(\mathrm{rk}, \deg, \chi(\mathcal{O}_S, \cdot))$ – на категории $\mathcal{Coh} S$ когерентных пучков на гладкой алгебраической поверхности S с числом Пикара 1.

Наклон задает на категории порядок:

$$A \preceq B \Leftrightarrow \gamma(A) \leq \gamma(B).$$

Поскольку неравенство между наклонами однозначно определяется неравенствами между отношениями аддитивных функций, из которых построены компоненты γ , этот порядок удовлетворяет лемме о качелях (это обычное свойство медианты обыкновенных дробей с положительными знаменателями: $(a+b)/(c+d)$ всегда лежит между a/c и b/d).

Итак, если задан наклон, удовлетворяющий определению 2.3, мы получаем на категории порядок, удовлетворяющий определению 2.1, а стало быть, класс полустабильных объектов и каноническую фильтрацию Гардера–Нарасимхана. Поскольку именно это последнее свойство, т.е. наличие фильтрации Гардера–Нарасимхана, и будет в дальнейшем перенесено нами на произвольные триангулированные категории, зафиксируем его здесь в качестве отдельного определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория и Φ – линейно упорядоченное множество. Предположим, что для каждого элемента $\varphi \in \Phi$ определена подкатегория $\Pi_\varphi \subset \mathcal{A}$, замкнутая относительно расширений. Назовем пару $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ *данной стабильности на $\mathcal{A}$* , если выполнены следующие свойства:

- (i) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Pi_{\varphi'}, \Pi_{\varphi''}) = 0$ при $\varphi' > \varphi''$;
- (ii) каждый ненулевой объект $X \in \mathcal{A}$ обладает фильтрацией Гардера–Нарасимхана

$$\begin{array}{ccccccc} X = F^0 X & \hookleftarrow & F^1 X & \hookleftarrow & F^2 X & \hookleftarrow & \dots & \hookleftarrow & F^n X & \hookleftarrow & F^{n+1} X = 0, \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ & & G_1 & & G_2 & & G_3 & & & & G_{n+1} \end{array}$$

где $G_{i+1} = F^i X / F^{i+1} X \in \Pi_{\varphi_i}$ и $\varphi_i < \varphi_j$ при $i < j$.

Как мы только что видели, требование существования фильтрации Гардера–Нарасимхана является самым слабым в иерархии данных

$$\begin{array}{c} \text{наклон, заданный отношениями аддитивных функций} \\ \Downarrow \\ \text{порядок, удовлетворяющий лемме о качелях} \\ \Downarrow \\ \text{набор полустабильных подкатегорий и фильтрации Гардера–Нарасимхана} \end{array}$$

и было бы интересно понять степень произвола, с которыми верхние этажи этой иерархии восстанавливаются по нижним.

§3. Определение t-стабильности и базисные примеры

Фильтрация объекта абелевой категории представляет собой последовательность подобъектов и факторов объектов, организованных в согласованные точные тройки. Аналогом точных троек в триангулированной категории служат отмеченные треугольники, а обобщением фильтрованного объекта является башня Постникова

$$\begin{array}{ccccccc} & & X_{\varphi_0} & & X_{\varphi_1} & & X_{\varphi_n} \\ & \nearrow q_0 & \searrow & \nearrow q_1 & \searrow & \nearrow q_n & \searrow \\ X = F^0 X & \xleftarrow{p_1} & F^1 X & \xleftarrow{p_2} & F^2 X & \leftarrow \dots \leftarrow & F^n X \xleftarrow{p_{n+1}} F^{n+1} X = 0, \end{array}$$

состоящая из отмеченных треугольников

$$\begin{array}{ccc} & X_{\varphi_i} & \\ q_i \nearrow & & \searrow \\ F^i X & \xleftarrow{p_{i+1}} & F^{i+1} X. \end{array}$$

Будем называть такую систему отмеченных треугольников *t-фильтрацией* объекта X , а объекты $F^i X$ и $X_i = X_{\varphi_i}$ будем именовать соответственно *членами* и *факторами* t -фильтрации. Часто нам будет нужна информация не о всей t -фильтрации объекта, а только о ее факторах. В этом случае будем использовать запись $X \rightsquigarrow (X_0, X_1, \dots, X_n)$, имея в виду существование некоторой t -фильтрации объекта X , упорядоченный набор факторов которой совпадает с $(X_0, X_1, \dots, X_n)$.

Теперь сформулируем основное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $\mathcal{T}$ – триангулированная категория, Φ – линейно упорядоченное множество. Предположим, что для каждого элемента $\varphi \in \Phi$ задана строго полная, замкнутая относительно расширений³ непустая подкатегория $\Pi_\varphi \subset \mathcal{T}$. Пара $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ называется *данными стабильности* (или просто *t-стабильностью*), если:

1) функтор сдвига градуировки $X \mapsto X[1]$ действует на множестве Φ неубывающим автоморфизмом, т.е. существует $\tau \in \text{Aut } \Phi$ такое, что $\Pi_\varphi[1] = \Pi_{\tau(\varphi)}$ и $\tau(\varphi) \geq \varphi$ для любого φ ;

2) $\text{Hom}^{\leq 0}(\Pi_\psi, \Pi_\varphi) = 0$ для любых $\psi > \varphi \in \Phi$;

3) любой ненулевой объект $X \in \mathcal{T}$ обладает конечной t -фильтрацией со строго возрастающими полустабильными факторами, т.е. вписывается в башню Постникова

$$\begin{array}{ccccccc} & & X_{\varphi_0} & & X_{\varphi_1} & & X_{\varphi_n} \\ & \nearrow q_0 & \searrow & \nearrow q_1 & \searrow & \nearrow q_n & \searrow \\ X = F^0 X & \xleftarrow{p_1} & F^1 X & \xleftarrow{p_2} & F^2 X & \leftarrow \dots \leftarrow & F^n X \xleftarrow{p_{n+1}} F^{n+1} X = 0 \end{array} \quad (3.1)$$

с ненулевыми $X_{\varphi_i} \in \Pi_{\varphi_i}$ и $\varphi_i < \varphi_{i+1}$.

³Замкнутость подкатегории $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ относительно расширений означает, что в любом отмеченном треугольнике $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A[1]$ с объектами A и C из $\mathcal{A}$ объект B также принадлежит $\mathcal{A}$.

Будем называть t-фильтрацию (3.1) *фильтрацией Гардера–Нарасимхана* (или, короче, *НН-фильтрацией*) объекта X , ее факторы X_{φ_i} – Φ -полустабильными факторами, а подкатегории Π_{φ} – полустабильными подкатегориями наклона φ . Довольно часто мы будем обозначать данные стабильности $(\Phi, \{\Pi_{\varphi}\}_{\varphi \in \Phi})$ просто через Φ .

3.1. t-фильтрации, ассоциированные t-структурами. Простейшим частным случаем t-фильтраций являются t-структуры. Напомним (см. [8]), что *t-структурой на триангулированной категории $\mathcal{T}$* называется пара $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$ строго полных подкатегорий, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $D^{\leq 0} \subset D^{\leq 0}[1]$ и $D^{\geq 0} \supset D^{\geq 0}[-1]$;
- 2) $\text{Hom}^0(D^{\leq 0}, D^{\geq 0}[-1]) = 0$;
- 3) для любого $X \in \mathcal{T}$ существует отмеченный треугольник

$$\begin{array}{ccc} & X_{\geq 1} & \\ \alpha \nearrow & & \searrow \text{---} \\ X & \xleftarrow{p} & X_{\leq 0} \end{array}$$

где $X_{\geq 1} \in D^{\geq 0}[-1]$ и $X_{\leq 0} \in D^{\leq 0}$.

Если, наряду с уже перечисленными, выполняется дополнительное условие:

- 4) для любого $X \in \mathcal{T}$ существуют $m, n \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$X \in D^{\geq 0}[-m] \cap D^{\leq 0}[-n],$$

то t-структура называется *ограниченной* (см. [6]).

Как обычно, мы полагаем

$$D^{\leq n} = D^{\leq 0}[-n] \quad \text{и} \quad D^{\geq n} = D^{\geq 0}[-n].$$

Полная подкатегория $\mathcal{A}[i] = D^{\leq 0} \cap D^{\geq 0}$ является абелевой (в частности, замкнута относительно расширений) и называется *ядром* (или *сердцевинной*) t-структуры.

ЛЕММА 3.2. Пусть $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$ – ограниченная t-структура на триангулированной категории $\mathcal{T}$ и $\Pi_i = \mathcal{A}[i] = D^{\leq -i} \cap D^{\geq -i}$. Тогда $(\mathbb{Z}, \{\Pi_i\}_{i \in \mathbb{Z}})$ задают t-стабильность на категории $\mathcal{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения t-структуры вытекает, что

$$\text{Hom}^{\leq 0}(D^{\leq -p}, D^{\geq -q}) = 0, \quad p < q,$$

поэтому подкатегории Π_i удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\text{Hom}^{\leq 0}(\Pi_i, \Pi_j) = 0 \quad \text{при} \quad i > j.$$

Функтор сдвига градуировки действует на них очевидным образом. Чтобы построить НН-фильтрацию произвольного ненулевого объекта $X \in \mathcal{T}$, заметим,

что ввиду ограниченности t -структуры существуют такие целые числа $n_+(X) \geq n_-(X)$, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}^0(X, D^{\geq -n_-(X)}) &\neq 0, & \operatorname{Hom}^{\leq 0}(X, D^{\geq -n}) &= 0 \text{ при } n < n_-(X), \\ \operatorname{Hom}^0(D^{\leq -n_+(X)}, X) &\neq 0, & \operatorname{Hom}^0(D^{\leq -k}, X) &= 0 \text{ при } k > n_+(X). \end{aligned}$$

Положим $n_0 = n_-(X)$ и рассмотрим отмеченный треугольник

$$\begin{array}{ccc} & X_0 & \\ \nearrow & & \searrow \\ X & \xleftarrow{\quad} & Y_0 \end{array}$$

с $X_0 \in D^{\geq -n_0}$, $Y_0 \in D^{\leq -(n_0+1)}$, который существует по определению t -структуры. Легко видеть, что $\operatorname{Hom}^{\leq 0}(Y_0, X_0) = 0$ и элемент

$$X_0 \in D^{\geq -n_0} \cap D^{\leq -n_0} = \Pi_{n_0}$$

отличен от нуля, так что мы можем взять Y_0 в качестве первого члена HN -фильтрации. Далее построение производится очевидной индукцией.

Отметим, что лемма 3.2 указывает способ продолжения произвольных данных стабильности на абелевой сердцеvine $\mathcal{A}$ (в смысле определения 2.4) на всю триангулированную категорию $\mathcal{T}$. А именно, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $\mathcal{T}$ – триангулированная категория с ограниченной t -структурой $(D^{\geq 0}, D^{\leq 0})$, на сердцеvine которой $\mathcal{A} = D^{\geq 0} \cap D^{\leq 0}$ заданы данные стабильности $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ из определения 2.4. Рассмотрим лексикографически упорядоченное множество $\Psi = \mathbb{Z} \times \Phi$ и положим $P_{(i, \varphi)} = \Pi_\varphi[i]$. Тогда $(\Psi, \{P_{(i, \varphi)}\}_{(i, \varphi) \in \Psi})$ с очевидным действием сдвига задают t -стабильность на категории $\mathcal{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственным нетривиальным моментом в доказательстве является построение конечной HN -фильтрации для каждого ненулевого объекта. Существование такой фильтрации следует из определения 2.4, предыдущей леммы 3.2 и простого технического предложения 4.3, которое мы докажем в следующем параграфе.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Всякие данные стабильности $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ на абелевой категории $\mathcal{A}$ (в смысле определения 2.4) индуцируют t -стабильность $(\mathbb{Z} \times \Phi, \{\Pi_\varphi[i]\}_{(i, \varphi) \in \mathbb{Z} \times \Phi})$ на ограниченной производной категории $D^b(\mathcal{A})$.

В частности, стабильность по Гизекеру, изначально определявшуюся для когерентных пучков без кручения на проективном многообразии X при помощи наклона $\gamma(F) = \xi_F/r(F)$, где $r(F)$ и χ_F – ранг и полином Гильберта⁴, может быть

⁴Рассматриваемый как лексикографически упорядоченная по убыванию степени последовательность коэффициентов.

