Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Альбеверио, Ш. А. Аюпов, А. Х. Абдуваитов, О совпадении типов вещественной AW^* -алгебры и ее комплексификации, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 5, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/im501>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:27:30

УДК 517.98

С. Альбеверио, Ш. А. Аюпов, А. Х. Абдуваитов

О совпадении типов вещественной AW^* -алгебры и её комплексификации

Рассматриваются вещественные AW^* -алгебры – алгебры Капланского над полем вещественных чисел. Как и в случае комплексных алгебр фон Неймана и комплексных AW^* -алгебр, дана классификация вещественных AW^* -алгебр по типам I_{fin} , I_∞ , II_1 , II_∞ , III . Доказано, что если для вещественной AW^* -алгебры A её комплексификация $M = A + iA$ также является AW^* -алгеброй, то типы A и M совпадают.

Библиография: 19 наименований.

§ 1. Введение

В работах [1]–[3] был рассмотрен специальный класс C^* -алгебр, названных AW^* -алгебрами, чтобы выяснить, определяются ли свойства W^* -алгебры (алгебры фон Неймана) ее внутренней (алгебраической) структурой и не связаны ли они с действием ее элементов на гильбертовом пространстве. И. Капланскому удалось показать, что многие результаты “непространственной теории” W^* -алгебр могут быть перенесены на AW^* -алгебры.

Всякая W^* -алгебра является AW^* -алгеброй, но обратное утверждение неверно, как было показано Ж. Диксмье [4] с помощью абелева контрпримера. И. Капланский [2] доказал, что AW^* -алгебра типа I является W^* -алгеброй тогда и только тогда, когда ее центр является W^* -алгеброй, и высказал гипотезу, что это верно для общих AW^* -алгебр. Однако гипотеза Капланского была опровергнута О. Такенучи [5] и Дж. Дзем [6], которые независимо построили примеры AW^* -факторов, не являющихся W^* -факторами. Подробный обзор состояния теории AW^* -алгебр можно найти в работах [7], [8].

Теория C^* -алгебр и W^* -алгебр, как правило, рассматривается над полем комплексных чисел. В последние годы заметно возрос интерес к вещественному аналогу этой теории. Так, в опубликованной недавно монографии [9] было дано систематическое изложение основ теории вещественных банаховых алгебр, вещественных C^* -, W^* -алгебр. В работе авторов [10] было введено понятие вещественной AW^* -алгебры как вещественной C^* -алгебры, являющейся бэровским $*$ -кольцом [11]. Была исследована связь между вещественной AW^* -алгеброй и ее комплексификацией, построены примеры вещественных абелевых AW^* -алгебр, у которых комплексификация не является AW^* -алгеброй, а также примеры вещественных AW^* -факторов, не являющихся вещественными W^* -факторами.

Как и для случая комплексных W^* -алгебр, вещественные W^* -алгебры естественным образом классифицируются по типам I_{fin} , I_∞ , II_1 , II_∞ , III . Связь между

Работа выполнена при частичной поддержке гранта DFG 436 USB 113/4 (Германия).

типами вещественной W^* -алгебры и ее комплексификации исследована в монографии [9], хотя эта проблема в несколько иной постановке была полностью решена в работах [12]–[16]. В частности, в [9, § 8.6] была сформулирована проблема: верно ли, что вещественная W^* -алгебра имеет тип I (“полудискретна” в терминологии [9]) тогда и только тогда, когда ее комплексификация имеет тип I. В настоящей работе мы даем решение этой проблемы для более общего случая вещественных AW^* -алгебр. Как следствие, получается аналог упомянутой выше теоремы Капланского об AW^* -алгебрах типа I.

Основным результатом работы является теорема о совпадении типов вещественной AW^* -алгебры и ее комплексификации при условии, что последняя также является AW^* -алгеброй.

§ 2. Вещественные C^* -алгебры, W^* -алгебры и AW^* -алгебры

Пусть R – вещественная банахова алгебра. Пространство $R_C = R + iR$ с нормой $\|\cdot\|$ называется *комплексификацией* R , если $(R_C, \|\cdot\|)$ – комплексная банахова алгебра, $\|a + i0\| = \|a\|$ совпадает с исходной нормой на R и, кроме того, $\|a + ib\| = \|a - ib\|$ для всех $a, b \in R$. Для всякой вещественной банаховой алгебры существует единственная (с точностью до эквивалентности норм) комплексификация [9]. Если R является банаховой $*$ -алгеброй, то инволюцию $*$ можно естественным образом продолжить до $R_C = R + iR$ так, что R_C становится комплексной банаховой $*$ -алгеброй.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вещественная банахова $*$ -алгебра R называется *вещественной C^* -алгеброй*, если на ее комплексификации $R_C = R + iR$ существует норма, относительно которой R_C является (комплексной) C^* -алгеброй.

