Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. ЩигOLEв, О некоторых расширениях вполне расщепляемых модулей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 4, 205–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im499>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:55:05

УДК 512.547.2

В. В. Щиголев

О некоторых расширениях вполне расщепляемых модулей

Получена формула для $\text{Ext}_{K\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\mu)$, где K – поле характеристики более 2, Σ_r – симметрическая группа степени r , D^λ и D^μ – простые $K\Sigma_r$ -модули, D^λ – вполне расщепляемый модуль и λ не доминирует строго μ .

Библиография: 18 наименований.

§ 1. Введение

В настоящей работе фиксируем некоторое поле K положительной характеристики p . Через Σ_n обозначим симметрическую группу степени n и считаем, что Σ_m – подгруппа группы Σ_n при $m < n$. Разбиением натурального числа n назовем последовательность натуральных чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ такую, что $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$ и $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. Последнее обозначим формулой $\lambda \vdash n$. Если при этом λ не содержит p и более одинаковых вхождений, то разбиение λ называется p -регулярным. Далее для любого набора a и натурального числа i через a_i будем обозначать i -й элемент a , если i не превосходит длины a , и $a_i = 0$ в противном случае. Для двух наборов $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_m)$ через xy обозначим набор $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, а в случае, когда эти наборы имеют одинаковую длину и состоят из целых чисел, обозначим через $\alpha x + \beta y$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, их поэлементную линейную комбинацию. Выражение вида $(a_1, \dots, a_n)$, где a_i – либо набор, либо выражение x^m , будем понимать следующим образом. Положим $b_i = a_i$, если a_i – набор, и положим b_i равным набору длины m , все вхождения которого равны x , если a_i – выражение x^m . Тогда считаем, что $(a_1, \dots, a_n) = b_1 \dots b_n$. Например, если $a = (x, y)$ и $b = (z)$, то $(a, 1^3, b) = (x, y, 1, 1, 1, z)$.

Пусть λ и μ – наборы целых чисел. Если для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \geq \sum_{i=1}^m \mu_i,$$

то считается, что λ доминирует μ . Это обозначается $\lambda \geq \mu$. Если $\lambda \neq \mu$, то считается, что λ строго доминирует μ , и используется обозначение $\lambda \triangleright \mu$. Полученное отношение $\geq$ является отношением частичного порядка на множестве разбиений произвольного числа.

Пусть M , A и B – произвольные $K\Sigma_r$ -модули. Обозначим через $\text{rad } M$ пересечение всех максимальных $K\Sigma_r$ -подмодулей модуля M (определение $\text{Ext}_{K\Sigma_r}^1(A, B)$ см., например, в [2, предложение 3 из § 5.5]; там опущен верхний индекс).

Каждому разбиению λ числа n соответствует $K\Sigma_n$ -модуль S^λ , который называется *модулем Шпекта* (см., например, [1, определение 4.3]). Положим

$D^\lambda = S^\lambda / \text{rad } S^\lambda$. Отображение $\lambda \mapsto D^\lambda$ задает взаимно однозначное соответствие между p -регулярными разбиениями числа n и простыми $K\Sigma_n$ -модулями. Для любого разбиения λ через $h(\lambda)$ обозначим длину набора λ и назовем это число *высотой* разбиения λ . Также положим $\chi(\lambda) = \lambda_1 - \lambda_{h(\lambda)} + h(\lambda)$.

С произвольным разбиением μ числа n можно связать подгруппу Юнга Σ_μ группы Σ_n следующим способом. Рассмотрим произвольное разбиение $\{1, \dots, n\} = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_{h(\mu)}$ такое, что $|A_i| = \mu_i$. Тогда положим

$$\Sigma_\mu = \{\sigma \in \Sigma_n : \sigma A_i = A_i, i = 1, \dots, h(\mu)\}.$$

Такое определение зависит от выбора множеств A_i . Однако все подгруппы, получающиеся при различных допустимых A_i , сопряжены. Поэтому в следующем определении не важно, какое именно разбиение рассматривается.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [16, п. 0.1]. Неприводимый $K\Sigma_n$ -модуль D^λ называется *вполне расщепляемым* тогда и только тогда, когда ограничение $D^\lambda \downarrow_{\Sigma_\mu}$ на любую подгруппу Юнга $\Sigma_\mu \subset \Sigma_n$ полупросто.

ТЕОРЕМА [16, п. 2.1]. *Модуль D^λ вполне расщепляем тогда и только тогда, когда $\chi(\lambda) \leq p$.*

В работе [8] была получена формула для $\text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu)$ в случае, когда $\text{char } K > 2$ и оба модуля D^λ и D^μ вполне расщепляемы. В силу симметрии достаточно ограничиться рассмотрением случая $\lambda \not\preceq \mu$. С другой стороны, в работе [3] было доказано, что $\text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu) = 0$, если D^λ – вполне расщепляемый модуль, $h(\mu) \leq h = h(\lambda)$ и $\lambda_h - \mu_h \geq (h-1)(p-h) + 2$ (здесь полагаем $\mu_h = 0$, если $h(\mu) < h$).

Основная цель настоящей работы – получить формулу для $\text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu)$ в случае, когда $\text{char } K > 2$, D^λ – вполне расщепляемый модуль и $\lambda \not\preceq \mu$ (см. теорему 6), и, таким образом, усилить два упомянутых выше результата. Заметим, что в работе [13] вычислены пространства $\text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu)$ в случае, когда $\text{char } K > 2$ и $h(\lambda), h(\mu) \leq 2$. Проблеме расширений неприводимых $K\Sigma_r$ -модулей посвящена также работа [12], где изучается связь таких расширений с расширениями модулей над алгеброй Шура и общей линейной группой.

Для разбиения λ числа n определим его *диаграмму Юнга* формулой $[\lambda] = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i \leq h(\lambda), j \leq \lambda_i\}$. Элементы из $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ будем называть *клетками*. Положим $r(i, j) = i$ и $c(i, j) = j$. Предполагается, что клетка A расположена *выше* клетки B , если $r(A) < r(B)$, и *левее* клетки B , если $c(A) < c(B)$. Клетка C считается расположенной *между* клетками A и B , если $r(A) < r(C) < r(B)$ или $r(B) < r(C) < r(A)$. Класс вычетов $(j-i) + p\mathbb{Z}$ называется *вычетом* клетки (i, j) и обозначается $\text{res}(i, j)$. Если диаграммы разбиений λ и μ содержат одинаковое количество клеток каждого вычета, то будем записывать $\lambda \sim \mu$. Если $A = (i, \lambda_i)$, где $i < h(\lambda)$ и $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ или $i = h(\lambda)$, то клетка A называется λ -*удаляемой* и через λ_A обозначается разбиение, диаграмма которого равна $[\lambda] \setminus \{A\}$ (конечно, если $[\lambda]$ содержит более одной клетки). Если $B = (i, \lambda_i + 1)$ и $i \leq h(\lambda)$ или $B = (h(\lambda) + 1, 1)$, то клетка B называется λ -*добавляемой* и через λ^B обозначается разбиение, диаграмма которого равна $[\lambda] \cup \{B\}$. Обозначим также через λ^t разбиение, диаграмма которого получена транспонированием диаграммы $[\lambda]$.

В работе [4] были введены следующие определения (хотя некоторые из них были сформулированы ранее). Клетка A называется λ -нормальной, если эта клетка λ -удаляемая и для любой λ -добавляемой клетки B вычета $\text{res } A$, расположенной выше A , существует λ -удаляемая клетка $C(B)$ того же вычета между A и B , и при этом из $B \neq B'$ следует $C(B) \neq C(B')$. Самая нижняя из λ -нормальных клеток данного вычета называется λ -хорошей. Клетка A называется λ -конормальной, если эта клетка λ -добавляемая и для любой λ -удаляемой клетки B вычета $\text{res } A$, расположенной ниже A , существует λ -добавляемая клетка $C'(B)$ того же вычета между A и B , и при этом из $B \neq B'$ следует $C'(B) \neq C'(B')$. Самая верхняя из λ -конормальных клеток данного вычета называется λ -кохорошей.

Имеют место следующие утверждения, доказанные в [13, теорема 2.10], [14], [15] и [4].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $p > 2$ и λ, μ – разбиения числа n , имеющие не более $p-1$ (ненулевой) части. Если $\lambda \not\vdash \mu$, то $\text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu) \cong \text{Hom}_{\Sigma_n}(\text{rad } S^\lambda, D^\mu)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть имеются p -регулярные разбиения $\lambda \vdash r$ и $\mu \vdash r+1$. Тогда:

- 1) $\text{Hom}_{\Sigma_r}(S^\lambda, D^\mu \downarrow_{\Sigma_r})$ одномерно, если $\lambda = \mu_A$ для некоторой μ -нормальной клетки A , иначе равно нулю;
- 2) $\text{Hom}_{\Sigma_r}(D^\lambda, D^\mu \downarrow_{\Sigma_r})$ одномерно, если $\lambda = \mu_A$ для некоторой μ -хорошей клетки A , иначе равно нулю;
- 3) $\text{Hom}_{\Sigma_{r+1}}(S^\mu, D^\lambda \uparrow^{\Sigma_{r+1}})$ одномерно, если $\mu = \lambda^B$ для некоторой λ -конормальной клетки B , иначе равно нулю;
- 4) $\text{Hom}_{\Sigma_{r+1}}(D^\mu, D^\lambda \uparrow^{\Sigma_{r+1}})$ одномерно, если $\mu = \lambda^B$ для некоторой λ -кохорошей клетки B , иначе равно нулю.

В § 2, 3 мы установим справедливость некоторых неравенств, включающих размерности пространств $\text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\mu)$ и $\text{Ext}_{\Sigma_r}^e(D^\lambda, D^\mu)$, где λ и μ – разбиения высоты не более p . В § 2 проведем подготовку того, чтобы сделать возможным рассмотрение случая разбиений высоты p . Хотя в этом случае эквивалентность утверждения 1 не всегда верна, мы вводим “функтор” Ext^e , в силу теоремы 1 связанный с пространством $\text{Hom}_{\Sigma_r}(\text{rad } S^\lambda, D^\mu)$. Изучение этого пространства важно для изучения поднятия радикала модулей Шпехта S^λ , описанного в [18], которое можно рассматривать как операцию приписывания столбца высоты не менее $h(\lambda)$. Читатель, желающий ограничиться рассмотрением случая разбиений высоты менее p , может пропустить § 2 и заменить везде в тексте введенный в этом параграфе функтор Ext^e на Ext^1 . Следует заметить, что если D^λ – вполне расщепляемый модуль, то $h(\lambda) < p$, так как $\chi(\lambda) \leq p$ и λ – p -регулярное разбиение. Наконец, именно при помощи неравенств из § 3 в § 4 получен основной результат работы.