канонически продолжена до t-стабильности на ограниченной производной категории когерентных пучков $D^b(\text{Coh } X)$. Для этого сначала надо распространить стабильность по Гизекеру до данных стабильности на $\text{Coh } X$ в смысле определения 2.4 (это было сделано в работе [15]), а потом применить следствие 3.4. В §7 мы детально исследуем это продолжение в случае, когда X – гладкая кривая.

3.2. Исключительная t-стабильность. Пусть $\mathcal{T}$ – линейная триангулированная категория, в которой $\bigoplus_{\nu} \text{Hom}^{\nu}(X, Y)$ является конечномерным векторным пространством для любой пары объектов X, Y . Напомним, что объект $E \in \mathcal{T}$ называется *исключительным*, если $\text{Hom}^{\bullet}(E, E)$ – одномерная алгебра, порожденная тождественным преобразованием. Упорядоченный набор $(E_0, E_1, \dots, E_n)$ исключительных объектов называется *полуортogonalным* (или *исключительным*), если $\text{Hom}^{\bullet}(E_j, E_i) = 0$ при $i < j$. Говорят, что категория $\mathcal{T}$ порождается таким набором, если наименьшая замкнутая относительно прямых сумм полная триангулированная подкатегория, содержащая все E_i , совпадает с $\mathcal{T}$. Например, ограниченная производная категория $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}^n)$ порождена исключительным набором из $n + 1$ обратимых пучков $(\mathcal{O}(k), \mathcal{O}(k + 1), \dots, \mathcal{O}(k + n))$, где $k \in \mathbb{Z}$ произвольно.

В линейной триангулированной категории для всякого объекта $X \in \mathcal{T}$ и градуированного векторного пространства $V^{\bullet}$ определено произведение $V^{\bullet} \otimes X$, которое представляет функтор $Y \mapsto V^{\bullet} \otimes \text{Hom}^{\bullet}(Y, X)$ и изоморфно прямой сумме $\bigoplus_{\nu} V^{\nu} \otimes X[-\nu]$. В линейных триангулированных категориях, порожденных исключительными наборами, имеется следующее ортогональное разложение, обобщающее теорему Бейлинсона (см. [11]).

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $\mathcal{T}$ – линейная триангулированная категория, порожденная исключительным набором $(E_0, E_1, \dots, E_n)$. Тогда для любого объекта $X \in \mathcal{T}$ существует функториальная по X башня Постникова

$$\begin{array}{ccccccc} & V_0^{\bullet} \otimes E_0 & & V_1^{\bullet} \otimes E_1 & & & V_n^{\bullet} \otimes E_n \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & & \nearrow \\ X & \longleftarrow & F^1 X & \longleftarrow & F^2 X & \longleftarrow \dots & F^n X & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

В предположениях теоремы 3.5 обозначим символом Υ_i строго полную замкнутую относительно расширений подкатегорию в $\mathcal{T}$, порожденную всеми объектами $E_i[m]$, $m \in \mathbb{Z}$. Поскольку набор $(E_0, E_1, \dots, E_n)$ исключителен, подкатегории Υ_i удовлетворяют свойству $\text{Hom}^{\leq 0}(\Upsilon_j, \Upsilon_i) = 0$ при $j > i$. Функтор сдвига градуировки переводит каждую из них в себя. Наконец, теорема 3.5 утверждает, что у каждого объекта имеется конечная HN-фильтрация с факторами из Υ_i . Мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть $\mathcal{T}$ – линейная триангулированная категория, порожденная исключительным набором $(E_0, E_1, \dots, E_n)$. Тогда $(\Delta, \{\Upsilon_i\}_{i \in \Delta})$ (со стандартным порядком на множестве $\{0, 1, \dots, n\}$) задают t-стабильность на $\mathcal{T}$.

Отметим, что для исключительных данных стабильности HN-фильтрация объекта X функториальна по X . В следующем параграфе мы исследуем свойства HN-фильтрации для произвольной t-стабильности и, в частности, докажем ее единственность.

§ 4. Свойства t-фильтраций

Зафиксируем данные стабильности $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ на триангулированной категории $\mathcal{T}$.

ТЕОРЕМА 4.1. *HN-фильтрация объекта $X \in \mathcal{T}$ определена однозначно с точностью до единственного изоморфизма башен Постникова.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\begin{array}{ccccccc} & & X_{\varphi_0} & & X_{\varphi_1} & & X_{\varphi_n} \\ & \nearrow a_0 & \searrow & \nearrow a_1 & \searrow & \nearrow a_n & \searrow \\ X = F^0 X & \xleftarrow{p_1} & F^1 X & \xleftarrow{p_2} & F^2 X & \leftarrow \dots \leftarrow & F^n X \xleftarrow{p_{n+1}} F^{n+1} X = 0 \end{array} \quad (4.1)$$

и

$$\begin{array}{ccccccc} & & X_{\psi_0} & & X_{\psi_1} & & X_{\psi_m} \\ & \nearrow a'_0 & \searrow & \nearrow a'_1 & \searrow & \nearrow a'_m & \searrow \\ X = Q^0 X & \xleftarrow{p'_1} & Q^1 X & \xleftarrow{p'_2} & Q^2 X & \leftarrow \dots \leftarrow & Q^m X \xleftarrow{p'_{m+1}} Q^{m+1} X = 0 \end{array} \quad (4.2)$$

– две системы Гардера–Нарасимхана объекта $X \in \mathcal{T}$. Покажем, что $n = m$, $\varphi_i = \psi_i$ для любого i и тождественное отображение $\text{Id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X)$ индуцирует единственный изоморфизм t-фильтраций:

$$\begin{array}{ccccccc} & & X_{\varphi_0} & & X_{\varphi_1} & & X_{\varphi_n} \\ & \nearrow a_0 & \searrow & \nearrow a_1 & \searrow & \nearrow a_n & \searrow \\ X & \xleftarrow{\text{Id}_X \cong} & F^1 X & \xleftarrow{\cong} & F^2 X & \leftarrow \dots \leftarrow & F^n X \xleftarrow{\cong} F^{n+1} X \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ & & X_{\psi_0} & & X_{\psi_1} & & X_{\psi_n} \\ & \nearrow a'_0 & \searrow & \nearrow a'_1 & \searrow & \nearrow a'_n & \searrow \\ X & \xleftarrow{\cong} & Q^1 X & \xleftarrow{\cong} & Q^2 X & \leftarrow \dots \leftarrow & Q^n X \xleftarrow{\cong} Q^{n+1} X \end{array}$$

Для этого нам понадобятся следующее свойство HN-фильтрации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Пусть дана HN-фильтрация для X :*

$$\begin{array}{ccccccc} & & X_{\varphi_0} & & X_{\varphi_1} & & X_{\varphi_n} \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ X = F^0 X & \xleftarrow{\quad} & F^1 X & \xleftarrow{\quad} & F^2 X & \leftarrow \dots \leftarrow & F^n X \xleftarrow{\quad} F^{n+1} X = 0. \end{array}$$

Тогда:

- 1) $\text{Hom}^{\leq 0}(X, \Pi_\varphi) = 0$ при $\varphi < \varphi_0$;
- 2) $\text{Hom}^{\leq 0}(F^i X, \Pi_\varphi) = 0$ при $\varphi \leq \varphi_i$;
- 3) $\text{Hom}^{\leq 0}(\Pi_\psi, X) = 0$ при $\psi > \varphi_n$;

4) если

$$\begin{array}{ccccccc} & & Y_{\psi_0} & & Y_{\psi_1} & & Y_{\psi_m} \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ Y = F^0 Y & \longleftarrow & F^1 Y & \longleftarrow & F^2 Y & \longleftarrow \dots \longleftarrow & F^m Y & \longleftarrow & F^{m+1} Y = 0 \end{array}$$

тоже HN-фильтрация для объекта Y , причем $\varphi_n < \psi_0$, то $\text{Hom}^{\leq 0}(Y, X) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко получается применением функторов $\text{Hom}(\cdot, \Pi_\varphi)$, $\text{Hom}(\Pi_\psi, \cdot)$ и $\text{Hom}(Y, \cdot)$ к каждому из отмеченных треугольников

$$\begin{array}{ccc} & X_{\varphi_i} & \\ \nearrow & & \searrow \\ F^i X & \longleftarrow & F^{i+1} X \end{array}$$

с учетом того, что $F^i X \in \Pi_{\varphi_i}$, и соотношений ортогональности между категориями Π_{φ_i} .

Возвращаясь к доказательству теоремы, рассмотрим первый треугольник HN-фильтрации (4.1) для X и произвольный объект $Y \in \Pi_{\varphi_0}$. Применяя функтор $\text{Hom}(\cdot, Y)$ к треугольнику, получаем

$$\text{Hom}^{-1}(F^1 X, Y) \rightarrow \text{Hom}^0(X_{\varphi_0}, Y) \xrightarrow{h_Y} \text{Hom}^0(X, Y) \rightarrow \text{Hom}^0(F^1 X, Y).$$

Из предложения 4.2, 2) следует, что самый левый и самый правый члены точной последовательности равны нулю. Поэтому

$$\text{Hom}^0(X_{\varphi_0}, Y) \cong \text{Hom}^0(X, Y) \quad \forall Y \in \Pi_{\varphi_0}. \quad (4.3)$$

Иначе говоря, объект X_{φ_0} представляет функтор $\text{Hom}^0(X, \cdot): \Pi_{\varphi_0} \rightarrow \text{Vect}$.

Подставим X_{φ_0} вместо Y в соотношение (4.3) и обозначим через q_0 морфизм $h_{X_{\varphi_0}}(\text{Id}_{X_{\varphi_0}}) \in \text{Hom}^0(X, X_{\varphi_0})$. Можно показать (см., например, [8, лемма IV.4.5]), что отмеченный треугольник

$$\begin{array}{ccc} & X_{\varphi_0} & \\ \nearrow q_0 & & \searrow \\ X & \longleftarrow & F^1 X, \end{array}$$

где $X_{\varphi_0} \in \Pi_{\varphi_0}$ и $\text{Hom}^{\leq 0}(F^1 X, X_{\varphi_0}) = 0$, определен однозначно с точностью до единственного изоморфизма треугольников.

Заметим, что $q_0 \neq 0$. Следовательно, $\text{Hom}^0(X, \Pi_{\varphi_0}) \neq 0$. Аналогично, начиная с первого треугольника HN-фильтрации (4.2), мы получим $\text{Hom}^0(X, X_{\psi_0}) \neq 0$. Применяя теперь предложение 4.2, 1) к X , Π_{φ_0} и Π_{ψ_0} , мы заключаем, что $\varphi_0 = \psi_0$. Более того, как следует из единственности объекта, представляющего функтор,

тождественное отображение $\text{Id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X)$ продолжается до единственного изоморфизма треугольников:

$$\begin{array}{ccc} X_{\varphi_0} & \xrightarrow[\exists!]{\sim} & X_{\psi_0} \\ \downarrow \varphi & \nearrow & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow[\text{Id}_X]{\sim} & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ F^1 X & \xrightarrow[\exists!]{\sim} & Q^1 X \end{array}$$

Окончание доказательства теоремы получается по индукции.

Далее нам понадобится также следующий простой технический результат о склейке произвольных (не обязательно связанных с t -стабильностью) башен Постникова, на который мы уже ссылались в доказательстве предложения 3.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. 1) Пусть объект X обладает t -фильтрацией $X \rightsquigarrow (Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ и каждый объект Y_s , в свою очередь, тоже имеет t -фильтрацию $Y_s \rightsquigarrow (X_{(s,0)}, \dots, X_{(s,k_s)})$ для любого s . Тогда можно построить комбинированную t -фильтрацию

$$X \rightsquigarrow (X_{(0,0)}, \dots, X_{(0,k_0)}, X_{(1,0)}, \dots, X_{(1,k_1)}, \dots, X_{(n,0)}, \dots, X_{(n,k_n)}).$$

2) Пусть

$$X \rightsquigarrow (X_{(0,0)}, \dots, X_{(0,k_0)}, X_{(1,0)}, \dots, X_{(1,k_1)}, \dots, X_{(n,0)}, \dots, X_{(n,k_n)})$$

является t -фильтрацией. Тогда существуют t -фильтрации объектов $X \rightsquigarrow (Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ и $Y_s \rightsquigarrow (X_{(s,0)}, \dots, X_{(s,k_s)})$ для каждого s .