Есть и другие эквивалентные определения вещественной C^* -алгебры [9, следствие 5.2.11]. Например, вещественная банахова $*$ -алгебра R является вещественной C^* -алгеброй тогда и только тогда, когда R изометрически изоморфна равномерно замкнутой $*$ -подалгебре алгебры всех линейных ограниченных операторов $B(H)$ на вещественном гильбертовом пространстве H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вещественная C^* -алгебра R называется *вещественной W^* -алгеброй*, если комплексная C^* -алгебра $M = R_C = R + iR$ является (комплексной) W^* -алгеброй.

Можно показать [9, § 20], что вещественная C^* -алгебра R является вещественной W^* -алгеброй тогда и только тогда, когда она изометрически $*$ -изоморфна слабо замкнутой $*$ -подалгебре в $B(H)$, содержащей единичный оператор $\mathbb{I}$, или, что эквивалентно, $*$ -подалгебре в $B(H)$, совпадающей со своим бикоммутантом.

Пусть R – вещественная C^* -алгебра, $M = R + iR$ – ее комплексификация. Рассмотрим отображение $\alpha: a + ib \mapsto a^* + ib^*$ комплексной C^* -алгебры M на себя, где $a, b \in R$. Несложно проверить, что α является инволютивным (т. е. периода 2) $*$ -антиавтоморфизмом C^* -алгебры M , т. е. α – комплексно линейное отображение M на M такое, что $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$, $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$, $\alpha(\alpha(x)) = x$ для всех $x, y \in M$. При этом

$$R = \{x \in M: \alpha(x) = x^*\}.$$

Обратно, если M – некоторая (комплексная) C^* -алгебра, α – ее инволютивный $*$ -антиавтоморфизм, то множество $R = \{x \in M: \alpha(x) = x^*\}$ является ве-

вещественной C^* -алгеброй, а M совпадает с комплексификацией R . Более того, M является W^* -алгеброй тогда и только тогда, когда R является вещественной W^* -алгеброй [9, § 6.1].

Теперь рассмотрим понятие AW^* -алгебры. Пусть A – вещественная или комплексная $*$ -алгебра, S – непустое подмножество A . Положим

$$R(S) = \{x \in A : sx = 0 \text{ для всех } s \in S\}$$

и назовем $R(S)$ *правым аннулятором* S . Аналогично определяется *левый аннулятор*

$$L(S) = \{x \in A : xs = 0 \text{ для всех } s \in S\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [11]. $*$ -алгебра A называется *бэровской $*$ -алгеброй*, если правый аннулятор любого непустого множества $S \subset A$ порождается проектором, т. е. $R(S) = gA$ для некоторого проектора $g \in A$ (т. е. $g^2 = g = g^*$).

Поскольку $L(S) = (R(S^*))^* = (hA)^* = Ah$, то определение симметрично и может быть дано в терминах левых аннуляторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Вещественная или комплексная C^* -алгебра A , являющаяся бэровской $*$ -алгеброй, называется соответственно *вещественной* или *комплексной AW^* -алгеброй*.

Очевидно, всякая вещественная (соответственно, комплексная) W^* -алгебра является вещественной (соответственно, комплексной) AW^* -алгеброй, а обратное, вообще говоря, неверно [10].

В отличие от вещественных C^* -алгебр и W^* -алгебр, у которых комплексификация по определению является (комплексной) C^* -алгеброй и W^* -алгеброй, комплексификация вещественной AW^* -алгебры может не быть AW^* -алгеброй [10, предложение 2.2]. Однако если у вещественной C^* -алгебры R комплексификация $R + iR$ является AW^* -алгеброй, то сама R является AW^* -алгеброй [10, предложение 3.1].

§ 3. Основные результаты

Пусть A – вещественная или комплексная AW^* -алгебра. Проекторы $e, f \in A$ называются *эквивалентными* (относительно A) и обозначаются $e \sim f$, если существует элемент $u \in A$ такой, что $e = uu^*$, $f = u^*u$. Если $e \sim g$ для некоторого проектора $g \leq f$, то обозначим это через $e \lesssim f$. Проектор e называется *конечным*, если из $e \sim f \leq e$ следует, что $e = f$. Говорят, что AW^* -алгебра A *конечна*, если ее единица $\mathbb{I}$ является конечным проектором.

