Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, О разрушении решений класса сильно нелинейных уравнений типа Соболева, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 4, 151–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/im498>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 04:35:30

УДК 519.634

М. О. Корпусов

О разрушении решений класса сильно нелинейных уравнений типа Соболева

Рассмотрены две различные абстрактные задачи Коши для уравнений типа Соболева с операторными коэффициентами в банаховых пространствах. Для первой задачи при некоторых условиях, которым удовлетворяют операторные коэффициенты, получены оптимальные теоремы существования и несуществования глобального по времени решения. В случае разрушения решения получены оценки снизу и сверху времени разрушения. Наконец, для второй задачи получены оптимальные оценки снизу и сверху скорости разрушения решения. Для каждой из абстрактных задач приведены примеры физически осмысленных операторных коэффициентов.

Библиография: 29 наименований.

§ 1. Введение. Постановка задачи

Целью настоящего исследования является получение оптимальных результатов типа теорем существования и несуществования для класса сильно нелинейных уравнений типа Соболева в абстрактной постановке задачи Коши для уравнения с операторными коэффициентами в банаховом пространстве:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}_j(u) \right) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \quad (1.1)$$

и оценок снизу и сверху времени разрушения решений задачи (1.1). Кроме того, целью настоящего исследования является получение оптимальных оценок снизу и сверху скорости разрушения решений абстрактной задачи Коши

$$\frac{d}{dt} \mathbb{A}_0 u + \mathbb{B}(u) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0. \quad (1.2)$$

Под оптимальными результатами мы понимаем такие, что при определенных входящих в задачу параметрах имеет место разрушение решений задач, а при других условиях – глобальная разрешимость. В этой связи мы намеренно сузили класс рассматриваемых уравнений типа Соболева до такого класса, для которого можно получить оптимальные результаты. Кроме того, мы рассматриваем лишь

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 02-01-00253, 02-01-06038) и гранта проекта “Молодые ученые России”.

такие задачи, для которых может быть доказана единственность решения, понимаемого в том или ином смысле.

В последнее время в математической физике стали интенсивно возникать сильно нелинейные уравнения типа Соболева третьего порядка с производной по времени первого порядка. В этой связи отметим работу [1]. Кроме того, математическому моделированию нестационарных процессов в сплошных средах, приводящему к разнообразным линейным и нелинейным уравнениям типа Соболева, посвящены работы [2]–[11].

В работе при исследовании вопросов разрушения решений нелинейных уравнений типа Соболева мы применяем энергетический подход Х. А. Левина, развитый в [12], [13]. Работа [12] посвящена исследованию глобальной по времени неразрешимости задачи Коши для операторно-дифференциального уравнения вида

$$\mathbb{A} \frac{du}{dt} + \mathbb{L}u = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0,$$

где существенно использовалось то, что операторы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{L}$ – линейные, положительно определенные и самосопряженные, а $\mathbb{F}(u)$ имеет симметрическую производную Фреше. В работе [13] рассматривается случай степенной функции при производной по времени. Мы обобщаем подход Х. А. Левина в следующих направлениях: во-первых, мы рассматриваем случай нелинейных эллиптических операторов $\mathbb{A}$ и $\mathbb{L}$ и получаем двусторонние оценки времени разрушения, во-вторых, в случае линейного оператора $\mathbb{A}$ мы получаем оптимальные двусторонние оценки не только времени, но и скорости разрушения.

Разрушение за конечное время и существование глобального по времени ограниченного решения родственного к (1.2) нелинейного уравнения Буссинеска с источником

$$u_t - \Delta \psi(u) - \Delta u_t + q(u) = 0$$

исследовалось в работах [14] и [15], где для доказательства разрушения используется полученный в [14] принцип сравнения решений первой краевой задачи для данного уравнения. В частности, в работе [14] доказано разрушение положительного решения задачи и получены результаты типа теорем существования и несуществования.

В [18] исследован вопрос о единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения псевдопараболического типа:

$$u_t = c \Delta u_t + \varphi(u)$$

в классе растущих функций $\varphi(u)$, где u принадлежит некоторому классу корректности.

Отметим, что приложением полученных нами результатов являются сильно нелинейные уравнения типа Соболева в ограниченных областях. С другой стороны, во всем пространстве $\mathbb{R}^N$ может быть применен оригинальный метод пробных функций, предложенный в работах [16], [17].

Приведем примеры некоторых модельных трехмерных сильно нелинейных уравнений типа Соболева, вывод которых содержится в работе [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta u + \sum_{j=1}^n \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_j-2} \nabla u) \right) + |u|^q u = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - |u|^{q_1} u) + |u|^q u = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) - |u|^{q_1} u) + |u|^q u = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \lambda |u|^{p-2} u = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta^2 u - \Delta u) + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (-\Delta^2 u + \Delta u + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2} \nabla u)) - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_2-2} \nabla u) = 0, \quad (1.8)$$

где $p_j > 2$, $q_1, q \geq 0$, $p_1, p_2, p > 2$, $\lambda > 0$. (Физические процессы, описываемые данными уравнениями, см., например, в [1].)

§ 2. Первоначальные определения и условия

Для произвольного банахова пространства $\mathbb{X}$ через $\mathbb{X}^*$ обозначим сопряженное пространство. При $h \in \mathbb{X}^*$ и $u \in \mathbb{X}$ через $\langle h, u \rangle$ обозначим скобки двойственности между пространствами $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}^*$ [18], [19]. Сильную и слабую сходимости обозначим соответственно $\rightarrow$ и $\rightharpoonup$. Причем нормы в $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}^*$ обозначим через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ соответственно. Кроме того, для двух банаховых пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ через $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ обозначим компактное вложение $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathbb{X}$ – банахово пространство, D – подмножество $\mathbb{X}$, $\mathbb{A}$ – отображение D в $\mathbb{X}^*$. Тогда $\mathbb{A}$ называется *монотонным отображением*, если для произвольных $u, v \in D$ выполнено неравенство

$$\langle \mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v), u - v \rangle \geq 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $\mathbb{X}$ – банахово пространство, D – подмножество $\mathbb{X}$, $\mathbb{F}$ – отображение D в $\mathbb{X}^*$. Тогда оператор $\mathbb{F}(u)$ называется *ограниченно непрерывным по Липшицу*, если

$$\|\mathbb{F}(u) - \mathbb{F}(v)\|_* \leq \mu(R) \|u - v\|, \quad R = \max(\|u\|, \|v\|),$$

где $\mu(R)$ – возрастающая и непрерывная функция, а $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ – нормы соответственно в $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Функционал $\mathbb{J}: D \subseteq \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется *слабо полунепрерывным снизу*, если для любой последовательности $u_m \in D$, слабо сходящейся к $u_0 \in D$, выполнено неравенство

$$\mathbb{J}(u_0) \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{J}(u_m).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Оператор $\mathbb{A}: D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}^*$ называется *полу непрерывным*, если для любых $u, v, w \in D$ функция $\lambda \rightarrow \langle \mathbb{A}(u + \lambda v), w \rangle$ непрерывна как функция из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Оператор $\mathbb{F}(u): D \subseteq \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}^*$ называется *усиленно непрерывным*, если для любой последовательности $u_m \in D$, слабо сходящейся к $u_0 \in D$, имеем

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|\mathbb{F}(u_m) - \mathbb{F}(u)\|_* = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Если в точке $u \in D \subset \mathbb{X}$, D – выпуклое множество, имеет место равенство

$$\mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u) = \Gamma(u, h) + \omega(u, h),$$

где $\Gamma(u, h)$ – линейный оператор от $h \in \mathbb{X}$, и при фиксированном $u \in D \subset \mathbb{X}$

$$\lim_{\|h\| \rightarrow +0} \frac{\|\omega(u, h)\|_*}{\|h\|} = 0,$$

то $\Gamma(u, h)$ называется *дифференциалом Фреше* и обозначается $d\mathbb{F}(u, h)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Оператор $\mathbb{F}(u)$ имеет на множестве w локально равномерный дифференциал Фреше $d\mathbb{F}(u, h)$, если каждому $\varepsilon > 0$ и произвольному $u_0 \in w$ отвечают такие положительные числа $\eta(\varepsilon, u_0)$ и $\delta(\varepsilon, u_0)$, что для всякого u из шара $U(u_0, \eta)$ имеет место неравенство

$$\|\omega(u, h)\|_* < \varepsilon \|h\|,$$

если $\|h\| < \delta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. *Симметрическим* назовем линейный оператор $\mathbb{A}$, действующий из рефлексивного банахова пространства $\mathbb{X}$ в сопряженное $\mathbb{X}^*$, если для любых $u, v \in \mathbb{X}$ выполнено соотношение

$$\langle \mathbb{A}u, v \rangle = \langle \mathbb{A}v, u \rangle.$$

Приведем необходимые для дальнейшего предположения и вспомогательные результаты.

Пусть банаховы пространства $\mathbb{V}_i, \mathbb{V}_0, \mathbb{W}_0, \mathbb{W}_1$ сепарабельны и рефлексивны с соответствующими сопряженными банаховыми пространствами $\mathbb{V}_i^*, \mathbb{V}_0^*, \mathbb{W}_0^*, \mathbb{W}_1^*$ относительно скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_0, (\cdot, \cdot)_0, (\cdot, \cdot)_1, i = \overline{1, N}$.

Пусть операторы $\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_0, \mathbb{F}, \mathbb{B}$ определены на пространствах $\mathbb{V}_i, \mathbb{V}_0, \mathbb{W}_0, \mathbb{W}_1$ со значениями в сопряженных пространствах:

$$\mathbb{A}_i: \mathbb{V}_i \rightarrow \mathbb{V}_i^*, \quad \mathbb{A}_0: \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0^*, \quad \mathbb{F}: \mathbb{W}_0 \rightarrow \mathbb{W}_0^*, \quad \mathbb{B}: \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_1^*, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.1)$$

Пусть $\mathbb{V} \equiv \bigcap_{j=0}^N \mathbb{V}_j$. Предположим, что банахово пространство $\mathbb{V}$ сепарабельно. Это выполняется автоматически в силу сепарабельности каждого из

пространств $\mathbb{V}_j$ в том случае, если пространство $\mathbb{V}$ нетривиально, т.е. бесконечномерно. В силу рефлексивности каждого из пространств $\mathbb{V}_j$, $j = \overline{0, N}$, имеем $\mathbb{V}^* \equiv \bigcup_{j=0}^N \mathbb{V}_j^*$. Обозначим через $\|\cdot\|_j$, $j = \overline{0, N}$, нормы банаховых пространств $\mathbb{V}_j$, а через $\|\cdot\|_j^*$ – нормы банаховых пространств $\mathbb{V}_j^*$. Нормы банаховых пространств $\mathbb{W}_i$, $i = 0, 1$, обозначим через $|\cdot|_i$, а нормы банаховых пространств $\mathbb{W}_i^*$ – через $|\cdot|_i^*$.

Введем некоторые условия, которым удовлетворяют операторные коэффициенты уравнений (1.1) и (1.2).

Условия ($\mathbb{A}$): 1) операторы $\mathbb{A}_j: \mathbb{V}_j \rightarrow \mathbb{V}_j^*$, $j = \overline{1, N}$, являются монотонными, полунепрерывными;

2) операторы $\mathbb{A}_j$ имеют симметрическую производную Фреше для любого фиксированного $u \in \mathbb{V}_j$:

$$\mathbb{A}'_{j,u}(u): \mathbb{V}_j \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V}_j, \mathbb{V}_j^*), \quad j = \overline{1, N},$$

неотрицательно определенную, и, кроме того, производная Фреше является полунепрерывной в каждом $\mathbb{V}_j$ в том смысле, что функция $\langle \mathbb{A}'_{j,u}(u + \lambda v)h_1, h_2 \rangle_j$ непрерывна как функция из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^1$ относительно λ для любых $u, v, h_1, h_2 \in D \subset \mathbb{V}_j$, $j = \overline{1, N}$, и $\lambda \in \mathbb{R}^1$;

3) справедливы неравенства снизу и сверху:

$$\|\mathbb{A}_j(u)\|_j^* \leq M_j \|u\|_j^{p_j-1}, \quad \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j \geq m_j \|u\|_j^{p_j}, \quad p_j > 2, \quad j = \overline{1, N},$$

где $M_j > 0$ и $m_j > 0$;

3°) $\langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j^{1/p_j}$ образуют полунормы в банаховых пространствах $\mathbb{V}_j$;

4) операторы $\mathbb{A}_j$ положительно однородные порядка $p_j - 1$:

$$\mathbb{A}_j(sv) = s^{p_j-1} \mathbb{A}_j(v), \quad s > 0.$$

Условия ($\mathbb{A}_0$): 1) выполнено неравенство

$$\langle \mathbb{A}_0 u - \mathbb{A}_0 v, u - v \rangle_0 \geq m_0 \|u - v\|_0^2$$

для любых $u, v \in \mathbb{V}_0$, $m_0 > 0$ – постоянная;

2) оператор $\mathbb{A}_0$ симметричен;

3) оператор $\mathbb{A}_0: \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0^*$ удовлетворяет условию $\|\mathbb{A}_0 u\|_0^* \leq M_0 \|u\|_0$, $M_0 > 0$ – постоянная.

Условия ($\mathbb{F}$): 1) оператор $\mathbb{F}(u): \mathbb{W}_0 \rightarrow \mathbb{W}_0^*$ является ограниченно непрерывным по Липшицу:

$$|\mathbb{F}(u) - \mathbb{F}(v)|_0^* \leq \mu(R) |u - v|_0, \quad R = \max(|u|_0, |v|_0),$$

где $\mu(R)$ – возрастающая и непрерывная функция;

2) оператор $\mathbb{F}(u)$ дифференцируем по Фреше и имеет симметрическую производную при любом фиксированном $u \in \mathbb{W}_0$;

3) для любых $s > 0$ и $v \in \mathbb{W}_0$ выполнено равенство $\mathbb{F}(sv) = s^{1+q} \mathbb{F}(v)$, $q > 0$;

4) справедливо неравенство сверху

$$|\mathbb{F}(u)|_0^* \leq B|u|_0^{q+1}, \quad B > 0.$$

Условия $(\mathbb{B})$: 1) оператор $\mathbb{B}: \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_1^*$ является монотонным, полунепрерывным;

2) справедливы неравенства снизу и сверху:

$$|\mathbb{B}(u)|_1^* \leq C|u|_1^{q+1}, \quad (\mathbb{B}(u), u)_1 \geq c|u|_1^{q+2}, \quad q > 0,$$

где $C > 0$ и $c > 0$;

2°) функция $(\mathbb{B}(u), u)_1^{1/(q+2)}$ является полунормой на $\mathbb{W}_1$;

3) оператор $\mathbb{B}$ положительно однородный порядка $q + 1$:

$$\mathbb{B}(sv) = s^{q+1}\mathbb{B}(v), \quad s > 0;$$

4) оператор $\mathbb{B}$ при любом фиксированном $u \in \mathbb{W}_1$ имеет симметрическую производную Фреше

$$\mathbb{B}'_u(u): \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_1^*).$$

В сформулированных условиях символом $^\circ$ отмечены условия, выполнение которых требуется только для теоремы 3.1 и теоремы 5.1.

Заметим, что из условий $(\mathbb{A}_0)$, $(\mathbb{B})$ и $(\mathbb{A})$ следует, что величина $\langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0^{1/2}$ является нормой на $\mathbb{V}_0$, $(\mathbb{B}(u), u)_1^{1/(q+2)}$ является нормой на $\mathbb{W}_1$, $\langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j^{1/p_j}$ является нормой на $\mathbb{V}_j$, $j = 1, \dots, N$.

§ 3. Слабая обобщенная разрешимость, единственность и разрушение задачи (1.1)

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия $(\mathbb{A})$, $(\mathbb{A}_0)$, $(\mathbb{F})$. Предположим, что $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, т. е. оператор вложения вполне непрерывен. Кроме того, предположим, что всегда найдется $j^* \in \overline{1, N}$, для которого $p_{j^*} \geq p_j$, такое, что если $p_{j^*} \geq q + 2$, то $\mathbb{V}_{j^*} \subseteq \mathbb{W}_0$. Пусть выполнено неравенство

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0.$$

Тогда для любого $u_0 \in \mathbb{V}$ найдется такое максимальное $T_0 \equiv T_{u_0} > 0$, что для любого $0 < T < T_0$ задача Коши (1.1) имеет не продолжаемое во времени решение

$$u(t) \in L^\infty(0, T; \mathbb{V}), \quad \frac{du}{dt}(t) \in L^2(0, T; \mathbb{V}_0),$$

единственное при дополнительном условии $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0$. Причем справедливы следующие двусторонние оценки для положительно определенной в силу условий $(\mathbb{A}_0)$, 2) и $(\mathbb{A})$, 3) функции, имеющей смысл кинетической энергии,

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j.$$

В трех случаях относительно возможных значений величины $\alpha \equiv \frac{q+2}{\bar{p}}$, $\bar{p} \equiv \max_{j=1, \bar{N}} p_j$, имеем:

1) если $\alpha = 1$, то $T_0 = +\infty$ и

$$\Phi_0 \exp\{\mathbb{E}_0 t\} \leq \Phi(t) \leq \Phi_0 \exp\{C_2 t\};$$

2) если $\alpha \in (0, 1)$, то $T_0 = +\infty$ и

$$\Phi_0 [1 + (1 - \alpha) \mathbb{E}_0 \Phi_0^{\alpha-1} t]^{1/(1-\alpha)} \leq \Phi(t) \leq \Phi_0 [1 + (1 - \alpha) C_2 \Phi_0^{\alpha-1} t]^{1/(1-\alpha)};$$

3) если $\alpha > 1$ и выполнено неравенство

$$\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{i=1}^N \frac{p_i - 1}{p_i} \langle \mathbb{A}_i(u_0), u_0 \rangle_i > 1,$$

то найдется такое $T_0 > 0$, что

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty, \quad T_1 \leq T_0 \leq T_2,$$

где

$$C_2 \equiv BC_{j^*}^{q+2} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p} - 1} \right)^{(q+2)/\bar{p}}, \quad |v|_0 \leq C_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v \rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}, \quad \bar{p} = \max_{j=1, \bar{N}} p_j,$$

$$\Phi_0 \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j, \quad \mathbb{E}_0 \equiv \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}{\Phi_0^\alpha},$$

$$T_1 = (q+1)^{-1} \Phi_0^{-(q+1)} \bar{B}^{-1}, \quad T_2 \equiv \frac{1}{\alpha - 1} \frac{\Phi_0}{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0},$$

$$\bar{B} \equiv BC_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p} - 1} \right)^{1/p_j} \frac{p_j - 1}{p_j} \right)^{q+2},$$

C_1 – константа наилучшего вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B – константа из условия $(\mathbb{F}), 4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем в несколько шагов, состоящих из построения приближений Галёркина, априорных оценок, метода монотонности, доказательств единственности и разрушения решения, при изложении которых будут сформулированы и доказаны соответствующие леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В силу принадлежности решения $u(t)$ классу $L^\infty(0, T; \mathbb{V})$, $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; \mathbb{V}_0)$, следует, что после возможного изменения области определения функции $u(t)$ на множестве нулевой меры Лебега отображение $u(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{V}_0$ непрерывно. Значит, имеет смысл начальное условие $u(0) = u_0$.