3) Пусть $X \rightsquigarrow (X_0, X_1, \dots, X_n)$ и $Y \rightsquigarrow (Y_0, Y_1, \dots, Y_m)$ — t -фильтрации. Тогда для любой тасующей подстановки факторов, т. е. линейного порядка на множестве

$$\{Z_s\}_{s=0, \dots, n+m+1} = \{X_i\}_{i=0, \dots, n} \sqcup \{Y_j\}_{j=0, \dots, m},$$

сохраняющего начальный порядок на множествах $\{X_i\}_{i=0, \dots, n}$ и $\{Y_j\}_{j=0, \dots, m}$, существует t -фильтрация $X \oplus Y \rightsquigarrow (Z_0, Z_1, \dots, Z_{n+m+1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала утверждение 2). Пусть t -фильтрация для X в утверждении задается последовательностью отмеченных треугольников:

$$\begin{array}{ccc} & X_{(i,j)} & \\ \nearrow & & \searrow \\ F^{(i,j)} X & \xleftarrow[p_{(i,j+1)}]{} & F^{(i,j+1)} X, \end{array}$$

где $i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, k_i - 1$; и

$$\begin{array}{ccc} & X_{(i,k_i)} & \\ \nearrow & & \searrow \\ F^{(i,k_i)} X & \xleftarrow{p_{(i+1,0)}} & F^{(i+1,0)} X, \end{array}$$

где $i = 0, \dots, n$; $F^{(0,0)} X = X$ и $F^{(n+1,0)} X = 0$.

Обозначим композицию $p_{(i+1,0)} p_{(i,k_i)} \dots p_{(i,1)} : F^{(i+1,0)} X \rightarrow F^{(i,0)} X$ через p_i . В этих обозначениях мы получаем новую t-фильтрацию для X , состоящую из треугольников

$$\begin{array}{ccc} & Y_i & \\ \nearrow & & \searrow \\ F^{(i,0)} X & \xleftarrow{p_i} & F^{(i+1,0)} X. \end{array}$$

Таким образом, остается показать, что для любого индекса $i = 0, \dots, n$ существует t-фильтрация

$$Y_i \rightsquigarrow (X_{(i,0)}, \dots, X_{(i,k_i)}).$$

Очевидно, возникает t-фильтрация

$$F^{(i,0)} X \rightsquigarrow (X_{(i,0)}, \dots, X_{(i,k_i)}, X_{(i+1,0)}, \dots, X_{(n,k_n)})$$

и утверждение вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 4.4. Пусть дана t-фильтрация для Z :

$$\begin{array}{ccccccc} & Z_0 & & Z_1 & & & Z_m \\ \nearrow & & \searrow & \nearrow & \searrow & & \nearrow & \searrow \\ Z = F^0 Z & \xleftarrow{h_1} & F^1 Z & \xleftarrow{h_2} & F^2 Z & \leftarrow \dots \leftarrow & F^m Z & \xleftarrow{h_{m+1}} & F^{m+1} Z = 0. \end{array}$$

Для каждого $s, 1 \leq s \leq m+1$, обозначим через c_s композицию $h_s h_{s-1} \dots h_1 : F^s Z \rightarrow Z$ и рассмотрим отмеченные треугольники

$$\begin{array}{ccc} & Q_s & \\ \nearrow & & \searrow \\ Z & \xleftarrow{c_s} & F^s Z. \end{array}$$

Тогда для каждого s существует t-фильтрация $Q_s \rightsquigarrow (Z_0, Z_1, \dots, Z_{s-1})$.

Доказательство проводим индукцией по s . При $s = 1$ доказательство очевидно. В общем случае рассмотрим диаграмму отмеченных треугольников

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z_s & & \\
 & & \uparrow & & \\
 Q_s[-1] & \longrightarrow & F^s Z & \xrightarrow{c_s} & Z \\
 & & \uparrow h_{s+1} & & \\
 & & F^{s+1} Z & &
 \end{array}$$

По аксиоме октаэдра, примененной к диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & Z_s & \longrightarrow & Q_{s+1} & \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & \\
 Q_s[-1] & \longrightarrow & F^s Z & \xrightarrow{c_s} & Z & & \\
 & & \uparrow h_{s+1} & & \nearrow c_{s+1} & & \\
 & & F^{s+1} Z & & & &
 \end{array}$$

получаем отмеченные треугольники

$$\begin{array}{ccc}
 & Q_{s+1} & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 Z & \xleftarrow{c_{s+1}} & F^{s+1} Z,
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & Q_s & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 Q_{s+1} & \xleftarrow{\quad} & Z_s.
 \end{array}$$

По предположению индукции имеем $Q_s \rightsquigarrow (Z_0, \dots, Z_{s-1})$. В частности, мы имеем первый отмеченный треугольник t -фильтрации для Q_s

$$\begin{array}{ccc}
 & Z_0 & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 Q_s & \xleftarrow{\quad} & F^1 Q_s
 \end{array}$$

и окончание t -фильтрации $F^1 Q_s \rightsquigarrow (Z_1, \dots, Z_{s-1})$.

Далее строим t -фильтрацию $Q_{s+1} \rightsquigarrow (Z_0, Z_1, \dots, Z_{s-1}, Z_s)$. Прежде всего применим к диаграмме отмеченных треугольников

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z_0 & & \\
 & & \uparrow & & \\
 Q_{s+1} & \longrightarrow & Q_s & \longrightarrow & Z_s[1] \\
 & & \uparrow & & \\
 & & F^1 Q_s & &
 \end{array}$$

аксиому октаэдра:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & Z_0 & \longrightarrow & F^1 Q_{s+1}[1] & \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & \\
 Q_{s+1} & \longrightarrow & Q_s & \longrightarrow & Z_s[1] & & \\
 & & \uparrow & & \nearrow & & \\
 & & F^1 Q_s & & & &
 \end{array}$$

Получим первый член t-фильтрации $F^1 Q_{s+1}$ и отмеченные треугольники

$$\begin{array}{ccc} & F^1 Q_s & \\ \nearrow & & \searrow \\ F^1 Q_{s+1} & \longleftarrow & Z_s, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & Z_0 & \\ \nearrow & & \searrow \\ Q_{s+1} & \longleftarrow & F^1 Q_{s+1}. \end{array}$$

Из первого треугольника по предположению индукции следует, что существует t-фильтрация $F^1 Q_{s+1} \rightsquigarrow (Z_1, \dots, Z_{s-1}, Z_s)$. Значит, второй треугольник можно включить в t-фильтрацию

$$\begin{array}{ccccccc} & & Z_0 & & Z_1 & & Z_s \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ Q_{s+1} = F^0 Q_{s+1} & \longleftarrow & F^1 Q_{s+1} & \longleftarrow & F^2 Q_{s+1} & \longleftarrow \dots & \longleftarrow F^s Q_{s+1} & \longleftarrow & F^{s+1} Q_{s+1} = 0. \end{array}$$

Это завершает доказательство леммы, а значит, и утверждения 2) предложения.

Утверждение 1) предложения доказывается аналогичными рассуждениями.

Для доказательства утверждения 3) рассмотрим t-фильтрации

$$\begin{array}{ccccccc} & & X_0 & & X_1 & & X_n \\ & \nearrow q_0 & \searrow q_1 & \nearrow q_2 & \searrow q_3 & \nearrow q_4 & \searrow q_5 \\ X = F^0 X & \longleftarrow & F^1 X & \longleftarrow & F^2 X & \longleftarrow \dots & \longleftarrow F^n X & \longleftarrow & F^{n+1} X = 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & Y_0 & & Y_1 & & Y_m \\ & \nearrow p_0 & \searrow p_1 & \nearrow p_2 & \searrow p_3 & \nearrow p_4 & \searrow p_5 \\ Y = F^0 Y & \longleftarrow & F^1 Y & \longleftarrow & F^2 Y & \longleftarrow \dots & \longleftarrow F^m Y & \longleftarrow & F^{m+1} Y = 0. \end{array}$$

Предположим, что

$$(Z_0, \dots, Z_{n+m+1}) = (X_0, \dots, X_{i_1}, Y_0, \dots, Y_{j_1}, X_{i_1+1}, \dots),$$

и построим t-фильтрацию

$$\begin{array}{ccccccc} & & Z_0 & & Z_1 & & Z_2 \\ & \nearrow h_0 & \searrow h_1 & \nearrow h_2 & \searrow h_3 & \nearrow h_4 & \searrow h_5 \\ X \oplus Y & \longleftarrow & F^1(X \oplus Y) & \longleftarrow & F^2(X \oplus Y) & \longleftarrow & F^3(X \oplus Y) & \longleftarrow \dots \end{array}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} h_0 &= q_0 \oplus 0, \quad \dots, \quad h_{i_1} = q_{i_1} \oplus 0, \\ F^1(X \oplus Y) &= F^1 X \oplus Y, \quad \dots, \quad F^{i_1}(X \oplus Y) = F^{i_1} X \oplus Y, \\ h_{i_1+1} &= 0 \oplus p_0, \quad \dots, \quad h_{i_1+j_1} = 0 \oplus p_{j_1}, \\ F^{i_1+1}(X \oplus Y) &= F^{i_1} X \oplus F^1 Y, \quad \dots, \quad F^{i_1+j_1}(X \oplus Y) = F^{i_1} X \oplus F^{j_1} Y \end{aligned}$$

и так далее. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть $X \in \mathcal{T}$ – полустабильный объект наклона φ . Если он разлагается в прямую сумму: $X = X^1 \oplus X^2 \oplus \dots \oplus X^k$, то каждое его прямое слагаемое X^i – тоже полустабильный объект наклона φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить утверждение для $k = 2$. Рассмотрим HN-системы прямых слагаемых:

$$X^1 \rightsquigarrow (X_{\varphi_0}^1, X_{\varphi_1}^1, \dots, X_{\varphi_n}^1), \quad X^2 \rightsquigarrow (X_{\psi_0}^2, X_{\psi_1}^2, \dots, X_{\psi_m}^2).$$

Согласно предложению 4.3, упорядочивая факторы этих t -фильтраций в соответствии с порядком на Φ , можно построить HN-фильтрацию для X . Заметим, что она будет тривиальной, только если $n = m = 0$ и $\varphi_0 = \psi_0$. С другой стороны, X обладает только тривиальной HN-фильтрацией, поскольку он полустабильен (теорема 4.1). Следствие доказано.

§ 5. Связь между t -стабильностями и t -структурами

Как было показано в § 3, ограниченная t -структура на триангулированной категории индуцирует данные стабильности (лемма 3.2). С другой стороны, любая t -стабильность определяет набор t -структур. Перед формулировкой более точного утверждения введем полезное обозначение.

Для подмножества S объектов триангулированной категории $\mathcal{T}$ обозначим через $\langle S \rangle$ наименьшую строго полную замкнутую относительно расширений подкатегорию в $\mathcal{T}$, содержащую все объекты из S . Заметим, что если $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ – данные стабильности на $\mathcal{T}$ и $\Psi \subset \Phi$, то $\langle \Pi_\varphi \mid \varphi \in \Psi \rangle$ состоит из тех и только тех объектов, которые обладают HN-фильтрацией $X \rightsquigarrow (X_{\psi_0}, \dots, X_{\psi_k})$, $\psi_i \in \Psi$.

ЛЕММА 5.1. Пусть $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ задают t -стабильность на триангулированной категории $\mathcal{T}$. Предположим, что существует разложение множества Φ на две непересекающиеся части: $\Phi = \Phi_- \sqcup \Phi_+$, удовлетворяющее условию: для любых $\varphi_- \in \Phi_-$ и $\varphi_+ \in \Phi_+$ выполнено неравенство $\varphi_- < \varphi_+$. Тогда пара подкатегорий

$$\mathcal{T}^{\geq 0} = \langle \Pi_\varphi \mid \varphi \in \tau(\Phi_-) \rangle, \quad \mathcal{T}^{\leq 0} = \langle \Pi_\varphi \mid \varphi \in \Phi_+ \rangle$$

определяет t -структуру на $\mathcal{T}$ (напомним, что τ – автоморфизм линейно упорядоченного множества Φ , соответствующий сдвигу на $\mathcal{T}$).