Следуя монографии [9], AW^* -алгебру A назовем *полуабелевой*, если каждый проектор в A является центральным. Это эквивалентно тому, что любые два эрмитовых элемента из A коммутируют между собой. Проектор $e \in A$ называется *полуабелевым*, если eAe – полуабелева AW^* -алгебра.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В комплексном случае понятия полуабелевой алгебры и полуабелева проектора совпадают соответственно с понятиями абелевой алгебры и абелева проектора. Однако в вещественном случае полуабелева AW^* -алгебра или W^* -алгебра может не быть абелевой. Например, тело кватернионов $\mathbb{Q}$ является полуабелевой, но не абелевой вещественной W^* -алгеброй.

AW^* -алгебра A называется *дискретной*, или *типа I*, если в ней есть точный полуабелев проектор e , т.е. $C(e) = \mathbb{I}$, где $C(e)$ – центральный носитель проектора e (наименьший центральный проектор, мажорирующий e). AW^* -алгебра A называется *непрерывной*, если в ней нет ненулевых полуабелевых проекторов.

Вещественная или комплексная AW^* -алгебра A называется *полуконечной*, если в ней существует точный конечный проектор. Алгебра A называется *собственно бесконечной*, если в A нет ненулевых конечных центральных проекторов. Наконец, AW^* -алгебра A называется *чисто бесконечной*, или *типа III*, если она не содержит ненулевых конечных проекторов. Далее, аналогично случаю W^* -алгебр определяются AW^* -алгебры типа I_{fin} (конечная типа I), типа I_∞ (собственно бесконечная типа I), типа II_1 (конечная, непрерывная) и типа II_∞ (собственно бесконечная, полуконечная, непрерывная). Произвольная AW^* -алгебра разлагается по центральным проекторам в прямую сумму AW^* -алгебр, где слагаемые AW^* -алгебры имеют соответственно типы I_{fin} , I_∞ , II_1 , II_∞ и III.

Прежде чем доказывать основные результаты работы, приведем одно вспомогательное утверждение, представляющее самостоятельный интерес. Оно обобщает на случай вещественных AW^* -алгебр результат Штёрмера [14, теорема 2.8], доказанный для слабо замкнутых вещественных операторных алгебр.

ТЕОРЕМА 1. Пусть R – вещественная AW^* -алгебра такая, что её комплексификация $M = R + iR$ является (комплексной) AW^* -алгеброй. Если $R_S = \{x \in R: x^* = x\}$ абелева, то в M существует центральный проектор e такой, что eM – абелева AW^* -алгебра, $(\mathbb{I} - e)M$ – AW^* -алгебра типа I_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что в M существуют три ортогональных эквивалентных проектора p_1, p_2, p_3 , т.е. $p_i p_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, и $p_1 = uu^*$, $p_2 = u^*u$, $p_3 = vv^*$, $p_1 = v^*v$ для $u, v \in M$. В силу [17, теорема 1.21.12] существует неприводимое представление φ AW^* -алгебры M такое, что $\varphi(p_1) \neq 0$. Тогда, очевидно, $\varphi(p_2) \neq 0$ и $\varphi(p_3) \neq 0$. Действительно, поскольку φ – представление (т.е. гомоморфизм), то $\varphi(p_1) = \varphi(u)\varphi(u)^*$, $\varphi(p_2) = \varphi(u)^*\varphi(u)$, и потому если $\varphi(p_2) = 0$, то $\|\varphi(u)\|^2 = \|\varphi(u)^*\varphi(u)\| = 0$, т.е. $\varphi(u) = 0$. Тогда $\varphi(p_1) = \varphi(u)\varphi(u)^* = 0$. Противоречие.

Аналогично, $\varphi(p_3) \neq 0$. Итак, φ – неприводимое представление M такое, что $\varphi(p_i) \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, и все $\varphi(p_i)$ попарно ортогональны и попарно эквивалентны в $\varphi(M)$. Сужение φ на R является неприводимым представлением R , причем $\varphi(R)_S = \varphi(R_S)$ – абелева по условию. В силу [12, следствие 2.3] если на гильбертовом пространстве H действует неприводимая равномерно замкнутая вещественная $*$ -алгебра с единицей и ее эрмитова часть абелева, то эта алгебра изоморфна $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{Q}$ и $\dim H = 1$ либо $\dim H = 2$.

Применяя этот результат к алгебре $\varphi(R)$, получим, что $\dim H \leq 2$ и $\varphi(M)$ действует на двумерном (комплексном) гильбертовом пространстве $H + iH$. Это противоречит существованию в $\varphi(M)$ трех ортогональных эквивалентных проекторов $\varphi(p_i)$, $i = 1, 2, 3$. Следовательно, в M не может существовать более двух ортогональных проекторов. Поэтому в M существует центральный проектор e такой, что алгебра eM имеет тип I_1 (т.е. абелева), а $(\mathbb{I} - e)M$ имеет тип I_2 .