Автор благодарит А. С. Клещева за полезную консультацию.

§ 2. Продолжаемые модули

В этом параграфе будем использовать теорию функтора Шура, описанную в [7, § 6.1]. Обозначим через $I(n, r)$ множество последовательностей длины r , состоящих из натуральных чисел от 1 до n . Для любых $i \in I(n, r)$, $\pi \in \Sigma_n$ и $\sigma \in \Sigma_r$ положим $\pi i = (\pi(i_1), \dots, \pi(i_r))$ и $i\sigma = (i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)})$. Заметим, что тогда $(\pi i)\sigma = \pi(i\sigma)$.

Через $S(n, r)$ обозначим алгебру Шура с K -базисом $\xi_{i,j}$, где $i, j \in I(n, r)$. (Определения см. в [7, § 2.3]; мы опустили индекс в обозначении алгебры Шура.) Для любого натурального числа r фиксируем набор $u(r) = (1, \dots, r)$ и идемпотент $e_r = \xi_{u(r), u(r)}$. Для $m \geq r$ определим вложение K -алгебр $K\Sigma_r \rightarrow S(m, r)$ по формуле $\sigma \mapsto \xi_{u(r)\sigma, u(r)}$. Это вложение задает изоморфизм алгебр $K\Sigma_r$ и $e_r S(m, r) e_r$. Поэтому мы будем рассматривать любой $e_r S(m, r) e_r$ -модуль как $K\Sigma_r$ -модуль, и наоборот.

Обозначим через $\Lambda(n, r)$ множество таких последовательностей $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, что $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – неотрицательные целые числа и $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = r$. Подмножество множества $\Lambda(n, r)$, состоящее из последовательностей λ таких, что $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, обозначим через $\Lambda^+(n, r)$. Набор $\alpha \in \Lambda^+(n, r)$ называется p -регулярным по столбцам, если $\alpha_i - \alpha_{i+1} < p$ для любого $i = 1, \dots, n-1$ и $\alpha_n < p$.

Через sgn_r обозначим знакопеременное представление группы Σ_r . С этим представлением связан еще один способ нумеровать представления: положим $D_{\lambda^t} \cong D^\lambda \otimes \text{sgn}_r$, где λ – любое p -регулярное разбиение. Для натурального числа m и разбиения λ высоты не более m положим $(\lambda)_m = (\lambda, 0^{m-h(\lambda)})$. Через $\Delta(\lambda)$ и $L(\lambda)$, где $\lambda \in \Lambda^+(n, r)$, мы обозначим соответственно модуль Вейля и неприводимый модуль со старшим весом λ . В работе [7] эти модули обозначались через $V_{\lambda, K}$ и $F_{\lambda, K}$ (определения см. в [7, § 5.2 и теорема 3.5a]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть M – некоторый $K\Sigma_r$ -модуль и λ – разбиение числа r . Модуль M назовем λ -продолжаемым, если существует такой $S(r, r)$ -модуль N , что выполнены условия:

- 1) если μ – вес модуля N , то $\mu \leq (\lambda^t)_r$;
- 2) $M \otimes \text{sgn}_r \cong e_r N$.

В этом случае модуль N называется λ -продолжением модуля M .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из этого определения непосредственно следует, что если $\lambda' \leq \lambda$ и M – λ -продолжаемый модуль, то M – λ' -продолжаемый модуль.

ЛЕММА 1. Класс λ -продолжаемых модулей замкнут относительно перехода к подмодулям, фактормодулям, двойственным модулям и образования конечных прямых сумм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – некоторый λ -продолжаемый $K\Sigma_r$ -модуль, L – его подмодуль и M^* – модуль, двойственный модулю M . Пусть N – λ -продолжение модуля M и $f: M \otimes \text{sgn}_r \rightarrow e_r N$ – изоморфизм. Положим $T = S(r, r)f(L \otimes \text{sgn}_r)$. При этом $e_r T = f(L \otimes \text{sgn}_r)$. Определим K -линейные отображения

$$f': L \otimes \text{sgn}_r \rightarrow e_r T \quad \text{и} \quad f'': (M/L) \otimes \text{sgn}_r \rightarrow e_r(N/T)$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x), & x &\in L \otimes \text{sgn}_r, \\ f''((y+L) \otimes v) &= f(y \otimes v) + T, & y &\in M, \quad v \in \text{sgn}_r. \end{aligned}$$

Последнее отображение задано корректно, так как если $y \in L$, то $f(y \otimes v) \in T$.

Далее, $\text{Ker } f' = 0$ и

$$\dim e_r T = \dim f(L \otimes \text{sgn}_r) = \dim L \otimes \text{sgn}_r,$$

поэтому f' изоморфно отображает $L \otimes \operatorname{sgn}_r$ на $e_r T$. Предположим, что

$$f''((y + L) \otimes v) = 0, \text{ где } y \in M \text{ и } v \in \operatorname{sgn}_r \setminus \{0\}.$$

Тогда

$$f(y \otimes v) \in e_r T = f(L \otimes \operatorname{sgn}_r).$$

Отсюда $y \otimes v \in L \otimes \operatorname{sgn}_r$ и $y \in L$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \dim e_r(N/T) &= \dim e_r N - \dim e_r T \\ &= \dim f(M \otimes \operatorname{sgn}_r) - \dim f(L \otimes \operatorname{sgn}_r) = \dim(M/L) \otimes \operatorname{sgn}_r, \end{aligned}$$

поэтому f'' изоморфно отображает $(M/L) \otimes \operatorname{sgn}_r$ на $e_r(N/T)$. Условия 1) и 2) определения 1 теперь проверяются автоматически.

Для доказательства того, что M^* – λ -продолжаемый модуль, достаточно заметить, что $e_r N' \cong M^*$, где N' – модуль, контравариантно дуальный модулю N . Выполнение условия 1) следует из того, что характеры модулей N и N' совпадают.

Пусть теперь M' и M'' – λ -продолжаемые $K\Sigma_r$ -модули, и пусть N' и N'' – λ -продолжения модулей M' и M'' соответственно. Легко видеть, что тогда $N' \oplus N''$ – λ -продолжение модуля $M' \oplus M''$.

Установим, какие модули λ -продолжаемы. Во-первых, очевидно, что любой неприводимый модуль D^λ является λ -продолжаемым. Во-вторых, любой модуль M^λ (см. [1, § 4.1]) также λ -продолжаем. В качестве его λ -продолжения можно, например, взять модуль $E^{\otimes r} \{C(T)\}$, где $E \cong K^r$ и T – некоторая основная λ^t -таблица (см. [7, § 4.2, 5.3]).

Пусть имеется некоторое разбиение $\lambda \vdash r$, $A_1, \dots, A_k$ – все λ -удаляемые клетки, $B_1, \dots, B_l$ – все λ -добавляемые клетки, перечисленные сверху вниз. Положим $\lambda^- = \lambda_{A_1}$ и $\lambda^+ = \lambda^{B_{l-1}}$.

ЛЕММА 2. Пусть λ – разбиение числа $r > 1$. Тогда $S^\lambda \downarrow_{\Sigma_{r-1}}$ – λ^- -продолжаемый модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [1, § 9.3] фактически доказано, что $S^\mu \cap \bigcap_{i=1}^m \operatorname{Ker} \theta_i = 0$. Возвращаясь к введенным обозначениям, мы получаем, что существует вложение $S^\lambda \downarrow_{\Sigma_{r-1}}$ в $\bigoplus_{s=1}^k M^{\lambda_{A_s}}$, где $A_1, \dots, A_k$ – все λ -удаляемые клетки, перечисленные сверху вниз. Теперь лемма следует из леммы 1, замечания 1 и того, что $\lambda^- = \lambda_{A_1} \triangleleft \lambda_{A_s}$ для $s = 2, \dots, k$.

ЛЕММА 3. Пусть λ – разбиение числа r . Тогда существует подмодуль U модуля $S^\lambda \uparrow^{\Sigma_{r+1}}$, изоморфный $S^{(\lambda, 1)}$, такой, что $S^\lambda \uparrow^{\Sigma_{r+1}} / U$ – λ^+ -продолжаемый модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [1, § 17.13] следует, что модуль $S^\lambda \uparrow^{\Sigma_{r+1}}$ имеет подмодуль U , изоморфный $S^{(\lambda, 1)}$, такой, что $S^\lambda \uparrow^{\Sigma_{r+1}} / U$ вложим в M^{λ^+} . Далее применяем лемму 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. $K\Sigma_r$ -модуль M называется *продолжаемым*, если он λ -продолжаем для некоторого разбиения $\lambda \vdash r$ высоты не более p . Под продолжением модуля M будем понимать любое его λ -продолжение, где λ – разбиение r высоты не более p .

Очевидно, что M продолжаем тогда и только тогда, когда он $((q+1)^k, q^{p-k})$ -продолжаем, где $r = pq + k$, $q, k \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq k \leq p-1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть λ, μ – p -регулярные разбиения числа r . Если существует продолжаемый $K\Sigma_r$ -модуль M , для которого $\text{soc } M \cong D^\mu$ и $M/\text{soc } M \cong \bigoplus mD^\lambda$, то обозначим через n максимальное из таких m . В противном случае определим $n = 0$. Положим $\text{Ext}_{\Sigma_r}^e(D^\lambda, D^\mu) = K^n$.

Ясно, что $\dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^e(D^\lambda, D^\mu) \leq \dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\mu)$ и что $\text{Ext}_{\Sigma_r}^e(D^\lambda, D^\mu) = 0$, если $h(\lambda) > p$ или $h(\mu) > p$.