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Каждый элемент $\varphi \in \Phi$ задает две t -структуры:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\varphi^{\geq 0} &= \langle \Pi_\psi \mid \psi \leq \tau(\varphi) \rangle, & \mathcal{A}_\varphi^{\leq 0} &= \langle \Pi_\psi \mid \psi > \varphi \rangle, \\ \mathcal{B}_\varphi^{\geq 0} &= \langle \Pi_\psi \mid \psi < \tau(\varphi) \rangle, & \mathcal{B}_\varphi^{\leq 0} &= \langle \Pi_\psi \mid \psi \geq \varphi \rangle. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.1. Прежде всего напомним, что по определению t-стабильности $\Pi_\varphi[-1] = \Pi_{\tau^{-1}(\varphi)}$ и $\tau(\varphi) \geq \varphi$, откуда вытекает первая аксиома t-структуры:

$$\mathcal{T}^{\leq 0} \subset \mathcal{T}^{\leq 0}[-1] \text{ и } \mathcal{T}^{\geq 0} \supset \mathcal{T}^{\geq 0}[-1].$$

Кроме того, $\text{Hom}^{\leq 0}(\Pi_\varphi, \Pi_\psi) = 0$ при $\varphi > \psi$, что влечет ортогональность:

$$\text{Hom}^{\leq 0}(\mathcal{T}^{\leq 0}, \mathcal{T}^{\geq 0}[-1]) = 0.$$

Для проверки последней аксиомы рассмотрим HN-фильтрацию объекта $0 \neq X \in \mathcal{T}$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & X_{\varphi_0} & & X_{\varphi_1} & & X_{\varphi_n} \\ & \nearrow q_0 & \searrow & \nearrow q_1 & \searrow & \nearrow q_n & \searrow \\ X = F^0 X & \xleftarrow{p_1} & F^1 X & \xleftarrow{p_2} & F^2 X & \xleftarrow{\dots} & F^n X & \xleftarrow{p_{n+1}} & F^{n+1} X = 0. \end{array}$$

Если $\varphi_n \in \Phi_-$ или $\varphi_0 \in \Phi_+$, то отмеченный треугольник из аксиомы тривиален. Предположим, существует такой номер k , что $\varphi_k \in \Phi_-$ и $\varphi_{k+1} \in \Phi_+$. Дополняя морфизм $X_{\leq 0} = F^{k+1} X \xrightarrow{p_{k+1} p_k \dots p_1} X$ конусом $X_{\geq 1}$, мы получаем отмеченный треугольник

$$\begin{array}{ccc} & X_{\geq 1} & \\ \nearrow & & \searrow \\ X & \xleftarrow{\quad} & X_{\leq 0}, \end{array}$$

где $X_{\geq 1} \in \mathcal{T}^{\geq 1}$ и $X_{\leq 0} \in \mathcal{T}^{\leq 0}$ (см. предложение 4.3), что и требуется в последней аксиоме.

Отметим, что построенная t-структура ограничена тогда и только тогда, когда

$$\Phi = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \tau^{-n}(\Phi_+) \right) \text{ и } \Phi = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \tau^n(\Phi_-) \right).$$

Заметим также, что одна и та же t-структура может быть индуцирована разными данными стабильности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Пусть $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ и $(\Psi, \{P_\psi\}_{\psi \in \Psi})$ – две t-стабильности на триангулированной категории $\mathcal{T}$, на наклонах которых сдвиг градуировки действует автоморфизмами τ_Φ и τ_Ψ . Скажем, что Φ *тоньше* Ψ (а Ψ *грубее* Φ), и обозначим это как $\Phi \preceq \Psi$, если существует сюръекция $r: \Phi \rightarrow \Psi$ такая, что:

- 1) $r\tau_\Phi = \tau_\Psi r$;
- 2) $\varphi' > \varphi'' \Leftrightarrow r(\varphi') \geq r(\varphi'')$;
- 3) $\forall \psi \in \Psi \ P_\psi = \langle \Pi_\varphi \mid \varphi \in r^{-1}(\psi) \rangle$.

Иными словами, более грубая t-стабильность получается из более тонкой слиянием некоторых групп последовательно расположенных полустабильных подкатегорий в более крупные подкатегории. Отношение “тоньше–грубее” является отношением частичного порядка на множестве всех t-стабильностей в фиксированной триангулированной категории. Минимальные относительно этого порядка t-стабильности мы будем называть *тончайшими*. Ясно, что тончайшие данные стабильности содержат наиболее полную информацию о t-структурах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть триангулированная категория $\mathcal{T}$ удовлетворяет следующему условию конечности: всякая t -стабильность Ψ может быть измельчена до некоторой тончайшей t -стабильности $\Phi \preceq \Psi$ (зависящей от Ψ). Тогда для любой ограниченной t -структуры $(\mathcal{T}^{\leq 0}, \mathcal{T}^{\geq 0})$ найдутся такие t -стабильность $\Phi = (\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ и разбиение $\Phi = \Phi_- \sqcup \Phi_+$ на две непересекающиеся части, что

$$\mathcal{T}^{\leq 0} = \langle \Pi_\varphi \mid \varphi \in \Phi_+ \rangle, \quad \mathcal{T}^{\geq 0} = \langle \Pi_\varphi \mid \varphi \in \tau(\Phi_-) \rangle,$$

причем без ограничения общности можно считать, что Φ является тончайшей t -стабильностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из лемм 3.2, 5.1.

Следующее предложение дает полезный критерий сравнимости t -стабильностей и простой достаточный признак минимальности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. 1) В обозначениях определения 5.3 $\Phi \preceq \Psi$, если и только если выполнены следующие три условия:

- (i) любой Φ -полустабильный объект является Ψ -полустабильным;
- (ii) для $\Pi_{\varphi_i} \subset P_{\psi_i}$, $i = 1, 2$, неравенство $\varphi_1 < \varphi_2$ влечет $\psi_1 \leq \psi_2$;
- (iii) если $\Pi_\varphi \subset P_\psi$, то $\Pi_{\tau_\Phi(\varphi)} \subset P_{\tau_\Psi(\psi)}$.

2) Предположим, что для каждого элемента $\varphi \in \Phi$ выполнено условие:

$$\forall X, Y \in \Pi_\varphi \quad \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \neq 0 \quad \text{и} \quad \text{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X) \neq 0.$$

Тогда t -стабильность $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi}, \tau_\Phi)$ является тончайшей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $\Phi \preceq \Psi$ влечет условия (i)–(iii) непосредственно из определений. Для доказательства обратной импликации достаточно показать, что каждая полустабильная подкатегория P_ψ порождена некоторым набором подкатегорий Π_φ . Иначе говоря, если $X_\psi \in P_\psi$ обладает HN-фильтрацией $X_\psi \rightsquigarrow (X_{\varphi_0}, \dots, X_{\varphi_n})$ относительно t -стабильности Φ , то $\Pi_{\varphi_i} \subset P_\psi$ для каждого i .

По условию (i) любой объект X_{φ_i} Ψ -полустабильен. Следовательно, можно найти такой $\psi_i \in \Psi$, что $X_{\varphi_i} \in P_{\psi_i}$. Так как $\text{Hom}^0(X_\psi, X_{\varphi_0}) \neq 0$ и $X_{\varphi_0} \in P_{\psi_0}$, получаем $\psi \leq \psi_0$ (предложение 4.2). С другой стороны, $\text{Hom}^0(X_{\varphi_n}, X_\psi) \neq 0$, значит, $\psi_n \leq \psi$. Кроме того, $\varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n$, поэтому (условие (ii)) $\psi_0 \leq \psi_1 \leq \dots \leq \psi_n$. Такое возможно, только если $\psi_0 = \psi_n$.

Для проверки второго признака заметим, что если данные $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ не являются тончайшими, то существуют некоторый элемент $\varphi \in \Phi$ и непустые подкатегории Π_- , Π_+ такие, что $\Pi_\varphi = \langle \Pi_-, \Pi_+ \rangle$ и $\text{Hom}^{\leq 0}(\Pi_+, \Pi_-) = 0$. Это противоречит предположениям признака.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Как мы увидим позже, пара t -стабильностей может удовлетворять условию (i), но быть несравнимой, так что остальные условия тоже существенны.

§ 6. Данные стабильности на $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}^1)$

Здесь мы изучаем данные t-стабильности и ограниченные t-структуры на производной категории $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}^1)$ когерентных пучков на проективной прямой, при этом будем отождествлять пучки на $\mathbb{P}^1$ с 0-комплексами из $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}^1)$. Сначала опишем два типа тончайших t-стабильностей на $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}^1)$: стандартные и исключительные. Затем покажем, что любая t-стабильность получается из них огрублением. Это позволит нам классифицировать все ограниченные t-структуры на $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}^1)$.

6.1. Стандартные тончайшие стабильности. Стандартные тончайшие данные стабильности $(\mathcal{M}, \{\Pi_\mu\}_{\mu \in \mathcal{M}})$ в $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}^1)$ получаются утоньшением t-стабильности $(\mathbb{Z}, \{(\text{Coh } \mathbb{P}^1)[i]\}_{i \in \mathbb{Z}})$, индуцированной стандартными мамфордскими данными стабильности на абелевой категории $\text{Coh } \mathbb{P}^1$ в соответствии со следствием 3.4. Для построения такого утоньшения напомним, что каждый пучок F на $\mathbb{P}^1$ раскладывается в конечную прямую сумму:

$$F = \left(\bigoplus_j \Xi_{x_j} \right) \oplus \left(\bigoplus_i \mathcal{O}(n_i) \right),$$

где Ξ_{x_j} – пучок кручения, сосредоточенный в точке x_j , а $\mathcal{O}(n_i)$ – линейное расслоение степени n_i . Рассмотрим множество $\mathcal{M} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{P}^1)$ и для каждого $\mu \in \mathcal{M}$ (т.е. $\mu = (i, x)$ или $\mu = (i, n)$, где $i, n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{P}^1$) определим полустабильную категорию Π_μ следующим образом:

$$\Pi_{(i,x)} = \langle \mathcal{O}_x[i] \rangle \quad \text{и} \quad \Pi_{(j,n)} = \langle \mathcal{O}(n)[j] \rangle. \quad (6.1)$$

Для того чтобы выполнялись условия ортогональности $\text{Hom}^{\leq 0}(\Pi_\mu, \Pi_\nu) = 0$ при $\mu > \nu$, порядок на множестве наклонов $\mathcal{M}$ должен удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} (i, \alpha) &> (j, \beta) && \text{при } i > j, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \sqcup \mathbb{P}^1, \\ (i, n) &> (i, m) && \text{при } n > m \in \mathbb{Z}, \quad i \in \mathbb{Z}, \\ (i, x) &> (i, n) && \text{при } x \in \mathbb{P}^1, \quad i, n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

которые линейно упорядочивают все элементы $\mathcal{M}$, кроме пар вида $((i, x), (i, y))$. И поскольку $\text{Hom}^q(\mathcal{O}_x[i], \mathcal{O}_y[j]) = 0$ для всех $i, j, q \in \mathbb{Z}$ при $x \neq y$, линейный порядок на пучках кручения может быть задан произвольно.

Полученный набор полустабильных категорий Π_μ является тончайшим, поскольку все они удовлетворяют достаточному условию из предложения 5.5, 2), т.е. между любыми двумя объектами в каждой из категорий есть ненулевой морфизм. Существование конечной HN-фильтрации у произвольного ненулевого объекта вытекает из предложения 4.3 и того, что $\text{Coh } \mathbb{P}^1[i] = \langle \Pi_{(i,\alpha)} \mid \alpha \in \mathbb{Z} \sqcup \mathbb{P}^1 \rangle$.

Отметим, что построенная t-стабильность $(\mathcal{M}, \{\Pi_\mu\}_{\mu \in \mathcal{M}})$ зависит от произвола в выборе порядка на пучках кручения, т.е. на $\mathbb{P}^1$ -компоненте наклона, так что мы получаем целую бесконечную серию тончайших попарно не сравнимых между собой t-стабильностей с одними и теми же набором полустабильных подкатегорий и множеством наклонов. Каждую из них мы будем называть *стандартной*.

6.2. Тончайшие исключительные t-стабильности. Эти t-стабильности получаются минимальными утоньшениями исключительной t-стабильности $(\{0, 1\}, \{\Pi_i^k\}_{i \in \{0, 1\}})$ из предложения 3.6. Напомним, что подкатегории

$$\begin{aligned}\Pi_0^k &= \langle \mathcal{O}(k)[j] \mid j \in \mathbb{Z} \rangle, \\ \Pi_1^k &= \langle \mathcal{O}(k+1)[i] \mid i \in \mathbb{Z} \rangle\end{aligned}$$

связаны с ортогональным разложением $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1)$ относительно порождающего ее исключительного набора $(\mathcal{O}(k), \mathcal{O}(k+1))$, где k – произвольное фиксированное целое число, и действие функтора сдвига переводит каждую из них в себя.

