Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Дудаков, Трансляционная теорема для теорий I -сводимых алгебраических систем, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 5, 67–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/im503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 04:27:58

УДК 510.652

С. М. Дудаков

Трансляционная теорема для теорий I -сводимых алгебраических систем

Исследуются I -сводимые алгебраические системы, а также теории I -сводимых систем. Показано, что отсутствие независимой формулы в теории не является необходимым условием для I -сводимости её моделей даже для расширений арифметики Пресбургера. В частности, существует целый класс теорий – расширений арифметики Пресбургера, в которых имеется независимая формула и которые имеют I -сводимые модели. Показано, что из I -сводимости малой алгебраической системы автоматически следует, что каждая формула эквивалентна в ней некоторой P -ограниченной формуле, следовательно, для теорий таких систем выполнена трансляционная теорема.

§ 1. Введение

В настоящей работе мы исследуем I -сводимые алгебраические системы, которые были введены в [1]¹, а также теории I -сводимых систем. В работе [1] было показано, что каждая теория, в которой отсутствует независимая формула, имеет I -сводимые модели. Основной целью работ [7] и [9] было доказательство того, что для определенного класса теорий (имеющих I -сводимые модели, в которых каждая формула эквивалентна P -ограниченной формуле) выполняется трансляционная теорема (см. [2], [3]), т. е. любой локально генерический относительно конечных состояний запрос в расширенной сигнатуре эквивалентен некоторому запросу в ограниченной сигнатуре.

Однако для доказательства трансляционной теоремы в [7] и [9] использовано не только свойство I -сводимости моделей, но и еще одно условие: каждая формула должна быть эквивалентна P -ограниченной формуле. В работе [1] показано, что существование таких моделей следует из отсутствия в теории независимой формулы (см. [6]). Мы показываем, что отсутствие независимой формулы в теории не является необходимым условием для I -сводимости ее моделей даже для расширений арифметики Пресбургера. В частности, существует целый класс теорий – расширений арифметики Пресбургера, в которых имеется независимая формула и которые имеют I -сводимые модели.

Основная задача настоящей работы – доказательство того, что из I -сводимости малой алгебраической системы следует, что каждая формула эквивалентна в ней

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04-01-00015).

¹В работе [1] это свойство называется P -сводимостью и используется как техническое средство для доказательства трансляционной теоремы в теориях без независимой формулы; I является неразличимой (англ. Indiscernible) последовательностью в алгебраической системе, а P – именем предиката, который выделяет эту последовательность.

некоторой P -ограниченной формуле, значит, для теорий таких систем выполнена трансляционная теорема. В §2 мы даем основные определения, в §3 приводим примеры теорий с независимой формулой, которые имеют I -сводимые модели, доказывая, таким образом, что наш результат превосходит результат работы [1]. Поскольку построение примера и доказательство его корректности являются достаточно громоздкими, для удобства изложения §3 разбит на пункты. Все определения, которые используются в §3 и нигде далее, даны в п. 3.1.

В §4 мы исследуем общие свойства малых I -сводимых систем, в §5 вводим вспомогательные технические конструкции и устанавливаем их свойства, а в §6 доказываем основные теоремы.

§2. Основные определения

Основные понятия теории моделей, которые используются в статье, изложены в работе [5]. Пусть Σ – произвольная сигнатура, а P – одноместный предикатный символ, не входящий в Σ . Далее мы не будем специально об этом упоминать.

Для определения I -сводимости необходимо понятие P -ограниченной формулы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. Формула первого порядка φ сигнатуры (Σ, P) называется P -ограниченной, если она или не содержит символ P (т.е. является формулой в сигнатуре Σ), или построена из P -ограниченных формул с помощью булевых связок и P -ограниченных кванторов.

Теперь можно определить свойство I -сводимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [1]. Пусть I – плотно упорядоченное множество без конечных элементов в системе $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ , которое является неразличимой в $\mathfrak{A}$ последовательностью. Система $\mathfrak{A}$ обладает свойством I -сводимости, если для любой P -ограниченной формулы $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ существует бескванторная порядковая формула $\psi_\varphi(\bar{z}, \bar{y})$ такая, что для любого набора $\bar{m} \in A$ существует набор $\bar{c}_\varphi(\bar{m}) \in I$ такой, что

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\forall \bar{y} \in P)(\varphi(\bar{m}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi_\varphi(\bar{c}_\varphi(\bar{m}), \bar{y})).$$

I -сводимость будем называть *эффективной*, если формула ψ_φ строится по формуле φ эффективно.