ЛЕММА 4. Если λ и μ – p -регулярные разбиения числа r , то $\text{Ext}_{\Sigma_r}^e(D^\lambda, D^\mu) \cong \text{Ext}_{\Sigma_r}^e(D^\mu, D^\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно считать, что $h(\lambda), h(\mu) \leq p$. Положим $n = \dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^e(D^\lambda, D^\mu)$, и пусть M – продолжаемый $K\Sigma_r$ -модуль, для которого $\text{soc } M \cong D^\mu$ и $M/\text{soc } M \cong \bigoplus nD^\lambda$. Пусть I – индуктивная оболочка модуля D^λ и $\varphi_i: \text{rad } M^* \rightarrow I$, $i = 1, \dots, n$, – линейно независимые гомоморфизмы, где M^* – модуль, двойственный модулю M . Обозначим через $\bar{\varphi}_i$ продолжение φ_i до гомоморфизма из M^* в I . Зададим гомоморфизмы $\psi_i: M^*/\text{rad } M^* \rightarrow I/D^\lambda$ формулой

$$\psi_i(x + \text{rad } M^*) = \bar{\varphi}_i(x) + D^\lambda.$$

Легко видеть, что $\psi_1, \dots, \psi_n$ линейно независимы. Теперь если положить $N = \sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_i(M^*)$, то по лемме 1 модуль N продолжаемый, $\text{soc } N \cong D^\lambda$ и $N/\text{soc } N \cong \bigoplus nD^\mu$. Следовательно, $n \leq \dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^e(D^\mu, D^\lambda)$. Обратное неравенство доказывается аналогично.

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha, \beta \in \Lambda^+(m, r)$, $m \geq r$ и $k < m$ – некоторое число такое, что $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \not\leq (\beta_1, \dots, \beta_k)$, $\alpha_{k+1} > 0$. Предположим, что существует некоторый $\nu \in \Lambda(m, r)$ такой, что:

- 1) ν – вес модуля $L(\beta)$;
- 2) $\nu - \gamma$ не вес модуля $L(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m, 0^k)$ для любого $\gamma \in \Lambda(m, \alpha_1 + \dots + \alpha_k)$.

Тогда $\text{Ext}_{S(m, r)}^1(L(\alpha), L(\beta)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N – произвольный $S(m, r)$ -модуль, для которого существует подмодуль $N_0 \subset N$ такой, что $N_0 \cong L(\beta)$ и $N/N_0 \cong L(\alpha)$. Пусть v – элемент из N^α и $U = S(m, r)v$. Достаточно доказать, что $U \cap N^\nu = 0$, так как в этом случае N_0 не может быть подмодулем модуля U . Пусть $j \in I(m, r)$ – набор веса ν . Рассмотрим представление $j = j^{(1)} \dots j^{(m)}$, где $j^{(s)}$ – набор длины α_s . Положим также $i = (1^{\alpha_1}, \dots, m^{\alpha_m})$. Имеем

$$|j^{(k+1)} \dots j^{(m)}| = r - (\alpha_1 + \dots + \alpha_k) \leq r - k \leq m - k.$$

Поэтому существует некоторая перестановка $\sigma \in \Sigma_m$ такая, что любая последовательность $\sigma j^{(s)}$, $s = k+1, \dots, m$, не содержит чисел $1, \dots, k$. Положим

$$\tilde{j}^{(s)} = \sigma j^{(s)}, \quad l = (1^{\alpha_1}, \dots, k^{\alpha_k}) \tilde{j}^{(k+1)} \dots \tilde{j}^{(m)}.$$

Имеет место представление $\xi_{j,i} = \xi_{j,l} \xi_{l,i}$ (см., например, [7, §2.3b]). Пусть $\gamma \in \Lambda(m, \alpha_1 + \dots + \alpha_k)$ – вес последовательности $j^{(1)} \dots j^{(k)}$. Тогда $\nu - \gamma$ – вес последовательности $j^{(k+1)} \dots j^{(m)}$, а $(\nu - \gamma)\sigma^{-1}$ – вес последовательности $\tilde{j}^{(k+1)} \dots \tilde{j}^{(m)}$. Запишем этот вес в виде $(\nu - \gamma)\sigma^{-1} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$. При этом $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_k = 0$.

Используя стандартный метод (см., например, [10, §2]) удаления первых k строк, получим

$$\begin{aligned} L(\alpha)^{(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_m)} &\cong L(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m)^{(\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_m)} \\ &\cong L(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m, 0^k)^{\nu - \gamma} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_m)$ – вес последовательности l , то получаем $\xi_{l,i} v \in N_0$. Однако если $\xi_{l,i} v \neq 0$, то $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_m)$ – вес элемента $\xi_{l,i} v$. Так как $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_m) \not\leq \beta$ и β – старший вес модуля $N_0 \cong L(\beta)$, то в этом случае получаем противоречие. Отсюда $\xi_{l,i} v = 0$ и $U \cap N^\nu = 0$ в силу произвольности выбора набора $j \in I(m, r)$ веса ν .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В лемме 5 достаточно потребовать $r \leq m - k + \alpha_1 + \dots + \alpha_k$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\beta \in \Lambda^+(m, r)$ – p -регулярный по столбцам вес, $m \geq r$, r делится на p и $(p^{(r/p)-1}) \not\leq (\beta_1, \dots, \beta_{(r/p)-1})$. Тогда

$$\text{Ext}_{S(m,r)}^1(L(p^{r/p}, 0^{m-(r/p)}), L(\beta)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить предыдущую лемму для случая $\alpha = (p^{r/p}, 0^{m-(r/p)})$, $k = (r/p) - 1$ и $\nu = (1^r, 0^{m-r})$.

ЛЕММА 6. Пусть $\beta \in \Lambda^+(m, p)$, $k \geq 1$, $m \geq p$ и $\beta_1 \leq p - 2$. Тогда $\text{Ext}_{S(k-1+m, pk)}^1(L(p^k, 0^{m-1}), L(p^{k-1}, \beta)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим тот же прием, что и в лемме 5. Пусть N – произвольный $S(k-1+m, pk)$ -модуль, для которого существует подмодуль $N_0 \subset N$ такой, что $N_0 \cong L(p^{k-1}, \beta)$ и $N/N_0 \cong L(p^k, 0^{m-1})$. Положим $\nu = (p^{k-1}, 1^p, 0^{m-p})$. Используя стандартный метод удаления первых $k-1$ строк и то, что β – p -регулярный по столбцам вес, получаем

$$L(p^{k-1}, \beta)^\nu \cong L(\beta)^{(1^p, 0^{m-p})} \neq 0.$$

Пусть $v \in N(p^k, 0^{m-1})$ и $U = S(k-1+m, pk)v$. Достаточно доказать, что $U \cap N^\nu = 0$. Пусть $j \in I(k-1+m, pk)$ – набор веса ν и $j = j^{(1)} \dots j^{(k)}$, где $j^{(1)}, \dots, j^{(k)}$ – наборы длины p . Положим также $i = (1^p, \dots, k^p)$. Поскольку j имеет вес ν , то существует некоторое $t = 1, \dots, k$ такое, что $j^{(t)}$ содержит по крайней мере два различных числа. Положим

$$l = (1^p, \dots, (t-1)^p, t^{p-1}, k+1, (t+1)^p, \dots, k^p).$$

Так как $k-1+m \geq k+1$, то $l \in I(k-1+m, pk)$.

Имеем $\xi_{j,i} = \frac{1}{x} \xi_{j,t} \xi_{l,i}$, где x – количество вхождений числа $j_p^{(t)}$ в набор $j^{(t)}$. В силу выбора t мы имеем $1 \leq x \leq p-1$, и деление корректно. Если $\xi_{l,i} v \neq 0$, то $(p^{t-1}, p-1, p^{k-t}, 1, 0^{m-2})$ – вес элемента $\xi_{l,i} v$. Имеем

$$\begin{aligned} L(p^k, 0^{m-1})^{(p^{t-1}, p-1, p^{k-t}, 1, 0^{m-2})} &\cong L(p^k, 0^{m-1})^{(p^{k-1}, p-1, 1, 0^{m-2})} \\ &\cong L(p, 0^{m-1})^{(p-1, 1, 0^{m-2})} = 0, \\ L(p^{k-1}, \beta)^{(p^{t-1}, p-1, p^{k-t}, 1, 0^{m-2})} &\cong L(p^{k-1}, \beta)^{(p^{k-1}, p-1, 1, 0^{m-2})} \\ &\cong L(\beta)^{(p-1, 1, 0^{m-2})} = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из $\beta_1 \leq p-2$. Теперь, как и в лемме 5, получаем сначала $\xi_{l,i} v \in N_0$, а затем $\xi_{l,i} v = 0$. Приходим к противоречию. В силу произвольности выбора набора $j \in I(k-1+m, pk)$ веса ν получаем $U \cap N^\nu = 0$.

Следующее утверждение вытекает из [11, II.2.14] и [5, п. 2.1f].

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $\alpha, \beta \in \Lambda^+(m, r)$ и $\beta \not\preceq \alpha$. Тогда

$$\text{Ext}_{S(m,r)}^1(L(\alpha), L(\beta)) \cong \text{Hom}_{S(m,r)}(\text{rad } \Delta(\alpha), L(\beta)).$$

Докажем следующий аналог утверждения 1.

ТЕОРЕМА 1. Пусть λ и μ – p -регулярные разбиения числа r такие, что $h(\lambda) \leq p$, $\lambda \not\preceq \mu$ и в случае, когда r делится на p , хотя бы одно из разбиений λ или μ отлично от $((r/p) + 1, (r/p)^{p-2}, (r/p) - 1)$. Тогда

$$\text{Ext}_{\Sigma_r}^e(D^\lambda, D^\mu) \cong \text{Hom}_{\Sigma_r}(\text{rad } S^\lambda, D^\mu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $h(\mu) \leq p$. Из того, что модуль S^λ продолжаемый, следует

$$\dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(\text{rad } S^\lambda, D^\mu) \leq \dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^e(D^\mu, D^\lambda).$$

Докажем обратное неравенство. Положим для краткости $\alpha = (\lambda^t)_r$, $\beta = (\mu^t)_r$ и $n = \dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^e(D^\mu, D^\lambda)$. Пусть M – некоторый продолжаемый $K\Sigma_r$ -модуль такой, что $\text{soc } M \cong D^\lambda$ и $M/\text{soc } M \cong \bigoplus n D^\mu$, и N – продолжение модуля M . Единственным не p -регулярным по столбцам набором $\nu \in \Lambda^+(r, r)$ таким, что $\nu_1 \leq p$, может быть набор $(p^{r/p}, 0^{r-(r/p)})$ и только в том случае, когда r делится на p . Поэтому если r не делится на p , то

$$\text{soc } N \cong L(\alpha), \quad N/\text{soc } N \cong \bigoplus n L(\beta). \quad (1)$$

Рассмотрим теперь случай, когда r делится на p . Тогда модуль N может содержать также композиционные факторы, изоморфные $L(p^{r/p}, 0^{r-(r/p)})$.