Шаг 1. Приближения Галёркина. В силу сепарабельности каждого из пространств $\mathbb{V}_j$, $j = \bar{0}, \bar{N}$, следует сепарабельность их нетривиального по условию

пересечения $\mathbb{V} \equiv \bigcap_{j=0}^N \mathbb{V}_j$. Значит, найдется счетная всюду плотная в $\mathbb{V}$ линейно независимая система функций $\{w_i\}_{i=1}^m \hookrightarrow \mathbb{V}$. Под слабым обобщенным решением абстрактной задачи Коши (1.1) будем понимать решение следующей задачи:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 u, v \rangle_0 + \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u), v \rangle_j = (\mathbb{F}(u), v)_0 \quad \forall v \in \mathbb{V}, \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{V}, \quad (3.1)$$

где производная по времени понимается в смысле распределений $\mathcal{D}'(0, T)$.

Будем доказывать разрешимость задачи (3.1) методом Галёркина в сочетании с методами монотонности и компактности [20].

Сначала рассмотрим следующую конечномерную аппроксимацию задачи (3.1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 u_m, w_k \rangle_0 + \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u_m), w_k \rangle_j &= (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0, \quad k = \overline{1, m}, \quad (3.2) \\ u_m(t) &= \sum_{i=1}^m c_{mi}(t) w_i, \quad u_{m0} = \sum_{i=1}^m c_{mi}(0) w_i, \\ c_{mi}(0) &= \alpha_{mi}, \quad u_{m0} \rightarrow u_0 \text{ сильно в } \mathbb{V}. \end{aligned}$$

Из (3.2) вытекает, что в классе $C^1([0, T_m]; \mathbb{V})$ для решения u_m имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m c'_{mi} \left[\langle \mathbb{A}_0 w_i, w_k \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}'_{j, u_m}(u_m) w_i, w_k \rangle_j \right] &= (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0, \\ k &= \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Введем обозначение

$$a_{ik} \equiv \langle \mathbb{A}_0 w_i, w_k \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}'_{j, u_m}(u_m) w_i, w_k \rangle_j.$$

Очевидно,

$$\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k = \langle \mathbb{A}_0 \eta, \eta \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}'_{j, u_m}(u_m) \eta, \eta \rangle_j \geq \langle \mathbb{A}_0 \eta, \eta \rangle_0, \quad \eta = \sum_{i=1}^m \xi_i w_i,$$

поскольку $\mathbb{A}_0$ – положительно определенный оператор, а значит, $\langle \mathbb{A}_0 \eta, \eta \rangle_0 \geq 0$, причем равенство $\langle \mathbb{A}_0 \eta, \eta \rangle_0 = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\eta = 0$. С другой стороны,

$$\eta \equiv \sum_{i=1}^m \xi_i w_i,$$

и в силу линейной независимости системы функций $\{w_i\}_{i=1}^m$ в $\mathbb{V}$ приходим к выводу, что $\eta = 0$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_i\}_{i=1}^m = \mathbf{0}$. Отсюда и из работы [21] получаем, что $\det\{a_{ik}\}_{i,k=1}^m > 0$.

Докажем теперь, что функционал $f_j \equiv \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m)w_i, w_k \rangle_j$ является непрерывным по совокупности переменных c_{mi} , $i = \overline{1, m}$. Действительно, пусть $(\bar{c}_{m1}, \dots, \bar{c}_{mm})$ – некоторая точка евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & |f_j(\bar{c}_{m1}, \dots, \bar{c}_{mm}) - f_j(c_{m1}, \dots, c_{mm})| \\ & \leq |f_j(\bar{c}_{m1}, \dots, \bar{c}_{mm}) - f_j(c_{m1}, \bar{c}_{m2}, \dots, \bar{c}_{mm})| \\ & \quad + |f_j(c_{m1}, \bar{c}_{m2}, \dots, \bar{c}_{mm}) - f_j(c_{m1}, c_{m2}, \bar{c}_{m3}, \dots, \bar{c}_{mm})| \\ & \quad + |f_j(c_{m1}, c_{m2}, \bar{c}_{m3}, \dots, \bar{c}_{mm}) - f_j(c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, \dots, \bar{c}_{mm})| + \dots \\ & \quad \dots + |f_j(c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{m-1,m}, \bar{c}_{mm}) - f_j(c_{m1}, \dots, c_{mm})|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В силу условия (A), 2) найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что каждое из слагаемых в правой части неравенства (3.4) при условии

$$\sum_{k=1}^m |\bar{c}_{mk} - c_{mk}| \leq \delta(\varepsilon)$$

может быть меньше величины $\varepsilon/(m+1)$. Докажем теперь непрерывность по Липшицу функционала $f_{0k} = (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0$ по совокупности переменных $\{c_{mi}\}_{i=1}^m$. Пусть $u_j = \sum_{i=1}^m c_{mi}^j w_i$, $j = 1, 2$. В силу условия (F), 1) справедлива цепочка неравенств

$$|(\mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2), w_k)_0| \leq |\mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2)|_0^* |w|_0 \leq B |u_1 - u_2|_0 \leq B \sum_{l=1}^m |c_{ml}^1 - c_{ml}^2|.$$

Тем самым функция $f_0 = f_0(c_{m1}, \dots, c_{mm})$ является непрерывной по Липшицу и, тем более, непрерывной по совокупности переменных. Стало быть, система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3) является системой типа Коши–Ковалевской и удовлетворяет условиям, гарантирующим ее разрешимость на некотором сегменте $[0, T_m]$, $T_m > 0$, в классе $C^1([0, T_m])$, $k = \overline{1, m}$ (см., например, [22]).

Шаг 2. Априорные оценки. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 3.1. *Найдется такое $T > 0$, не зависящее от $m \in \mathbb{N}$, что для последовательности $\{u_m\}$ приближений Галёркина справедливы равномерно по $m \in \mathbb{N}$ следующие свойства:*

- а) u_m ограничено в $L^\infty(0, T; \mathbb{V})$;
- б) u'_m ограничено в $L^2(0, T; \mathbb{V}_0)$;
- в) $\mathbb{A}_0 u_m$ ограничено в $L^\infty(0, T; \mathbb{V}_0^*)$;
- г) $\mathbb{A}_j(u_m)$ ограничено в $L^\infty(0, T; \mathbb{V}_j^*)$;
- д) $\mathbb{F}(u_m)$ ограничено в $L^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим обе части равенства (3.3) на $c_{mk}(t)$ и проведем суммирование по $k = \overline{1, m}$. Тогда получим

$$\langle \mathbb{A}_0 u'_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m) u'_m, u_m \rangle_j = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0. \quad (3.5)$$

С другой стороны, в силу того, что $u_m = \sum_{k=1}^N c_{mk}(t)w_k \in C^1([0, T_m]; \mathbb{V})$, и условий (А), 2) и 4) справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j &= p_j \langle \mathbb{A}_j(u_m), u'_{mt} \rangle_j, \\ \langle (\mathbb{A}_j(u_m))'_t, u_m \rangle_j + \langle \mathbb{A}_j(u_m), u'_{mt} \rangle_j &= p_j \langle \mathbb{A}_j(u_m), u'_{mt} \rangle_j, \\ \langle (\mathbb{A}_j(u_m))'_t, u_m \rangle_j &= (p_j - 1) \langle \mathbb{A}_j(u_m), u'_{mt} \rangle_j = \frac{p_j - 1}{p_j} \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства (3.5) получим

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right] = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0. \quad (3.6)$$

Интегрируя обе части соотношения (3.6) по $s \in (0, t)$, где $t \in (0, T_m)$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \\ = \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0} \rangle_j \\ + \int_0^t (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 ds. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В силу условия (А), 3) в банаховом пространстве $\mathbb{V}$ можно выбрать норму, эквивалентную исходной:

$$\|v\| = \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2} + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(v), v \rangle_j^{1/p_j}. \quad (3.8)$$

С другой стороны, $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ и $|(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0| \leq B |u_m|_0^{q+2}$. Из соотношения (3.7) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \\ \leq \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0} \rangle_j \\ + BC_1 \int_0^t \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0^{1/2} + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j^{1/p_j} \right)^{q+2} ds. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Тем самым получена первая априорная оценка приближений Галёркина (3.3).

Выведем теперь вторую априорную оценку. Умножая (3.3) на c'_{mk} и суммируя по $k = \overline{1, m}$, в результате интегрирования обеих частей полученного равенства по $s \in (0, t)$, где $t \in (0, T_m)$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[\langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u'_m \rangle_j \right] ds + \frac{1}{q+2} (\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 \\ &= \frac{1}{q+2} (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В силу того, что $(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0$, найдется некоторая подпоследовательность последовательности $\{u_{m0}\}$ такая, что $(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 > 0$ (здесь и всюду далее подпоследовательность обозначается так же, как последовательность). Отсюда и из (3.10) вытекает неравенство

$$(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 > 0,$$

а из соотношения (3.7) следует

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \\ & \geq \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0} \rangle_j. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Пусть выполнено неравенство

$$\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j > 1.$$

Переходя, если это необходимо, к подпоследовательности последовательности $\{u_{m0}\}$, получим

$$\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0} \rangle_j > 1.$$

Тогда из (3.11) следует, что

$$\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j > 1.$$

Пусть $a_0 = \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0$ и $a_j = \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j$. Тогда

$$\frac{1}{2} a_0^{1/2} + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} a_j^{1/p_j} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} a_j \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \left(\sum_{k=1}^N \frac{p_k - 1}{p_k} a_k + \frac{a_0}{2} \right)^{1/p_j} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p} - 1} \right)^{1/p_j} \\
& \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p} - 1} \right)^{1/p_j} \frac{p_j - 1}{p_j} \right) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \frac{p_k - 1}{p_k} a_k \right). \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\Phi_m \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j, \quad \Phi_{m0} \equiv \Phi_m(0). \quad (3.13)$$

Из соотношений (3.9), (3.12) и (3.13) получим

$$\Phi_m \leq \Phi_{m0} + \bar{B} \int_0^t \Phi_m^{q+2}(s) ds, \quad (3.14)$$

где

$$\bar{B} \equiv BC_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p} - 1} \right)^{1/p_j} \frac{p_j - 1}{p_j} \right)^{q+2}, \quad \bar{p} = \max_{j=1, N} p_j,$$

C_1 – константа наилучшего вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B – константа из условия $(\mathbb{F}), 4$.

Из (3.14) и теоремы Бихари (см., например, [23]) следует

$$\Phi_m \leq \frac{\Phi_{m0}}{[1 - (q+1) \Phi_{m0}^{q+1} \bar{B} t]^{1/(q+1)}}. \quad (3.15)$$

Поскольку $u_{m0} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{V}$, то $\Phi_{m0} \leq C_0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Далее возможны два случая для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$: либо $\Phi_{m0} \downarrow \Phi_0$, либо $\Phi_{m0} \uparrow \Phi_0$.

Рассмотрим сначала случай $\Phi_{m0} \uparrow \Phi_0$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
1 - \bar{B} \Phi_{m0}^{q+1} t & \geq 1 - \bar{B} \Phi_0 t \quad \forall t \in (0, T), \quad T \in (0, T_1), \quad T_1 = \bar{B}^{-1} \Phi_0^{-(q+1)}, \\
\Phi_m & \leq C_1(t) \quad \forall t \in (0, T), \quad T \in (0, T_1), \quad T_1 = \bar{B}^{-1} \Phi_0^{-(q+1)},
\end{aligned} \quad (3.16)$$

где C_1 не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь случай $\Phi_{m0} \downarrow \Phi_0$. Тогда для любого $\bar{m} < m$ имеем

$$\Phi_{\bar{m}0} > \Phi_{m0}, \quad 1 - \bar{B} \Phi_{m0}^{q+1} t \geq 1 - \bar{B} \Phi_{\bar{m}0} t.$$

Для любого $t \in [0, \bar{B}^{-1} \Phi_{\bar{m}0}^{-(q+1)})$ получим

$$\Phi_m \leq \frac{C_0}{[1 - (q+1) \Phi_{\bar{m}0}^{q+1} \bar{B} t]^{1/(q+2)}}.$$

Значит, для любого фиксированного $T \in (0, T_1)$ найдется такое $\bar{m} \in \mathbb{N}$, что будет иметь место неравенство (3.16).

Поскольку всегда найдется такое $p_{j^*} = \max_{j=1, \dots, N} p_j > 2$, что если $p_{j^*} \geq q + 2$, то $\mathbb{V}_{j^*} \subset \mathbb{W}_0$, справедливо следующее неравенство:

$$|v|_0 \leq C_{j^*} \langle \mathbb{A}_j(v), v \rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}. \quad (3.17)$$

Отсюда получаем, что

$$|v|_0^{q+2} \leq C_{j^*}^{q+2} \left(\frac{p_{j^*}}{p_{j^*} - 1} \right)^{(q+2)/p_{j^*}} \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(v), v \rangle_j \right)^{(q+2)/p_{j^*}}. \quad (3.18)$$

С учетом (3.7), (3.13), (3.17) и (3.18) приходим к выводу:

$$\Phi_m \leq \Phi_{m0} + B C_{j^*}^{q+2} \left(\frac{p_{j^*}}{p_{j^*} - 1} \right)^{(q+2)/p_{j^*}} \int_0^t \Phi_m^{\alpha_{j^*}}(s) ds, \quad \alpha_{j^*} \equiv \frac{q+2}{p_{j^*}}. \quad (3.19)$$

Рассмотрим два случая: $\alpha_{j^*} < 1$ и $\alpha_{j^*} = 1$. Воспользовавшись теоремами Гроуолла–Белмана–Бихари [23], получим

$$\Phi_m \leq [\Phi_{m0}^{1-\alpha_{j^*}} + (1 - \alpha_{j^*}) C_2 t]^{1/(1-\alpha_{j^*})}, \quad \alpha_{j^*} \in (0, 1), \quad (3.20)$$

$$\Phi_m \leq \Phi_{m0} \exp\{C_2 t\}, \quad \alpha_{j^*} = 1, \quad (3.21)$$

где

$$C_2 \equiv B C_{j^*}^{q+2} \left(\frac{p_{j^*}}{p_{j^*} - 1} \right)^{(q+2)/p_{j^*}}.$$

В силу того, что $u_{m0} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{V}$, выполнено $\Phi_{m0} \leq C_0$ и Φ_{m0} не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Поэтому получим

$$\Phi_{m0} \leq C_3 \quad \forall \alpha_{j^*} \in (0, 1]. \quad (3.22)$$

Из условия (A), 3) и соотношений (3.12), (3.16), (3.22) следует, что

$$\begin{aligned} (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 &\leq B |u_m|_0^{q+2} \\ &\leq B C_1^{q+2} \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0^{1/2} + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j^{1/p_j} \right)^{q+2} \\ &\leq B C_1^{q+2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p} - 1} \right)^{1/p_j} \frac{p_j - 1}{p_j} \right)^{q+2} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right)^{q+2} \\ &\leq C_3 \Phi_m^{q+2} \leq C_{30}, \end{aligned}$$

где $0 < C_{30} < +\infty$ – не зависящая от $m \in \mathbb{N}$ постоянная для любых $T > 0$ в случае $\alpha_{j^*} \in (0, 1]$ и для любых $T \in (0, T_1)$, T_1 определено в (3.16), в случае $\alpha_{j^*} > 1$. Теперь из (3.10) и условий $(\mathbb{A}), 2)$ и $(\mathbb{A}_0), 2)$ вытекает, что

$$m_0 \int_0^t \|u'_m\|_0^2 ds \leq \int_0^t \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 ds \leq C_{40},$$

где $0 < C_{40} < +\infty$ – не зависящая от $m \in \mathbb{N}$ постоянная для любых $T > 0$ в случае $\alpha_{j^*} \in (0, 1]$ и для любых $T \in (0, T_1)$, T_1 определено в (3.16), в случае $\alpha_{j^*} > 1$. Отсюда получаем вторую априорную оценку.

Итак,

$$u_m \in L^\infty(0, T; \mathbb{V}), \quad u'_m \in L^2(0, T; \mathbb{V}_0), \quad (3.23)$$

где включения имеют место для любых $T > 0$ в случае $\alpha_{j^*} \in (0, 1]$ и для любых $T \in (0, T_1)$, T_1 определено в (3.16), в случае $\alpha_{j^*} > 1$. Лемма доказана.

Значит, найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что

$$u_m \rightharpoonup u \text{ *слабо в } L^\infty(0, T; \mathbb{V}), \quad u'_m \rightharpoonup u' \text{ слабо в } L^2(0, T; \mathbb{V}_0). \quad (3.24)$$

Из (3.24) и компактного вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ для почти всех $t \in (0, T)$ получим, что $u_m(t) \rightarrow u(t)$ сильно в $\mathbb{W}_0$. С другой стороны, в силу условия $(\mathbb{F}), 1)$ имеем

$$\begin{aligned} |\mathbb{F}(u_m) - \mathbb{F}(u)|_0^* &\leq \mu(R) |u_m - u|_0 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow +\infty, \\ R &= \max\{|u|_0, |u_m|_0\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Отсюда вытекает сильная сходимость:

$$\mathbb{F}(u_m)(t) \rightarrow \mathbb{F}(u)(t) \text{ сильно в } \mathbb{W}_0^* \text{ для почти всех } t \in (0, T). \quad (3.26)$$

Шаг 3. Метод монотонности. Воспользуемся теперь методом монотонности. Напомним, что на шаге 2 мы получили предельные соотношения (3.24), (3.26) и, кроме того,

$$\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \chi \text{ *слабо в } L^\infty(0, T; \mathbb{V}^*), \quad \mathbb{A}(u) \equiv \sum_{j=0}^N \mathbb{A}_j(u). \quad (3.27)$$

ЛЕММА 3.2. Пусть $\mathbb{A}(u) \equiv \sum_{j=0}^N \mathbb{A}_j(u)$. Тогда найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что $\mathbb{A}(u_m) \rightharpoonup \mathbb{A}(u)$ *слабо в $L^\infty(0, T; \mathbb{V}^*)$ для некоторого $T > 0$. Кроме того, для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ имеем $u_m \rightarrow u$ сильно в $L^{p_j}(0, T; \mathbb{V}_j)$, $j = \overline{0, N}$, $p_0 = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем уравнение (3.2) в эквивалентном виде:

$$\langle \mathbb{A}(u_m), w_j \rangle = \langle \mathbb{A}(u_{m0}), w_j \rangle + \int_0^t (\mathbb{F}(u_m), w_j)_0 ds, \quad (3.28)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$.