Как доказано в работе [7] (см. также [1]), для I -сводимости системы достаточно, чтобы условие I -сводимости выполнялось лишь для формул сигнатуры Σ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [1]. Пусть $\mathfrak{A}$ – I -сводимая алгебраическая система сигнатуры Σ с носителем A . Система $\mathfrak{A}$ называется *малой*, если $\mathfrak{A}$ является $|I|^+$ -насыщенной, а множество I является плотным полным порядком².

В работе [1] доказано, что для всякой системы $\mathfrak{A}$ и неразличимой последовательности $I \subseteq A$ таких, что $\mathfrak{A}$ является I -сводимой, существуют система $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$ и неразличимая последовательность $I' \subseteq A'$, имеющая такой же тип в $\mathfrak{A}'$, как и I в $\mathfrak{A}$, такие, что система $\mathfrak{A}'$ является малой I' -сводимой.

²Эта терминология, введенная в [1], представляется не совсем удачной, так как по смыслу определения “малым” является множество I , а система $\mathfrak{A}$ является “большой”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [6]. Формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ называется *независимой* в теории T , если в теории T для любого натурального числа N существуют наборы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_N$ длины $|\bar{x}|$ и для любого $K \subseteq \{1, \dots, N\}$ существует набор $\bar{b}_K$ длины $|\bar{y}|$ такой, что для любого $i = 1, \dots, N$

$$i \in K \Leftrightarrow \varphi(\bar{a}_i, \bar{b}_K).$$

Неформально это означает, что можно найти сколь угодно большие конечные множества наборов, из которых формула способна выделить произвольное подмножество. В работе [1] показано, что из отсутствия в теории независимой формулы следует I -сводимость некоторых ее моделей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [1], [7], [9]. Пусть I – плотно упорядоченное множество без конечных элементов в системе $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ , являющееся неразличимой в $\mathfrak{A}$ последовательностью. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *тотально I -сводимой*, если для любой формулы $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ сигнатуры (Σ, P) (не обязательно P -ограниченной) существует бескванторная порядковая формула $\psi_\varphi(\bar{z}, \bar{y})$ такая, что для любого $\bar{m} \in A$ существует набор $\bar{c}_\varphi(\bar{m}) \in I$ такой, что

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\forall \bar{y} \in P)(\varphi(\bar{m}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi_\varphi(\bar{c}_\varphi(\bar{m}), \bar{y})).$$

В работе [1] показано, что тотальная I -сводимость некоторой модели теории (как и I -сводимость) является следствием отсутствия в этой теории независимой формулы.

Пусть T – теория сигнатуры Σ . Пусть Ξ – конечная предикатная сигнатура, не имеющая общих символов с Σ , за исключением порядка $\leq$. При рассмотрении моделей сигнатуры $\Sigma \cup \Xi$ мы всегда считаем, что отношения порядка Σ и Ξ согласованы, следовательно, противоречий не возникает.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [2], [3]. Запрос (формула первого порядка) в сигнатуре $\Sigma \cup \Xi$ называется *расширенным*, в сигнатуре Ξ – *ограниченным*. Если $\mathfrak{A}$ – модель T , $\mathfrak{B}$ – интерпретация символов из Ξ над $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B}$ называется *состоянием* в $\mathfrak{A}$. Состояние $\mathfrak{B}$ называется *конечным*, если интерпретации всех символов из Ξ конечны. Запрос называется *локально генерическим относительно конечных состояний* (или просто *локально генерическим*), если из истинности запроса в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ следует его истинность в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ для любого изоморфного $\mathfrak{B}$ состояния $\mathfrak{C}$. Если каждый локально генерический расширенный запрос эквивалентен на конечных состояниях некоторому ограниченному запросу, то это свойство теории называется *трансляционным результатом*³ (в теории выполняется *трансляционная теорема*).