Для построения минимального измельчения этих данных рассмотрим новые полустабильные подкатегории

$$\Pi_{(i,0)}^k = \langle \mathcal{O}(k)[i] \rangle, \quad \Pi_{(i,1)}^k = \langle \mathcal{O}(k+1)[i] \rangle \quad (6.2)$$

с множеством наклонов $\mathcal{E} = \mathbb{Z} \times \{0, 1\}$, на котором функтор сдвига действует автоморфизмом $\tau \in \text{Aut } \mathcal{E}$: $\tau(i, 0) = (i+1, 0)$, $\tau(i, 1) = (i+1, 1)$. Эти подкатегории, очевидно, являются тончайшими (между любыми двумя объектами есть ненулевой морфизм).

Чтобы разложить произвольный ненулевой объект $X \in D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1)$ в башню Постникова с факторами из Π_ε , напомним что структура $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1)$ описывается следующим хорошо известным предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Если гомологическая размерность абелевой категории $\mathcal{A}$ равна 1, то каждый объект $X \in D^b(\mathcal{A})$ изоморфен конечной прямой сумме i -комплексов:*

$$X = \bigoplus_i A_i[-i],$$

где $A_i \in \mathcal{A}$ и через $A[-i]$ обозначен комплекс с единственным ненулевым членом $A \in \mathcal{A}$, стоящим в градуировке i .

Отсюда вытекает, что всякий объект $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1)$ является прямой суммой сдвинутых по градуировке обратимых пучков и пучков кручения. Таким образом, достаточно уметь раскладывать в башню Постникова каждый обратимый пучок $\mathcal{O}(n)$ и каждый пучок кручения Ξ_x с носителем в точке x . Эти разложения имеют вид

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}(k)^{\oplus(n-k-1)}[1] & \\ \nearrow & & \searrow \\ \mathcal{O}(n) & \longleftarrow & \mathcal{O}(k+1)^{\oplus(n-k)}, \end{array} \quad (6.3)$$

если $n > k+1$,

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}(k)^{\oplus(k-n+1)} & \\ \nearrow & & \searrow \\ \mathcal{O}(n) & \longleftarrow & \mathcal{O}(k+1)^{\oplus(k-n)}[-1], \end{array} \quad (6.4)$$

если $n < k$,

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{O}(k)^{\oplus d}[1] & \\
& \nearrow & \searrow \\
\Xi_x & \longleftarrow & \mathcal{O}(k+1)^{\oplus d},
\end{array} \tag{6.5}$$

где $d = \deg \Xi_x$, и получаются из канонических точных троек

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow \mathcal{O}(k)^{\oplus(n-k-1)} \rightarrow \mathcal{O}(k+1)^{\oplus(n-k)} \rightarrow \mathcal{O}(n) \rightarrow 0, & \text{ если } n > k+1, \\
0 \rightarrow \mathcal{O}(n) \rightarrow \mathcal{O}(k)^{\oplus(k-n+1)} \rightarrow \mathcal{O}(k+1)^{\oplus(k-n)} \rightarrow 0, & \text{ если } n < k, \\
0 \rightarrow \mathcal{O}(k)^{\oplus d} \rightarrow \mathcal{O}(k+1)^{\oplus d} \rightarrow \Xi_x \rightarrow 0, & \text{ где } d = \deg \Xi_x.
\end{aligned}$$

Выясним теперь, каким может быть линейный порядок на множестве наклонов $\mathcal{E}$. Соотношения ортогональности $\text{Hom}^{\leq 0}(\Pi_{\varepsilon'}^k, \Pi_{\varepsilon''}^k) = 0$ между полустабильными подкатегориями с наклонами $\varepsilon'' < \varepsilon'$ влекут для всех $i < j$ неравенства $(i, 0) < (j, 0)$ и $(i, 1) < (j, 1)$. Далее, башня (6.4) является HN-фильтрацией только при условии $\mathcal{O}(k) < \mathcal{O}(k+1)[-1]$, откуда для любого $i \in \mathbb{Z}$ мы получаем неравенство $(i, 0) < (i-1, 1)$. Легко видеть, что всякий линейный порядок на $\mathcal{E}$, включающий в себя эти неравенства, задается выбором числа $p \in \mathbb{N} \cup \{0, +\infty\}$ и имеет вид

$$\begin{aligned}
\cdots < (i+p, 0) < (i-1, 1) < (i+p+1, 0) < (i+p, 1) < \cdots, & p \neq \infty, \\
(i-1, 0) < (i, 0) < (j, 1) < (j+1, 1) \quad \forall i, j, & p = \infty.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Множество $\mathcal{E}$ с линейным порядком, соответствующим заданному p , будем обозначать через $\mathcal{E}_p$.

Таким образом, для любых $k \in \mathbb{Z}$ и $p \in \mathbb{N} \cup \{0, +\infty\}$ мы имеем тончайшие данные стабильности $(\mathcal{E}_p, \{\Pi_{\varepsilon}^k\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}_p})$, которые будем называть *исключительными*. При фиксированном k все они имеют один и тот же набор полустабильных категорий (6.2) и различаются упорядочением (6.6) множества их наклонов.

6.3. Перечисление всех t-стабильностей на $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1)$. Здесь мы докажем следующий классифицирующий результат.

ТЕОРЕМА 6.2. *Всякая t-стабильность на $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1)$ является огрублением одной из тончайших t-стабильностей, которые, в свою очередь, исчерпываются стандартными и исключительными t-стабильностями, описанными в пп. 6.1, 6.2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\Phi, \{\Theta_{\varphi}\}_{\varphi \in \Phi})$ – t-стабильность на $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1)$, не сравнимая ни с одной из стандартных тончайших t-стабильностей $(\mathcal{M}, \{\Pi_{\mu}\}_{\mu \in \mathcal{M}})$. Покажем, что тогда $(\Phi, \{\Theta_{\varphi}\}_{\varphi \in \Phi})$ грубее, чем одна из исключительных t-стабильностей.

Если t-стабильность Φ не является огрублением стандартной тончайшей t-стабильности $\mathcal{M}$, то найдется $\mathcal{M}$ -полустабильный объект X , не являющийся Φ -полустабильным. Не ограничивая общности, можно считать, что X порождает одну из стандартных полустабильных подкатегорий Π_{μ} (иначе все они Φ -полустабильны, и тогда Φ – огрубление $\mathcal{M}$). Более того, так как сдвиг градуировки переводит

полустабильные объекты в полустабильные, можно считать, что X равен либо $\mathcal{O}_x$, либо $\mathcal{O}(n)$.

Рассмотрим первый отмеченный треугольник HN-фильтрации объекта X относительно Ψ :

$$\begin{array}{ccc} & X_{\varphi_0} & \\ \nearrow \xi & & \searrow \\ X & \xleftarrow{\quad} & F^1 X. \end{array} \quad (6.7)$$

Ключевым местом доказательства является

ЛЕММА 6.3. Пусть $X \in D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1)$ – это либо $\mathcal{O}_x$, либо $\mathcal{O}(n)$. Тогда всякий отмеченный треугольник вида (6.7), в котором $\text{Hom}^{\leq 0}(F^1 X, X_{\varphi_0}) = 0$, изоморфен одному из треугольников (6.3)–(6.5) для подходящего $k \in \mathbb{Z}$.

Лемму 6.3 мы докажем ниже, а пока продолжим доказательство теоремы. Ввиду леммы первый фактор X_{φ_0} изоморфен $\mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}$ или $\mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}[1]$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$. Поскольку (6.7) – это первый треугольник HN-фильтрации, объект X_{φ_0} Φ -полустабильен, и тем самым $\mathcal{O}(k)[i]$ Φ -полустабильны для любого $i \in \mathbb{Z}$. Тогда отмеченный треугольник (6.7) имеет вид

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}[j] & \\ \nearrow & & \searrow \\ X & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{O}(k+1)^{\oplus m_1}[j-1], \end{array} \quad (6.8)$$

где $n_0, m_1 \in \mathbb{N}$ и $j = 0, 1$.

Покажем, что $\mathcal{O}(k+1)^{\oplus m_0}[j-1]$ тоже Φ -полустабильен. Если это не так, то HN-фильтрацию для X можно продолжить дальше:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}[j] & & X_{\varphi_1} & \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ X & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{O}(k+1)^{\oplus m_0}[j-1] & \xleftarrow{\quad} & F^2 X. \end{array}$$

Из определения HN-фильтрации и предложения 4.2 следует, что

$$\text{Hom}^{\leq 0}(F^2 X, X_{\varphi_1}) = 0, \quad (6.9)$$

$$\text{Hom}^{\leq 0}(X_{\varphi_1}, \mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}[j]) = 0. \quad (6.10)$$

Опять по лемме 6.3 существуют $m \in \mathbb{Z}$ и $n_1, m_2 \in \mathbb{N}$ такие, что либо

$$X_{\varphi_1} = \mathcal{O}(m)^{\oplus n_1}[j-1], \quad F^2 X = \mathcal{O}(m+1)^{\oplus m_2}[j-2], \quad \text{если } k < m-1,$$

либо

$$X_{\varphi_1} = \mathcal{O}(m)^{\oplus n_1}[j], \quad F^2 X = \mathcal{O}(m+1)^{\oplus m_2}[j-1], \quad \text{если } k > m.$$

В первом случае, когда $k < m - 1$,

$$\mathrm{Hom}^0(X_{\varphi_1}, \mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}[j]) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}oh \mathbb{P}_1}^1(\mathcal{O}(m)^{\oplus n_1}, \mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}) \neq 0,$$

что противоречит (6.10). Во втором случае, когда $k > m$,

$$\mathrm{Hom}^0(X_{\varphi_1}, \mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}[j]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}oh \mathbb{P}_1}(\mathcal{O}(m)^{\oplus n_1}, \mathcal{O}(k)^{\oplus n_0}) \neq 0,$$

что также противоречит (6.10).

Итак, HN-фильтрация (6.7) не продолжается, и объект $\mathcal{O}(k+1)^{\oplus m_0}[j-1]$ Φ -полустабильен, а значит, объекты $\mathcal{O}(k+1)[j]$ Φ -полустабильны для любого $j \in \mathbb{Z}$.

Поскольку объекты $\mathcal{O}(k)[i]$ и $\mathcal{O}(k+1)[i]$ Φ -полустабильны для любого $i \in \mathbb{Z}$, измельчая при необходимости Φ , можно считать, что подкатегории $\langle \mathcal{O}(k)[i] \rangle$ и $\langle \mathcal{O}(k+1)[i] \rangle$ Φ -полустабильны. Покажем, что любой Φ -полустабильный объект Y лежит в одной из них. Для этого разложим Y в прямую сумму сдвинутых по градуировке обратимых пучков и пучков кручения с носителем в одной точке. HN-фильтрация каждого такого слагаемого (относительно Φ) имеет в качестве факторов объекты $\mathcal{O}(k)[i]$ и $\mathcal{O}(k+1)[i]$ (см. (6.3), (6.4)). Из предложения 4.3 и единственности HN-фильтрации следует тогда, что HN-фильтрация объекта Y имеет в качестве факторов только $\mathcal{O}(k)^{\oplus a}[i]$ и $\mathcal{O}(k+1)^{\oplus b}[i]$.

Итак, набор Φ -полустабильных категорий совпадает с набором полустабильных подкатегорий одной из исключительных t-стабильностей. Поскольку действие функтора сдвига на Φ определяется этим однозначно, а любой допустимый порядок на Φ дает одну из исключительных t-стабильностей, теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.3 начнем с очевидного наблюдения.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. Предположим, что в отмеченном треугольнике (6.7) $X_{\varphi_0} = X_1 \oplus X_2$ и $f = f_1 \oplus f_2$, где $f_i \in \mathrm{Hom}(X, X_i)$. Если $f_2 = 0$, то $F^1 X = Y \oplus X_2$ и $\mathrm{Hom}^{\leq 0}(F^1 X, X_{\varphi_0}) \neq 0$.