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ и перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в уравнении (3.28). Тогда получим

$$\chi = \int_0^t \mathbb{F}(u) ds + \mathbb{A}(u_0). \quad (3.29)$$

Пусть

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{X}_\mu &\equiv \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_\mu) - \mathbb{A}(v), u_\mu - v \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu \rangle dt - \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_\mu), v \rangle dt - \int_0^T \langle \mathbb{A}(v), u_\mu - v \rangle dt, \\ \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu \rangle dt &= \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_{\mu 0}), u_\mu \rangle dt + \int_0^T \int_0^t (\mathbb{F}(u_\mu)(s), u_\mu(t))_0 ds dt. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} 0 \leq \limsup_{\mu \rightarrow +\infty} \mathbb{X}_\mu &\leq \int_0^T \int_0^t (\mathbb{F}(u)(s), u(t))_0 ds dt + \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_0), u \rangle dt \\ &\quad - \int_0^T \langle \chi, v \rangle dt - \int_0^T \langle \mathbb{A}(v), u - v \rangle dt = \int_0^T \langle \chi - \mathbb{A}(v), u - v \rangle dt \geq 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Положим теперь $v = u - \lambda w$ для любых $v, w \in L^r(0, T; \mathbb{V})$, $\lambda > 0$, $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{V}) \subset L^r(0, T; \mathbb{V})$, $\chi, \mathbb{A}(v) \in L^{r'}(0, T; \mathbb{V}^*)$, $r > 1$, $r' = r/(r-1)$. Справедливо следующее неравенство:

$$\int_0^T \langle \chi - \mathbb{A}(u - \lambda w), w \rangle dt \geq 0,$$

из которого в силу полунепрерывности каждого из операторов $\mathbb{A}_j(v)$, $j = \overline{0, N}$, получим

$$\chi = \mathbb{A}(u).$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} &\limsup_{\mu \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u_\mu), u_\mu \rangle_j dt \\ &\leq - \liminf_{\mu \rightarrow +\infty} \sum_{k=0, k \neq j}^N \int_0^T \langle \mathbb{A}_k(u_\mu), u_\mu \rangle_k dt + \limsup_{\mu \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu \rangle dt \\ &\leq - \sum_{k=0, k \neq j}^N \int_0^T \langle \mathbb{A}_k(u), u \rangle_k dt + \int_0^T \langle \mathbb{A}(u), u \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j dt, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где мы воспользовались тем, что величины

$$\left(\int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle dt \right)^{1/p_j}, \quad \left(\int_0^T \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle dt \right)^{1/2}$$

в силу свойств $(\mathbb{A}_0), 3)$ и $(\mathbb{A}), 3)$ являются нормами на банаховых пространствах $\mathbb{V}_j$ и $\mathbb{V}_0$ соответственно.

Наконец, в силу слабой сходимости $u_\mu \rightharpoonup u$ в $L^{p_j}(0, T; \mathbb{V})$, $j = \overline{0, N}$, $p_0 = 2$, и того, что операторы $\mathbb{A}_j(v)$ порождают по указанному выше правилу нормы на банаховых пространствах $\mathbb{V}_j$, $j = \overline{0, N}$, имеем

$$\liminf_{\mu \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u_\mu), u_\mu \rangle_j dt \geq \int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j dt. \quad (3.32)$$

Из соотношений (3.31) и (3.32) следует, что

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u_\mu), u_\mu \rangle_j dt = \int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j dt. \quad (3.33)$$

Теперь в силу условия $(\mathbb{A}), 3)$ имеем, что $\left(\int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j dt \right)^{1/p_j}$ является эквивалентной нормой к “канонической” норме $\left(\int_0^T \|u\|_j^{p_j} dt \right)^{1/p_j}$ банахова пространства $L^{p_j}(0, T; \mathbb{V}_j)$. Поэтому из (3.33) следует существование подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ такой, что

$$\left(\int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j dt \right)^{1/p_j} \rightarrow \left(\int_0^T \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j dt \right)^{1/p_j}, \quad j = \overline{0, N}.$$

С другой стороны, $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $L^{p_j}(0, T; \mathbb{V}_j)$, $j = \overline{0, N}$, значит, найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что $u_m \rightarrow u$ сильно в каждом $L^{p_j}(0, T; \mathbb{V}_j)$, $j = \overline{0, N}$. Лемма доказана.

Шаг 4. Пределный переход и единственность. Из предельных выражений (3.24), (3.26) и (3.27) вытекает возможность перехода к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в уравнении (3.28). В результате указанного предельного перехода в смысле $L^2(0, T; \mathbb{V}^*)$ получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}_0 u, v \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u), v \rangle_j &= \langle \mathbb{A}_0 u_0, v \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u_0), v \rangle_j + \int_0^t (\mathbb{F}(u), v)_0(s) ds \\ \forall v \in \mathbb{V}, \quad u(0) &= u_0 \in \mathbb{V}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

С другой стороны, $u' \in L^2(0, T; \mathbb{V}_0)$, $u \in L^\infty(0, T)$. Перепишем равенство (3.34) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u), v \rangle_j &= -\langle \mathbb{A}_0 u, v \rangle_0 + \langle \mathbb{A}_0 u_0, v \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u_0), v \rangle_j \\ &+ \int_0^t (\mathbb{F}(u), v)_0(s) ds \quad \forall v \in \mathbb{V}. \end{aligned}$$

Правая часть данного равенства дифференцируема по $t \in (0, T)$ в смысле Лебега, значит, дифференцируема и левая часть, и мы приходим к выводу, что каждое решение уравнения (3.34) является решением следующего уравнения:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 u, v \rangle_0 + \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u), v \rangle_j = (\mathbb{F}(u), v)_0 \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

понимаемого в смысле $\mathcal{D}'(0, T)$.

С другой стороны, перепишем уравнение (3.1) в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u), v \rangle_j = -\frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 u, v \rangle_0 + (\mathbb{F}(u), v)_0 \quad \forall v \in \mathbb{V},$$

откуда в силу $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{V})$ приходим к выводу, что

$$\sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u), v \rangle_j \in L^\infty(0, T), \quad \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u), v \rangle_j \in L^2(0, T) \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

Интегрируя по t обе части равенства (3.1), получим, что каждое решение u класса $L^\infty(0, T; \mathbb{V})$, имеющее производную u' класса $L^2(0, T; \mathbb{V}_0)$, является решением уравнения (3.34). Значит, при $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{V})$, $u' \in L^2(0, T; \mathbb{V}_0)$, задачи (3.1) и (3.34) эквивалентны.

Для доказательства единственности решения уравнения (3.1) воспользуемся эквивалентным к (3.1) уравнением (3.34). Получим уравнение

$$\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}_j(u) = \int_0^t \mathbb{F}(u) ds + \mathbb{A}_0 u_0 + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}_j(u_0), \quad (3.35)$$

которое понимается в смысле $L^\infty(0, T; \mathbb{V}^*)$. Пусть u_1 и u_2 – два решения уравнения (3.35) класса $L^\infty(0, T; \mathbb{V})$ с одной и той же начальной функцией $u_0 \in \mathbb{V}$. Тогда для разности этих решений $w = u_1 - u_2$ получим соотношение

$$\langle \mathbb{A}_0 w, w \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}_j(u_1) - \mathbb{A}_j(u_2), w \rangle = \int_0^t (\mathbb{F}(u_1)(s) - \mathbb{F}(u_2)(s), w(s))_0 ds,$$

откуда в силу монотонности операторов $\mathbb{A}_j(u)$ с учетом условия $(\mathbb{A}_0), 2)$ и вложения $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0$ приходим к неравенству

$$\|w\|_0^2(t) \leq m_0^{-1} |w|_0(t) \int_0^t |\mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2)|_0^* ds \leq D_1 \|w\|_0(t) \int_0^t \|w\|_0(s) ds,$$

$$D_1 > 0,$$

из которого в силу теоремы Гроуолла–Белмана получаем, что $u_1 = u_2$ почти всюду на множестве $(0, T) \times \Omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В доказательстве единственности существенно используется наличие линейного оператора $\mathbb{A}_0$ при производной по времени с областью определения $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0$. В случае отсутствия указанного линейного оператора может иметь место “неединственность”. Для полноты изложения приведем пример такой ситуации.

ПРИМЕР (“неединственность”). Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) - |u|^{p-2} u) + |u|^q u &= 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad p > q + 2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Будем искать нетривиальные решения u задачи (3.36) в классе $C^1([0, T]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$. Пусть $u(x, t) = \varphi(t)f(x)$. Тогда после подстановки этого выражения в уравнение (3.36) получим

$$\frac{d}{dt} (|\varphi|^{p-2} \varphi) = |\varphi|^q \varphi, \quad \varphi(0) = 0, \quad p > q + 2, \quad (3.37)$$

$$\Delta_p f - |f|^{p-2} f + |f|^q f = 0, \quad f|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.38)$$

Решениями задачи (3.37) являются следующие функции:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \pm \left(\frac{p-2-q}{p-1} \right)^{1/(p-2-q)} \varphi_1(t), \\ \varphi_1(t) &= \begin{cases} (t - T_0)^{1/(p-2-q)}, & t \geq T_0, \\ 0, & t \in [0, T_0], \end{cases} \end{aligned}$$

для любого $T_0 > 0$.

Рассмотрим теперь задачу (3.38). Для доказательства разрешимости данной задачи воспользуемся методом расслаивающих функционалов С. И. Похожаева [24] и теорией категорий Люстерника–Шнирельмана [25], [26].

Введем функционал Эйлера, соответствующий задаче (3.38):

$$E[f] = -\frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla f|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |f|^p dx + \frac{1}{q+2} \int_{\Omega} |f|^{q+2} dx. \quad (3.39)$$

Рассмотрим формальную процедуру метода расслаивающих функционалов (см. [25] и [24]). Пусть $f = rv$; тогда из (3.39) получим

$$\tilde{E}(r, v) \equiv E(rv) = -\frac{|r|^p}{p} \left[\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx + \int_{\Omega} |v|^p dx \right] + \frac{|r|^{q+2}}{q+2} \int_{\Omega} |v|^{q+2} dx.$$

Пусть также

$$\|v\| \equiv \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx + \int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{1/p} = 1; \quad (3.40)$$

тогда имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{E}}(r) &\equiv \tilde{E}(r, v)|_{\|v\|=1} \equiv -\frac{|r|^p}{p} + \frac{|r|^{q+2}}{q+2} \int_{\Omega} |v|^{q+2} dx, \\
\frac{\partial \tilde{\tilde{E}}}{\partial r} &= -r|r|^{p-2} + r|r|^q \int_{\Omega} |v|^{q+2} dx = 0, \\
r &= \pm \left(\int_{\Omega} |v|^{q+2} dx \right)^{1/(p-2-q)}, \quad p > q+2, \\
F[v] &\equiv \tilde{E}(r(v), v) = \frac{p-q-2}{p} \left(\int_{\Omega} |v|^{q+2} dx \right)^{p/(p-2-q)}. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Таким образом, возникает задача минимизации функционала F , определенного в (3.41) при условии (3.40). Для доказательства существования экстремалей этой вариационной задачи можно воспользоваться теорией категорий Люстерника–Шнирельмана, поскольку функционал (3.41) четный [25], [26]. Кроме того, задача на условный экстремум (3.40), (3.41) эквивалентна следующей вариационной задаче на условный экстремум:

$$\inf \{ \bar{E}[v] : \|v\| = 1, v \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \}, \quad \bar{E}[v] = \int_{\Omega} |v|^{q+2} dx. \quad (3.42)$$

Для доказательства существования решений задачи (3.42) необходимо проверить выполнимость следующих условий:

- 1) функционал $\bar{E}[v]$ имеет усиленно непрерывный градиент $\Gamma(v)$ в шаре $\|v\| \leq R$;
- 2) потенциальный оператор $\Gamma(v)$ позитивен: $\langle \Gamma(v), v \rangle > 0$;
- 3) оператор $\Lambda(v) \equiv \text{grad}\|v\|$ удовлетворяет на сфере $\|v\| = r \leq R$ условию Липшица и имеет непрерывный обратный.

Условие усиленной непрерывности в шаре $\|v\| \leq R$ можно заменить условиями слабой непрерывности функционала $\bar{E}[v]$ и равномерной дифференцируемости в шаре $\|v\| \leq R$.

Сначала докажем слабую непрерывность функционала

$$\bar{E}[v] = \int_{\Omega} |v|^{q+2} dx. \quad (3.43)$$

Предположим, что имеет место компактное вложение $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$. Действительно, указанное вложение имеет место, если $0 < q < (Np - 2N + 2p)/(N - p)$ при $N > p$ и $0 < q < +\infty$ при $N \leq p$. Пусть теперь $v_n \rightharpoonup v$ слабо в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$. Тогда $v_n \rightarrow v$ сильно в $L^{q+2}(\Omega)$, а значит, $\|v_n\|_{q+2} \rightarrow \|v\|_{q+2}$. Следовательно, функционал (3.43) слабо непрерывен.

Докажем теперь, что функционал (3.43) равномерно дифференцируем по Фреше на любом шаре $\|v\| \leq R$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\bar{E}[v+h] - \bar{E}[v] - \langle \tilde{\Gamma}(v, h) \rangle &= \omega(v, h), \\
\int_{\Omega} |v+h|^{q+2} dx - \int_{\Omega} |v|^{q+2} dx - (q+2) \int_{\Omega} h|v|^q v dx &= \int_{\Omega} |h|^2 |v + \theta h|^q dx, \\
\theta &\in (0, 1),
\end{aligned}$$

откуда сразу же получаем, что

$$|\omega(v, h)| \leq C \|h\|_{q+2}^2 \|v + \theta h\|_{q+2}^q \leq C \|h\|_{q+2}^2 \leq C \|h\|^2,$$

$$\frac{|\omega(v, h)|}{\|h\|} \leq C \|h\|.$$

Значит, функционал (3.43) является равномерно дифференцируемым по Фреше на любом шаре $\|v\| \leq R$.

Докажем выполнимость условия 3) на сфере $\|v\| = r$. Действительно,

$$\text{grad } \|v\| = (\|v\|_p^p + \|\nabla v\|_p^p)^{1/p-1} (-\Delta_p v + |v|^{p-2} v),$$

где через $\text{grad } \|v\|$ мы обозначили значение $\text{grad } \|\cdot\|$ на элементе v . Тогда

$$\begin{aligned} & \|\text{grad } \|v_1\| - \text{grad } \|v_2\|\|^* \\ & \leq \left(\int_{\Omega} \left| |\nabla v_1|^{p-2} \nabla v_1 - |\nabla v_2|^{p-2} \nabla v_2 \right|^{p'} dx + \int_{\Omega} \left| |v_1|^{p-2} v_1 - |v_2|^{p-2} v_2 \right|^{p'} dx \right)^{1/p'} \\ & \leq (p-1) \left(\int_{\Omega} [\max(|v_1|^{p-2}, |v_2|^{p-2}) |v_1 - v_2|^{p/(p-1)} \right. \\ & \quad \left. + \max(|\nabla v_1|^{p-2}, |\nabla v_2|^{p-2})^{p/(p-1)} |\nabla v_1 - \nabla v_2|^{p/(p-1)}] dx \right)^{1/p'} \\ & \leq C \sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Omega} |v_i|^{(p-2)pr_1/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/(pr_1)} \\ & \quad \times \left(\int_{\Omega} |v_1 - v_2|^{pr_2/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/(pr_2)} \\ & \quad + C \sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Omega} |\nabla v_i|^{(p-2)pr_1/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/(pr_1)} \\ & \quad \times \left(\int_{\Omega} |\nabla v_1 - \nabla v_2|^{pr_2/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/(pr_2)} \equiv J, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1, \quad r_2 = p-1, \quad r_1 = \frac{p-1}{p-2}, \quad p' = \frac{p}{p-1},$$

$$J \leq C(\|v_1 - v_2\|_p + \|\nabla v_1 - \nabla v_2\|_p) \leq C\|v_1 - v_2\|,$$

где через C обозначены различные постоянные, зависящие от r . Значит, оператор $\text{grad } \|v\|$ является непрерывным по Липшицу.

Докажем теперь существование непрерывного обратного оператора на сфере $\|v\| = r$. Действительно,

$$\begin{aligned} & \langle \text{grad } \|v_1\| - \text{grad } \|v_2\|, v_1 - v_2 \rangle \\ & = r^{1/p-1} \langle -\Delta_p v_1 + |v_1|^{p-2} v_1 + \Delta_p v_2 - |v_2|^{p-2} v_2, v_1 - v_2 \rangle \\ & \geq r^{1/p-1} 2^{1-p} \|v_1 - v_2\|^p. \end{aligned}$$

Значит,

$$\|\operatorname{grad} \|v_1\| - \operatorname{grad} \|v_1\|\|^* \geq r^{1/p-1} 2^{1-p} \|v_1 - v_2\|^{p-1},$$

откуда вытекает, что

$$\|z_1 - z_2\|_*^{1/(p-1)} \geq (r^{1/p-1} 2^{1-p})^{1/(p-1)} \|\operatorname{grad}^{-1} \|z_1\| - \operatorname{grad}^{-1} \|z_2\|\|.$$

Таким образом, существует непрерывный обратный оператор к $\operatorname{grad} \|v\|$.