В работах [7] и [9] доказано, что из тотальной I -сводимости алгебраической системы следует трансляционная теорема для теории этой системы. Основным результатом настоящей работы – доказательство того, что каждая малая I -сводимая алгебраическая система является тотально I -сводимой. Таким образом, мы показываем, что I -сводимость какой-либо модели теории является достаточным условием для трансляционного результата.

³ Англ. The collapse result.

§ 3. Примеры теорий с независимой формулой, которые имеют I -сводимые модели

В этом параграфе мы покажем, что существуют теории, которые имеют I -сводимые модели, и, вместе с тем, в этих теориях существует независимая формула.

3.1. Определения. В арифметике Пресбургера выразимо умножение на любую рациональную константу (с дальнейшим округлением). Далее всюду строчные греческие буквы α, β (возможно, с индексами) будут обозначать фиксированные рациональные числа.

Мы рассматриваем модели теории $\text{Th}(\omega, +)$, т.е. теории натуральных чисел со сложением. Заметим, что в теории определимы порядок:

$$x \leq y \Leftrightarrow (\exists u)(x + u = y),$$

и все натуральные числа:

$$\begin{aligned} x = 0 &\Leftrightarrow (\forall y)(y \geq x), \\ x = 1 &\Leftrightarrow (\forall y)(y < x \rightarrow y = 0), \\ x = n &\Leftrightarrow x = \underbrace{1 + \dots + 1}_n. \end{aligned}$$

Рассмотрим элементарные расширения системы $(\omega, +)$. Напомним (см., например, [4]), что всякое элементарное расширение $(\omega, +)$ состоит из начального фрагмента, который изоморфен $(\omega, +)$, и множества классов, каждый из которых порядково изоморфен множеству всех целых чисел. Эти классы образуют плотный линейный порядок, в котором начальный фрагмент является наименьшим элементом.

Рассмотрим произвольную нестандартную модель $\mathfrak{A} = (A, +^{\mathfrak{A}})$ теории $\text{Th}(\omega, +)$. Пусть P – одноместный предикатный символ и $P^{\mathfrak{A}}$ – его интерпретация такая, что $P^{\mathfrak{A}} \subseteq \omega$. Предположим, что предикат $P^{\mathfrak{A}}$ неограничен на ω , т.е. выполняется

$$(\forall x)(\exists y > x)(P(x) \rightarrow P(y)) \wedge (\exists x)P(x).$$

Тогда в теории $\text{Th}(\mathfrak{A}, P^{\mathfrak{A}})$ определимо множество натуральных чисел ω :

$$x \in \omega \Leftrightarrow (\exists y \geq x)P(y).$$

Определим отношение $\cong$ следующим образом:

$$x \cong y \Leftrightarrow (\exists z \in \omega)(x + z = y \vee y + z = x).$$

Неформально это означает, что x и y принадлежат одному классу.

Введем отношения:

$$\begin{aligned} x \ll y &\Leftrightarrow x < y \wedge \neg(x \cong y), \\ x \leq y &\Leftrightarrow x < y \vee x \cong y. \end{aligned}$$

Первое означает, что x лежит в меньшем чем y классе, а второе – в меньшем или в том же самом.

Очевидно, что символы ω и $\cong$, которые мы определили, выражаются через отношения $\ll$ и $\leq$:

$$\begin{aligned} x \in \omega &\Leftrightarrow x \leq 0, \\ x \cong y &\Leftrightarrow x \leq y \wedge y \leq x. \end{aligned}$$

Отрицание перед отношениями $\ll$ и $\leq$ убирается точно так же, как для плотного линейного порядка:

$$\begin{aligned} \neg(x \ll y) &\Leftrightarrow y \leq x, \\ \neg(x \leq y) &\Leftrightarrow y \ll x. \end{aligned}$$

Будем использовать также вычитание, когда оно имеет смысл для натуральных чисел, и умножение на фиксированное рациональное число. Все эти отношения определимы, а добавление к сигнатуре определимых символов не увеличивает выразительных возможностей, поэтому далее мы будем включать все упомянутые символы в состав сигнатуры.