Пусть X из треугольника (6.7) – это один из 0-комплексов: $\mathcal{O}_x[0]$ или $\mathcal{O}(n)[0]$. Опираясь на предложение 6.1 и предыдущее замечание, можно считать, что если $\mathrm{Hom}^{\leq 0}(F^1 X, X_{\varphi_0}) = 0$, то $X_{\varphi_0} = X_0[0] \oplus X_1[1]$ и $f = f_0 \oplus f_1$, где $X_i \in \mathcal{C}oh \mathbb{P}_1$, $f_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}oh \mathbb{P}_1}(X, X_0)$, $f_1 \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}oh \mathbb{P}_1}^1(X, X_1)$, причем $f_i = 0 \Leftrightarrow X_i = 0$. Объект $F^1 X$ изоморфен $C[-1]$, где C – конус морфизма f .

Рассмотрим расширение, соответствующее элементу $f_1 \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}oh \mathbb{P}_1}^1(X, X_1)$:

$$0 \rightarrow X_1 \rightarrow E \xrightarrow{d_{-1}} X \rightarrow 0. \quad (6.11)$$

Объект $X_1[1]$ изоморфен комплексу

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{d_{-1}} X \rightarrow 0,$$

а морфизм f_1 может быть представлен как морфизм комплексов

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{d_{-1}} & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Тогда и морфизм $f: X \rightarrow X_0[0] \oplus X_1[1]$ можно представить отображением комплексов:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{d_{-1} \oplus 0} & X \oplus X_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Конусом такого морфизма служит комплекс

$$0 \rightarrow X \oplus E \xrightarrow{\delta_{-1}} X \oplus X_0 \rightarrow 0,$$

где δ_{-1} задается матрицей

$$\delta_{-1} = \begin{pmatrix} \text{Id}_X & d_{-1} \\ f_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В производной категории $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1)$ комплекс, представляющий конус, изоморфен прямой сумме $(\text{Ker } \delta_{-1})[1] \oplus (\text{Coker } \delta_{-1})[0]$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму в абелевой категории $\text{Coh } \mathbb{P}_1$:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{d_{-1}} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \delta_{-1} & \longrightarrow & X \oplus E & \xrightarrow{\delta_{-1}} & X \oplus X_0 & \longrightarrow & \text{Coker } \delta_{-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f_0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f_0} & X_0 & \longrightarrow & \text{Coker } f_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

Получаем, что $\text{Coker } \delta_{-1} = \text{Coker } f_0$ и условие $\text{Hom}^{\leq 0}(F^1 X, X_{\varphi_0}) = 0$ означает, что

$$\text{Hom}^{\leq 0}((\text{Ker } \delta_{-1})[0] \oplus (\text{Coker } f_0)[-1], X_0[0] \oplus X_1[1]) = 0,$$

откуда, в частности, имеем

$$\mathrm{Hom}^{\leq 0}((\mathrm{Ker} \delta_{-1})[0], X_0[0]) = 0, \quad (6.12)$$

$$\mathrm{Hom}^{\leq 0}((\mathrm{Ker} \delta_{-1})[0], X_1[1]) = 0. \quad (6.13)$$

Предположим сначала, что $X = \mathcal{O}_x$ и $X_0 \neq 0$. Тогда $\mathrm{Ker} f_0 = 0$, т.е. $\mathrm{Ker} \delta_{-1} = X_1$. Это противоречит условию (6.13). Следовательно, $X_0 = 0$ и треугольник получается из точной последовательности (6.11). В частности, $C[-1] = E$, а условие $\mathrm{Hom}^{\leq 0}(F^1 X, X_{\varphi_0}) = 0$ означает, что $\mathrm{Hom}^{\leq 0}(E, X_1[1]) = 0$, т.е. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}oh \mathbb{P}_1}(E, X_1) = 0$ и $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}oh \mathbb{P}_1}^1(E, X_1) = 0$. Кроме того, по построению $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}oh \mathbb{P}_1}(X_1, E) \neq 0$. Теперь доказательство леммы в случае $X = \mathcal{O}_x$ вытекает из следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.5. *Если пучки E и X_1 на $\mathbb{P}_1$ удовлетворяют условиям*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}oh \mathbb{P}_1}(E, X_1) = 0, \quad \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}oh \mathbb{P}_1}^1(E, X_1) = 0, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}oh \mathbb{P}_1}(X_1, E) \neq 0,$$

то существуют такие целое число k и натуральные e, x_1 , что $E = \mathcal{O}(k+1)^{\oplus e}$, $X_1 = \mathcal{O}(k)^{\oplus x_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно, поэтому не приводится.

Пусть теперь $X = \mathcal{O}(n)$. Допустим, что X_0 и X_1 – ненулевые пучки. Тогда X_1 имеет в качестве прямого слагаемого обратимый пучок L , поскольку в противном случае $f_1 = 0$, т.е. $X_1 = 0$ (см. замечание 6.4). Значит, $\mathrm{Ker} \delta_{-1}$ тоже обладает обратимым прямым слагаемым L' (см. левый столбец диаграммы).

Предполагая, что $\mathrm{Ker} f_0 = 0$, получаем $\mathrm{Ker} \delta_{-1} = X_1$, что противоречит (6.13). Следовательно, $\mathrm{Ker} f_0 \neq 0$, т.е. $\mathrm{Im} f_0$ – пучок кручения и X_0 тоже имеет ненулевое кручение T . Однако нетривиальность пространства $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}oh \mathbb{P}_1}(L', T)$ противоречит условию (6.12).

Итак, в случае $X = \mathcal{O}(n)$ мы получаем

$$\text{либо } X_1 = 0, \quad \text{либо } X_0 = 0.$$

Если $X_1 = 0$, то треугольник (6.7) получается из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathrm{Ker} f_0 \rightarrow \mathcal{O}(n) \xrightarrow{f_0} X_0 \rightarrow \mathrm{Coker} f_0 \rightarrow 0$$

и имеет вид

$$\begin{array}{ccc} & X_0[0] & \\ \nearrow f_0 & & \searrow \\ \mathcal{O}(n) & \longleftarrow & (\mathrm{Ker} f_0)[0] \oplus (\mathrm{Coker} f_0)[-1]. \end{array} \quad (6.14)$$

Требование $\mathrm{Hom}^{\leq 0}(F^1 X, X_{\varphi_0}) = 0$ переписывается следующим образом:

$$\mathrm{Hom}^{\leq 0}((\mathrm{Ker} f_0)[0], X_0[0]) = 0, \quad (6.15)$$

$$\mathrm{Hom}^{\leq 0}((\mathrm{Coker} f_0)[-1], X_0[0]) = 0. \quad (6.16)$$

Как и выше, предположение $\text{Ker } f_0 \neq 0$ противоречит соотношению (6.15). Поэтому $\text{Ker } f_0 = 0$. Далее, условие (6.16) и замечание 6.4 влекут, что треугольник (6.14) изоморфен (6.4) для некоторого целого $k > n$.

Предположим, наконец, что $X_0 = 0$. Тогда треугольник (6.7) происходит из точной тройки

$$0 \rightarrow X_1 \rightarrow E \xrightarrow{d-1} \mathcal{O}(n) \rightarrow 0$$

и имеет вид

$$\begin{array}{ccc} & X_1[1] & \\ \nearrow f_1 & & \searrow \\ \mathcal{O}(n) & \longleftarrow & E, \end{array} \quad (6.17)$$

где $\text{Hom}^{\leq 0}(E, X_1[1]) = 0$. Используя замечание 6.4 в очередной раз, убеждаемся, что треугольник (6.17) изоморфен треугольнику (6.3) для некоторого целого $k < n - 1$. Лемма доказана.

6.4. Классификация t-структур на $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1)$. Согласно лемме 5.1, разбивая множество наклонов любой t-стабильности на две непересекающиеся части, мы получаем t-структуру. С другой стороны, в предыдущих пунктах мы описали все данные стабильности на категории $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1)$. Это дает нам возможность описать все ограниченные t-структуры на ограниченной производной категории когерентных пучков на $\mathbb{P}_1$. Группа $\text{Aut}(D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1))$ автоэквивалентностей категории действует на t-структурах, и мы перечислим только представителей по модулю этого действия. Согласно [4] группа $\text{Aut}(D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1))$ порождена сдвигом градуировки, группой автоморфизмов $\mathbb{P}_1$ и тензорными умножениями на обратимые пучки $\mathcal{O}(n) \in \text{Pic } \mathbb{P}_1$.

Как известно, t-структура $(D^{\geq 0}, D^{\leq 0})$ однозначно восстанавливается по любой своей половине. Поэтому будем указывать обе ее части только в том случае, когда восстановление второй не совсем очевидно.

Первая серия t-структур на $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1)$ получается из стандартных данных стабильности $(\mathcal{M}, \{\Pi_\mu\}_{\mu \in \mathcal{M}})$ (см. п. 6.1).

Начнем нашу классификацию с тавтологической t-структуры производной категории:

$$\mathcal{A}^{\leq 0} = \langle (\text{Coh } \mathbb{P}_1)[j], j \geq 0 \rangle.$$

Ее сердцевина⁵ – это $\mathcal{A}^0 = \text{Coh } \mathbb{P}_1$. Проиллюстрируем это следующей схемой:

$$\begin{array}{c} \mathcal{A}^{\geq 0} \qquad \qquad \qquad \mathcal{A}^{\leq 0} \\ \hline \dots \mathcal{O}[-1] \dots \underbrace{\dots \mathcal{O}(-1)[0] \mathcal{O}[0] \mathcal{O}(1)[0] \dots \mathcal{O}_x[0] \dots}_{\text{Coh } \mathbb{P}_1[0]} \dots \mathcal{O}(-1)[1] \mathcal{O}[1] \dots \end{array}$$

Следующие три t-структуры определяются с помощью пар кручения. Напомним определения и некоторые результаты соответствующей теории [12], [5].

⁵Здесь и далее мы обозначаем сердцевину t-структуры $(D^{\geq 0}, D^{\leq 0})$ символом D^0 .

Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория. Пара полных подкатегорий $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0)$ в $\mathcal{A}$ называется *парой кручения*, если $\text{Hom}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0) = 0$ и каждый объект $A \in \mathcal{A}$ включается в единственную точную последовательность

$$0 \rightarrow A_1 \rightarrow A \rightarrow A_0 \rightarrow 0,$$

где $A_i \in \mathcal{A}_i$. Пара кручения $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0)$ называется *коопрокидывающей*, если любой объект из $\mathcal{A}$ представляется в виде факторобъекта некоторого объекта из $\mathcal{A}_0$.

Пара кручения $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0)$ определяет t-структуру на $D^b(\mathcal{A})$ по следующему правилу:

$$\begin{aligned} {}^p D^b(\mathcal{A})^{\leq 0} &= \{A \in D^b(\mathcal{A})^{\leq 0} \mid H^0(A) \in \mathcal{A}_1\}, \\ {}^p D^b(\mathcal{A})^{\geq 0} &= \{A \in D^b(\mathcal{A})^{\geq -1} \mid H^{-1}(A) \in \mathcal{A}_0\}. \end{aligned}$$

Напомним, что *коопрокидыванием* ${}^p \mathcal{A}$ категории $\mathcal{A}$ относительно $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0)$ называется сердцевина этой t-структуры. Если пара кручения $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0)$ является коопрокидывающей, производные категории совпадают: $D({}^p \mathcal{A}) = D(\mathcal{A})$.