В силу теоремы Люстерника–Шнирельмана [26, теорема 14.2] получим, что на сфере $\|v\| = 1$ существует не менее чем счетное множество геометрически разных векторов, являющихся решением вариационной задачи (3.42), а значит, минимизирующих функционал Эйлера (3.39) и имеющих вид

$$f_k(x) = r(v_k)v_k = \pm v_k \left(\int_{\Omega} |v_k|^{q+2} dx \right)^{1/(p-2-q)},$$

$$\|f_k\| = \left(\int_{\Omega} |v_k|^{q+2} dx \right)^{1/(p-2-q)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, задача (3.36) имеет не менее чем счетное множество, образно говоря, “интегральных воронок” вида $u_k = \varphi(t)f_k(x)$ в пространстве $\mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^1$.

Шаг 5. Разрушение решений. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 3.3. *Пусть*

$$\Phi \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{\bar{p}}, \quad \bar{p} \equiv \max_{j=1, N} p_j.$$

Тогда:

1) *при $\alpha \in (0, 1)$ имеет место неравенство*

$$\Phi_0 [1 + (1 - \alpha) \mathbb{E}_0 \Phi_0^{\alpha-1} t]^{1/(1-\alpha)} \leq \Phi \leq \Phi_0 [1 + (1 - \alpha) C_2 \Phi_0^{\alpha-1} t]^{1/(1-\alpha)};$$

2) *при $\alpha = 1$ имеет место неравенство*

$$\Phi_0 \exp(\mathbb{E}_0 t) \leq \Phi \leq \Phi_0 \exp(C_2 t);$$

3) *при $\alpha > 1$ выполнено следующее неравенство:*

$$\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{i=1}^N \frac{p_i - 1}{p_i} \langle \mathbb{A}_i(u_0), u_0 \rangle_i > 1,$$

и найдется такое $T_0 \in [T_1, T_2]$, что справедливо соотношение

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{q+1} \Phi_0^{-(q+1)} \bar{B}^{-1}, \quad T_2 = \frac{1}{\alpha-1} \frac{\Phi_0}{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}, \\ C_2 &\equiv BC_{j^*}^{q+2} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1} \right)^\alpha, \quad |v|_0 \leq C_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*} v, v \rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}, \\ \mathbb{E}_0 &\equiv \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}{\Phi_0^\alpha}, \quad \Phi_0 \equiv \Phi(0), \\ \bar{B} &\equiv BC_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1} \right)^{1/p_j} \frac{p_j-1}{p_j} \right)^{q+2}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия $(\mathbb{A}), 2)$ для производных Фреше $\mathbb{A}'_{j,u}: \mathbb{V}_j \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V}_j; \mathbb{V}_j^*)$ операторов $\mathbb{A}_j: \mathbb{V}_j \rightarrow \mathbb{V}_j^*$ справедливо неравенство Шварца [28]

$$\begin{aligned} |\langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u_m \rangle_j| &= |\langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m) u'_m, u_m \rangle_j| \\ &\leq \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m) u'_m, u'_m \rangle_j^{1/2} \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m) u_m, u_m \rangle_j^{1/2} \\ &= \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u'_m \rangle_j^{1/2} (p_j-1)^{1/2} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$|\langle \mathbb{A}_0 u'_m, u_m \rangle_0| \leq \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0^{1/2} (p_j-1)^{1/2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0^{1/2}. \quad (3.45)$$

Введем обозначение

$$\Phi_m \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j-1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j. \quad (3.46)$$

Из соотношений (3.44)–(3.46) вытекает

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \Phi_m \right|^2 &\leq \left| \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N |\langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u_m \rangle_j| \right|^2 \\ &\leq \left(\langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u'_m \rangle_j \right) \\ &\quad \times \left(\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N (p_j-1) \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right) \\ &\leq \bar{p} \left(\frac{1}{\bar{p}} \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 + \frac{1}{\bar{p}} \sum_{j=1}^N (p_j-1) \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u'_m \rangle_j \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\bar{p}} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j-1}{\bar{p}} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \bar{p} \left(\langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u'_m \rangle_j \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right), \end{aligned} \quad (3.47)$$

где $\bar{p} = \max_{j=\overline{1,N}} p_j > 2$. Учитывая соотношения (3.6) и (3.10), из (3.47) вытекает обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка

$$\Phi_m'' \Phi_m - \alpha (\Phi_m')^2 \geq 0, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{\bar{p}}, \quad \bar{p} = \max_{j=\overline{1,N}} p_j > 2, \quad (3.48)$$

из которого следует

$$\frac{\Phi_m'}{\Phi_m^\alpha} \geq \frac{(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0}{\Phi_{m0}^\alpha} \equiv \mathbb{E}_{m0}. \quad (3.49)$$

Теперь рассмотрим три случая: $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $0 < \alpha < 1$.

В случае $\alpha > 1$ получим

$$\begin{aligned} \Phi_m &\geq \frac{1}{[\Phi_{m0}^{1-\alpha} - (\alpha-1)\mathbb{E}_{m0}t]^{1/(\alpha-1)}} \geq \frac{\Psi_{m0}}{[T_{2m} - t]^{1/(\alpha-1)}}, \\ \Psi_{m0} &\equiv \frac{1}{(\alpha-1)^{1/(\alpha-1)}} \frac{\Phi_{m0}^{\alpha/(\alpha-1)}}{(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0^{1/(\alpha-1)}}, \\ T_{2m} &\equiv \frac{1}{\alpha-1} \frac{\Phi_{m0}}{(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

В случае $\alpha = 1$ из (3.49) сразу же получим

$$\Phi_m \geq \Phi_{m0} \exp\{\mathbb{E}_{m0}t\}. \quad (3.51)$$

Аналогично, в случае $\alpha \in (0, 1)$ приходим к выводу, что

$$\Phi_m \geq \Phi_{m0} [1 + (1-\alpha)\mathbb{E}_{m0}\Phi_{m0}^{\alpha-1}t]^{1/(1-\alpha)}. \quad (3.52)$$

Докажем теперь, что $\Phi_m(t) \rightarrow \Phi(t)$ для почти всех $t \in (0, T)$,

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j. \quad (3.53)$$

В силу того, что $u_m \rightarrow u$ сильно в $L^{p_j}(0, T; \mathbb{V}_j)$, имеем

$$\int_0^t \Phi_m(s) ds \rightarrow \int_0^t \Phi(s) ds. \quad (3.54)$$

С другой стороны, из (3.6) получим

$$\Phi_m = \Phi_{m0} + \int_0^t (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0(s) ds.$$

По условию $\Phi_{m0} \rightarrow \Phi_0$, $u_m(t) \rightarrow u(t)$ сильно в $\mathbb{W}_0$ для почти всех $t \in (0, T)$, поэтому из ограниченной непрерывности по Липшицу оператора $\mathbb{F}(u): \mathbb{W}_0 \rightarrow \mathbb{W}_0^*$ получаем, что $\mathbb{F}(u_m) \rightarrow \mathbb{F}(u)$ сильно в $\mathbb{W}_0^*$ для почти всех $t \in (0, T)$. С другой стороны, понятно, что

$$|(\mathbb{F}(u_m), u_m)_0| \leq B|u_m|_0^{q+2} \leq C\|u_m\|_{\mathbb{V}}^{q+2} \leq C,$$

где C не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и $t \in (0, T)$. Поэтому по теореме Лебега [28] получим, что $\Phi_m \rightarrow \eta$ для почти всех $t \in (0, T)$. Снова по теореме Лебега получим

$$\int_0^t \Phi_m ds \rightarrow \int_0^t \eta ds.$$

Значит,

$$\int_0^t [\Phi(s) - \eta(s)] ds = 0 \quad \forall t \in (0, T),$$

отсюда сразу же следует, что при почти всех $t \in (0, T)$

$$\Phi_m(t) \rightarrow \Phi(t). \quad (3.55)$$

С учетом того, что $u_{m0} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{V}$, при $m \rightarrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{m0} \rightarrow \Phi_0 &\equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j, \\ \mathbb{E}_{m0} \rightarrow \mathbb{E}_0 &\equiv \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}{\Phi_0^\alpha}. \end{aligned}$$

Из (3.55), переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в неравенствах (3.20), (3.21) и (3.51), (3.52), получаем

$$\Phi_0 \exp\{\mathbb{E}_0 t\} \leq \Phi(t) \leq \Phi_0 \exp\{C_2 t\}, \quad \alpha = \frac{q+2}{\bar{p}} = 1, \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} &\Phi_0 [1 + (1 - \alpha) \mathbb{E}_0 \Phi_0^{\alpha-1} t]^{1/(1-\alpha)} \\ &\leq \Phi(t) \leq \Phi_0 [1 + (1 - \alpha) C_2 \Phi_0^{\alpha-1} t]^{1/(1-\alpha)}, \quad \alpha < 1, \end{aligned} \quad (3.57)$$

где

$$\alpha \equiv \frac{q+2}{\bar{p}}, \quad C_2 \equiv BC_{j^*}^{q+2} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1} \right)^{(q+2)/\bar{p}}, \quad \bar{p} = \max_{j=1, N} p_j.$$

Рассмотрим теперь неравенства (3.15) и (3.50). Отметим, что при $m \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}\Psi_{m0} &\rightarrow \Psi_0 \equiv \frac{1}{(\alpha-1)^{1/(\alpha-1)}} \frac{\Phi_0^{\alpha/(\alpha-1)}}{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0^{1/(\alpha-1)}}, \\ T_{2m} &\rightarrow T_2 \equiv \frac{1}{\alpha-1} \frac{\Phi_0}{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}, \\ T_{1m} &\rightarrow T_1 = (q+1)^{-1} \Phi_0^{-(q+1)} \bar{B}^{-1}, \\ \bar{B} &\equiv BC_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1} \right)^{1/p_j} \frac{p_j-1}{p_j} \right)^{q+2}, \quad \bar{p} = \max_{j=1, N} p_j,\end{aligned}$$

где C_1 – константа наилучшего вложения $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, B – константа из условия $(\mathbb{F}), 4)$.

Рассмотрим сначала неравенство (3.50). Без ограничения общности с точностью до перехода к подпоследовательности можно считать, что $T_{2m} > 0$ равномерно по m , поскольку $T_2 > 0$. В силу сходимости последовательности $T_{2m} \rightarrow T_2$ при $m \rightarrow +\infty$ можно выбрать монотонно сходящуюся подпоследовательность, которую мы снова обозначим через T_{2m} . Соответствующие подпоследовательности последовательностей $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$ мы снова будем обозначать $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$. Пусть последовательность $T_{2m} \uparrow T_2$; тогда неравенство (3.50) имеет место равномерно по $t \in [0, T_{2\bar{m}})$, $m \geq \bar{m}$, для некоторого фиксированного $\bar{m} \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$, из неравенства (3.16) получим

$$\Phi \geq \frac{1}{[\Phi_0^{1-\alpha} - (\alpha-1)\mathbb{E}_0 t]^{1/(\alpha-1)}} = \frac{\Psi_0}{[T_2 - t]^{1/(\alpha-1)}} \quad (3.58)$$

при $t \in [0, T_{2\bar{m}})$. Отсюда в силу произвольности $\bar{m} \in \mathbb{N}$ сразу же получаем, что (3.58) справедливо для всех $t \in [0, T_2)$ и время разрушения решения задачи (3.1) удовлетворяет оценке сверху $T_0 \leq T_2$.

Пусть теперь последовательность $T_{2m} \downarrow T_2$. Сделаем предположение о том, что $T_0 > T_2$, и пусть, кроме того, $M \equiv \sup_{t \in [0, T_2]} \Phi(t) < +\infty$. Тогда неравенство (3.50) имеет место равномерно по $t \in [0, T_2)$. Переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в неравенстве (3.50), получим в силу сделанного предположения относительно T_0 следующее неравенство:

$$\Phi \geq \frac{1}{[\Phi_0^{1-\alpha} - (\alpha-1)\mathbb{E}_0 t]^{1/(\alpha-1)}} = \frac{\Psi_0}{[T_2 - t]^{1/(\alpha-1)}} \leq M < +\infty \quad \text{при } t \in [0, T_2).$$

Однако из вида полученного неравенства следует, что наше предположение не выполняется. Отсюда сразу же следует, что $T_0 \leq T_2$. Аналогично, из неравенства (3.15) вытекает, что

$$\Phi(t) \leq \frac{\Phi_0}{[1 - (q+1)\Phi_0^{q+1}\bar{B}t]^{1/(q+2)}} \quad \forall t \in (0, T_1), \quad T_1 \in (0, T_0]. \quad (3.59)$$

Лемма доказана.

Таким образом, теорема 3.1 доказана.

**§ 4. Сильная обобщенная разрешимость,
единственность и разрушение задачи (1.1)**

В настоящем параграфе рассмотрим задачу (1.1) при некоторых условиях, которым удовлетворяют операторные коэффициенты, когда можно применить метод сжимающих отображений для доказательства локальной разрешимости. При этом мы, как и в § 3, получим оптимальные результаты о разрушении решений задачи (1.1) и двусторонние оценки времени разрушения.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены условия $(\mathbb{A})$, $(\mathbb{A}_0)$, $(\mathbb{F})$. Предположим, что $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{V}_j$, $j = \overline{1, N}$, $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{W}_0$, и пусть найдется $j^* \in \overline{1, N}$, при котором $\bar{p} \equiv p_{j^*} \geq p_j$, и если $p_{j^*} \geq q + 2$, то $\mathbb{V}_{j^*} \subseteq \mathbb{W}_0$. Пусть для операторов $\mathbb{A}_j: \mathbb{V}_j \rightarrow \mathbb{V}_j^*$ производные Фреше

$$\mathbb{A}'_{j,u}: \mathbb{V}_j \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V}_j, \mathbb{V}_j^*)$$

являются монотонными в том смысле, что

$$\langle \mathbb{A}'_{j,u}(u)u_1 - \mathbb{A}'_{j,u}(u)u_2, u_1 - u_2 \rangle_j \geq 0 \quad \forall u, u_1, u_2 \in \mathbb{V}_j, \quad j = \overline{1, N}.$$

Пусть, кроме того, выполнено неравенство $(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0$. Тогда для любого $u_0 \in \mathbb{V}_0$ найдется такое максимальное $T_0 \equiv T_{u_0} > 0$, что для любого $0 < T < T_0$ задача Коши (1.1) имеет одно не продолжаемое во времени решение $u(t)$ класса $C^1([0, T]; \mathbb{V}_0)$.

Тогда справедливы следующие двусторонние оценки:

1) если $\alpha \in (0, 1)$, то $T_0 = +\infty$ и

$$[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathbb{E}_0 t]^{1/(1-\alpha)} \leq \Phi(t) \leq [\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)At]^{1/(1-\alpha)};$$

2) если $\alpha = 1$, то $T_0 = +\infty$ и

$$\Phi_0 \exp\{\mathbb{E}_0 t\} \leq \Phi(t) \leq \Phi_0 \exp\{At\};$$

3) если $\alpha > 1$, то $T_0 \in [T_1, T_2]$ и имеет место предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow T_0} \|u\|_0 = +\infty,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j, \quad \Phi_0 \equiv \Phi(0), \\ A &\equiv C_{j^*}^{q+2} M \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p} - 1} \right)^{(q+2)/\bar{p}}, \quad \mathbb{E}_0 \equiv \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}{\Phi_0^\alpha}, \\ T_1 &\equiv \frac{2}{q} \Phi_0^{-q/2} \bar{B}^{-1}, \quad T_2 \equiv \Phi_0^{1-\alpha} (\alpha - 1)^{-1} \mathbb{E}_0^{-1}, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{\bar{p}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем в несколько этапов, причем на каждом шаге сформулируем и докажем предварительный результат в виде соответствующей леммы.

Шаг 1. Локальная разрешимость. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 4.1. *Для любого $u_0 \in \mathbb{V}_0$ найдется такое максимальное $T_0 > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное не продолжаемое во времени решение класса $C^1([0, T]; \mathbb{V}_0)$ задачи (1.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу (1.1). Будем искать решение u этой задачи в классе $C^1([0, T]; \mathbb{V}_0)$. В этом классе задача (1.1) в силу условий (A) и (A₀) эквивалентна следующей:

$$\left[\mathbb{A}_0 + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}'_{j,u}(u) \right] \frac{du}{dt} = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{V}_0, \quad (4.1)$$

где

$$\mathbb{A}'_{j,u}: \mathbb{V}_j \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V}_j; \mathbb{V}_j^*), \quad \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}_j, \quad \mathbb{V}_0^* \subset \mathbb{V}_j^*, \quad \mathcal{L}(\mathbb{V}_j; \mathbb{V}_j^*) \subset \mathcal{L}(\mathbb{V}_0; \mathbb{V}_0^*).$$

В силу этих включений имеем $\mathbb{A}'_{j,u}(u): \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0^*$, и, значит,

$$\mathbb{A} \equiv \mathbb{A}_0 + \sum_{j=1}^N \mathbb{A}'_{j,u}: \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0^*, \quad \mathbb{F}: \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0 \rightarrow \mathbb{W}_0^* \subset \mathbb{V}_0^*.$$

С другой стороны, в силу условий (A₀) и (A) и монотонности производных Фреше операторов $\mathbb{A}_j: \mathbb{V}_j \rightarrow \mathbb{V}_j^*$ получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}(v_1) - \mathbb{A}(v_2), v_1 - v_2 \rangle_0 &\geq m_0 \|v_1 - v_2\|_0^2 + \sum_{j=1}^N \langle \mathbb{A}'_{j,u}(v_1) - \mathbb{A}'_{j,u}(v_2), v_1 - v_2 \rangle_j \\ &\geq m_0 \|v_1 - v_2\|_0^2. \end{aligned}$$

Значит, существует непрерывный по Липшицу обратный оператор $\mathbb{A}^{-1}: \mathbb{V}_0^* \rightarrow \mathbb{V}_0$ к оператору $\mathbb{A}: \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0^*$ такой, что

$$\|\mathbb{A}^{-1}(z_1) - \mathbb{A}^{-1}(z_2)\|_0 \leq \frac{1}{m_0} \|z_1 - z_2\|_0^* \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{V}_0^*. \quad (4.2)$$

Рассмотрим эквивалентную (4.1) в классе $C^1([0, T]; \mathbb{V}_0)$ задачу

$$\frac{du}{dt} - \mathbb{G}(u)(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad u(0) = a \in \mathbb{V}_0, \quad u \in C^1([0, T]; \mathbb{V}_0), \quad (4.3)$$

где $\mathbb{G}(u) = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{F}(u)(t)$, $u \in C([0, T]; \mathbb{V}_0)$. Отметим, что из (4.2) и условий $(\mathbb{F})$ следует

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \|\mathbb{G}(u)(t) - \mathbb{G}(u)(t_0)\|_0 &\leq m_0^{-1} \lim_{t \rightarrow t_0} \|\mathbb{F}(u)(t) - \mathbb{F}(u)(t_0)\|_0^* \\ &\leq C \lim_{t \rightarrow t_0} \|\mathbb{F}(u)(t) - \mathbb{F}(u)(t_0)\|_0^* \leq C\mu(R)|u(t) - u(t_0)|_0 \\ &\leq C \lim_{t \rightarrow t_0} \|u(t) - u(t_0)\|_0 = 0, \end{aligned}$$

где через C обозначены различные постоянные, не зависящие от $t \in [0, T]$. Значит, $\mathbb{G}: C([0, T]; \mathbb{V}) \rightarrow C([0, T]; \mathbb{V})$.