Предположим сначала, что $(\beta_1, \dots, \beta_{(r/p)-1}) \not\preceq (p^{(r/p)-1})$. Тогда в силу следствия 1 получаем $\text{Ext}_{S(r,r)}^1(L(p^{r/p}, 0^{r-(r/p)}), L(\beta)) = 0$.

Теперь предположим, что $(\beta_1, \dots, \beta_{(r/p)-1}) \supseteq (p^{(r/p)-1})$. Поскольку $\beta_1 \leq p$, то $\beta_1 = \dots = \beta_{(r/p)-1} = p$. Если $\beta_{r/p} \leq p-2$, то по лемме 6 получаем

$$\text{Ext}_{S(r,r)}^1(L(p^{r/p}, 0^{r-(r/p)}), L(\beta)) = 0.$$

С другой стороны, случай $\beta_{r/p} = p-1$ невозможен, так как тогда $\beta = (p^{r/p-1}, p-1, 1, 0^{r-(r/p)-1}) \supseteq \alpha$, что противоречит условию теоремы.

Таким образом, доказано, что в любом случае существуют подмодули $U \subset V \subset N$ такие, что $\text{soc}(V/U) \cong L(\alpha)$ и $(V/U)/\text{soc}(V/U) \cong \bigoplus nL(\beta)$. Теперь можно заменить N на V/U и считать, что формула (1) выполнена.

В силу утверждения 3 получаем $\dim \text{Hom}_{S(r,r)}(\text{rad } \Delta(\alpha), L(\beta)) \geq n$. Умножая модули из этого неравенства на e_r , а затем тензорно на sgn_r , получаем

$$\dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(\text{rad } S^\lambda, D^\mu) \geq n.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $p > 2$ и λ, μ – разбиения числа r высоты менее p , то

$$\text{Ext}_{\Sigma_r}^e(D^\lambda, D^\mu) \cong \text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\mu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\lambda) = 0$ (например, в силу утверждения 1), то $\lambda \neq \mu$. Следовательно, в силу леммы 4 без ограничения общности $\lambda \not\leq \mu$. Теперь требуемое следует из утверждения 1 и теоремы 1.

§3. Неравенства

Докажем следующую лемму общей теории модулей. Фиксируем некоторую K -алгебру R и предположим, что все модули в следующей лемме – K -конечномерные R -модули.

ЛЕММА 7. Пусть P – некоторый модуль, Q – его подмодуль, $0 = Q_0 \subset \dots \subset Q_k = Q$ – композиционный ряд и $P/Q \cong \bigoplus nL$, где L – неприводимый модуль. Тогда существуют такие модули P_i и неотрицательные целые числа n_i , где $i = 0, \dots, k$, $n_0 + \dots + n_k = n$, что имеют место следующие включения:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & = & Q_0 & \subset & Q_1 & \subset & \dots & \subset & Q_{i-1} & \subset & Q_i & \subset & \dots & \subset & Q_{k-1} & \subset & Q_k \\ & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ & & P_0 & \subset & P_1 & \subset & \dots & \subset & P_{i-1} & \subset & P_i & \subset & \dots & \subset & P_{k-1} & \subset & P_k = P \end{array}$$

и при этом $P_{i-1} \cap Q_i = Q_{i-1}$, $\text{soc}(P_i/P_{i-1}) \cong Q_i/Q_{i-1}$, $(P_i/P_{i-1})/\text{soc}(P_i/P_{i-1}) \cong \bigoplus n_i L$ для $i = 1, \dots, k$ и $P_0 \cong \bigoplus n_0 L$.

Доказательство проведем индукцией по k . Случай $k = 0$ очевиден. Предположим, что $k \geq 1$ и утверждение леммы верно для подмодулей длины менее k . Положим $P' = P/Q_{k-1}$ и $Q' = Q/Q_{k-1}$. Тогда Q' неприводим и $P'/Q' \cong \bigoplus nL$. Отсюда получаем, что $Q' \subset \text{soc } P' \cong Q' \oplus (\bigoplus mL)$ для некоторого $m \leq n$. Поэтому имеет место представление $\text{soc } P' = Q' \oplus Q''$, где $Q'' \cong \bigoplus mL$.

Докажем, что $\text{soc}(P'/Q'') = Q' + Q''/Q''$. Предположим противное. Тогда существует такой модуль T , что $Q'' \subset T \subset P'$ и $T/Q'' \cong L$ и $T \neq Q' + Q''$. Рассмотрим следующие два случая:

- 1) $T + Q' = Q'' + Q'$, $T \cap Q'/Q'' \cap Q' \cong L$;
- 2) $T + Q'/Q'' + Q' \cong L$, $T \cap Q' = Q'' \cap Q'$.

Первый случай невозможен, так как тогда $Q'' \subset T \subset Q' + Q''$ и, следовательно, $T = Q' + Q''$. Поэтому реализуется второй случай. Тогда $T \cong T + Q'/Q' \subset P'/Q'$. Поскольку последний модуль полупрост, то модули T и $T + Q'$ также полупросты. По определению покола

$$Q' \oplus \left(\bigoplus (m+1)L \right) \cong T + Q' \subset \text{soc } P' \cong Q' \oplus \left(\bigoplus mL \right).$$

Противоречие.

Положим теперь, что $n_k = n - m$ и модуль P_{k-1} равен полному прообразу модуля Q'' при естественной проекции $P \rightarrow P/Q_{k-1}$. Теперь достаточно применить индуктивное предположение для модулей Q_{k-1} , P_{k-1} и композиционного ряда $0 = Q_0 \subset \dots \subset Q_{k-1}$.

Введем следующие обозначения. Пусть $\mu \vdash r$ и $\lambda \vdash r+1$ – некоторые p -регулярные разбиения. Положим

$$\varepsilon(\lambda, \mu) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda = \mu^B \text{ для некоторой } \mu\text{-конормальной клетки } B, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\gamma(\mu, \lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu = \lambda_A \text{ для некоторой } \lambda\text{-нормальной клетки } A, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть λ и μ – p -регулярные разбиения числа $r > 1$, $\lambda \not\leq \mu$ и A – μ -хорошая клетка. Тогда

$$\dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^e(D^\lambda, D^\mu) \leq \sum_{\alpha \vdash r-1} [D^\lambda \downarrow_{\Sigma_{r-1}} : D^\alpha] \dim \text{Ext}_{\Sigma_{r-1}}^e(D^\alpha, D^{\mu^A}) + \varepsilon(\lambda, \mu_A).$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $h(\lambda) \leq p$. Положим для краткости $n = \dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^e(D^\lambda, D^\mu)$. Тогда по теореме 1 получаем

$$n = \dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(\text{rad } S^\lambda, D^\mu).$$

Пусть $V \subset \text{rad } S^\lambda$ – такой $K\Sigma_r$ -подмодуль, что $\text{rad } S^\lambda/V \cong \bigoplus nD^\mu$. Пусть M – $K\Sigma_r$ -модуль, двойственный модулю S^λ/V . По леммам 1 и 2 модуль $(S^\lambda/V) \downarrow_{\Sigma_{r-1}}$ продолжаем. Так как модули $M \downarrow_{\Sigma_{r-1}}$ и $(S^\lambda/V) \downarrow_{\Sigma_{r-1}}$ тоже двойственны, то по лемме 1 модуль $M \downarrow_{\Sigma_{r-1}}$ продолжаем.

Пусть $N \subset M$ – такой $K\Sigma_r$ -модуль, что $N \cong D^\lambda$ и $M/N \cong \bigoplus nD^\mu$. Поскольку $\text{Hom}_{\Sigma_{r-1}}(D^{\mu^A}, D^\mu \downarrow_{\Sigma_{r-1}}) \neq 0$ в силу п. 2) утверждения 2, то существует $K\Sigma_{r-1}$ -модуль N' такой, что $N \subset N' \subset M$ и $N'/N \cong \bigoplus nD^{\mu^A}$. Пусть $0 = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_k = N$ – некоторый Σ_{r-1} -композиционный ряд.

Применим теперь лемму 7 к случаю $R = K\Sigma_{r-1}$, $P = N'$, $Q = N$ и $Q_i = N_i$. В силу определения 3 получаем оценки $n_i \leq \dim \text{Ext}_{\Sigma_{r-1}}^e(N_i/N_{i-1}, D^{\mu^A})$, $i = 1, \dots, k$. Наконец, с учетом двойственности Фробениуса в силу п. 3) утверждения 2 имеем

$$\begin{aligned} n_0 &\leq \dim \text{Hom}_{\Sigma_{r-1}}(D^{\mu^A}, M \downarrow_{\Sigma_{r-1}}) = \dim \text{Hom}_{\Sigma_{r-1}}((S^\lambda/V) \downarrow_{\Sigma_{r-1}}, D^{\mu^A}) \\ &= \dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(S^\lambda/V, D^{\mu^A} \uparrow^{\Sigma_r}) \leq \dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(S^\lambda, D^{\mu^A} \uparrow^{\Sigma_r}) = \varepsilon(\lambda, \mu_A). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $p > 2$, λ и μ – разбиения числа $r > 1$ высоты менее p , $\lambda \not\vdash \mu$ и A – μ -хорошая клетка. Тогда

$$\dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\mu) \leq \sum_{\alpha \vdash r-1} [D^\lambda \downarrow_{\Sigma_{r-1}} : D^\alpha] \dim \text{Ext}_{\Sigma_{r-1}}^1(D^\alpha, D^{\mu^A}) + \varepsilon(\lambda, \mu_A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждения 1 достаточно считать, что $\mu \neq \lambda$. Теперь требуемое неравенство следует из следствия 2 и теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть λ и μ – p -регулярные разбиения числа r , $\lambda \not\vdash \mu$ и B – μ -хорошая клетка. Тогда

$$\begin{aligned} \dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^e(D^\lambda, D^\mu) &\leq \sum_{\substack{\alpha \vdash r+1 \\ h(\alpha) \leq p}} [D^\lambda \uparrow^{\Sigma_{r+1}} : D^\alpha] \dim \text{Ext}_{\Sigma_{r+1}}^e(D^\alpha, D^{\mu^B}) \\ &\quad + \delta_{h(\lambda), p} [S^{(\lambda, 1)} : D^{\mu^B}] + \gamma(\lambda, \mu^B). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $h(\lambda) \leq p$. Положим для краткости $m = \dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^e(D^\lambda, D^\mu)$. Тогда по теореме 1 получаем

$$m = \dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(\text{rad } S^\lambda, D^\mu).$$

Пусть $V \subset \text{rad } S^\lambda$ – такой $K\Sigma_r$ -подмодуль, что $\text{rad } S^\lambda/V \cong \bigoplus mD^\mu$. Пусть M – $K\Sigma_r$ -модуль, двойственный модулю S^λ/V .