Одним из основных результатов статьи является

ТЕОРЕМА 2. Пусть R – вещественная AW^* -алгебра такая, что её комплексификация $M = R + iR$ является (комплексной) AW^* -алгеброй. Тогда R имеет тип I, если и только если M имеет тип I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = R + iR$, α – канонический инволютивный $*$ -антиавтоморфизм M , порождающий R , т.е. $\alpha(a + ib) = a^* + ib^*$, $a, b \in R$. Тогда

$$R = \{x \in M : \alpha(x) = x^*\}.$$

Через $C_R(e)$ (соответственно, $C_M(e)$) обозначим центральный носитель проектора $e \in R$ (соответственно, $e \in M$) относительно вещественной AW^* -алгебры R (соответственно, относительно комплексной AW^* -алгебры M). Если $e \in R$, то $C_R(e) = C_M(e)$. В самом деле, очевидно, $C_M(e) \leq C_R(e)$ (так как $R \subset M$). Пусть $c = C_M(e)$. Тогда $ce = e$, и, применяя α к этому равенству, получим $\alpha(e)\alpha(c) = \alpha(e)$, т.е. $e\alpha(c) = e$, так как $e \in A$. Это значит, что $\alpha(c) \geq e$, и потому $\alpha(c) \geq c$ (так как $\alpha(c)$ – также центральный проектор в M). Применяя α к последнему неравенству, получим $c \geq \alpha(c)$, т.е. $c = \alpha(c)$, а значит, $c \in R$, т.е. $C_R(e) = C_M(e)$ для $e \in R$.

Пусть R имеет тип I, т.е. существует проектор $e \in R$ с центральным носителем $C_R(e) = \mathbb{I}$ такой, что $(eRe)_S$ – абелева алгебра. Как отмечено выше, $C_M(e) = \mathbb{I}$.

В силу теоремы 1 eMe – алгебра типа I, т.е. существует абелев проектор f в eMe с $C_{eMe}(f) = e$ (так как e – единица в eMe). Тогда f является абелевым и в M , так как $fMf = fMe f$, и f – абелев в eMe .

Покажем, что $C_M(f) = \mathbb{I}$. Пусть p – центральный проектор в M такой, что $p \geq f$. Тогда $pe \geq pf = f$, т.е. $pe \geq f$. Однако pe лежит в центре eMe , и так как $C_{eMe}(f) = e$, то $pe = e$ и, следовательно, $p \geq e$. Это значит, что любой центральный проектор из M , мажорирующий f , мажорирует и e , т.е. $C_M(f) = C_M(e) = \mathbb{I}$. Таким образом, f – точный абелев проектор в M , т.е. M имеет тип I.

Обратно. Допустим, что R не типа I. Тогда в R существует ненулевой центральный проектор z такой, что zR – непрерывная AW^* -алгебра. Поскольку z является центральным и в M и zM имеет, очевидно, тип I, то, переходя при необходимости к рассмотрению алгебр zR и $zM = zR + izR$, можно сразу считать, что $z = \mathbb{I}$, т.е. вещественная AW^* -алгебра R непрерывна, а её комплексификация M является AW^* -алгеброй типа I.

Заметим, что если $e \in M$ – произвольный проектор, то проектор $g = e \vee \alpha(e)$ – наименьший проектор, мажорирующий e и $\alpha(e)$, – лежит в R . В самом деле, g совпадает с носителем эрмитова элемента $e + \alpha(e)$ (правый (RP) и левый (LP) носители для эрмитовых элементов совпадают [1], [11, § 3]), который лежит в R , так как

$$\alpha(e + \alpha(e)) = e + \alpha(e) = (e + \alpha(e))^*.$$

Следовательно,

$$g = s(e + \alpha(e)) = \text{RP}(e + \alpha(e)) = \text{LP}(e + \alpha(e)) \in R$$

для любого $e \in M$.

Далее, если $e \in M$ – ненулевой абелев проектор, то для канонического инволютивного $*$ -антиавтоморфизма α проектор $\alpha(e)$ также абелев в M . В частности, e и $\alpha(e)$ – конечные проекторы, и поэтому конечен проектор $g = e \vee \alpha(e) =$

$s(e + \alpha(e))$ [1, теорема 6.2], который принадлежит R . Переходя к рассмотрению AW^* -алгебр gRg и $gMg = gRg + igRg$, можно считать, что M – конечная AW^* -алгебра. Тогда, очевидно, R – также конечная AW^* -алгебра. В самом деле, если $p \sim q \leq p$ в R , то $p \sim q \leq p$ и относительно M , а потому $p = q$, т. е. проектор в R конечен.