На категории $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1)$ мы имеем следующие коопрокидывающие пары кручения и соответствующие t-структуры:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0 &= \langle \mathcal{O}(n), n < 0 \rangle, \quad \mathcal{B}_1 = \langle \mathcal{O}(n), n \geq 0; \mathcal{O}_x, x \in \mathbb{P}_1 \rangle, \\ \mathcal{B}^{\leq 0} &= \langle \mathcal{O}(n)[i], n \geq 0, i \geq 0; \mathcal{O}_x[i], x \in \mathbb{P}_1, i \geq 0; \mathcal{O}(n)[j], n < 0, j \geq 1 \rangle, \\ \mathcal{B}^0 &= \langle \mathcal{O}(n)[0], n \geq 0; \mathcal{O}_x[0], x \in \mathbb{P}_1; \mathcal{O}(n)[1], n < 0 \rangle, \end{aligned}$$

$$\frac{\mathcal{B}^{\geq 0}}{\dots \mathcal{O}[-1] \dots \dots \mathcal{O}(-1)[0] \underbrace{\mathcal{O}[0] \mathcal{O}(1)[0] \dots \mathcal{O}_x[0] \dots \dots \mathcal{O}(-1)[1] \mathcal{O}[1] \dots}_{\text{Coh } \mathbb{P}_1[0]}} \quad \mathcal{B}^{\leq 0}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \langle \mathcal{O}(n), n \in \mathbb{Z} \rangle, \quad \mathcal{C}_1 = \langle \mathcal{O}_x, x \in \mathbb{P}_1 \rangle, \\ \mathcal{C}^{\leq 0} &= \langle \mathcal{O}_x[i], x \in \mathbb{P}_1, i \geq 0; \mathcal{O}(n)[j], n \in \mathbb{Z}, j \geq 1 \rangle, \\ \mathcal{C}^0 &= \langle \mathcal{O}_x[0], x \in \mathbb{P}_1; \mathcal{O}(n)[1], n \in \mathbb{Z} \rangle, \end{aligned}$$

$$\frac{\mathcal{C}^{\geq 0}}{\dots \mathcal{O}(-1)[0] \mathcal{O}[0] \dots \dots \underbrace{\dots \mathcal{O}_x[0] \dots \dots \mathcal{O}(-1)[1] \mathcal{O}[1] \dots}_{\text{пучки кручения}} \dots \underbrace{\dots \mathcal{O}_x[1] \dots \dots}_{\text{пучки кручения}} \dots} \quad \mathcal{C}^{\leq 0}$$

Последняя коопрокидывающая пара кручения для $\text{Coh } \mathbb{P}_1$ зависит от выбора произвольного непустого подмножества $P \subset \mathbb{P}_1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(P)_0 &= \langle \mathcal{O}_x, x \in P \rangle, \quad \mathcal{D}(P)_1 = \langle \mathcal{O}_y, y \notin P; \mathcal{O}(n), n \in \mathbb{Z} \rangle, \\ \mathcal{D}(P)^{\leq 0} &= \langle \mathcal{O}_x[i], x \in P, i \geq 0; \mathcal{O}(n)[j], n \in \mathbb{Z}, j \geq 1 \rangle, \\ \mathcal{D}(P)^0 &= \langle \mathcal{O}_x[0], x \in P; \mathcal{O}_y[1], y \notin P; \mathcal{O}(n)[1], n \in \mathbb{Z} \rangle, \end{aligned}$$

$$\frac{\mathcal{D}(P)^{\geq 0}}{\dots \dots \underbrace{\mathcal{O}_y[0] \dots}_{y \in \mathbb{P}_1 \setminus P} \dots \underbrace{\mathcal{O}_x[0] \dots \dots \mathcal{O}[1]}_{x \in P} \dots \dots \underbrace{\mathcal{O}_y[1] \dots}_{y \in \mathbb{P}_1 \setminus P} \dots \underbrace{\mathcal{O}_x[1] \dots \dots}_{x \in P} \dots} \mathcal{D}(P)^{\leq 0}$$

Очевидно, что t -структуры $\mathcal{D}(P) \sim \mathcal{D}(P')$ эквивалентны по модулю действия группы $\text{Aut } D^b(\text{Coh } \mathbb{P}_1)$ тогда и только тогда, когда $P' = \varphi(P)$ для некоторого $\varphi \in \text{Aut } \mathbb{P}_1$.

Следующая серия t -структур индуцирована исключительными данными стабильности $(\mathcal{E}_p, \{\Pi_\varepsilon^0\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}_p})$ (см. п. 6.2), где порядок, как мы уже отмечали, зависит от параметра $p \in \overline{\mathbb{N}}$. Эти t -структуры можно разделить на две группы: ограниченные ($\mathcal{E}(p)$ и $\mathcal{F}(p)$) и неограниченные ($\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{I}$). Они определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(p)^{\leq 0} &= \langle \mathcal{O}[i], i \geq p; \mathcal{O}(1)[j], j \geq -2 \rangle, \\ \mathcal{E}(p)^0 &= \langle \mathcal{O}(p)[0], \mathcal{O}(1)[-2] \rangle, \end{aligned}$$

где p – неотрицательное целое число,

$$\frac{\dots \mathcal{O}[p-1] \overline{\mathcal{O}(1)[-2] \mathcal{O}[p] \mathcal{O}(1)[-1] \mathcal{O}[p+1] \mathcal{O}(1)[0]} \dots}{\mathcal{E}(p)^{\geq 0}} \mathcal{E}(p)^{\leq 0}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(p)^{\leq 0} &= \langle \mathcal{O}[i], i \geq p; \mathcal{O}(1)[j], j \geq -1 \rangle, \\ \mathcal{F}(p)^0 &= \langle \mathcal{O}(p)[0], \mathcal{O}(1)[-1] \rangle, \end{aligned}$$

где p – неотрицательное целое число,

$$\frac{\dots \mathcal{O}[p-1] \mathcal{O}(1)[-2] \overline{\mathcal{O}[p] \mathcal{O}(1)[-1]} \mathcal{O}[p+1] \mathcal{O}(1)[0] \dots}{\mathcal{F}(p)^{\geq 0}} \mathcal{F}(p)^{\leq 0}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{\leq 0} &= \langle \mathcal{O}[i], i \geq 0; \mathcal{O}(1)[j], j \in \mathbb{Z} \rangle, \\ \mathcal{G}^{\geq 0} &= \langle \mathcal{O}[i], i \leq 0 \rangle, \\ \mathcal{G}^0 &= \langle \mathcal{O}[0] \rangle, \end{aligned}$$

$$\frac{\mathcal{G}^{\geq 0}}{\underbrace{\dots \mathcal{O}[-1] \mathcal{O}[0] \mathcal{O}[1] \dots}_{\mathcal{O}[j], j \in \mathbb{Z}}} \underbrace{\dots \mathcal{O}(1)[-1] \mathcal{O}(1)[0] \mathcal{O}(1)[1] \dots}_{\mathcal{O}(1)[j], j \in \mathbb{Z}}} \mathcal{G}^{\leq 0}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\leq 0} &= \langle \mathcal{O}(1)[j], j \geq 0 \rangle, \\ \mathcal{H}^{\geq 0} &= \langle \mathcal{O}[i], i \in \mathbb{Z}; \mathcal{O}(1)[j], j \leq 0 \rangle, \\ \mathcal{H}^0 &= \langle \mathcal{O}(1)[0] \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\mathcal{H}^{\geq 0} \qquad \qquad \qquad \mathcal{H}^{\leq 0} \\
\hline
\underbrace{\dots \mathcal{O}[-1] \mathcal{O}[0] \mathcal{O}[1] \dots}_{\mathcal{O}[j], j \in \mathbb{Z}} \quad \underbrace{\dots \mathcal{O}(1)[-1] \mathcal{O}(1)[0] \mathcal{O}(1)[1] \dots}_{\mathcal{O}(1)[j], j \in \mathbb{Z}} \\
\\
\mathcal{I}^{\leq 0} = \langle \mathcal{O}(1)[j], j \in \mathbb{Z} \rangle, \\
\mathcal{I}^{\geq 0} = \langle \mathcal{O}[i], i \in \mathbb{Z} \rangle, \\
\mathcal{I}^0 = \langle 0 \rangle, \\
\\
\mathcal{I}^{\geq 0} \qquad \qquad \qquad \mathcal{I}^{\leq 0} \\
\hline
\underbrace{\dots \mathcal{O}[-1] \mathcal{O}[0] \mathcal{O}[1] \dots}_{\mathcal{O}[j], j \in \mathbb{Z}} \quad \underbrace{\dots \mathcal{O}(1)[-1] \mathcal{O}(1)[0] \mathcal{O}(1)[1] \dots}_{\mathcal{O}(1)[j], j \in \mathbb{Z}}
\end{array}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.6. Легко проверить, что сердцевины t-структур, индуцированных исключительными данными стабильности, обладают следующими эквивалентностями:

- 1) $\mathcal{E}(p)^0 \forall p \geq 0$ и $\mathcal{F}(p)^0 \forall p \geq 1$ эквивалентны прямой сумме категорий векторных пространств $\mathcal{Vect} \oplus \mathcal{Vect}$;
- 2) $\mathcal{F}(0)^0$ эквивалентна категории представлений колчана $\bullet \rightrightarrows \bullet$;
- 3) $\mathcal{G}^0$ и $\mathcal{H}^0$ эквивалентны категории $\mathcal{Vect}$;
- 4) $\mathcal{I}^0$ – нулевая категория.

Поскольку категория $\mathcal{Vect}$ расщепима, то из всех t-структур, индуцированных исключительными t-стабильностями, только для $\mathcal{A} = \mathcal{F}(0)^0$ производная категория $D^b(\mathcal{A})$ эквивалентна исходной $D^b(\mathcal{Coh} \mathbb{P}_1)$ (см. [3]).

Напомним, что любая ограниченная t-структура на $D^b(\mathcal{Coh} \mathbb{P}_1)$ индуцирует грубые данные стабильности (лемма 3.2). По следствию 6.2 эта t-стабильность может быть измельчена до одной из стандартных ($\mathcal{M}$) или до одной из исключительных ($\mathcal{E}$). Поэтому согласно предложению 5.4 любая ограниченная t-структура получается разбиением множества наклонов $\mathcal{M}$ или $\mathcal{E}$ на две непересекающиеся части. Тем самым мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6.7. *Любая ограниченная t-структура на $D^b(\mathcal{Coh} \mathbb{P}_1)$ по модулю действия группы $\text{Aut } D^b(\mathcal{Coh} \mathbb{P}_1)$ эквивалентна одной из определенных выше t-структур: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}(p)$, $\mathcal{F}(p)$.*

§ 7. Данные стабильности на кривой положительного рода

В настоящем параграфе мы исследуем данные стабильности на ограниченной производной категории $\mathcal{T}_g = D^b(\mathcal{Coh} C_g)$ когерентных пучков на гладкой кривой C_g положительного рода g .

Сначала мы определим множество стандартных стабильностей, продолжающих стабильность Мамфорда–Такемото. Затем покажем, что любая t-стабильность на $\mathcal{T}_g$ индуцируется стабильностью на абелевой категории $\mathcal{Coh} C_g$. В случае

эллиптической кривой C_1 мы докажем, что существует единственный тип тончайших t -стабильностей на $\mathcal{T}_1$, а именно стандартные, зависящие от выбора порядка на некотором счетном множестве дизъюнктивных копий кривой. В заключение мы перечислим все ограниченные t -структуры на $\mathcal{T}_1$.

Как показано в предложении 3.3, t -стабильность на производной категории от абелевой категории $\mathcal{A}$ можно построить как продолжение некоторой стабильности на $\mathcal{A}$. В свою очередь, на абелевой категории $\mathcal{A}$ мы можем определить данные стабильности с помощью положительной системы аддитивных функций из $K_0^*(\mathcal{A})$ (определение 2.3). Для категории $\mathcal{A} = \text{Coh } C_g$ мы имеем исчерпывающую положительную систему функций $(\text{rk}, \deg)$, где rk – ранг и $\deg$ – степень пучка. Каждому пучку $F \in \text{Coh } C_g$ она сопоставляет наклон $\gamma(F)$ по правилу

$$\gamma(F) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \text{arcctg} \left(-\frac{\deg F}{\text{rk } F} \right), & \text{если } \text{rk } F \neq 0, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку функция $\text{arcctg } x$ строго убывает, $\gamma(F)$ эквивалентен наклону

$$\bar{\mu}(F) = \begin{cases} \frac{\deg F}{\text{rk } F}, & \text{если } \text{rk } F \neq 0, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Наклон $\bar{\mu}$ принимает значения в естественно упорядоченном множестве

$$\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \sqcup \{+\infty\}.$$

Пучок E $\bar{\mu}$ -полустабилен, если для любого его подпучка $0 \neq F \subset E$ выполнено неравенство $\bar{\mu}(F) \leq \bar{\mu}(E)$. В частности, любой пучок кручения $\bar{\mu}$ -полустабилен, а пучок, свободный от кручения, будет $\bar{\mu}$ -полустабильным тогда и только тогда, когда он полустабилен по Мамфорду–Такемото (стабильность по Мамфорду–Такемото будем для краткости называть *МТ-стабильностью*).