Введем следующее множество:

$$B_R = \{u(t) \in C([0, T]; \mathbb{V}_0) : \|u\|_T \leq R\},$$

где

$$\|v\|_T \equiv \sup_{t \in [0, T]} \|v\|_0.$$

Докажем, что оператор

$$\mathbb{U}(u) \equiv u_0 + \int_0^t \mathbb{G}(u)(s) ds, \quad t \in [0, T], \quad (4.4)$$

действует из B_R в B_R и является сжимающим на B_R . Действительно, поскольку $\mathbb{G}: C([0, T]; \mathbb{V}_0) \rightarrow C([0, T]; \mathbb{V}_0)$, то, очевидно, $\mathbb{U}: C([0, T]; \mathbb{V}_0) \rightarrow C^1([0, T]; \mathbb{V}_0)$. С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbb{U}(u)\|_T &\leq \|u_0\|_0 + \int_0^T \|\mathbb{G}(u)\|_0(s) ds \leq \|u_0\|_0 + T \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbb{G}(u)\|_0(t), \\ \|\mathbb{G}(u)\|_0(t) &\leq m_0^{-1} \|\mathbb{F}(u)\|_0^* \leq m_0^{-1} C\mu(C\|u\|_0)\|u\|_0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|\mathbb{U}\|_T \leq \|u_0\|_0 + m_0^{-1} C\mu(CR)RT.$$

Пусть $\|u_0\|_0 \leq R/2$, $T < m_0/(2\mu C(CR))$; тогда при достаточно большом $R > 0$ и малом $T > 0$

$$\|\mathbb{U}\|_T \leq R.$$

Таким образом, $\mathbb{U}: B_R \rightarrow B_R$.

Докажем теперь, что $\mathbb{U}$ – сжимающий оператор на B_R . Пусть $u, v \in B_R$; тогда имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbb{U}(u) - \mathbb{U}(v)\|_T &\leq \int_0^T \|\mathbb{G}(u) - \mathbb{G}(v)\|_0 dt \leq m_0^{-1} \int_0^T \|\mathbb{F}(u) - \mathbb{F}(v)\|_0^*(t) dt \\ &\leq m_0^{-1} C\mu(CR)T\|u - v\|_T. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства при $T < m_0/(2\mu C(CR))$ получаем

$$\|\mathbb{U}(u) - \mathbb{U}(v)\|_T < \frac{1}{2} \|u - v\|_T.$$

Таким образом, $\mathbb{U}$ – сжимающий оператор на B_R . Поэтому в силу теоремы о сжимающем отображении для любого $u_0 \in \mathbb{V}_0$ найдется такое $T > 0$, что существует единственное решение задачи (4.3) класса $C^1([0, T]; \mathbb{V}_0)$. Используя стандартный алгоритм продолжения по времени решения задачи (4.3), получим, что существуют максимальное $T_0 > 0$ и соответствующее не продолжаемое во времени решение задачи (4.3) такие, что либо $T_0 < +\infty$, и тогда

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|u\|_0 = +\infty,$$

либо $T_0 = +\infty$.

Таким образом, мы доказали существование и единственность максимального решения $u \in C^1([0, T]; \mathbb{V}_0)$ задачи (4.3) для любого $T \in (0, T_0)$. Лемма доказана.

Шаг 2. Априорные оценки и разрушение решения. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 4.2. Пусть

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{\bar{p}}.$$

Тогда:

1) при $\alpha \in (0, 1)$ справедливо двустороннее неравенство

$$[\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathbb{E}_0 t]^{1/(1-\alpha)} \leq \Phi(t) \leq [\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)At]^{1/(1-\alpha)};$$

2) при $\alpha = 1$ справедливо двустороннее неравенство

$$\Phi_0 \exp(\mathbb{E}_0 t) \leq \Phi(t) \leq \Phi_0 \exp(At);$$

3) при $\alpha > 1$ найдется такое $T_0 \in [T_1, T_2]$, что

$$\lim_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &\equiv \frac{2}{q} \Phi_0^{-q/2} \bar{B}^{-1}, & T_2 &\equiv \frac{1}{\alpha - 1} \Phi_0^{1-\alpha} \mathbb{E}_0^{-1}, \\ \mathbb{E}_0 &\equiv \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}{\Phi_0^\alpha}, & A &\equiv C_{j^*}^{q+2} M \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p} - 1} \right)^{(q+2)/\bar{p}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in C^1([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$ – не продолжаемое во времени решение задачи (1.1). Тогда, умножив обе части равенства (1.1) на $u(t)$ и $u'_t(t)$, после интегрирования по частям получим следующие равенства:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j \right] = (\mathbb{F}(u), u)_0, \quad (4.5)$$

$$\langle \mathbb{A}_0 u', u' \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \langle (\mathbb{A}_j(u))', u' \rangle_j = \frac{1}{q+2} \frac{d}{dt} (\mathbb{F}(u), u)_0. \quad (4.6)$$

Интегрируя уравнение (4.5) по $s \in (0, t)$, где $t \in (0, T)$, получим

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \int_0^t (\mathbb{F}(u), u)_0 ds, \quad (4.7)$$

где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j, \quad \Phi_0 = \Phi(0).$$

Поскольку по условию $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0$ найдется постоянная $C_1 > 0$ такая, что

$$|v|_0 \leq C_1 \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2},$$

то из (4.7) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\leq \Phi_0 + MC_1^{q+2} \int_0^t \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{(q+2)/2} ds \leq \Phi_0 + \overline{B} \int_0^t \Phi^{(q+2)/2}(s) ds, \\ \overline{B} &\equiv MC_1^{q+2} 2^{(q+2)/2}. \end{aligned}$$

По теореме Бихари [23] имеем

$$\Phi(t) \leq \frac{\Phi_0}{[1 - \frac{q}{2} \Phi_0^{q/2} \overline{B} t]^{2/q}} \quad \forall t \in [0, T_1), \quad T_1 \equiv \frac{2}{q} \Phi_0^{-q/2} \overline{B}^{-1}. \quad (4.8)$$

Значит, в случае $\overline{p} < q+2$ имеем $T_0 \geq T_1$.

Пусть теперь $\overline{p} \geq q+2$. Воспользуемся тем, что в данном случае всегда найдутся $j^* \in \overline{1, N}$ и $p_{j^*} = \overline{p}$ такие, что если $p_{j^*} \geq q+2$, то $\mathbb{V}_{j^*} \subset \mathbb{W}_0$. Пусть C_{j^*} – константа вложения $\mathbb{V}_{j^*} \subset \mathbb{W}_0$:

$$\begin{aligned} |v|_0 &\leq C_{j^*} \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v \rangle_{j^*}^{1/p_{j^*}}, \\ \Phi(t) &\leq \Phi_0 + C_{j^*}^{q+2} M \int_0^t \langle \mathbb{A}_{j^*}(v), v \rangle_{j^*}^{(q+2)/p_{j^*}} ds \\ &\leq \Phi_0 + C_{j^*}^{q+2} M \left(\frac{\overline{p}}{\overline{p} - 1} \right)^{(q+2)/\overline{p}} \int_0^t \Phi^{(q+2)/\overline{p}}(s) ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая для числа $\alpha \equiv (q+2)/\bar{p}$ такие, что: $\alpha = 1$, $\alpha \in (0, 1)$.
В первом случае по теореме Гронуолла–Беллмана [23] имеем

$$\Phi(t) \leq \Phi_0 \exp\{At\}, \quad A \equiv C_{j^*}^{q+2} M \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1} \right)^{(q+2)/\bar{p}}. \quad (4.9)$$

Во втором случае по теореме Бихари получим

$$\Phi(t) \leq [\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)At]^{1/(1-\alpha)}. \quad (4.10)$$

Из соотношений (4.9) и (4.10) следует, что $T_0 = +\infty$ в случае $\alpha \in (0, 1]$.

Теперь из соотношений (4.5) и (4.6) точно так же, как и на шаге 5 доказательства теоремы 3.1, выводим следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка:

$$\Phi'' \Phi - \alpha(\Phi')^2 \geq 0, \quad \alpha = \frac{q+2}{\bar{p}}. \quad (4.11)$$

Рассмотрим три возможных случая: $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $\alpha \in (0, 1)$.

Пусть $\alpha > 1$; тогда, интегрируя дифференциальное неравенство (4.11) и учитывая равенства (4.5), (4.6), получим

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{[\Phi_0^{1-\alpha} - (\alpha-1)\mathbb{E}_0]^{1/(\alpha-1)}}, \quad \mathbb{E}_0 \equiv \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0}{\Phi_0^\alpha}, \quad (4.12)$$

из которого следует $T_0 \leq T_2 \equiv \Phi_0^{1-\alpha}(\alpha-1)^{-1}\mathbb{E}_0^{-1}$.

Пусть теперь $\alpha = 1$; тогда из неравенства (4.11) имеем

$$\Phi(t) \geq \Phi_0 \exp\{\mathbb{E}_0 t\}. \quad (4.13)$$

Наконец, если $\alpha \in (0, 1)$, то из (4.11) вытекает неравенство

$$\Phi(t) \geq [\Phi_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mathbb{E}_0 t]^{1/(1-\alpha)}. \quad (4.14)$$

Таким образом, лемма, а тем самым и теорема 4.1 доказаны.

§ 5. Локальная слабая разрешимость и единственность задачи (1.2), оценки времени и скорости разрушения

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнены условия $(\mathbb{A}_0)$, $(\mathbb{B})$, $(\mathbb{F})$ и, кроме того, $u_0 \in \mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0$, причем $\mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{W}_0$, т. е. оператор вложения вполне непрерывен. Пусть начальная функция удовлетворяет условию

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1 > 0.$$

Тогда найдется такое максимальное $T_0 > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное не продолжаемое во времени решение $u(t)$ задачи (1.2) с производной u' по времени классов $L^\infty(0, T; \mathbb{W}_1)$ и $L^2(0, T; \mathbb{V}_0)$ соответственно, причем

$$\lim_{t \uparrow T_0} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 = +\infty$$

и справедливы двусторонние оценки скорости разрушения

$$(qc_1)^{-1/q} \leq \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0^{1/2} [T_0 - t]^{1/q} \leq (qc_2)^{-1/q} \quad \forall t \in [0, T_0)$$

и времени разрушения

$$(qc_1)^{-1} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0^{-q/2} \leq T_0 \leq (qc_2)^{-1} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0^{-q/2},$$

где

$$c_2 \equiv \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1}{\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0^{(q+2)/2}}, \quad c_1 \equiv BC_1^{q+1},$$

$$|(\mathbb{F}(v), v)_0| \leq B|v|_0^{q+2}, \quad |v|_0 \leq C_1 \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2}.$$

Доказательство. Под слабым обобщенным решением задачи (1.2) понимается решение $u(t)$ следующей задачи:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 u, v \rangle_0 + (\mathbb{B}(u), v)_1 = (\mathbb{F}(u), v)_0 \quad \forall v \in \mathbb{W}_1, \quad (5.1)$$

где производная по времени понимается в смысле распределений $\mathcal{D}'(0, T)$.

Замечание 5.1. Из условий теоремы следует, что $u(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{V}_0$ — абсолютно непрерывная функция на отрезке $[0, T]$ со значениями в $\mathbb{V}_0$. Значит, имеет смысл начальное условие $u(0) = u_0$.

Доказательство теоремы так же, как и в предыдущих случаях, проведем в несколько этапов.

Шаг 1. Приближения Галёркина. Рассмотрим следующую схему приближений Галёркина:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 u_m, w_j \rangle_0 + (\mathbb{B}(u_m), w_j)_1 = (\mathbb{F}(u_m), w_j)_0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (5.2)$$

$$u_m = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) w_k, \quad c_{mk}(0) = \alpha_{mk},$$

$$u_{m0} = \sum_{k=1}^m \alpha_{mk} w_k \rightarrow u_0 \quad \text{сильно в } \mathbb{W}_1,$$

где $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — линейно независимая система функций, плотная в $\mathbb{W}_1$.

Из (5.2) следует, что

$$\sum_{k=1}^m a_{kj} \frac{dc_{mk}}{dt} + (\mathbb{B}(u_m), w_j)_1 = (\mathbb{F}(u_m), w_j)_0, \quad a_{kj} \equiv \langle \mathbb{A}_0 w_k, w_j \rangle_0. \quad (5.3)$$

Причем соответствующая квадратичная форма

$$\sum_{k,j=1}^m a_{kj} \xi_k \xi_j = \langle \mathbb{A}_0 \eta, \eta \rangle_0$$

является неотрицательно определенной в силу положительной определенности оператора $\mathbb{A}_0$ и обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\eta \equiv \sum_{i=1}^N \xi_i w_i$. Однако система функций $\{w_i\}_{i=1}^m$ является по определению линейно независимой в $\mathbb{W}_1$. Значит, $\eta = 0$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_i\}_{i=1}^m = \mathbf{0}$. Следовательно, в силу критерия Сильвестра [22] приходим к выводу, что $\det\{a_{kj}\}_{k,j=1}^m > 0$. Наконец, в силу полунепрерывности оператора $\mathbb{B}: \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_1^*$ и ограниченной непрерывности по Лишицу оператора $\mathbb{F}: \mathbb{W}_0 \rightarrow \mathbb{W}_0^*$ приходим к выводу, что (5.3) – система типа Коши–Ковалевской, и она удовлетворяет условиям общей теоремы о разрешимости систем обыкновенных дифференциальных уравнений [22]. Поэтому найдется такое $T_m > 0$, что существует решение системы (5.3) класса $C^1([0, T_m]; \mathbb{W}_1)$.

Шаг 2. Априорные оценки. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 5.1. *Найдется такое $T > 0$, не зависящее от $m \in \mathbb{N}$, что для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ справедливы следующие свойства:*

- а) u_m ограничено в $L^\infty(0, T; \mathbb{W}_1)$;
- б) u'_m ограничено в $L^2(0, T; \mathbb{V}_0)$;
- в) $\mathbb{A}_0 u_m$ ограничено в $L^\infty(0, T; \mathbb{V}_0^*)$;
- г) $\mathbb{B}(u_m)$ ограничено в $L^\infty(0, T; \mathbb{W}_1^*)$;
- д) $\mathbb{F}(u_m)$ ограничено в $L^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая обе части равенства (5.2) последовательно на c_{mj} и c'_{mj} и суммируя по $j = \overline{1, m}$, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + (\mathbb{B}(u_m), u_m)_1 = (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0, \quad (5.4)$$

$$\langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 + \frac{1}{q+2} \frac{d}{dt} (\mathbb{B}(u_m), u_m)_1 = \frac{1}{q+2} \frac{d}{dt} (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0. \quad (5.5)$$

Из соотношения (5.5) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 ds + \frac{1}{q+2} (\mathbb{B}(u_m), u_m)_1 \\ &= \frac{1}{q+2} [(\mathbb{B}(u_{m0}), u_{m0})_1 - (\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0] + \frac{1}{q+2} (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0. \end{aligned}$$

По условию теоремы $(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1$. Поэтому, переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, получим $(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 > (\mathbb{B}(u_{m0}), u_{m0})_1$. В этом случае сразу же приходим к выводу, что

$$\int_0^t \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 ds + \frac{1}{q+2} (\mathbb{B}(u_m), u_m)_1 \leq \frac{1}{q+2} (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0. \quad (5.6)$$

Интегрируя равенство (5.4) по $s \in (0, t)$, где $t \in [0, T]$, получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 &\leq \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 + 2 \int_0^t (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 ds \\ &\leq \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 + 2M \int_0^t |u_m|_0^{q+2} ds \\ &\leq \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 + 2MC_0^{q+2} \int_0^t \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0^{(q+2)/2} ds. \end{aligned}$$

Пусть $\Phi_m \equiv \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0$; тогда

$$\Phi_m \leq \Phi_{m0} + A \int_0^t \Phi_m^{(q+2)/2} ds, \quad A \equiv 2MC_0^{q+2}. \quad (5.7)$$

По теореме Бихари имеем

$$\Phi_m \leq \frac{\Phi_{m0}}{[1 - \frac{q}{2} \Phi_{m0}^{q/2} A t]^{2/q}} = \frac{(\frac{2}{q})^{2/q} A^{-2/q}}{[T_{2m} - t]^{2/q}}, \quad T_{2m} \equiv \frac{2}{q} \Phi_{m0}^{-q/2} A^{-1}. \quad (5.8)$$

Поскольку $u_{m0} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{V}_0$, то $T_{2m} \rightarrow T_2$,

$$T_2 \equiv \frac{2}{q} \Phi_0^{-q/2} A^{-1}.$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что либо $T_{2m} \uparrow T_2$, либо $T_{2m} \downarrow T_2$.

Рассмотрим сначала случай $T_{2m} \downarrow T_2$. Тогда $T_{2m} - t \geq T_2 - t$ и выполнено неравенство

$$\Phi_m \leq \left(\frac{2}{q}\right)^{2/q} A^{-2/q} \frac{1}{[T_2 - t]^{2/q}} \quad \forall t \in [0, T_2).$$

Рассмотрим теперь случай $T_{2m} \uparrow T_2$. В этом случае $T_{2m} - t \geq T_{2\bar{m}} - t$, $m > \bar{m} \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\Phi_m \leq \left(\frac{2}{q}\right)^{2/q} A^{-2/q} \frac{1}{[T_{2\bar{m}} - t]^{2/q}} \quad \forall t \in [0, T_{2\bar{m}}).$$

Отсюда сразу же получаем

$$\Phi_m \leq C(T) < +\infty, \quad T \in (0, T_2).$$

С другой стороны, $|u_m|_0 \leq C_0 \Phi_m^{1/2} \leq C(T)$, и из соотношения (5.6) следует

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 ds + \frac{1}{q+2} (\mathbb{B}(u_m), u_m)_1 &\leq \frac{1}{q+2} (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 \\ &\leq \frac{1}{q+2} M |u_m|_0^{q+2} \leq \frac{C_0 M}{q+2} \Phi_m^{(q+2)/2} \leq C(T) < +\infty \quad \forall T \in (0, T_2). \end{aligned}$$

Итак, мы доказали, что u'_m ограничено в $L^2(0, T; \mathbb{V}_0)$, u_m ограничено в $L^\infty(0, T; \mathbb{W}_1)$, $\mathbb{A}_0 u_m$ ограничено в $L^\infty(0, T; \mathbb{V}_0^*)$, $\mathbb{B}(u_m)$ ограничено в $L^\infty(0, T; \mathbb{W}_1^*)$. Лемма доказана.

Переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, получим $u_m \rightharpoonup u$ *-слабо в $L^\infty(0, T; \mathbb{W}_1)$, $\mathbb{A}_0 u_m \rightharpoonup \mathbb{A}_0 u$ *-слабо в $L^\infty(0, T; \mathbb{V}_0^*)$, $\mathbb{B}(u_m) \rightharpoonup \chi$ *-слабо в $L^\infty(0, T; \mathbb{W}_1^*)$, $u'_m \rightharpoonup u'$ слабо в $L^2(0, T; \mathbb{V}_0)$.

Кроме того, в силу $\mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ и ограниченной непрерывности по Липшицу оператора $\mathbb{F}: \mathbb{W}_0 \rightarrow \mathbb{W}_0^* \subset \mathbb{W}_1^*$ имеем

$$|\mathbb{F}(u_m) - \mathbb{F}(u)|_1^* \leq C |\mathbb{F}(u_m) - \mathbb{F}(u)|_0^* \leq C |u_m - u|_0 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow +\infty,$$

поскольку $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ для почти всех $t \in (0, T)$, а значит, сильно в $\mathbb{W}_0$.

Шаг 3. Метод монотонности. Имея в виду, что $\mathbb{B}(u_m) \rightharpoonup \chi$ *-слабо в $L^\infty(0, T; \mathbb{W}_1^*)$, докажем следующую лемму.

ЛЕММА 5.2. *Найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что $\mathbb{B}(u_m) \rightharpoonup \mathbb{B}(u)$ *-слабо в $L^\infty(0, T; \mathbb{W}_1^*)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим u_m , $\mathbb{A}_0 u_m$, $\mathbb{B}(u_m)$, $\mathbb{F}(u_m)$ на $\mathbb{R}^1$ нулем вне отрезка $[0, T]$. Соответствующие продолжения обозначим через $\tilde{u}_m$, $\mathbb{A}_0 \tilde{u}_m$, $\tilde{\mathbb{B}}(u_m)$, $\tilde{\mathbb{F}}(u_m)$. Из равенства (5.2) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 \tilde{u}_m, w_j \rangle_0 + (\tilde{\mathbb{B}}(u_m), w_j)_1 &= (\tilde{\mathbb{F}}(u_m), w_j)_0 \\ &+ \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, w_j \rangle_0 \delta(t-0) - \langle \mathbb{A}_0 u_m(T), w_j \rangle_0 \delta(t-T), \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Из полученных на шаге 2 результатов следует, что $\langle \mathbb{A}_0 \tilde{u}'_m, w_j \rangle_0 \rightharpoonup \langle \mathbb{A}_0 \tilde{u}', w_j \rangle_0$ слабо в $L^2(0, T)$, $(\tilde{\mathbb{B}}(u_m), w_j)_1 \rightharpoonup (\chi, w_j)_1$ *-слабо в $L^\infty(0, T)$,

$$\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, w_j \rangle_0 \rightarrow \langle \mathbb{A}_0 u_0, w_j \rangle_0, \quad \langle \mathbb{A}_0 \tilde{u}_m(T), w_j \rangle_0 \rightarrow \langle \mathbb{A}_0 \tilde{u}(T), w_j \rangle_0.$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$ и фиксированном $j = \overline{1, m}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 \tilde{u}, w_j \rangle_0 + (\chi, w_j)_1 &= (\tilde{\mathbb{F}}(u), w_j)_0 + \langle \mathbb{A}_0 u_0, w_j \rangle_0 \delta(t-0) \\ &- \langle \mathbb{A}_0 u(T), w_j \rangle_0 \delta(t-T), \quad j = \overline{1, +\infty}. \end{aligned}$$

Сужая последнее равенство на интервал $(0, T)$, видим, что

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 u, w_j \rangle_0 + (\chi, w_j)_1 = (\mathbb{F}(u), w_j)_0, \quad j = \overline{1, +\infty}.$$

Отсюда сразу же получаем

$$\frac{d}{dt} \mathbb{A}_0 u + \chi = \mathbb{F}(u). \quad (5.9)$$

В силу монотонности оператора $\mathbb{B}: \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_1^*$ справедливо неравенство

$$\mathbb{X}_\mu \equiv \int_0^T (\mathbb{B}(u_\mu) - \mathbb{B}(v), u_\mu - v)_1 dt \quad \forall v \in L^p(0, T; \mathbb{W}_1). \quad (5.10)$$

Согласно (5.2) имеем

$$\int_0^T (\mathbb{B}(u_\mu), u_\mu)_1 dt = \langle \mathbb{A}_0 u_{\mu 0}, u_{\mu 0} \rangle_0 - \langle \mathbb{A}_0 u_\mu(T), u_\mu(T) \rangle_0 + \int_0^T (\mathbb{F}(u_\mu), u_\mu)_0 dt.$$

Поскольку $u_\mu \rightarrow u$ *-слабо в $L^\infty(0, T; \mathbb{W}_1)$, то в силу компактного вложения $\mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ имеем

$$(\mathbb{F}(u_\mu), u_\mu)_0 \rightarrow (\mathbb{F}(u), u)_0, \quad m \rightarrow +\infty.$$

Поскольку в силу условия $(\mathbb{A}_0)$, 3) величина $\langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0^{1/2}$ является нормой на рефлексивном банаховом пространстве $\mathbb{V}_0$, то имеем

$$\liminf_{\mu \rightarrow +\infty} \langle \mathbb{A}_0 u_\mu(T), u_\mu(T) \rangle_0 \geq \langle \mathbb{A}_0 u(T), u(T) \rangle_0.$$

С одной стороны, в силу того, что $u_{\mu 0} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{W}_1$, имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}_0 u_{\mu 0}, u_{\mu 0} \rangle_0 &\rightarrow \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0, \\ \limsup_{\mu \rightarrow +\infty} \int_0^T (\mathbb{B}(u_\mu), u_\mu)_1 dt &\leq \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 - \langle \mathbb{A}_0 u(T), u(T) \rangle_0 \\ &\quad + \int_0^T (\mathbb{F}(u), u)_0 dt. \end{aligned} \quad (5.11)$$

С другой стороны, в силу равенства (5.9) получим

$$\int_0^T (\chi, u)_1 dt = \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 - \langle \mathbb{A}_0 u(T), u(T) \rangle_0 + \int_0^T (\mathbb{F}(u), u)_0 dt. \quad (5.12)$$

Из соотношений (5.10) и (5.11), (5.12) вытекает

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{\mu \rightarrow +\infty} \mathbb{X}_\mu \leq - \int_0^T (\chi, v)_1 dt - \int_0^T (\mathbb{B}(v), u - v)_1 dt + \int_0^T (\chi, u)_1 dt, \\ &\quad \int_0^T (\chi - \mathbb{B}(v), u - v)_1 dt \geq 0, \quad v = u - \lambda w, \\ &\quad u \in L^\infty(0, T; \mathbb{W}_1), \quad w \in L^r(0, T; \mathbb{W}_1), \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

В силу полунепрерывности оператора $\mathbb{B}: \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_1^*$ получим

$$\int_0^T (\chi - \mathbb{B}(u), w)_1 dt \geq 0 \quad \forall w \in L^r(0, T; \mathbb{W}_1).$$

Отсюда приходим к выводу: $\chi = \mathbb{B}(u)$, что и доказывает утверждение леммы.

Шаг 4. Предельный переход и единственность. В силу предельных равенств, полученных на шагах 2 и 3, приходим к выводу, что найдется некоторая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, при которой в равенстве (5.2) можно перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ и получить

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 u, v \rangle_0 + (\mathbb{B}(u), v)_1 &= (\mathbb{F}(u), v)_0 \quad \forall v \in \mathbb{W}_1, \\ u &\in L^\infty(0, T; \mathbb{W}_1), \quad u' \in L^2(0, T; \mathbb{V}_0). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Пусть u_1, u_2 – два решения задачи (1.2) указанного в теореме класса. Тогда в силу монотонности оператора $\mathbb{B}: \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_1^*$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 u_1 - \mathbb{A}_0 u_2, u_1 - u_2 \rangle_0 &\leq (\mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2), u_1 - u_2)_0, \\ m_0 \|u_1 - u_2\|_0^2(T) &\leq \langle \mathbb{A}_0 u_1 - \mathbb{A}_0 u_2, u_1 - u_2 \rangle_0 \\ &\leq 2 \int_0^T |\mathbb{F}(u_1) - \mathbb{F}(u_2)|_0^* |u_1 - u_2|_0 dt \leq C \int_0^T \|u_1 - u_2\|_0^2(t) dt. \end{aligned}$$

По теореме Гронуолла–Белмана [23] приходим к выводу, что $u_1 = u_2$ почти всюду на $(0, T)$.

Шаг 5. Разрушение решения задачи (1.2). Докажем необходимый для дальнейшего результат.

ЛЕММА 5.3. *Найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что $u_m \rightarrow u$ сильно в $L^{q+2}(0, T; \mathbb{W}_1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу полунепрерывности снизу нормы рефлексивного банахова пространства и свойства $(\mathbb{B}), 2)$ оператора $\mathbb{B}: \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_1^*$ приходим к выводу, что

$$\liminf_{\mu \rightarrow +\infty} \int_0^T (\mathbb{B}(u_\mu), u_\mu)_1 dt \geq \int_0^T (\mathbb{B}(u), u)_1 dt.$$

С другой стороны, на шаге 4 нами было доказано, что

$$\limsup_{\mu \rightarrow +\infty} \int_0^T (\mathbb{B}(u_\mu), u_\mu)_1 dt \leq \int_0^T (\mathbb{B}(u), u)_1 dt,$$

значит,

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \int_0^T (\mathbb{B}(u_\mu), u_\mu)_1 dt = \int_0^T (\mathbb{B}(u), u)_1 dt. \quad (5.14)$$

В силу условий $(\mathbb{B})$ имеем, что норма $\left(\int_0^T (\mathbb{B}(v), v)_1 dt\right)^{1/(q+2)}$ эквивалентна исходной норме пространства $L^{q+2}(0, T; \mathbb{W}_1)$. Поскольку $u_\mu \rightharpoonup u$ *-слабо в $L^\infty(0, T; \mathbb{W}_1)$, то $u_\mu \rightharpoonup u$ слабо в $L^{q+2}(0, T; \mathbb{W}_1)$. Тогда в силу (5.14) приходим к выводу, что $u_\mu \rightarrow u$ сильно в $L^{q+2}(0, T; \mathbb{W}_1)$. Пусть

$$\begin{aligned}\Phi_m &\equiv \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0, & \Phi_{m0} &\equiv \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0, \\ \Phi &\equiv \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0, & \Phi_0 &\equiv \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0.\end{aligned}$$

Докажем, что $\Phi_m \rightarrow \Phi$ для почти всех $t \in (0, T)$.

Из сильной сходимости $u_m \rightarrow u$ в $L^{q+2}(0, T; \mathbb{W}_1) \subset L^{q+2}(0, T; \mathbb{V}_0)$ следует

$$\int_0^T \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 dt \rightarrow \int_0^T \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 dt. \quad (5.15)$$

С другой стороны,

$$\langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 = - \int_0^T (\mathbb{B}(u_m), u_m)_1 dt + \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 + \int_0^T (\mathbb{F}(u_m), u_m)_0 dt. \quad (5.16)$$

Правая часть равенства (5.16) сходится в силу (5.14), значит, сходится и левая часть при почти всех $T \in (0, T_0)$ к некоторой функции $\eta(t)$:

$$\Phi_m \rightarrow \eta(t) \in L^\infty(0, T).$$

По теореме Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла [28] имеем

$$\int_0^T \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle dt \rightarrow \int_0^T \eta(t) dt, \quad m \rightarrow +\infty.$$

Значит,

$$\int_0^T [\eta(t) - \Phi(t)] dt = 0.$$

Стало быть, $\eta(t) = \Phi(t)$ для почти всех $t \in (0, T_0)$. Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 5.4. *Для любого $u_0 \in \mathbb{W}_0$ при условии*

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1 > 0$$

найдется такое T_0 , что $\lim_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty$, где $\Phi(t) \equiv \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношений (5.4), (5.5) для $\Phi_m(t)$ получим обыкновенное дифференциальное неравенство

$$\Phi_m'' \Phi_m - \alpha(\Phi_m')^2 \geq 0, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{2}. \quad (5.17)$$

Отсюда вытекает

$$\left(\frac{\Phi_m'}{\Phi_m^\alpha} \right)' \geq 0, \quad \frac{\Phi_m'}{\Phi_m^\alpha} \geq \frac{\Phi_m'|_{t=0}}{\Phi_{m0}^\alpha}. \quad (5.18)$$

Поскольку $\mathbb{E}_0 \equiv (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1 > 0$, то, переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, получим

$$\mathbb{E}_{m0} \equiv (\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 - (\mathbb{B}(u_{m0}), u_{m0})_1 > 0.$$

Тогда из (5.18) вытекает

$$\Phi_m \geq \left(\frac{2}{q} \right)^{-2/q} \mathbb{E}_{m0}^{-2/q} \frac{1}{(T_{1m} - t)^{2/q}}, \quad T_{1m} \equiv \Phi_{m0}^{1-\alpha} (\alpha - 1)^{-1} \mathbb{E}_{m0}^{-1}. \quad (5.19)$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что либо $T_{1m} \uparrow T_1$, либо $T_{1m} \downarrow T_1$,

$$\begin{aligned} T_1 &\equiv \Phi_0^{1-\alpha} (\alpha - 1)^{-1} \mathbb{E}_0^{-1}, & \Phi_0 &\equiv \Phi(0), & \Phi(t) &\equiv \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0, \\ \mathbb{E}_0 &\equiv \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1}{\Phi_0^\alpha}, & T_1 &\equiv \frac{2}{q} \frac{\Phi_0}{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала случай $T_{1m} \uparrow T_1$. Тогда $T_{1m} - t \leq T_1 - t$ и для любых $m > \bar{m} \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T_{\bar{m}})$ справедливо неравенство

$$\Phi_m \geq \frac{\mathbb{D}_{m0}}{(T_1 - t)^{2/q}} \quad \forall t \in (0, T_{1\bar{m}}), \quad \mathbb{D}_{m0} \equiv \left(\frac{2}{q} \right)^{-2/q} \mathbb{E}_{m0}^{-2/q}. \quad (5.20)$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$ равномерно по $t \in (0, T_{1\bar{m}})$, в силу того, что $\Phi_m(t) \rightarrow \Phi(t)$ для почти всех $t \in (0, T_{1\bar{m}})$, получим

$$\Phi(t) \geq \frac{\mathbb{D}_0}{(T_1 - t)^{2/q}} \quad \forall t \in (0, T_{1\bar{m}}), \quad \mathbb{D}_0 \equiv \left(\frac{2}{q} \right)^{-2/q} \mathbb{E}_0^{-2/q}, \quad (5.21)$$

откуда в силу произвольности $\bar{m} \in \mathbb{N}$ получим, что неравенство (5.21) имеет место для любого $t \in (0, T_1)$.

Пусть теперь $T_{1m} \downarrow T_1$. В этом случае имеем

$$\Phi_m(t) \geq \frac{\mathbb{D}_{m0}}{(T_{1m} - t)^{2/q}} \quad \forall t \in [0, T_{1m}).$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в последнем неравенстве, получим

$$\Phi(t) \geq \frac{\mathbb{D}_0}{(T_1 - t)^{2/q}} \quad \forall t \in [0, T_1]. \quad (5.22)$$

Предположим теперь, что $T_0 > T_1$, и, значит,

$$\Phi(t) \leq C(t) \quad \forall t \in (T_1, T_0).$$

Однако в силу (5.21) и (5.22) приходим к выводу, что найдется $t^* \in (0, T_1)$ такое, при котором будет иметь место противоположное неравенство. Значит, $T_0 \leq T_1$. Лемма доказана.