Итак, не ограничивая общности, можно считать, что вещественная AW^* -алгебра R имеет тип Π_1 , а ее комплексификация M имеет тип I_{fin} .

В силу [10, следствие 4.6] вещественная AW^* -алгебра R удовлетворяет аксиоме (GC): для любых двух проекторов $p, q \in R$ существует центральный проектор $h \in R$ такой, что $hp \lesssim hq$, $(\mathbb{I} - h)p \gtrsim (\mathbb{I} - h)q$.

В силу [11, предложение 2, теорема 1, с. 78, 120] в непрерывной вещественной AW^* -алгебре R для любого проектора e и любого натурального числа n существуют n ортогональных эквивалентных проекторов $e_1, e_2, \dots, e_n \in R$ таких, что $e = e_1 + e_2 + \dots + e_n$.

Пусть $e \in R$ – ненулевой проектор с центральным носителем $C(e) = \mathbb{I}$, p – абелев проектор в M . Покажем, что $p \lesssim e$. В силу аксиомы (GC) существует центральный проектор $h \in M$ такой, что $hp \lesssim he$, $(\mathbb{I} - h)p \gtrsim (\mathbb{I} - h)e$. Поскольку p – абелев проектор, то $(\mathbb{I} - h)p$ также абелев. Следовательно, $(\mathbb{I} - h)e$ – также абелев проектор, поскольку он эквивалентен подпроектору абелева проектора. С другой стороны, в силу отмеченного выше свойства проекторов в непрерывной AW^* -алгебре R , $e = e_1 + e_2$, где e_1, e_2 – ортогональные эквивалентные проекторы в R и, значит, в M . Но тогда проектор $(\mathbb{I} - h)e$ – сумма двух ортогональных эквивалентных проекторов $(\mathbb{I} - h)e_1$ и $(\mathbb{I} - h)e_2$, что противоречит абелевости $(\mathbb{I} - h)e$. Следовательно, $(\mathbb{I} - h)e = 0$, т. е. $he = e$ или $h \geq e$. Поскольку h – центральный проектор, то $h \geq C(p) = \mathbb{I}$, т. е. $h = \mathbb{I}$. Следовательно, $p \lesssim e$.

В вещественной AW^* -алгебре R разложим единицу $\mathbb{I}$ в сумму двух ортогональных эквивалентных проекторов: $e_1 + e'_1$. Поскольку $C(e_1) = C(e'_1)$ [11, предложение 1], то $C(e_1) \geq e_1 + e'_1 = \mathbb{I}$, т. е. $C(e_1) = C(e'_1) = \mathbb{I}$. Далее разложим e'_1 в сумму двух ортогональных эквивалентных проекторов e_2 и e'_2 в R . Аналогично имеем $C(e_2) = C(e'_2) = C(e'_1) = \mathbb{I}$, причем $e_2 \leq e'_1 = \mathbb{I} - e_1$, т. е. $e_2 e_1 = 0$. Далее, разложим e'_2 в сумму ортогональных эквивалентных проекторов: $e'_2 = e_3 + e'_3$, и т. д. В итоге получим бесконечную последовательность ортогональных проекторов $e_1, e_2, e_3, \dots$ в R таких, что $C(e_i) = \mathbb{I}$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Как доказано выше, если p – ненулевой абелев проектор в M , то $p \lesssim e_i$ для всех $i = 1, 2, \dots$, т. е. $p \sim p_i \leq e_i$, $i = 1, 2, \dots$. Это значит, что в M существует бесконечная последовательность ортогональных проекторов $\{p_i\}$, каждый из которых эквивалентен p . Это противоречит конечности AW^* -алгебры M . Отсюда следует, что M не может быть непрерывной. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть R – вещественная AW^* -алгебра типа I, причем ее комплексификация $M = R + iR$ является AW^* -алгеброй. Тогда R является вещественной W^* -алгеброй в том и только в том случае, когда ее центр Z_R является вещественной W^* -алгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если R – вещественная W^* -алгебра, то, очевидно, ее центр Z_R также является W^* -алгеброй.

Обратно, пусть R – AW^* -алгебра типа I и ее центр является W^* -алгеброй. Тогда по теореме 2 $M = R + iR$ является AW^* -алгеброй типа I, причем ее центр

$Z_M = Z_R + iZ_R$ является W^* -алгеброй. По теореме Капланского [2, теорема 2] тогда M является W^* -алгеброй. Следовательно, R является вещественной W^* -алгеброй. Утверждение доказано.