Мы получаем данные стабильности $(\widehat{\mathbb{Q}}, \{\Pi_q\}_{q \in \widehat{\mathbb{Q}}})$ (где полустабильная категория Π_q состоит из всех $\bar{\mu}$ -полустабильных пучков наклона q) на абелевой категории $\text{Coh } C_g$ и, следовательно, некоторую t -стабильность на производной категории $\mathcal{T}_g$. Ясно, что эта t -стабильность не является тончайшей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Любая t -стабильность Φ на $D^b(\text{Coh } C_g)$ при $g > 0$ утоньшается до t -стабильности, индуцированной некоторыми данными стабильности на $\text{Coh } C_g$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку гомологическая размерность категории $\text{Coh } C_g$ равна 1, достаточно убедиться, что Φ -полустабильные факторы $(E_{\varphi_0}, \dots, E_{\varphi_n})$ НН-фильтрации любого пучка $E \in \text{Coh } C_g$ лежат в абелевой категории: $E_{\varphi_i} \in \text{Coh } C_g \forall i$. Это вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 7.2. *Допустим, пучок $E \in Coh C_g$ включается в треугольник*

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \nearrow \wr & & \dashrightarrow \\ E & \xleftarrow{\quad} & Y, \end{array} \quad (7.1)$$

где $\text{Hom}^{\leq 0}(Y, X) = 0$. Тогда $X, Y \in Coh C_g$ и $\text{Hom}_{Coh C_g}(Y, X) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку гомологическая размерность категории $\mathcal{T}_g$ равна 1, можно считать, что $X = X_0[0] \oplus X_1[1]$, где $X_0, X_1 \in Coh C_g$ и $f = f_0 \oplus f_1$, $f_0 \in \text{Hom}_{Coh C_g}(E, X_0)$, $f_1 \in \text{Ext}_{Coh C_g}^1(E, X_1)$. Более того, условие $f_i = 0$ эквивалентно равенству нулю пучка X_i .

Рассмотрим расширение

$$0 \rightarrow X_1 \rightarrow G \xrightarrow{d_{-1}} E \rightarrow 0, \quad (7.2)$$

соответствующее элементу f_1 , и реализуем объект $X_1[1]$ комплексом $G \xrightarrow{d_{-1}} E$. Тогда f_1 будет представляться морфизмом комплексов

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \text{Id}_E \\ G & \xrightarrow{d_{-1}} & E \end{array}$$

Поэтому прямая сумма отображений $f_0 \oplus f_{-1}$ – это морфизм

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \text{Id}_E \oplus f_0 \\ G & \xrightarrow{d_{-1}} & E \oplus X_0 \end{array}$$

Конус $C(f_0 \oplus f_1)$ такого морфизма изоморфен комплексу вида

$$E \oplus G \xrightarrow{\delta_{-1}} E \oplus X_0,$$

дифференциал которого δ_{-1} определяется матрицей $\begin{pmatrix} \text{Id}_E & d_{-1} \\ f_0 & 0 \end{pmatrix}$. Из коммутативной

диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{d_{-1}} & E \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H^{-1} & \longrightarrow & E \oplus G & \xrightarrow{\delta_{-1}} & E \oplus X_0 \longrightarrow H^0 \longrightarrow 0 \quad (7.3) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f_0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{f_0} & X_0 \longrightarrow \text{Coker } f_0 \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & 0 & & 0 & & 0 & 0
 \end{array}$$

следует, что конус $C(f_0 \oplus f_1)$ изоморфен прямой сумме $H^{-1}[1] \oplus \text{Coker } f_0[0]$. В новых обозначениях условие $\text{Hom}^{\leq 0}(Y, X) = 0$ можно переписать следующим образом:

$$\text{Hom}^{\leq 0}(H^{-1}[0] \oplus \text{Coker } f_0[-1], X_0[0] \oplus X_1[1]) = 0.$$

В частности,

$$\text{Hom}^0(\text{Coker } f_0[-1], X_0[0]) = \text{Ext}_{\mathcal{C}_{oh} \mathcal{C}_g}^1(\text{Coker } f_0, X_0) = 0, \quad (7.4)$$

$$\text{Hom}^0(H^{-1}[0], X_1[1]) = \text{Ext}_{\mathcal{C}_{oh} \mathcal{C}_g}^1(H^{-1}, X_1) = 0. \quad (7.5)$$

По определению коядра пространство $\text{Hom}_{\mathcal{C}_{oh} \mathcal{C}_g}(X_0, \text{Coker } f_0)$ тривиально только тогда, когда тривиально само коядро $\text{Coker } f_0$. С другой стороны, канонический дивизор K_g на кривой положительного рода либо равен нулю ($g = 1$), либо эффективен ($g > 1$). Значит, пространство $\text{Hom}_{\mathcal{C}_{oh} \mathcal{C}_g}(X_0, \text{Coker } f_0(K_g))$ тоже нетривиально. По теореме двойственности Серра отсюда вытекает, что $\text{Ext}_{\mathcal{C}_{oh} \mathcal{C}_g}^1(\text{Coker } f_0, X_0) \neq 0$. Полученное противоречие с условием (7.4) показывает, что $\text{Coker } f_0 = 0$.

В случае $X_1 \neq 0$ пространство $\text{Hom}_{\mathcal{C}_{oh} \mathcal{C}_g}(X_1, H^{-1})$ не равно нулю (см. диаграмму (7.3)). Следовательно, $\text{Hom}_{\mathcal{C}_{oh} \mathcal{C}_g}(X_1, H^{-1}(K_g)) \neq 0$. Вновь применяя теорему Серра, получаем $\text{Ext}_{\mathcal{C}_{oh} \mathcal{C}_g}^1(H^{-1}, X_1) \neq 0$, что противоречит требованию (7.5). Значит, $X_1 = 0$ и треугольник (7.1) имеет вид

$$\begin{array}{ccc}
 & X_0 & \\
 f_0 \nearrow & & \searrow \text{---} \\
 E & \longleftarrow & \text{Ker } f_0.
 \end{array}$$

Лемма, а с нею и предложение доказаны.

Полное описание всех тончайших t-стабильностей на кривой рода $g > 1$ авторам пока не известно. Для эллиптической кривой оно приводится ниже.

7.1. Описание t-стабильностей на эллиптической кривой. Заметим, что для каждого рационального числа q существует МТ-стабильное расслоение F на эллиптической кривой C_1 наклона $\bar{\mu}(F) = q$. Обозначим множество всех таких МТ-стабильных расслоений через $\mathfrak{M}_q$. Хорошо известно, что $\mathfrak{M}_q$ естественно изоморфно самой кривой C_1 (см. [1]). Более того, если $F, G \in \mathfrak{M}_q$ и $F \neq G$, то

$$\mathrm{Hom}(F, G) = \mathrm{Hom}(G, F) = \mathrm{Ext}^1(F, G) = \mathrm{Ext}^1(G, F) = 0.$$

Обозначив символом $\mathfrak{M}_\infty$ кривую C_1 , параметризующую небоскребы $\mathcal{O}_x$, получим множество $\mathcal{M}_1$ полустабильных подкатегорий $\Pi_{(q, F)} = \langle F \rangle$, где $q \in \widehat{\mathbb{Q}}$ и $F \in \mathfrak{M}_q$. Выбирая на каждом из множеств $\mathfrak{M}_q$ свой произвольный линейный порядок и лексикографически продолжая его до порядка на $\mathcal{M}_1$, построим тончайшие данные стабильности $(\mathcal{M}_1, \{\Pi_\mu\}_{\mu \in \mathcal{M}_1})$ на абелевой категории $\mathrm{Coh} C_1$ (существование HN-фильтрации очевидно).

После этого введем множество наклонов $D(\mathcal{M}_1) = \mathbb{Z} \times \mathcal{M}_1$ с лексикографическим порядком и определим полустабильные подкатегории как $\Pi_{(i, q, F)} = \langle F[i] \rangle$, где $F \in \mathfrak{M}_q$. Очевидно, $(D(\mathcal{M}_1), \{\Pi_\mu\}_{\mu \in D(\mathcal{M}_1)})$ – тончайшие данные стабильности на $D^b(\mathrm{Coh} C_1)$ (предложения 3.3 и 5.5). Будем называть различные t-стабильности, полученные таким образом, *стандартными*.

ТЕОРЕМА 7.3. *Любая t-стабильность $(\Phi, \{\Theta_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ в ограниченной производной категории $\mathcal{T}_1$ когерентных пучков на гладкой эллиптической кривой C_1 можно измельчить до одной из стандартных t-стабильностей $(D(\mathcal{M}_1), \{\Pi_\mu\}_{\mu \in D(\mathcal{M}_1)})$. В частности, каждая тончайшая t-стабильность на $\mathcal{T}_1$ является стандартной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку любые данные стабильности на $\mathcal{T}_1$ индуцированы стабильностью на $\mathrm{Coh} C_1$, достаточно показать, что каждый неразложимый пучок E (образующая стандартной полустабильной категории) является Φ -полустабильным. Допустим, что это не так. Тогда ввиду леммы 7.2 пучок E включается в точную последовательность

$$0 \rightarrow Y \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0,$$

где $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh} C_g}(Y, X) = 0$. По теореме двойственности Серра это условие эквивалентно $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Coh} C_g}^1(X, Y) = 0$, т.е. точная последовательность расщепляется и $E = X \oplus Y$.

Используя различные допустимые разложения множества наклонов $\mathcal{M}_1$, мы приведем полный список ограниченных t-структур на $\mathcal{T}_1$ по модулю действия группы $\mathrm{Aut} \mathcal{T}_1$. Каждая из них определяется подходящей коопрокидывающей парой кручения. Поэтому мы ограничимся только описанием этих пар.

Обозначим через X произвольное простое расслоение на кривой C_1 , а через I – объединение множества рациональных чисел из промежутка $[0, 1)$ с $\{\infty\}$. Тогда каждый элемент $q \in I$ и (возможно, пустое) подмножество $P \subset \mathfrak{M}_q \simeq C_1$ многообразия модулей МТ-стабильных пучков на C_1 наклона q задают коопрокидывающую пару кручения $(\mathcal{A}(q, P)_1, \mathcal{A}(q, P)_0)$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(q, P)_0 &= \langle X \mid \bar{\mu}(X) < q \text{ или } \bar{\mu}(X) = q \text{ и } X \in P \rangle, \\ \mathcal{A}(q, P)_1 &= \langle X \mid \bar{\mu}(X) > q \text{ или } \bar{\mu}(X) = q \text{ и } X \notin P \rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что тавтологическая t -структура получается при $q = 0$ и $P = \emptyset$.

Итак, мы имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7.4. *Любая ограниченная t -структура на ограниченной производной категории $D^b(\text{Coh } C_1)$ когерентных пучков на гладкой эллиптической кривой по модулю действия группы $\text{Aut } D^b(\text{Coh } C_1)$ определяется одной из коопрокидывающих пар кручения, описанных выше.*

Список литературы

1. Atiyah M. F. Vector Bundles Over an Elliptic Curve // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. V. VII. P. 414–452.
2. Beilinson A. A. Coherent Sheaves on $\mathbb{P}^n$ and Problems in Linear Algebra // Funk. An. 1978. V. 12. P. 68–69.
3. Bondal A. I. Helices, Representations of Quivers and Koszul Algebras // Helices and Vector Bundles: Seminare Rudakov. London Math. Soc., Lect. N. Ser. 1990. V. 148. P. 75–95.
4. Bondal A., Orlov D. Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences // Compositio Math. 2001. V. 125. № 3. P. 327–344.
5. Bondal A., Van den Bergh M. Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry // Moscow Math. J. 2003. V. 3. № 1; math.AG/0204218.
6. Bridgeland T. Stability conditions on triangulated categories. math.AG/0212237.
7. Bridgeland T. Stability conditions on K3-surfaces. math.AG/0307164.
8. Гельфанд С. И., Манин Ю. И. Методы гомологической алгебры. Т. 1. М.: Наука, 1988.
9. Douglas M. R. Dirichlet branes, homological mirror symmetry, and stability. math.AG/0207021.
10. Gieseker D. On the moduli of vector bundles on an algebraic surface // Ann. of Math. 1977. V. 106. P. 45.
11. Gorodentsev A., Kuleshov S. Helix theory. Preprint/MPI 2001 (97).
12. Happel D., Reiten I., Smalø S. Tilting in abelian categories and quasitilted algebra // Memoirs of the AMS. V. 575. N.Y.: Amer. Math. Soc., 1996.
13. Maruyama M. Moduli of stable sheaves. I // J. Math. Kyoto. 1977. V. 17. P. 91.
14. Maruyama M. Moduli of stable sheaves. II // J. Math. Kyoto. 1978. V. 18. P. 557.
15. Rudakov A. Stability for an abelian category // J. Algebra. 1997. V. 197. № 1. P. 231–245.

E-mail: gorod@itep.ru
 kuleshov@mail.miem.edu.ru
 rudakov@math.ntnu.no

Поступило в редакцию
 20.01.2004