Выберем $K\Sigma_{r+1}$ -подмодуль T модуля $M \uparrow^{\Sigma_{r+1}}$ следующим образом. Если $h(\lambda) < p$, то положим $Q = M \uparrow^{\Sigma_{r+1}}$. Предположим, что $h(\lambda) = p$. По лемме 3 существует подмодуль U модуля $S^\lambda \uparrow^{\Sigma_{r+1}}$ такой, что $U \cong S^{(\lambda, 1)}$ и $S^\lambda \uparrow^{\Sigma_{r+1}}/U$ продолжаем. По лемме 1 получаем, что модуль $S^\lambda \uparrow^{\Sigma_{r+1}}/U + V \uparrow^{\Sigma_{r+1}}$, а следовательно, и изоморфный ему модуль $(S^\lambda \uparrow^{\Sigma_{r+1}}/V \uparrow^{\Sigma_{r+1}})/(U + V \uparrow^{\Sigma_{r+1}}/V \uparrow^{\Sigma_{r+1}})$ продолжаемы. Так как $S^\lambda \uparrow^{\Sigma_{r+1}}/V \uparrow^{\Sigma_{r+1}}$ двойствен модулю $M \uparrow^{\Sigma_{r+1}}$ и

$$U + V \uparrow^{\Sigma_{r+1}}/V \uparrow^{\Sigma_{r+1}} \cong U/U \cap V \uparrow^{\Sigma_{r+1}},$$

то мы получаем, что существует продолжаемый подмодуль T модуля $M \uparrow^{\Sigma_{r+1}}$ такой, что $M \uparrow^{\Sigma_{r+1}}/T$ – гомоморфный образ модуля $S^{(\lambda, 1)}$.

Итак, модуль T в обоих случаях выбран. При этом T продолжаем и выполнено неравенство

$$\left[M \uparrow^{\Sigma_{r+1}} / T : D^{\mu^B} \right] \leq \delta_{h(\lambda), p} \left[S^{(\lambda, 1)} : D^{\mu^B} \right].$$

Пусть $N \subset M \uparrow^{\Sigma_{r+1}}$ — такой $K\Sigma_{r+1}$ -подмодуль, что $N \cong D^\lambda \uparrow^{\Sigma_{r+1}}$ и $M \uparrow^{\Sigma_{r+1}} / N \cong \bigoplus m D^\mu \uparrow^{\Sigma_{r+1}}$.

Поскольку $\text{Hom}_{\Sigma_{r+1}}(D^{\mu^B}, D^\mu \uparrow^{\Sigma_{r+1}}) \neq 0$ в силу п. 4) утверждения 2, то существует $K\Sigma_{r+1}$ -модуль N' такой, что $N \subset N' \subset M \uparrow^{\Sigma_{r+1}}$ и $N' / N \cong \bigoplus m D^{\mu^B}$.

Имеем $N' \cap T / N \cap T \cong \bigoplus n D^{\mu^B}$, где $n = m$ в случае $h(\lambda) < p$ и $n \geq m - [S^{(\lambda, 1)} : D^{\mu^B}]$ в случае $h(\lambda) = p$. Пусть $0 = T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_k = N \cap T$ — некоторый Σ_{r+1} -композиционный ряд. Так как модуль $N \cap T$ продолжаем, то для любого $i = 1, \dots, k$ высота разбиения α , где $D^\alpha \cong T_i / T_{i-1}$, не более p .

Применим теперь лемму 7 к случаю $R = K\Sigma_{r+1}$, $P = N' \cap T$, $Q = N \cap T$ и $Q_i = T_i$. В силу определения 3 получаем оценки $n_i \leq \dim \text{Ext}_{\Sigma_{r+1}}^e(T_i / T_{i-1}, D^{\mu^B})$, $i = 1, \dots, k$. Наконец, с учетом двойственности Фробениуса в силу п. 1) утверждения 2 имеем

$$\begin{aligned} n_0 &\leq \dim \text{Hom}_{\Sigma_{r+1}}(D^{\mu^B}, M \uparrow^{\Sigma_{r+1}}) = \dim \text{Hom}_{\Sigma_{r+1}}((S^\lambda / V) \uparrow^{\Sigma_{r+1}}, D^{\mu^B}) \\ &= \dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(S^\lambda / V, D^{\mu^B} \downarrow_{\Sigma_r}) \leq \dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(S^\lambda, D^{\mu^B} \downarrow_{\Sigma_r}) = \gamma(\lambda, \mu^B). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $p > 2$, λ и μ — разбиения числа r высоты менее p , $\lambda \not\vdash \mu$ и B — μ -кохорошая клетка. Тогда

$$\dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\mu) \leq \sum_{\alpha \vdash r+1} [D^\lambda \uparrow^{\Sigma_{r+1}} : D^\alpha] \dim \text{Ext}_{\Sigma_{r+1}}^1(D^\alpha, D^{\mu^B}) + \gamma(\lambda, \mu^B).$$

Доказательство следует из теоремы 3 аналогично доказательству следствия 3.

Сделаем следующее предположение: полученные неравенства позволяют вычислить размерности пространств $\text{Hom}_{\Sigma_r}(\text{rad } S^\lambda, D^\mu)$, где $h(\lambda) \leq p$, для малых r (в пределах известных композиционных матриц).

Возможно также доказать аналогичные неравенства для размерностей $\text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\mu)$, когда λ и μ — произвольные p -регулярные разбиения числа r . Однако в этом случае функции ε и γ придется заменить на менее удобные для вычисления.

ТЕОРЕМА 4. Пусть λ и μ — различные p -регулярные разбиения числа $r > 1$ и A — μ -хорошая клетка. Тогда

$$\begin{aligned} \dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\mu) &\leq \sum_{\alpha \vdash r-1} [D^\lambda \downarrow_{\Sigma_{r-1}} : D^\alpha] \dim \text{Ext}_{\Sigma_{r-1}}^1(D^\alpha, D^{\mu^A}) \\ &\quad + \dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(\text{rad } D^{\mu^A} \uparrow^{\Sigma_r}, D^\mu). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 2, с тем отличием, что вместо M необходимо рассмотреть любой $K\Sigma_r$ -модуль C такой, что $\text{soc } C \cong D^\lambda$ и $C/\text{soc } C \cong \bigoplus \dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\mu) D^\mu$. Достаточно считать, что $\lambda \sim \mu$. Оценка соответствующего n_0 теперь имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} n_0 &\leq \dim \text{Hom}_{\Sigma_{r-1}}(D^{\mu^A}, C \downarrow_{\Sigma_{r-1}}) = \dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(D^{\mu^A} \uparrow^{\Sigma_r}, C) \\ &= \dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(J, C) \leq \dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(\text{rad } J, D^\lambda) = \dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(\text{rad } D^{\mu^A} \uparrow^{\Sigma_r}, D^\lambda), \end{aligned}$$

где J – неразложимое прямое слагаемое модуля $D^{\mu^A} \uparrow^{\Sigma_r}$ из того же блока, что и D^μ (т.е. $J/\text{rad } J \cong D^\mu$).

ТЕОРЕМА 5. Пусть λ и μ – различные p -регулярные разбиения числа r и B – μ -кохорошая клетка. Тогда

$$\begin{aligned} \dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\mu) &\leq \sum_{\alpha \vdash r+1} [D^\lambda \uparrow^{\Sigma_{r+1}}: D^\alpha] \dim \text{Ext}_{\Sigma_{r+1}}^1(D^\alpha, D^{\mu^B}) \\ &\quad + \dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(\text{rad } D^{\mu^B} \downarrow_{\Sigma_r}, D^\lambda). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 3, с тем отличием, что вместо M необходимо рассмотреть любой $K\Sigma_r$ -модуль C такой, что $\text{soc } C \cong D^\lambda$ и $C/\text{soc } C \cong \bigoplus \dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\mu) D^\mu$. В данном случае нам не важна продолжаемость модулей и нет необходимости выбирать продолжаемый подмодуль в C . Достаточно считать, что $\lambda \sim \mu$. Оценка соответствующего n_0 теперь имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} n_0 &\leq \dim \text{Hom}_{\Sigma_{r+1}}(D^{\mu^B}, C \uparrow^{\Sigma_{r+1}}) = \dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(D^{\mu^B} \downarrow_{\Sigma_r}, C) \\ &= \dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(I, C) \leq \dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(\text{rad } I, D^\lambda) = \dim \text{Hom}_{\Sigma_r}(\text{rad } D^{\mu^B} \downarrow_{\Sigma_r}, D^\lambda), \end{aligned}$$

где I – неразложимое прямое слагаемое модуля $D^{\mu^B} \downarrow_{\Sigma_r}$ из того же блока, что и D^μ (т.е. $I/\text{rad } I \cong D^\mu$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Несмотря на то, что в общем случае размерности пространств $\text{Hom}_{\Sigma_r}(\text{rad } D^{\mu^A} \uparrow^{\Sigma_r}, D^\lambda)$ и $\text{Hom}_{\Sigma_r}(\text{rad } D^{\mu^B} \downarrow_{\Sigma_r}, D^\lambda)$ неизвестны, с использованием результатов работы [4] иногда можно заключить, что они нулевые.

§ 4. Формула для Ext^1

Для краткости разбиение λ , для которого модуль D^λ вполне расщепляемый, будем называть также *вполне расщепляемым*. Клетка A называется *граничной* клеткой разбиения λ , если $A \in [\lambda]$ и $A + (1, 1) \notin [\lambda]$. Для пары чисел i и j обозначим через $R_{i,j}(\lambda)$ множество граничных клеток (x, y) диаграммы $[\lambda]$ таких, что $x \geq i$ и $y \geq j$, и положим $h_{i,j}(\lambda) = |R_{i,j}(\lambda)|$. Множество $R_{i,j}(\lambda)$ называется *косым крюком* и в случае $h_{i,j}(\lambda) = p$ также *косым p -крюком*. Положим $\sum \lambda = \sum_{i=1}^{h(\lambda)} \lambda_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Разбиение λ назовем *большим*, если оно вполне расщепляемое высоты более 1 и $h_{1,1}(\lambda) \geq p$. В этом случае обозначим через $\tilde{\lambda}$ разбиение, диаграмма которого получается из $[\lambda]$ перемещением отрезка $(h, j), \dots, (h, \lambda_h)$ в

первую строку, где (h, j) – самая правая клетка последней строки диаграммы $[\lambda]$ вычета $\text{res}(1, \lambda_1 + 1)$.