ПРОБЛЕМА. *Можно ли в следствии снять условие, что $M = R + iR$ является AW^* -алгеброй?*

Теперь рассмотрим свойство конечности AW^* -алгебр.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть A – вещественная AW^* -алгебра такая, что её комплексификация $M = A + iA$ является (комплексной) AW^* -алгеброй. Тогда A конечна, если и только если M конечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть AW^* -алгебра $M = A + iA$ конечна. Тогда единица $\mathbb{I} \in M$ не эквивалентна (относительно M) никакому другому проектору в M и, значит, $\mathbb{I} \in A$ не может быть эквивалентна (относительно A) никакому другому проектору из A . Следовательно, A также конечна.

Обратно, пусть вещественная AW^* -алгебра A конечна. Покажем, что комплексная AW^* -алгебра M также конечна. Сначала покажем, что алгебра M не типа III. Предположим обратное, т.е. пусть M имеет тип III. Из [18, теорема 1] (см. также [19, следствие 1 теоремы 2]) следует, что в M существует ненулевой проектор e такой, что $e \lesssim f$ для любого ненулевого проектора $f \in M$ с $C(f) = \mathbb{I}$. Покажем, что такой же проектор существует и в

$$A = \{x \in M : \alpha(x) = x^*\}.$$

В самом деле, пусть $f \in M$ и $C(f) = \mathbb{I}$. Тогда

$$C(\alpha(f)) \geq \alpha(f) \Rightarrow \alpha(C(\alpha(f))) \geq f,$$

но так как $\alpha(C(\alpha(f)))$ лежит в центре M , то

$$\alpha(C(\alpha(f))) = \mathbb{I} \Rightarrow C(\alpha(f)) = \mathbb{I},$$

т.е. $C(f) = \mathbb{I} \Leftrightarrow C(\alpha(f)) = \mathbb{I}$. Следовательно, $e \lesssim \alpha(f)$, а значит, и $\alpha(e) \lesssim f$ для любого ненулевого проектора $f \in M$ с $C(f) = \mathbb{I}$.

Пусть $f = f_1 + f_2$, где f_1, f_2 – попарно ортогональные эквивалентные ненулевые проекторы. Заметим, что $C(f_1) = C(f_2) \geq f_1 + f_2 = f$, т.е. $C(f_1) = C(f_2) = C(f) = \mathbb{I}$. Из [1, теорема 5.4] имеем

$$e \vee \alpha(e) - e \sim \alpha(e) - e \wedge \alpha(e) \leq \alpha(e) \lesssim f_1,$$

а также $e \lesssim f_2$. В силу [1, лемма 5.2] получаем, что

$$e \vee \alpha(e) = (e \vee \alpha(e) - e) \vee e \lesssim f_1 + f_2 = f.$$

Итак, $e \vee \alpha(e) \lesssim f$ для любого ненулевого проектора $f \in M$ с $C(f) = \mathbb{I}$. Однако $e \vee \alpha(e) = s(e + \alpha(e))$ – носитель положительного элемента $e + \alpha(e)$, который принадлежит A , так как

$$\alpha(e + \alpha(e)) = e + \alpha(e) = [e + \alpha(e)]^*.$$

Таким образом, $e \vee \alpha(e) \in A$ и $e \vee \alpha(e) \lesssim f$ для любого ненулевого проектора $f \in M$ с $C(f) = \mathbb{I}$.

Переходя, при необходимости, к алгебрам gAg , $gMg = gAg + igAg$, где $g = e \vee \alpha(e)$, положим $g = \mathbb{I}$, т.е. $\mathbb{I} \sim f$ относительно M для любого ненулевого проектора $f \in M$ с $C(f) = \mathbb{I}$.

По теореме 2 мы можем предположить, что A – непрерывная вещественная AW^* -алгебра (т.е. типа Π_1). Тогда в силу [11, § 19, теорема 1] в A существует три ортогональных проектора $e_1, e_2, e_3 \in A$, $e_1 + e_2 + e_3 = \mathbb{I}$, которые попарно эквивалентны относительно A (обозначим $e_1 \sim_A e_2 \sim_A e_3$). Легко заметить, что $C(e_1) = C(e_2) = C(e_3) = \mathbb{I}$. В то же время, $e_1 \sim e_2 \sim e_3 \sim \mathbb{I}$ относительно M . В частности, $e_1 = u^*u$, $\mathbb{I} = uu^*$ для некоторого $u \in M = A + iA$. Пусть $u = x + iy$, где $x, y \in A$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} e_1 &= x^*x + y^*y, \\ \mathbb{I} &= xx^* + yy^*. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} e_1 &= s(x^*x) \vee s(y^*y) = r(x) \vee r(y), \\ \mathbb{I} &= s(xx^*) \vee s(yy^*) = l(x) \vee l(y), \end{aligned}$$