Шаг 6. Оценки скорости и времени разрушения решения задачи (1.2). Введем обозначения:

$$U_m(s, x) \equiv \frac{u_m(s\gamma_m + t^*, x)}{M_m(t^*)}, \quad \gamma_m \equiv \frac{1}{M^q(t^*)}, \quad M_m(t^*) \equiv \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0^{1/2},$$

где t^* – фиксированный момент времени из интервала $[0, T_0]$. Нетрудно убедиться в том, что введенная функция $U_m(s, x)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle \mathbb{A}_0 U_m, w_j \rangle_0 + (\mathbb{B}(U_m), w_j)_1 &= (\mathbb{F}(U_m), w_j)_0, \quad j = \overline{1, m}, \\ U_m\left(-\frac{t^*}{\gamma_m}\right) &\equiv U_{m0}, \quad U_{m0} \equiv \frac{u_{m0}}{M_m(t^*)} = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{mk}}{M_m(t^*)} w_k, \\ u_{m0} &= \sum_{k=1}^m \alpha_{mk} w_k \rightarrow u_0 \quad \text{сильно в } \mathbb{W}_1. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 5.5. Для любого $u_0 \in \mathbb{W}_1$ справедливы следующие двусторонние оценки скорости разрушения решения задачи (1.2):

$$(qc_1)^{-1/q} \leq M(t)(T_0 - t)^{1/q} \leq (qc_2)^{-1/q} \quad \forall t \in [0, T_0],$$

где

$$\begin{aligned} M(t) &\equiv \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0^{1/2} \\ c_2 &\equiv \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1}{\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0^{(q+2)/2}}, \quad c_1 \equiv BC_1^{q+1}, \\ |(\mathbb{F}(v), v)_0| &\leq B|v|_0^{q+2}, \quad |v|_0 \leq C_1 \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что найдутся $c_{1m}, c_{2m} \in (0, +\infty)$ такие, что

$$0 < c_{2m} \leq \frac{d}{ds} \langle \mathbb{A}_0 U_m, U_m \rangle_0^{1/2} \Big|_{s=0} \leq c_{1m} < +\infty. \quad (5.24)$$

Отметим, что для задачи (5.23) справедливо энергетическое равенство (5.4), из которого следует

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle \mathbb{A}_0 U_m, U_m \rangle_0^{1/2} \Big|_{s=0} \\ \leq \left| \langle \mathbb{F}(U_m), U_m \rangle_0 \right|_{s=0} \leq BC_1^{q+2} \langle \mathbb{A}_0 U_m, U_m \rangle_0^{(q+2)/2} \Big|_{s=0} \leq BC_1^{q+2} \equiv c_{1m}, \end{aligned}$$

где

$$\left| \langle \mathbb{F}(v), v \rangle_0 \right| \leq B|v|_0^{q+2}, \quad |v|_0 \leq C_1 \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2}.$$

Итак,

$$\frac{d}{ds} \langle \mathbb{A}_0 U_m, U_m \rangle_0^{1/2} \Big|_{s=0} \leq c_{1m}. \quad (5.25)$$

Пусть теперь $\varphi_m \equiv \langle \mathbb{A}_0 U_m, U_m \rangle_0$. Аналогично предыдущим рассуждениям легко показать, что для функции $\varphi_m(s)$ справедливо неравенство вида (5.17):

$$\varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{ds^2} - \alpha \left(\frac{d\varphi_m}{ds} \right)^2 \geq 0, \quad \alpha \equiv \frac{q+2}{2}. \quad (5.26)$$

Интегрируя дифференциальное неравенство (5.26) по $s \in (-t^*/\gamma, t)$, получим

$$\frac{d\varphi_m}{ds} \frac{1}{\varphi_m^\alpha} \Big|_{s=t} \geq 2 \frac{\langle \mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0} \rangle_0 - \langle \mathbb{B}(u_{m0}), u_{m0} \rangle_1}{\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0^{(q+2)/2}}. \quad (5.27)$$

Теперь воспользуемся тем, что по условию теоремы 2

$$\langle \mathbb{F}(u_0), u_0 \rangle_0 - \langle \mathbb{B}(u_0), u_0 \rangle_1 > 0,$$

поэтому найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_{m0}\}$, что

$$\langle \mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0} \rangle_0 - \langle \mathbb{B}(u_{m0}), u_{m0} \rangle_1 > 0.$$

Из неравенства (5.27) следует

$$\frac{d}{ds} \langle \mathbb{A}_0 U_m, U_m \rangle_0^{1/2} \Big|_{s=0} \leq \frac{\langle \mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0} \rangle_0 - \langle \mathbb{B}(u_{m0}), u_{m0} \rangle_1}{\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0^{(q+2)/2}} \equiv c_{2m} > 0.$$

Тем самым неравенство (5.24) доказано.

Неравенство (5.24) эквивалентно следующему двустороннему неравенству:

$$0 < c_{2m} \leq \frac{1}{M_m(t^*)^{q+1}} \frac{dM_m(t^*)}{dt^*} \leq c_{1m} < +\infty, \quad q > 0, \quad (5.28)$$

где

$$\begin{aligned} c_{2m} &\equiv \frac{\langle \mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0} \rangle_0 - \langle \mathbb{B}(u_{m0}), u_{m0} \rangle_1}{\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0^{(q+2)/2}}, \quad c_{1m} \equiv BC_1^{q+1}, \\ &\left| \langle \mathbb{F}(v), v \rangle_0 \right| \leq B|v|_0^{q+2}, \quad |v|_0 \leq C_1 \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2}. \end{aligned}$$

Интегрируя (5.28) по t^* в пределах от t до T_{m0} , при котором выполнено предельное равенство

$$\lim_{t^* \uparrow T_{m0}} M_m(t^*) = +\infty,$$

получим

$$(qc_{1m})^{-1/q} \leq M_m(t)(T_{m0} - t)^{1/(p-2)} \leq (qc_{2m})^{-1/q}, \quad t \in [0, T_{m0}), \quad (5.29)$$

причем справедливы следующие двусторонние оценки времени разрушения T_{m0} :

$$A_{1m} \leq T_{m0} \leq A_{2m},$$

где

$$A_{1m} \equiv \frac{1}{qC_1^{q+2} B \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0^{q/2}},$$

$$A_{2m} \equiv \frac{\langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0}{q[(\mathbb{F}(u_{m0}), u_{m0})_0 - (\mathbb{B}(u_{m0}), u_{m0})_1]}.$$

Нетрудно доказать, что найдутся такие постоянные $0 < A_1, A_2 < +\infty$, не зависящие от $m \in \mathbb{N}$, что

$$0 < A_1 \leq T_{m0} \leq A_2 < +\infty.$$

Пусть $T_0 \equiv \liminf_{m \rightarrow +\infty} T_{m0}$. Тогда найдется такая подпоследовательность последовательности $\{T_{m0}\}$, что либо $T_{m0} \uparrow T_0$, либо $T_{m0} \downarrow T_0$.

Рассмотрим сначала случай $T_{m0} \uparrow T_0$. Тогда для любого фиксированного $\bar{m} \in \mathbb{N}$ можно перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в неравенстве (5.29) равномерно по $t \in [0, T_{\bar{m}0}]$. Получим

$$(qc_1)^{-1/q} \leq M(t)(T_0 - t)^{1/q} \leq (qc_2)^{-1/q} \quad \forall t \in [0, T_{\bar{m}0}), \quad (5.30)$$

где

$$c_2 \equiv \frac{(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 - (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1}{\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0^{(q+2)/2}}, \quad c_1 \equiv BC_1^{q+1},$$

$$|(\mathbb{F}(v), v)_0| \leq B|v|_0^{q+2}, \quad |v|_0 \leq C_1 \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2},$$

откуда в силу произвольности $\bar{m} \in \mathbb{N}$ приходим к выводу о справедливости неравенства (5.30) равномерно по $t \in [0, T_0)$.

Рассмотрим теперь случай $T_{m0} \downarrow T_0$. Тогда можно перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в неравенстве (5.29) равномерно по $t \in [0, T_0)$. Снова получим (5.30).

Итак, лемма 5.5, а тем самым и теорема 5.1 доказаны.

§ 6. Локальная сильная разрешимость и единственность задачи (1.2) и оценки времени и скорости разрушения в случае $\mathbb{B} \equiv 0$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть выполнены условия $(\mathbb{A}_0)$ и $(\mathbb{F})$ и, кроме того, $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0$. Тогда для любого $u_0 \in \mathbb{V}_0$ найдется такое $T_0 > 0$, что для любого $0 < T < T_0$ задача Коши (1.1), (1.2) имеет одно не продолжаемое во времени решение

класса $C^1([0, T]; \mathbb{V}_0)$. Если, кроме того, $(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0$ для данного $u_0 \in \mathbb{V}_0$, $\|u_0\|_0 > 0$, то $0 < T_0 < +\infty$, причем

$$\lim_{t \uparrow T_0} \|u(t)\|_0 = +\infty. \quad (6.1)$$

Кроме того, справедливы двусторонние оценки скорости и времени разрушения:

$$C_1(T_0 - t)^{-1/q} \leq \|u\|_0 \leq C_2(T_0 - t)^{-1/q},$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= M_0^{-1/2} [q\mu(m_0^{-1/2} B_1) m_0^{-1} B_1^2]^{-1/q}, \\ C_2 &= m_0^{-1/2} [q(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0^{-(q+2)/2}]^{-1/q}, \\ C_1^q \|u_0\|_0^{-q} &\leq T_0 \leq C_2^q \|u_0\|_0^{-q}, \quad |v|_0 \leq B_1 \|v\|_0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство, как обычно, проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Локальная разрешимость. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 6.1. Для любого $u_0 \in \mathbb{V}_0$ при условии $(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0$ найдется такое максимальное $T_0 > 0$, что существует единственное не продолжаемое во времени решение $u(t)$ задачи (1.2) класса $C^1([0, T]; \mathbb{V}_0)$ для любого $T \in (0, T_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим эквивалентную (1.2) в классе $C^1([0, T]; \mathbb{V}_0)$ задачу

$$\frac{du}{dt} - \mathbb{G}(u)(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{V}_0, \quad u \in C^1([0, T]; \mathbb{V}_0), \quad (6.2)$$

где $\mathbb{G}(u) = \mathbb{A}_0^{-1} \mathbb{F}(u)(t)$, $u \in C([0, T]; \mathbb{V}_0)$. Справедлива цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \|\mathbb{G}(u)(t) - \mathbb{G}(u)(t_0)\|_0 &\leq m_0^{-1} \lim_{t \rightarrow t_0} \|\mathbb{F}(u)(t) - \mathbb{F}(u)(t_0)\|_0^* \\ &\leq m_0^{-1} \mu(|u(t_0)|_0) \lim_{t \rightarrow t_0} |u(t) - u(t_0)|_0 \leq C \lim_{t \rightarrow t_0} \|u(t) - u(t_0)\|_0 = 0. \end{aligned}$$

Значит, $\mathbb{G}: C([0, T]; \mathbb{V}_0) \rightarrow C([0, T]; \mathbb{V}_0)$.

Введем следующее множество:

$$B_R = \{u(t) \in C([0, T]; \mathbb{V}_0) : \|u\|_T \leq R\},$$

где $\|v\|_T \equiv \sup_{t \in [0, T]} \|v\|_0$.

Докажем, что оператор

$$\mathbb{U}(u) \equiv u_0 + \int_0^t \mathbb{G}(u)(s) ds, \quad t \in [0, T], \quad (6.3)$$

действует из B_R в B_R и является сжимающим на B_R . Действительно, поскольку $\mathbb{G}: C([0, T]; \mathbb{V}_0) \rightarrow C([0, T]; \mathbb{V}_0)$, то, очевидно, $\mathbb{U}: C([0, T]; \mathbb{V}_0) \rightarrow C^1([0, T]; \mathbb{V}_0)$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{U}(u)\|_T &\leq \|u_0\|_0 + \int_0^T \|\mathbb{G}(u)\|_0(s) ds \leq \|u_0\|_0 + T \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbb{G}(u)\|_0(t), \\ \|\mathbb{G}(u)\|_0(t) &\leq m_0^{-1} \|\mathbb{F}(u)\|_0^* \leq C m_0^{-1} \|\mathbb{F}(u)\|_0^* \\ &\leq m_0^{-1} C \mu(|u|_0) \|u\|_0 \leq C m_0^{-1} \mu(CR) \|u\|_0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|\mathbb{U}\|_T \leq \|u_0\|_0 + m_0^{-1} C \mu(CR) RT.$$

Пусть $\|u_0\|_0 \leq R/2$, $T < m_0/(2C\mu(CR))$. Тогда при достаточно большом $R > 0$ и малом $T > 0$ имеем

$$\|\mathbb{U}\|_T \leq R.$$

Таким образом, $\mathbb{U}: B_R \rightarrow B_R$.

Докажем теперь, что оператор $\mathbb{U}$ сжимающий на B_R . Пусть $u, v \in B_R$; тогда имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbb{U}(u) - \mathbb{U}(v)\|_T &\leq \int_0^T \|\mathbb{G}(u) - \mathbb{G}(v)\|_0 dt \leq m_0^{-1} \int_0^T \|\mathbb{F}(u) - \mathbb{F}(v)\|_0^*(t) dt \\ &\leq m_0^{-1} C \mu(CR) T \|u - v\|_T. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства при $T < m_0/(C2\mu(CR))$ получаем

$$\|\mathbb{U}(u) - \mathbb{U}(v)\|_T < \frac{1}{2} \|u - v\|_T.$$

Таким образом, оператор $\mathbb{U}$ сжимающий на B_R . Поэтому в силу теоремы о сжимающем отображении для любого $u_0 \in \mathbb{V}_0$ найдется такое $T > 0$, что существует единственное решение задачи (6.3) класса $C^1([0, T]; \mathbb{V}_0)$.

Используя стандартный алгоритм продолжения решения по времени, получим, что существуют $T_0 > 0$ и единственное решение задачи (1.2) при $\mathbb{B} = 0$ класса $C^1([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$, причем либо $T_0 < +\infty$, и тогда

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|u\|_0 = +\infty,$$

либо $T_0 = +\infty$.

Действительно, рассмотрим норму $\psi(T) \equiv \|u(t)\|_T$. Функция $\psi(T)$ является монотонно возрастающей. Стало быть, при $T \uparrow T_0$ функция $\psi(T)$ имеет либо конечный, либо бесконечный предел. Предположим, что $\psi(T)$ имеет конечный предел при $T \uparrow T_0$. Рассмотрим вспомогательное интегральное уравнение вида (6.3)

$$u(x, t) = u(x, T') + \int_0^t \mathbb{G}(u)(s) ds.$$

Норма $\|\nabla u\|_2^2(T')$ равномерно ограничена по $T' \in (0, T_0)$, что позволяет выбрать такое $T^* \in (0, T_0)$, при котором для любого $T' \in (0, T_0)$ интегральное уравнение имеет единственное решение $u(x, t)$ класса $C^1([0, T^*]; \mathbb{V}_0)$. Пусть $T' = T_0 - T^*/2$. Обозначим через $v(x, t)$ соответствующее решение последнего интегрального уравнения и определим функцию $\hat{u}(x, t)$ на отрезке $[0, T_0 + T^*/2]$:

$$\hat{u}(x, t) = \{u(x, t), t \in [0, T']; v(x, t - T'), t \in [T', T_0 + T^*/2]\}.$$

По построению $\hat{u}(x, t)$ является решением задачи (1.1), (1.2) на отрезке $[0, T_0 + T^*/2]$ и продолжением функции $u(x, t)$ в силу локальной единственности. Это противоречит максимальнойности отрезка $[0, T_0]$, откуда следует

$$\lim_{T \uparrow T_0} \|u(t)\|_T = +\infty.$$

Получаем, что

$$\overline{\lim}_{t \uparrow T_0} \|u(t)\|_0 = +\infty.$$

Таким образом, для любого $u_0 \in \mathbb{V}$ найдется такое $T_0 > 0$, что существует единственное максимальное решение $u(t)$ задачи (1.2) класса $C^1([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$. Лемма доказана.

Шаг 2. Разрушение решения задачи (1.2) за конечное время и оценки времени и скорости разрушения. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 6.2. *Для любого $u_0 \in \mathbb{V}_0$ найдется такое $0 < T_0 < +\infty$, что*

$$\lim_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty, \quad \Phi(t) \equiv \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0.$$

Кроме того, справедливо двустороннее неравенство для скорости разрушения решения

$$C_1(T_0 - t)^{-1/q} \leq \|u\|_0 \leq C_2(T_0 - t)^{-1/q},$$

где

$$C_1 = M_0^{-1/2} [q\mu(m_0^{-1/2} B_1) m_0^{-1} B_1^2]^{-1/q},$$

$$C_2 = m_0^{-1/2} [q(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0^{-(q+2)/2}]^{-1/q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий $(\mathbb{A}_0)$ и $(\mathbb{F})$ и уравнения (1.2) справедливы следующие равенства:

$$\langle \mathbb{A}_0 u_t, u \rangle_0 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 = (\mathbb{F}(u), u)_0, \quad (6.4)$$

$$\langle \mathbb{A}_0 u_t, u_t \rangle_0 = \frac{1}{q+2} \frac{d}{dt} (\mathbb{F}(u), u)_0. \quad (6.5)$$

Обозначим $\varphi(t) \equiv \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0$. Тогда из (6.4), (6.5) и неравенства Шварца [27] прямым вычислением получим

$$\varphi''(t) \varphi(t) - \frac{q+2}{2} (\varphi'(t))^2 \leq 0, \quad (6.6)$$

причем поскольку $u(t) \in C^1([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$, то непосредственной проверкой получаем $\varphi(t) \in C^1[0, T_0]$.

С другой стороны, из соотношения (6.5) выводим, что правая часть равенства (6.4) непрерывно дифференцируема по $t \in [0, T_0]$. Значит, в классе $C^1([0, T_0]; \mathbb{V}_0)$ получаем $\varphi(t) \in C^2[0, T_0]$.

В силу условия $(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0$ и соотношений (6.4), (6.5) имеем

$$0 < (q+2) \int_0^t \langle \mathbb{A}_0 u_s, u_s \rangle_0 ds + (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 = (\mathbb{F}(u), u)_0, \quad (6.7)$$

$$\langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 = \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + 2 \int_0^t (\mathbb{F}(u), u)_0 ds > 0. \quad (6.8)$$

Отсюда получаем, что $\varphi(t) > 0$ при $t \in [0, T_0]$.

Предположим, что $T_0 = +\infty$; тогда $u(t) \in C^1([0, +\infty); \mathbb{V}_0)$. При этом $\varphi(t) \in C^2[0, +\infty)$. Из неравенства (6.6) после ряда выкладок получаем

$$\left(\frac{\varphi'}{\varphi^\alpha} \right)' \geq 0, \quad \alpha = \frac{q+2}{2}.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \varphi_0^{q/2} - \varphi^{q/2}(t) &\geq q(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 (\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0)^{-(q+2)/2} t, \\ \varphi_0^{q/2} &\geq q(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 (\langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0)^{-(q+2)/2} t. \end{aligned}$$

Последнее неравенство означает, что t не может принимать сколь угодно большие значения. Полученное противоречие доказывает, что $T_0 < +\infty$. Первое утверждение леммы доказано.

Перейдем к выводу оценок времени и скорости разрушения решения задачи (1.2).