Легко видеть, что если λ_A – большое разбиение, то λ – также большое разбиение. Докажем теперь лемму о том, как связаны операция $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ и операция удаления клетки.

ЛЕММА 8. Пусть λ – большое разбиение высоты h . Пусть F и $\tilde{F}$ – самые правые клетки первых строк диаграмм $[\lambda]$ и $[\tilde{\lambda}]$ соответственно, L и $\tilde{L}$ – самые правые клетки последних строк диаграмм $[\lambda]$ и $[\tilde{\lambda}]$ соответственно и A – некоторая клетка такая, что $1 < r(A) < h$. Тогда выполнены следующие утверждения.

- 1) Имеем $h_{1, \lambda_h}(\tilde{\lambda}) = p$ и $R_{1, \tilde{\lambda}_{h-1}}(\tilde{\lambda}) \subset R_{1, \lambda_h}(\tilde{\lambda})$.
- 2) Клетка $\tilde{F}$ всегда $\tilde{\lambda}$ -хорошая; $\chi(\lambda) < p$ тогда и только тогда, когда L – λ -хорошая клетка. При выполнении последних условий не существует $\tilde{\lambda}$ -добавляемых клеток C таких, что $\text{res } C = \text{res } \tilde{F}$ и $r(C) \leq h$, разбиение λ_L большое и $\tilde{\lambda}_L = \tilde{\lambda}_{\tilde{F}}$. Если $\chi(\lambda) = p$, то $\varepsilon(\lambda, \tilde{\lambda}_{\tilde{F}}) = 1$.
- 3) Предположим, что $h(\tilde{\lambda}) = h$. Тогда F – λ -хорошая клетка, если и только если $\tilde{L}$ – $\tilde{\lambda}$ -хорошая клетка. При выполнении последних условий не существует $\tilde{\lambda}$ -добавляемых клеток C таких, что $\text{res } C = \text{res } F$ и $r(C) < h$, разбиение λ_F большое и $\tilde{\lambda}_F = \tilde{\lambda}_{\tilde{L}}$.
- 4) Клетка A – λ -хорошая клетка тогда и только тогда, когда A – $\tilde{\lambda}$ -хорошая клетка. При выполнении последних условий не существует $\tilde{\lambda}$ -добавляемых клеток C таких, что $\text{res } C = \text{res } A$ и $r(C) \leq h$, разбиение λ_A большое и $\tilde{\lambda}_A = \tilde{\lambda}_A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (h, j) – самая правая клетка последней строки диаграммы $[\lambda]$ вычета $\text{res}(1, \lambda_1 + 1)$. Справедливо следующее утверждение: любая $\tilde{\lambda}$ -добавляемая клетка остатка a , лежащая в первых $h - 1$ строках, имеет вид $B + (0, 1)$, где $B \in R_{1, \tilde{\lambda}_{h-1}}(\tilde{\lambda})$ и $\text{res } B = a - 1$.

1) Из определения 4 имеем, что $R_{1, \lambda_h}(\tilde{\lambda})$ получается из косоугольного p -крюка $R_{1, j}(\lambda)$ перемещением всех клеток последней строки в первую. Отсюда $h_{1, \lambda_h}(\tilde{\lambda}) = h_{1, j}(\lambda) = p$. Включение следует из неравенств $\tilde{\lambda}_{h-1} \geq \lambda_{h-1} \geq \lambda_h$.

2) Единственной клеткой из $R_{1, \lambda_h}(\tilde{\lambda})$ вычета $\text{res } \tilde{F}$ является клетка $\tilde{F}$. В случае $h(\tilde{\lambda}) = h$ получаем $\text{res } \tilde{L} = \text{res } F \neq \text{res } \tilde{F}$. Следовательно, $\tilde{F}$ – единственная $\tilde{\lambda}$ -удаляемая клетка вычета $\text{res } \tilde{F}$, и эта клетка $\tilde{\lambda}$ -хорошая. Второе утверждение следует из [16]. Единственной клеткой из $R_{1, \lambda_h}(\tilde{\lambda})$ вычета $\text{res } \tilde{F} - 1$ является клетка $\tilde{F} - (0, 1)$. Поскольку клетка $\tilde{F}$ не $\tilde{\lambda}$ -добавляемая, то в силу утверждения, сформулированного в начале доказательства для $a = \text{res } \tilde{F}$, в первой $h - 1$ строке нет $\tilde{\lambda}$ -добавляемых клеток вычета $\text{res } \tilde{F}$. Предположим теперь, что $\chi(\lambda) < p$. В этом случае при переходе к $\tilde{\lambda}$ происходит перемещение по крайней мере двух клеток (т.е. $j < \lambda_h$) и, следовательно, $F + (0, 1) \neq \tilde{F}$. Так как обе эти клетки принадлежат косоугольному p -крюку $R_{1, \lambda_h}(\tilde{\lambda})$, то $\text{res } F + 1 \neq \text{res } \tilde{F}$. Из определения 4 следует, что (h, j) – $\tilde{\lambda}$ -добавляемая клетка строки h и она имеет вычет $\text{res } F + 1$. Следовательно, и в строке h нет $\tilde{\lambda}$ -добавляемой клетки вычета $\text{res } \tilde{F}$.

Равенство $\tilde{\lambda}_L = \tilde{\lambda}_{\tilde{F}}$ получается перемещением отрезка $(h, j), \dots, (h, \lambda_h - 1)$ из последней строки диаграммы $[\lambda_L]$ в первую. Если $\chi(\lambda) = p$, то из определения 4

следует, что $(h, j) = L$ и $\tilde{\lambda} = (\lambda_L)^{\tilde{F}}$. Отсюда $\lambda = (\tilde{\lambda}_{\tilde{F}})^L$. Клетка L является $\tilde{\lambda}_{\tilde{F}}$ -конормальной, так как ниже нее нет ни одной удаляемой клетки диаграммы $[\tilde{\lambda}_{\tilde{F}}]$. Следовательно, $\varepsilon(\lambda, \tilde{\lambda}_{\tilde{F}}) = 1$.

3) Легко видеть, что $\text{res } \tilde{L} = \text{res } F$. Если F – λ -хорошая клетка, то $F = (0, 1)$ – единственная клетка из $R_{1, \lambda_h}(\tilde{\lambda})$ вычета $\text{res } F = 1$. Так как клетка F не $\tilde{\lambda}$ -добавляемая, то в силу утверждения, сформулированного в начале доказательства для $a = \text{res } F$, в первых $h - 1$ строках нет $\tilde{\lambda}$ -добавляемых клеток вычета $\text{res } F$. Следовательно, $\tilde{L}$ – $\tilde{\lambda}$ -хорошая клетка.

Предположим теперь, что F – не λ -хорошая клетка. Так как λ вполне расщепляемо, то отсюда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2$. Рассмотрим следующие случаи.

а) $h > 2$. Тогда $F + (1, 1)$ – $\tilde{\lambda}$ -добавляемая клетка вычета $\text{res } F$. Клетка F – единственная из $R_{1, \lambda_h}(\tilde{\lambda})$ вычета $\text{res } F$. Однако F – не $\tilde{\lambda}$ -удаляемая клетка. Следовательно, не существует $\tilde{\lambda}$ -удаляемых клеток вычета $\text{res } F$, расположенных выше $\tilde{L}$, и эта клетка не $\tilde{\lambda}$ -хорошая.

б) $h = 2$. Тогда $\tilde{F} + (0, 1)$ – $\tilde{\lambda}$ -добавляемая клетка вычета $\text{res } F$ и $\tilde{L}$ – не $\tilde{\lambda}$ -хорошая клетка.

Равенство $\tilde{\lambda}_F = \tilde{\lambda}_{\tilde{L}}$ получается перемещением отрезка $(h, j - 1), \dots, (h, \lambda_h)$ из последней строки диаграммы $[\lambda_F]$ в первую.

4) Предположим, что A – λ -хорошая клетка. Если $r(A) < h - 1$, то выше A находится не более $p - 2$ граничных клеток диаграммы $[\tilde{\lambda}]$. Следовательно, выше A не лежит ни одной $\tilde{\lambda}$ -добавляемой клетки вычета $\text{res } A$. Если A лежит в строке $h - 1$, то $\lambda_h < \lambda_{h-1}$. Отсюда $h_{1, \tilde{\lambda}_{h-1}} < p$ и по той же причине выше A не лежит ни одной $\tilde{\lambda}$ -добавляемой клетки вычета $\text{res } A$. В обоих случаях A – $\tilde{\lambda}$ -хорошая клетка.

Предположим теперь, что A – $\tilde{\lambda}$ -хорошая клетка. Если A не лежит в строке $h - 1$, то она λ -удаляемая. Если A лежит в строке $h - 1$, то $h_{1, \tilde{\lambda}_{h-1}} < p$ и $\lambda_h < \lambda_{h-1}$. Поэтому A – снова λ -удаляемая клетка. В обоих случаях A – λ -хорошая клетка.

Из предыдущих рассуждений следует, что если A – $\tilde{\lambda}$ -хорошая клетка, то клетка $A = (0, 1)$ принадлежит косому p -крюку $R_{1, \lambda_h}(\tilde{\lambda})$ и, таким образом, является единственной клеткой из $R_{1, \lambda_h}(\tilde{\lambda})$ вычета $\text{res } A = 1$. Поскольку клетка A не $\tilde{\lambda}$ -добавляемая, то в силу утверждения, сформулированного в начале доказательства для $a = \text{res } A$, в первых $h - 1$ строках нет $\tilde{\lambda}$ -добавляемых клеток вычета $\text{res } A$. Так как $A \neq F + (0, 1)$ и обе эти клетки принадлежат косому p -крюку $R_{1, \lambda_h}(\tilde{\lambda})$, то $\text{res } A \neq \text{res } F + 1$; $\tilde{\lambda}$ -добавляемой клеткой строки h является клетка (h, j) , и она имеет вычет $\text{res } F + 1$. Следовательно, в строке h нет $\tilde{\lambda}$ -добавляемой клетки вычета $\text{res } A$.

Равенство $\tilde{\lambda}_A = \tilde{\lambda}_A$ получается перемещением отрезка $(h, j), \dots, (h, \lambda_h)$ из последней строки диаграммы $[\lambda_A]$ в первую.