где $r(\cdot)$, $l(\cdot)$ и $s(\cdot)$ обозначают соответственно правый, левый проекторы и носитель. В силу [10, лемма 4.5] имеем $r(x) \sim_A l(x)$ и $r(y) \sim_A l(y)$. Далее, так как в A выполняется свойство (GC) [10, следствие 4.6], из [11, § 17, предложение 4, с. 105] для A мы имеем

$$\mathbb{I} - r(x) \sim_A \mathbb{I} - l(x).$$

Ввиду этого и свойства параллелограмма (P) в A [10, следствие 4.6] получим

$$\begin{aligned} \mathbb{I} - e_1 &\leq \mathbb{I} - r(x) \sim_A \mathbb{I} - l(x) \\ &= l(x) \vee l(y) - l(x) \sim_A l(y) - l(x) \wedge l(y) \\ &\leq l(y) \sim_A r(y) \leq e_1 \sim_A e_2. \end{aligned}$$

Итак, $\mathbb{I} - e_1 \lesssim_A e_2$, т.е. $e_2 + e_3 \lesssim_A e_2$, что противоречит конечности вещественной AW^* -алгебры A . Следовательно, M не может иметь тип III.

Покажем теперь, что M конечна. Предположим обратное, т.е. что M не конечна. Тогда если A содержит центральный проектор z , конечный относительно M , то $zM = zA + izA$ – конечная AW^* -алгебра. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что A не содержит ненулевых центральных проекторов, конечных в M .

Поскольку M не типа III, то M содержит ненулевой конечный проектор, например e . Заметим, что $\alpha(e)$ также конечен, иначе $\alpha(e) \sim f \leq \alpha(e)$, и тогда $e \sim \alpha(f) \leq e$. Из [1, теорема 6.2] следует, что $g = e \vee \alpha(e) = s(e + \alpha(e))$ также конечен и принадлежит A . Таким образом, A содержит ненулевой проектор g , конечный относительно M .

Рассмотрим максимальное семейство $\{g = g_1, g_2, \dots, g_n\}$ проекторов в A , которые попарно ортогональны и эквивалентны. Поскольку A конечна, то и все g_i конечны [11, § 17, предложение 4, (iii)]. Положим

$$f = \mathbb{I} - \sum_{i=1}^n g_i.$$

Так как в A выполняется свойство (GC), для некоторого центрального проектора z из A имеем

$$zf \lesssim_A zg, \quad (\mathbb{I} - z)f \gtrsim_A (\mathbb{I} - z)g.$$

Причем $z \neq 0$ ввиду максимальнойности семейства $\{g_i\}$. Поскольку g конечен, то из $zf \lesssim_A zg$ следует, что zf также конечен относительно A , а значит, и относительно M . Таким образом, центральный проектор

$$z = zf + \sum_{i=1}^n zg_i$$

из A конечен в M как сумма конечных в M проекторов. Но это противоречит нашему предположению. Следовательно, AW^* -алгебра M конечна. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Вещественная AW^* -алгебра A полуконечна (соответственно, собственно бесконечна, типа III) тогда и только тогда, когда комплексная AW^* -алгебра $M = A + iA$ полуконечна (соответственно, собственно бесконечна, типа III).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A полуконечна. Тогда в A существует ненулевой конечный проектор e с $C_A(e) = \mathbb{I}$, а значит, eAe – конечная вещественная AW^* -алгебра. По теореме 3 $eMe = eAe + ieAe$ – конечная AW^* -алгебра. Таким образом, e конечен относительно M и $C_M(e) = C_A(e) = \mathbb{I}$, т.е. M полуконечна.

Обратно, пусть M полуконечна. Тогда в M существует ненулевой конечный проектор e с $C_M(e) = \mathbb{I}$. Тогда, как мы уже видели, проектор $g = e \vee \alpha(e) \in A$ конечен в M , а значит, конечен и в A , причем $C_A(e) = C_M(e) = \mathbb{I}$, поскольку $g = e \vee \alpha(e) \geq e$. Следовательно, A полуконечна.

Пусть теперь A собственно бесконечна. Допустим, что M не собственно бесконечна, т.е. в M существует ненулевой центральный конечный проектор z . Тогда, очевидно, $\alpha(z)$ – центральный конечный проектор в M и, следовательно, $z \vee \alpha(z)$ – центральный конечный проектор в M . Но тогда $z \vee \alpha(z) \in A$ – центральный конечный проектор в A , что противоречит условию.

Обратно, пусть M собственно бесконечна. Допустим что A не собственно бесконечна, т.е. в A существует ненулевой центральный конечный проектор z . Но тогда z – центральный конечный проектор и в M , так как по теореме 3 $zM = zA + izA$ – конечная AW^* -алгебра. Это противоречит условию.