Введем функцию

$$v_\gamma(s) = N^{-1}(t^*) u(s\gamma + t^*), \quad \gamma = N^{-q}(t^*), \quad N(t^*) = \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0^{1/2}(t^*).$$

Нетрудно проверить, что функция $v_\gamma(s)$ является решением задачи

$$\mathbb{A}_0 \frac{dv_\gamma(s)}{ds} = \mathbb{F}(v_\gamma)(s), \quad v_\gamma\left(-\frac{t^*}{\gamma}\right) = u_0 N(t^*)^{-1}. \quad (6.9)$$

Докажем, что найдутся такие постоянные $c_1, c_2 > 0$, при которых

$$0 < c_2 \leq \frac{d}{ds} \langle \mathbb{A}_0 v_\gamma, v_\gamma \rangle_0^{1/2}(0) \leq c_1 < +\infty. \quad (6.10)$$

Справедливы следующие цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle \mathbb{A}_0 v_\gamma, v_\gamma \rangle_0(s) &= 2(\mathbb{F}(v_\gamma), v_\gamma)_0 \leq 2\mu(|v_\gamma|_0)|v_\gamma|_0^2 \leq 2\mu(B_1\|v_\gamma\|_0)B_1^2\|v_\gamma\|_0^2 \\ &\leq 2\mu(B_1m_0^{-1/2}\langle \mathbb{A}_0 v_\gamma, v_\gamma \rangle_0^{1/2})m_0^{-1}B_1^2\langle \mathbb{A}_0 v_\gamma, v_\gamma \rangle_0, \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbb{A}_0 v_\gamma, v_\gamma \rangle_0(0) &\leq 2\mu(B_1m^{-1/2})B_1^2m^{-1}, \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbb{A}_0 v_\gamma, v_\gamma \rangle_0^{1/2}(0) &\leq c_1, \end{aligned} \quad (6.11)$$

где $c_1 = \mu(B_1m_0^{-1/2})B_1^2m_0^{-1}$.

Пусть $\varphi_\gamma(s) = \langle \mathbb{A}_0 v_\gamma, v_\gamma \rangle_0(s)$; тогда с учетом (6.6) получим

$$\varphi_\gamma''(s)\varphi_\gamma(s) - \frac{q+2}{2}(\varphi_\gamma'(s))^2 \leq 0.$$

Из последнего неравенства следует

$$\left. \frac{\varphi_\gamma'(s)}{\varphi_\gamma^\alpha(s)} \geq \frac{\varphi_\gamma'(s)}{\varphi_\gamma^\alpha(s)} \right|_{s=-t^*/\gamma} = 2(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0^{-(q+2)/2}, \quad \alpha = \frac{q+2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{d}{ds} \langle \mathbb{A}_0 v_\gamma, v_\gamma \rangle_0^{1/2}(0) \geq (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0^{-(q+2)/2} = c_2. \quad (6.12)$$

Из (6.11), (6.12) вытекает неравенство (6.10), которое эквивалентно следующему неравенству:

$$0 < c_2 \leq \frac{N'(t^*)}{N^{q+1}(t^*)} \leq c_1 < +\infty. \quad (6.13)$$

Интегрируя неравенство (6.13) в пределах от t до T_0 , с учетом (6.1) получим

$$(qc_1)^{-1/q} \leq N(t)(T_0 - t)^{1/q} \leq (qc_2)^{-1/q}, \quad N(t) = \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0^{1/2}, \quad (6.14)$$

где

$$c_1 = \mu(B_1m_0^{-1/2})B_1^2m_0^{-1}, \quad c_2 = (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0^{-(q+2)/2}.$$

С другой стороны, имеем

$$m_0^{1/2}\|u\|(t) \leq N(t) \leq M_0^{1/2}\|u\|(t).$$

Отсюда и из (6.14) получим

$$C_1(T_0 - t)^{-1/q} \leq \|u\|_0 \leq C_2(T_0 - t)^{-1/q}, \quad (6.15)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= M_0^{-1/2} [q\mu(m_0^{-1/2}B_1)m_0^{-1}B_1^2]^{-1/q}, \\ C_2 &= m_0^{-1/2} [q(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0^{-(q+2)/2}]^{-1/q}. \end{aligned}$$

Из (6.15) получим двусторонние оценки времени разрушения:

$$C_1^q \|u_0\|_0^{-q} \leq T_0 \leq C_2^q \|u_0\|_0^{-q},$$

что полностью доказывает утверждение леммы, а тем самым и теорему 6.1.

§ 7. Примеры

Рассмотрим теперь примеры (1.3)–(1.8) сильно нелинейных уравнений типа Соболева, удовлетворяющих условиям, налагаемым на операторные коэффициенты уравнений (1.1) и (1.2), при которых справедливы доказанные нами теоремы. В примерах используются стандартные теоремы вложения Соболева (см. [29]).

ПРИМЕР 7.1. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (1.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta u + \sum_{j=1}^n \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_j-2} \nabla u) \right) + |u|^q u = 0,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей класса $C^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_0 u &\equiv -\Delta u: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \\ \mathbb{A}_j(u) &\equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_j-2} \nabla u): \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}^{-1,p'_j}(\Omega), \\ \mathbb{F}(u) &\equiv |u|^q u: L^{q+2}(\Omega) \rightarrow L^{q'}(\Omega), \\ p_j &> 2, \quad p'_j \equiv \frac{p_j}{p_j-1}, \quad q' \equiv \frac{q+2}{q+1}, \\ \mathbb{V}_0 &\equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \mathbb{V}_j \equiv \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0 \equiv L^{q+2}(\Omega), \\ \mathbb{V}_0^* &\equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{V}_j^* \equiv \mathbb{W}^{-1,p'_j}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^* \equiv L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega), \\ \mathbb{V} &\equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \left(\bigcap_{j=1}^n \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \right). \end{aligned}$$

Вложение $\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{W}_0 \equiv L^{q+2}(\Omega)$ имеет место при следующих условиях:

$$0 < q \leq \frac{4}{N-2} \quad \text{при } N \geq 3, \quad 0 < q < +\infty \quad \text{при } N = 1, 2.$$

Наконец, вложение $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ справедливо при условиях

$$\bigcap_{j=1}^n \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega),$$

что, в свою очередь, справедливо при условиях

$$0 < q < +\infty \quad \text{при } N \leq \bar{p} \equiv \max_{j=1,n} p_j, \quad 2 < q+2 < \frac{N\bar{p}}{N-\bar{p}} \quad \text{при } N > \bar{p}.$$

Потребуем выполнения следующих условий, которым удовлетворяет начальная функция $u_0 \in \mathbb{V}$:

$$\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j-1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j > 1, \quad (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0.$$

Можно проверить, что операторные коэффициенты удовлетворяют всем условиям теоремы 3.1.

ПРИМЕР 7.2. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (1.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) - |u|^{q_1} u) + |u|^q u &= 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \end{aligned}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей класса $C^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_0 u &\equiv -\Delta u: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \\ \mathbb{A}_1(u) &\equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2} \nabla u): \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}^{-1,p'_1}(\Omega), \\ \mathbb{A}_2(u) &\equiv |u|^{p_2-2} u: L^{p_2}(\Omega) \rightarrow L^{p'_2}(\Omega), \quad \mathbb{F}(u) \equiv |u|^q u: L^{q+2}(\Omega) \rightarrow L^{q'}(\Omega), \\ p_1 &\equiv p > 2, \quad p_2 \equiv q_1 + 2, \quad q_1 > 0, \\ p'_1 &\equiv \frac{p_1}{p_1-1}, \quad p'_2 \equiv \frac{p_2}{p_2-1}, \quad q' \equiv \frac{q+2}{q+1}, \\ \mathbb{V}_0 &\equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \mathbb{V}_1 \equiv \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega), \quad \mathbb{V}_2 \equiv L^{p_2}(\Omega), \\ \mathbb{W}_0 &\equiv L^{q+2}(\Omega), \\ \mathbb{V}_0^* &\equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{V}_1^* \equiv \mathbb{W}^{-1,p'_1}(\Omega), \quad \mathbb{V}_2^* \equiv L^{p'_2}(\Omega), \\ \mathbb{W}_0^* &\equiv L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega), \quad \mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{q_1+2}(\Omega). \end{aligned}$$

Вложение $\mathbb{V}_0 \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{W}_0 \equiv L^{q+2}(\Omega)$ имеет место при следующих условиях:

$$0 < q \leq \frac{4}{N-2} \quad \text{при } N \geq 3, \quad 0 < q < +\infty \quad \text{при } N = 1, 2.$$

Наконец, вложение $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ справедливо при условиях $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$, что, в свою очередь, справедливо при условиях

$$0 < q < +\infty \quad \text{при } N \leq p, \quad 2 < q+2 < \frac{Np}{N-p} \quad \text{при } N > p.$$

Если $p \geq q_1 + 2$, то в силу установленных выше условий имеем $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{W}_0$. Если же $q_1 + 2 > p$, то при $q_1 + 2 \geq q + 2$ имеем $\mathbb{V}_2 \subset \mathbb{W}_0$. Наконец, $u_0 \in \mathbb{V}$.

Потребуем выполнения следующих условий, которым удовлетворяет начальная функция $u_0 \in \mathbb{V}$:

$$\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{i=1}^2 \frac{p_i - 1}{p_i} \langle \mathbb{A}_i(u_0), u_0 \rangle_i > 1, \quad (\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0.$$

Можно проверить, что операторные коэффициенты и соответствующие банаховы пространства удовлетворяют всем условиям теоремы 3.1.

ПРИМЕР 7.3. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (1.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - |u|^{q_1}u) + |u|^q u &= 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \end{aligned}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей класса $C^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_0 u &\equiv -\Delta u: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{A}_1(u) \equiv |u|^{p_1-2}u: L^{p_1}(\Omega) \rightarrow L^{p'_1}(\Omega), \\ \mathbb{F}(u) &\equiv |u|^q u: L^{q+2}(\Omega) \rightarrow L^{q'}(\Omega), \\ \mathbb{V}_0 &\equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \mathbb{V}_1 \equiv L^{p_1}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0 \equiv L^{q+2}(\Omega), \\ \mathbb{V}_0^* &\equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{V}_1^* \equiv L^{p'_1}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^* \equiv L^{q'}(\Omega), \\ p_1 &= q_1 + 2, \quad q_1 > 0, \quad p'_1 \equiv \frac{p_1}{p_1 - 1}, \quad q' \equiv \frac{q+2}{q+1}, \quad q > 0. \end{aligned}$$

Вложение $\mathbb{V}_0 \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ имеет место при следующих условиях:

$$0 < q < \frac{4}{N-2} \quad \text{при } N \geq 3, \quad 0 < q < +\infty \quad \text{при } N = 1, 2.$$

Это означает, что

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap L^{q_1+2}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}_0 \equiv L^{q+2}(\Omega).$$

Потребуем, чтобы

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0.$$

Осталось проверить монотонность производной Фреше оператора $\mathbb{A}_1(u) = |u|^{q_1}u$ в указанном в формулировке теоремы 4.1 смысле. Действительно, производная Фреше имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{A}'_{1,u}(h) &\equiv (q_1 + 1)|u|^{q_1}h: L^{q_1+2}(\Omega) \rightarrow L^{q'_1}(\Omega), \quad q'_1 \equiv \frac{q_1+2}{q_1+1}, \quad \forall h \in L^{q_1+2}(\Omega), \\ \langle \mathbb{A}'_{1,u}(u)u_1 - \mathbb{A}'_{1,u}(u)u_2, u_1 - u_2 \rangle_1 &= (q_1 + 1) \langle |u|^{q_1}u_1 - |u|^{q_1}u_2, u_1 - u_2 \rangle_1 \\ &= (q_1 + 1) \int_{\Omega} (|u|^{q_1}u_1 - |u|^{q_1}u_2)(u_1 - u_2) dx \geq 0 \quad \forall u, u_1, u_2 \in L^{q_1+2}(\Omega). \end{aligned}$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 4.1.

ПРИМЕР 7.4. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (1.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u) + |u|^q u &= 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \end{aligned}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей класса $C^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_0 u &\equiv -\Delta u + u: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \\ \mathbb{B}(u) &\equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u): \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}^{-1,q'}(\Omega), \\ \mathbb{F}(u) &\equiv |u|^q u: L^{q+2}(\Omega) \rightarrow L^{q'}(\Omega), \\ \mathbb{V}_0 &\equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \mathbb{W}_1 \equiv \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0 \equiv L^{q+2}(\Omega), \\ \mathbb{V}_0^* &\equiv \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{W}_1^* \equiv \mathbb{W}^{-1,q'}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^* \equiv L^{q'}(\Omega), \quad q' \equiv \frac{q+2}{q+1}. \end{aligned}$$

Вложение $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$ имеет место при следующих условиях:

$$0 < q < \frac{4}{N-2} \quad \text{при } N \geq 3, \quad 0 < q < +\infty \quad \text{при } N = 1, 2.$$

Значит, вложение $\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{V}_0 \hookrightarrow \mathbb{W}_0$ компактно.

Пусть выполнено следующее условие, которому удовлетворяет начальная функция $u_0 \in \mathbb{W}_1$:

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > (\mathbb{B}(u_0), u_0)_1.$$

Стало быть, выполнены все условия теоремы 5.1.

ПРИМЕР 7.5. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (1.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta^2 u - \Delta u) + \operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u) &= 0, \\ u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \end{aligned}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ класса $C^{4,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_0 u &\equiv \Delta^2 u - \Delta u: \mathbb{H}_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \\ \mathbb{F}(u) &\equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u): \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}^{-1,q'}(\Omega), \\ \mathbb{V}_0 &\equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega), \quad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega), \\ \mathbb{V}_0^* &\equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{W}^{-1,q'}(\Omega), \quad q' \equiv \frac{q+2}{q+1}. \end{aligned}$$

Причем имеет место вложение $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0$, если выполнены следующие условия:

$$0 < q < \frac{4}{N-2} \quad \text{при } N \geq 3, \quad 0 < q < +\infty \quad \text{при } N = 1, 2.$$

Пусть теперь выполнено условие, которому удовлетворяет начальная функция $u_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$:

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 6.1.

ПРИМЕР 7.6. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (1.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta^2 u - \Delta u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2} \nabla u)) + \operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u) &= 0, \quad p_1 > 2, \quad q > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \end{aligned}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ класса $C^{4,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$, а операторные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_0 u &\equiv \Delta^2 u - \Delta u: \mathbb{H}_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \\ \mathbb{F}(u) &\equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u): \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}^{-1,q'}(\Omega), \\ \mathbb{A}_1(u) &\equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2} \nabla u): \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}^{-1,p'_1}(\Omega), \quad p'_1 = \frac{p_1}{p_1-1}, \\ \mathbb{V}_0 &\equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega), \quad \mathbb{W}_0 \equiv \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega), \quad \mathbb{V}_1 \equiv \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega), \\ \mathbb{V}_0^* &\equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^* \equiv \mathbb{W}^{-1,q'}(\Omega), \quad \mathbb{V}_1^* \equiv \mathbb{W}^{-1,p'_1}(\Omega), \quad q' \equiv \frac{q+2}{q+1}. \end{aligned}$$

Причем имеет место вложение $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_0$, если выполнены следующие условия:

$$0 < q < \frac{4}{N-2} \quad \text{при } N \geq 3, \quad 0 < q < +\infty \quad \text{при } N = 1, 2.$$

Это означает, что

$$\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega) \cap \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega).$$

Пусть теперь выполнено условие, которому удовлетворяет начальная функция $u_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$:

$$(\mathbb{F}(u_0), u_0)_0 > 0.$$

Осталось проверить монотонность производной Фреше оператора

$$\mathbb{A}_1(u) = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2} \nabla u)$$

в указанном в формулировке теоремы 4.1 смысле. Действительно, производная Фреше имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{A}'_{1,u}(h) &\equiv -(p_1 - 1) \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2} \nabla h) \quad \forall h \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \\ \langle \mathbb{A}'_{1,u}(u)u_1 - \mathbb{A}'_{1,u}(u)u_2, u_1 - u_2 \rangle_1 &= (p_1 - 1) \langle -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2} \nabla u_1) + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2} \nabla u_2), u_1 - u_2 \rangle_1 \\ &= (p_1 - 1) \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p_1-2} \nabla u_1 - |\nabla u|^{p_1-2} \nabla u_2)(\nabla u_1 - \nabla u_2) dx \geq 0 \quad \forall u, u_1, u_2 \in \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega). \end{aligned}$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 4.1.

Вывод модельных трехмерных уравнений в примерах 7.1–7.4 изложен в работе [1]. Данные уравнения описывают квазистационарные процессы в различных полупроводниках без учета пространственной дисперсии. Вывод уравнений из примеров 7.5, 7.6 автор планирует опубликовать в ближайшее время. Отметим только, что данные уравнения описывают квазистационарные процессы в полупроводниках при учете пространственной дисперсии.

В заключение автор выражает признательность А. Г. Свешникову за полезные замечания и интерес, проявленный к работе, а также И. А. Шишмареву за полезные замечания.

Список литературы

1. Корпусов М. О., Свешников А. Г. Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики // ЖВМ и МФ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1835–1869.
2. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18. № 1. С. 3–50.
3. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // ПММ. 1960. Т. 24. № 5. С. 58–73.
4. Габов С. А., Свешников А. Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
5. Габов С. А. Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998.
6. Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН. 1988. Т. 179. С. 126–164.
7. Дзекцер Е. С. Обобщение уравнений движения грунтовых вод со свободной поверхностью // ДАН СССР. 1972. Т. 202. № 5. С. 1031–1033.
8. Свиридюк Г. А. Об одной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. вузов. Математика. 1988. № 1. С. 74–79.
9. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1967.
10. Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г. О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // ЖВМ и МФ. 1999. Т. 39. № 6. С. 968–984.
11. Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г. О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии // ЖВМ и МФ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1237–1249.
12. Levine H. A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ // Arch. Rational. Mech. Analys. 1973. V. 51. P. 371–386.
13. Levine H. A., Park S. R., Serrin J. Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolution equations of formally parabolic type // J. Differential equations. 1998. V. 142. P. 212–229.
14. Кожанов А. И. Параболические уравнения с нелинейным нелокальным источником // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 5. С. 1062–1073.
15. Кожанов А. И. Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 1. С. 70–75.
16. Митидиери Э., Позожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 231. С. 1–365.
17. Лаптев Г. Г. Об отсутствии решений одного класса сингулярных полулинейных дифференциальных неравенств // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 223–235.
18. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
19. Скрыпник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
20. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

21. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр 2. Линейная алгебра. М.: Наука, 1986.
22. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
23. *Демидович В. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
24. *Похожяев С. И.* Об одном подходе к нелинейным уравнениям // ДАН СССР. 1979. Т. 247. №6. С. 1327–1331.
25. *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: ГИИТЛ, 1956.
26. *Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г.* Топологические методы в вариационных задачах // Труды Института математики и механики при 1 МГУ. 1930. С. 1–68.
27. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965.
28. *Дьяченко М. И., Ульянов П. Л.* Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.
29. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.

МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: korpusov@rsci.ru

Поступило в редакцию
18.12.2003