ПРИМЕР. Пусть $p = 7$, $\lambda = (5, 4, 4, 3)$ и $h = 4$,

$$[\lambda] = \begin{array}{cccc} \times & \times & \times & 3 \ 4 \\ \times & \times & \times & 2 \\ \times & \times & 0 & 1 \\ \times & 5 & 6 & \end{array} \quad [\tilde{\lambda}] = \begin{array}{cccccc} \times & \times & \times & 3 & 4 & 5 \ 6 \\ \times & \times & \times & 2 & & \\ \times & \times & 0 & 1 & & \\ \times & & & & & \end{array}$$

Тогда $j = 2$ и $\tilde{\lambda} = (7, 4, 4, 1)$. В левой диаграмме вычетами отмечено множество $R_{1, j}(\lambda)$, а в правой – множество $R_{1, \lambda_h}(\tilde{\lambda})$.

Определим по индукции множества X_r , $r \in \mathbb{N}$, пар разбиений. Положим $X_1 = \emptyset$. Предположим, что $r > 1$ и множества $X_1, \dots, X_{r-1}$ уже построены. Пару разбиений (λ, μ) числа r включаем в X_r , если выполнены следующие условия:

- 1) λ вполне расщепляемо, $\lambda \triangleleft \mu$ и $\lambda \sim \mu$;
- 2) для любой μ -хорошей клетки A либо $\varepsilon(\lambda, \mu_A) = 1$, либо существует λ -хорошая клетка B такая, что $\text{res } A = \text{res } B$ и $(\lambda_B, \mu_A) \in X_{r-1}$.

Положим $X = \bigcup_{r=1}^{\infty} X_r$.

ЛЕММА 9. *Пара разбиений (λ, μ) принадлежит множеству X тогда и только тогда, когда λ – большое разбиение и $\mu = \tilde{\lambda}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по $\sum \lambda$. Если $\sum \lambda = 1$, то $\lambda = (1)$ и λ – не большое разбиение. Предположим теперь, что $\sum \lambda = r > 1$ и лемма выполнена для пар разбиений с суммой меньше r . В доказательстве будем полагать, что клетки F, L связаны с λ , а в случае, когда λ – большое разбиение, то связаны также и клетки $\tilde{F}, \tilde{L}$, как в лемме 8.

Предположим сначала, что λ – большое разбиение высоты h . Из непосредственной конструкции разбиения $\tilde{\lambda}$ видно, что для пары (λ, μ) , где $\mu = \tilde{\lambda}$, условие 1) выполнено.

Проверим условие 2). Пусть A – некоторая $\tilde{\lambda}$ -хорошая клетка.

Рассмотрим сначала случай $A = \tilde{F}$. Если $\chi(\lambda) = p$, то в силу п. 2) леммы 8 получаем $\varepsilon(\lambda, \tilde{\lambda}_A) = 1$. Если $\chi(\lambda) < p$, то в силу п. 2) леммы 8 получаем, что L – λ -хорошая клетка, λ_L – большое разбиение и $\tilde{\lambda}_L = \tilde{\lambda}_A$. Отсюда по предположению индукции $(\lambda_L, \tilde{\lambda}_A) \in X_{r-1}$.

Пусть теперь $h(\tilde{\lambda}) = h$ и $A = \tilde{L}$. В силу п. 3) леммы 8 получаем, что F – λ -хорошая клетка, λ_F – большое разбиение и $\tilde{\lambda}_F = \tilde{\lambda}_A$. Отсюда по предположению индукции $(\lambda_F, \tilde{\lambda}_A) \in X_{r-1}$.

Наконец, если $1 < r(A) < h$, то в силу п. 4) леммы 8 получаем, что A – λ -хорошая клетка, λ_A – большое разбиение и $\tilde{\lambda}_A = \tilde{\lambda}_A$. Отсюда по предположению индукции $(\lambda_A, \tilde{\lambda}_A) \in X_{r-1}$.

Рассмотрев все возможные случаи, мы получили в силу определения множества X_r , что $(\lambda, \tilde{\lambda}) \in X_r$.

Пусть теперь, наоборот, $(\lambda, \mu) \in X_r$. Для дальнейших рассуждений будем иметь в виду, что если $A \neq B$, B – ν -удаляемая клетка и A – ν_B -добавляемая клетка, то A – ν -добавляемая клетка.

Предположим сначала, что $\varepsilon(\lambda, \mu_A) = 1$ для некоторой μ -хорошей клетки A . Тогда $\lambda = (\mu_A)^B$, где B – некоторая μ -добавляемая клетка вычета $\text{res } A$. Поскольку $\lambda \triangleleft \mu$, то B расположена строго ниже, чем A . Отсюда получаем, что B – λ -удаляемая клетка, A – λ_B -добавляемая, а следовательно, и λ -добавляемая клетка. Однако такое возможно только при $\chi(\lambda) = p$, $A = F + (0, 1)$ и $B = L$. По определению 4 тогда получаем $\mu = \tilde{\lambda}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\varepsilon(\lambda, \mu_A) = 0$ для любой μ -хорошей клетки A . Возьмем некоторую μ -хорошую клетку A . Понятно, что такая клетка всегда существует, и так как $\mu \triangleright \lambda$, то она находится в первых h строках. В силу сделанного предположения о значении функции ε существует некоторая λ -хорошая клетка B такая, что $(\lambda_B, \mu_A) \in X_{r-1}$. По предположению индукции получаем, что λ_B – большое разбиение и $\tilde{\lambda}_B = \mu_A$.

Рассмотрим следующие случаи.

а) $B = F$ и $h(\tilde{\lambda}) = h$. В силу п. 3) леммы 8 получаем $\tilde{\lambda}_B = \tilde{\lambda}_{\tilde{L}} = \mu_A$ и, следовательно, $A - \tilde{\lambda}_{\tilde{L}}$ -добавляемая клетка. Если предположить, что $r(A) < h$, то эта клетка A также $\tilde{\lambda}$ -добавляемая. Однако $\lambda \sim \mu$ и $\text{res } A = \text{res } \tilde{L} = \text{res } F$. Это противоречит п. 3) леммы 8. Поэтому A находится в строке h и $A = \tilde{L}$. Отсюда $\mu = \tilde{\lambda}$.

б) $B = F$ и $h(\tilde{\lambda}) < h$. Легко видеть, что в этом случае λ_B – не большое разбиение. Поэтому этот случай не реализуется.

в) $B = L$. В силу п. 2) леммы 8 получаем $\chi(\lambda) < p$ и $\tilde{\lambda}_B = \tilde{\lambda}_{\tilde{F}} = \mu_A$ и, следовательно, $A - \tilde{\lambda}_{\tilde{F}}$ -добавляемая клетка. Если предположить, что A расположена на первой строке, то эта клетка также $\tilde{\lambda}$ -добавляемая. Однако $\lambda \sim \mu$ и $\text{res } A = \text{res } \tilde{F}$. Это противоречит п. 2) леммы 8. Поэтому A находится в первой строке и $A = \tilde{F}$. Отсюда $\mu = \tilde{\lambda}$.

г) $1 < r(B) < h$. В силу п. 4) леммы 8 получаем, что $B - \tilde{\lambda}$ -хорошая и $\tilde{\lambda}_B = \tilde{\lambda}_B = \mu_A$. Если предположить, что $A \neq B$, то A – также $\tilde{\lambda}$ -добавляемая клетка. Однако $\lambda \sim \mu$ и $\text{res } A = \text{res } B$. Это противоречит п. 4) леммы 8. Поэтому $A = B$ и $\mu = \tilde{\lambda}$.

Следствие 3 для вполне расщепляемых разбиений принимает следующий вид.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $p > 2$ и λ, μ – разбиения числа $r > 1$ высоты менее p такие, что λ вполне расщепляемо, $\lambda \not\sim \mu$, $\lambda \sim \mu$, и $A - \mu$ -хорошая клетка. Тогда $\dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\mu) \leq \dim \text{Ext}_{\Sigma_{r-1}}^1(D^{\lambda_B}, D^{\mu_A})$, если существует λ -хорошая клетка B вычета $\text{res } A$, и $\dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\mu) \leq \varepsilon(\lambda, \mu_A)$ иначе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{Ext}_{\Sigma_{r-1}}^1(D^\lambda, D^\lambda) = 0$, то достаточно считать, что $\lambda \neq \mu$. В силу результатов работ [14] и [15] имеем $D^\lambda \downarrow_{\Sigma_{r-1}} \cong \bigoplus \{D^{\lambda_B} : B - \lambda\text{-хорошая клетка}\}$. Поэтому в силу следствия 3 достаточно доказать, что из существования λ -хорошей клетки B вычета $\text{res } A$ следует $\varepsilon(\lambda, \mu_A) = 0$. Действительно, предположим противное. Тогда $\lambda = (\mu_A)^C$, где $\text{res } A = \text{res } C$ и A выше C . Последнее возможно только тогда, когда $\chi(\lambda) = p$, $A = F + (0, 1)$ и $C = L$, где F и L связаны с λ , как в лемме 8. Так как в этом случае клетка L не λ -хорошая, то не существует λ -хорошей клетки B вычета $\text{res } A$. Противоречие.

Следующее утверждение объясняет, почему мы строили множество X именно таким образом.

ЛЕММА 10. Пусть $p > 2$ и λ, μ – разбиения числа r высоты менее p такие, что λ вполне расщепляемое, $\lambda \not\sim \mu$ и $(\lambda, \mu) \notin X$. Тогда $\text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\mu) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по r . Для $r = 1$ это очевидно. Предположим, что лемма верна для разбиений чисел, меньших, чем $r > 1$. Пусть $\lambda, \mu \vdash r$ такие, что λ вполне расщепляемое, $\lambda \not\sim \mu$ и $(\lambda, \mu) \notin X$. В силу утверждения 1 понятно, что при нарушении условия 1) для пары (λ, μ) лемма доказана. Поэтому будем предполагать, что условие 1) выполнено, а условие 2) нарушено. Тогда существует некоторая μ -хорошая клетка A такая, что $\varepsilon(\lambda, \mu_A) = 0$ и для любой λ -хорошей клетки B выполнено $(\lambda_B, \mu_A) \notin X_{r-1}$.