Наконец, пусть A типа III (чисто бесконечна). Если M содержит ненулевой конечный проектор e , то $\alpha(e)$ также конечен в M и, значит, проектор $e \vee \alpha(e)$ также конечен в M и лежит в A . Но тогда проектор $e \vee \alpha(e)$ также конечен и относительно A , что противоречит условию. Следовательно, M типа III.

Обратно, пусть M типа III. Если A содержит ненулевой конечный проектор e , то eAe – конечная вещественная AW^* -алгебра с комплексификацией $eMe = eAe + ieAe$ типа III, что противоречит теореме 3. Следовательно, A типа III. Утверждение доказано.

Отсюда и из теорем 2, 3 вытекает следующий основной результат работы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть A – вещественная AW^* -алгебра, причем $M = A + iA$ – (комплексная) AW^* -алгебра. Тогда:

- (i) A имеет тип $I_{\text{fin}} \Leftrightarrow M$ имеет тип I_{fin} ;
- (ii) A имеет тип $I_{\infty} \Leftrightarrow M$ имеет тип I_{∞} ;
- (iii) A имеет тип $II_1 \Leftrightarrow M$ имеет тип II_1 ;
- (iv) A имеет тип $II_{\infty} \Leftrightarrow M$ имеет тип II_{∞} ;
- (v) A имеет тип $III \Leftrightarrow M$ имеет тип III .

Второй и третий авторы выражают свою признательность Институту прикладной математики Боннского университета (Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn) за гостеприимство.

Список литературы

1. *Kaplansky I.* Projections on Banach algebras // Ann. Math. 1951. V. 53. P. 235–249.
2. *Kaplansky I.* Algebras of type I // Ann. Math. 1952. V. 56. P. 460–472.
3. *Kaplansky I.* Modules over operator algebras // Amer. J. Math. 1953. V. 75. P. 839–858.
4. *Dixmier J.* Sur certains espaces considérés par M. H. Stone // Summa Brasil. Math. 1951. V. 2. P. 151–182.
5. *Takenouchi O.* A non- W^* , AW^* -factor // Lect. Notes Math. 1978. V. 650. P. 135–139.
6. *Dyer J.* Concerning AW^* -algebras // Notices Amer. Math. Soc. 1970. V. 17. P. 788.
7. *Чилин В. И.* Частично упорядоченные баэровские инволютивные алгебры // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Т. 27. М.: ВИНТИ, 1985. С. 99–128.
8. *Hamana M.* Infinite, σ -finite, non- W^* , AW^* -factors // Intern. J. Math. 2001. V. 12. P. 81–95.
9. *Li B. R.* Real Operator Algebras. Singapore–New-Jersey–London–Hong-Kong: World Scientific, 2002.
10. *Albeverio S., Ayupov Sh. A., Abduvaitov A. H.* On Real AW^* -algebras. Preprint № 37, SFB 611. Bonn, 2002. 18 p.
11. *Berberian S. K.* Baer *-rings. Berlin–Heidelberg–N.Y.: Springer-Verlag, 1972.
12. *Stormer E.* Jordan algebras of type I // Acta Math. 1966. V. 115. № 3–4. P. 165–184.
13. *Stormer E.* On anti-automorphisms of von Neumann algebras // Pacific J. Math. 1967. V. 21. P. 349–370.
14. *Stormer E.* Irreducible Jordan algebras of self-adjoint operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 130. P. 153–166.
15. *Ayupov Sh. A.* Extension of traces and type criterions for Jordan algebras of self-adjoint operators // Math. Zeitschrift. 1982. V. 181. P. 253–268.
16. *Ayupov Sh. A.* A new proof of existence of traces on Jordan operator algebras and real von Neumann algebras // J. Funct. Anal. 1989. V. 84. P. 312–321.
17. *Sakai S.* C^* -algebras and W^* -algebras. Berlin: Springer, 1971.
18. *Chilin V. I.* Topological Baer ordered *-algebras // Proc. Conf. Topology and Measure III (Vitte/Hiddensee, GDR, 1980). Greifswald, 1982. Part 1. P. 33–47.
19. *Чилин В. И.* Эквивалентность проекторов в AW^* -факторах типа III // Мат. анализ и геометрия: Сб. статей № 623. Ташкент: ТашГУ, 1980. С. 78–83.

Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn

Институт математики АН Республики Узбекистан

Национальный университет Узбекистана

E-mail: albeverio@uni-bonn.de

e.ayupov@hotmail.com

abduvaitov@mail.ru

Поступило в редакцию

07.06.2003