Предположим, что существует некоторая λ -хорошая клетка B вычета $\text{res } A$ такая, что $\text{Ext}_{\Sigma_{r-1}}^1(D^{\lambda_B}, D^{\mu_A}) \neq 0$. В силу индуктивного предположения получаем $\lambda_B \triangleright \mu_A$. Докажем, что μ_A – вполне расщепляемое разбиение. В случае

$h(\mu_A) \leq h(\lambda_B)$ это следует из того, что $\mu_A \triangleleft \lambda_B$. Поэтому можно считать, что $h(\mu_A) > h(\lambda_B)$. Однако из $\lambda \triangleleft \mu$ следует, что $h(\lambda) \geq h(\mu)$. Поэтому $h(\lambda_B) = h(\lambda) - 1$ и $\lambda_1 + h(\lambda) \leq p$. Теперь то, что μ_A вполне расщепляемо, следует из неравенств $h(\mu_A) \leq h(\mu) \leq h(\lambda)$.

Поскольку

$$\text{Ext}_{\Sigma_{r-1}}^1(D^{\lambda_B}, D^{\mu_A}) = \text{Ext}_{\Sigma_{r-1}}^1(D^{\mu_A}, D^{\lambda_B}) \neq 0,$$

то в силу индуктивного предположения получаем, что $(\mu_A, \lambda_B) \in X_{r-1}$. Из леммы 9 следует, что μ_A – большое разбиение и $\widetilde{\mu}_A = \lambda_B$. Так как оба разбиения μ_A и λ_B вполне расщепляемые, то в силу определения 4 имеем $h(\lambda_B) = h(\mu_A) - 1$. Тогда получаем

$$h(\lambda) \geq h(\mu) \geq h(\mu_A) > h(\lambda_B).$$

Следовательно, $h(\lambda) = h(\lambda_B) + 1$ и $h(\lambda) = h(\mu_A)$. Отсюда имеем $h(\lambda) \geq 2$ и $B = (h(\lambda), 1)$.

Обозначим через x количество клеток, перемешаемых при переходе $\mu_A \mapsto \widetilde{\mu}_A = \lambda_B$. Тогда имеем $\lambda_1 = (\lambda_B)_1 \geq (\mu_A)_1 + x$. Понятно, что если A не в первой строке или $x > 1$, то $\lambda_1 > \mu_1$. Это противоречит тому, что $\lambda \triangleleft \mu$. Предположим теперь, что A в первой строке и $x = 1$. Из последнего условия следует, что $\chi(\mu_A) = p$, и по определению 4 получаем $\lambda_B = \widetilde{\mu}_A = ((\mu_A)_B)^A = \mu_B$ и, следовательно, $\lambda = \mu$, что не так. Таким образом, и этот случай невозможен, и мы приходим к противоречию. В силу следствия 5 имеем $\text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\mu) = 0$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $p > 2$ и λ, μ – p -регулярные разбиения числа r такие, что модуль D^λ вполне расщепляемый и $\lambda \not\preceq \mu$. Тогда $\text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^\mu)$ одномерно, если λ – большое разбиение и $\mu = \tilde{\lambda}$, и равно нулю иначе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $h(\mu) < p$. Тогда в силу леммы 10 достаточно доказать, что $\text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^{\tilde{\lambda}}) \cong K$ для любого большого разбиения λ . Итак, пусть λ – большое разбиение и (h, j) – клетка последней строки диаграммы $[\lambda]$, как в определении 4. Тогда мы имеем $h_{1,j}(\lambda) = p$ и $h_{2,j}(\lambda) < p$. Следовательно, в силу так называемой гипотезы Картера, доказанной в [9], модуль S^λ не прост. Отсюда по леммам 9 и 10 единственным верхним композиционным фактором ненулевого модуля $\text{rad } S^\lambda$ является $D^{\tilde{\lambda}}$. Следовательно, $\dim \text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^{\tilde{\lambda}}) \geq 1$. Обратное неравенство получается из следствия 5.

Наконец, рассмотрим случай $h(\mu) \geq p$. Для этого заметим, что в доказательствах теорем 2.9 и 2.10 работы [13] ограничение $h(\mu) < p$ несущественно. Надо лишь установить, что $\mu = \varepsilon_n$ или $\mu = \kappa_n$ (после того, как предположено $\lambda_A = \varepsilon_{n-1}$ и $\gamma = \varepsilon_{n-1}$) без использования леммы 1.6 (той же работы).

Действительно, поскольку $\mu_C \leq \gamma = \varepsilon_{n-1} = \lambda_A$ и $\mu_C \not\leq \lambda_A$, то мы имеем $\mu_C = \varepsilon_{n-1}$. Это значит, что $\mu = \kappa_n$ или $\mu = \varepsilon_n$ или $\mu = \varepsilon_{n-1}^D$, где $D = (p, 1)$. Однако последний случай невозможен, так как $\varepsilon_{n-1}^D \triangleleft \varepsilon_n, \kappa_n$ и $\lambda = \varepsilon_n$ или $\lambda = \kappa_n$.

Доказанная теорема позволяет более точно контролировать процесс поднятия радикала, описанный в [18], чем это сделано в [3]. Докажем также следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть λ – вполне расщепляемое разбиение. Если λ – большое разбиение, то $\text{rad } S^\lambda$ является гомоморфным образом модуля $S^{\tilde{\lambda}}$ и при этом $\text{rad } S^\lambda = \varphi(S^{\tilde{\lambda}})$ для любого ненулевого гомоморфизма $\varphi: S^{\tilde{\lambda}} \rightarrow S^\lambda$. В противном случае $\text{rad } S^\lambda = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $h(\lambda) = 1$ следствие, очевидно, выполнено. Поэтому мы будем считать, что $p > 2$ и $h(\lambda) > 1$. Если λ – не большое разбиение, то в силу гипотезы Картера [9] модуль S^λ прост и $\text{rad } S^\lambda = 0$.

Предположим теперь, что λ – большое разбиение. В силу [1, § 24.10] существует некоторый ненулевой гомоморфизм $\varphi: S^{\tilde{\lambda}} \rightarrow S^\lambda$. Положим $\mu = \lambda - (x^{h(\lambda)})$, где $x = \lambda_1 + h(\lambda) - p - 1$. Легко видеть, что $h_{1,1}(\mu) = p$, $\mu \neq (p), (1^p)$ и $\tilde{\mu} + (x^{h(\lambda)}) = \tilde{\lambda}$. В силу леммы 11 и [10, теорема 6] имеем

$$1 = [S^\mu : D^{m(\mu^t)}] = [S^\mu : D^{\tilde{\mu}}] = [S^\lambda : D^{\tilde{\mu} + (x^{h(\lambda)})}] = [S^\lambda : D^{\tilde{\lambda}}].$$

Отсюда по теореме 6 получаем $\varphi(S^{\tilde{\lambda}}) = \text{rad } S^\lambda$.

Обозначим через m биекцию множества p -регулярных разбиений, определенную формулой $D^\lambda \otimes \text{sgn}_p \cong D^{m(\lambda)}$. Комбинаторное описание отображения m было предложено в [17] и доказано в [6].

ЛЕММА 11. Пусть λ – разбиение, отличное от (p) и (1^p) , такое, что $h_{1,1}(\lambda) = p$. Тогда $m(\lambda^t) = \tilde{\lambda}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя работе [17], обозначим для любого разбиения μ через $I(\mu)$ разбиение, полученное из μ удалением его p -границ. В силу [17, 5.2] имеем $m(I(\lambda^t)) = (I(\lambda^t))^t = I(\lambda)$. Теперь требуемая формула следует из [17, 4.1] и того, что $I(\tilde{\lambda}) = I(\lambda)$ и $h(\tilde{\lambda}) = h(\lambda) - 1 = p - \lambda_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае, когда λ – большое разбиение, явная конструкция расширения $\text{Ext}_{\Sigma_r}^1(D^\lambda, D^{\tilde{\lambda}})$ реализуется в виде модуля $S^\lambda / \text{rad } \text{rad } S^\lambda$.

Список литературы

1. Джеймс Г. Теория представлений симметрической группы. М.: Мир, 1980.
2. Ламбек И. Кольца и модули. М.: Мир, 1971.
3. Щиголев В. В. Конечная базирюемость некоторых классов неприводимых представлений симметрических групп // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 3. С. 149–160.
4. Brundan J., Kleshchev A. S. On translation functors for general linear and symmetric groups // Proc. London Math. Soc. (3). 2000. V. 80. № 1. P. 75–106.
5. Donkin S. On Schur algebras and related algebras. I // J. Algebra. 1986. V. 104. № 2. P. 310–328.
6. Ford B., Kleshchev A. S. A proof of the Mullineux conjecture // Math. Z. 1997. V. 226. № 2. P. 267–308.
7. Green J. A. Polynomial representations of $\text{GL}_n(K)$ // Lecture Notes in Math. V. 830. Berlin–Heidelberg–N.Y.: Springer-Verlag, 1980.
8. Hemmer D. J. The Ext^1 -quiver for completely splittable representations of the symmetric group // J. Group Theory. 2001. № 4. P. 401–416.
9. James G. D., Murphy G. E. The determinant of the Gram matrix for a Specht module // J. Algebra. 1979. V. 59. № 1. P. 222–235.
10. James G. D. On the decomposition matrices of the symmetric groups. III // J. Algebra. 1981. V. 71. № 1. P. 115–122.

11. *Jantzen J. C.* Representations of algebraic groups // Pure and Applied Mathematics. V. 131. Boston: Academic Press, Inc., 1987.
12. *Kleshchev A. S., Nakano D.* On comparing the cohomology of general linear and symmetric groups // Pacific J. of Math. 2001. V. 201. P. 339–355.
13. *Kleshchev A. S., Sheth J.* On extensions of simple modules over symmetric and algebraic groups // J. Algebra. 1999. V. 221. № 2. P. 705–722.
14. *Kleshchev A. S.* Branching rules for modular representations of symmetric groups. I // J. Algebra. 1995. V. 178. № 2. P. 493–511.
15. *Kleshchev A. S.* Branching rules for modular representations of symmetric groups. II // J. Reine Angew. Math. 1995. V. 459. P. 163–212.
16. *Kleshchev A. S.* Completely splittable representations of symmetric groups // J. Algebra. 1996. V. 181. № 2. P. 584–592.
17. *Mullineux G.* Bijections of p -regular partitions and p -modular irreducibles of the symmetric groups // J. London Math. Soc. (2). 1979. V. 20. № 1. P. 60–66.
18. *Shchigolev V. V.* On the stabilization problem for submodules of Specht modules // J. Algebra. 2002. V. 251. № 2. P. 790–812.

Ульяновский государственный университет
E-mail: vkshch@vens.ru

Поступило в редакцию
07.05.2003