Пусть $I \subseteq A$. Пусть $\mathcal{T}$ – множество всевозможных термов сигнатуры Σ с одной свободной переменной x . Множество I называется *термально изолированным* в $\mathfrak{A}$ (см. [8]), если для любых термов $t_1(x), t_2(x) \in \mathcal{T}$ имеет место один из двух случаев:

- 1) существует константа $M_{t_2} \in \omega$ такая, что для всех $a \in I$ выполнено неравенство $t_2(a) \leq M_{t_2}$;
- 2) для любых элементов $a, b \in I$ таких, что $a < b$, выполнено $t_1(a) < t_2(b)$.

Известно (см., например, [8]), что существуют элементарные расширения $(\omega, +)$, в которых есть термально изолированные неразличимые множества, и если $(\mathfrak{A}, I)$ – такая система и $(\mathfrak{B}, J) \equiv (\mathfrak{A}, I)$, то J будет термально изолированным неразличимым в $\mathfrak{B}$.

Класс изоляции элемента a – это множество $[a]$:

$$[a] = \bigcup \{[t_1(a), t_2(a)]: t_1, t_2 \in \mathcal{T} \wedge t_1(a) \notin \omega\},$$

где $[x, y]$ – обычный отрезок. Если множество $I \subseteq A$ термально изолировано, то для всех $x, y \in I$ таких, что $x \neq y$, классы изоляции $[x]$ и $[y]$ не пересекаются.

3.2. Свойства предикатных обогащений начального фрагмента нестандартных моделей. Пусть теория $T = \text{Th}(\omega, +, (P_i)_i)$, где P_i – произвольные предикаты, допускает элиминацию кванторов. Рассмотрим $\mathfrak{A} \succ (\omega, +)$ – элементарное (строгое) расширение арифметики Пресбургера. Мы будем изучать теорию $T' = \text{Th}(\mathfrak{A}, (P_i)_i)$.

Прежде всего докажем, что теория T' также допускает элиминацию кванторов.

ЛЕММА 1. *Теория T' допускает элиминацию кванторов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если предикат P_l ограничен на множестве ω , то

$$P_l(\bar{x}) \Leftrightarrow \bigvee_{\bar{c} \in P_l} \bar{x} = \bar{c}.$$

Следовательно, все такие предикаты можно выбросить, не уменьшив выразительной силы теории.

Пусть хотя бы один предикат из P_l неограничен на ω . Рассмотрим произвольную формулу

$$\varphi \sim (\exists x) \left((t_1 \leq \alpha x \leq t_2) \wedge (s_1 \ll_1^* \beta x \ll_2^* s_2) \wedge \left(\bigwedge_i (\neg)^{\varepsilon_i} P_{j_i}(\bar{r}_i) \right) \right).$$

Здесь $\varepsilon_i \in \{0; 1\}$, $(\neg)^\varepsilon$ означает $\neg$, если $\varepsilon = 1$, или пустое слово, если $\varepsilon = 0$. С помощью $\ll_k^*$ здесь и далее обозначается одно из отношений $\ll$ или $\leq$.

Достаточно рассматривать только формулы такого вида, потому что если имеется несколько неравенств, например

$$t_{11} \leq \alpha_i x \wedge \dots \wedge t_{1n} \leq \alpha_n x,$$

то можно рассмотреть n случаев вида “ t_{1i_0}/α_{i_0} – наибольший из t_{1i}/α_i ”, взять дизъюнкцию по всем этим случаям, и тогда в каждом отдельном случае указанная конъюнкция будет эквивалентна $t_{1i_0} \leq \alpha_{i_0} x$ (если все α_i положительны).

Если вхождений $P_{j_i}(\bar{r}_i)$ нет, то квантор удаляется аналогично арифметике Пресбургера.

Для любого y выполнено

$$y \leq 0 \vee y \gg 0.$$

Также очевидна эквивалентность

$$\left(\bigvee_k y^{(k)} \gg 0 \right) \wedge \neg P_i(\bar{y}) \Leftrightarrow \bigvee_k y^{(k)} \gg 0$$

и то, что следующая формула является тождественно ложной:

$$\left(\bigvee_k y^{(k)} \gg 0 \right) \wedge P_i(\bar{y}).$$

Здесь $y^{(k)}$ – k -я компонента набора $\bar{y}$. Следовательно, можно считать, что если формула φ содержит $P_{j_i}(\bar{r}_i)$, то для всех $r_i^{(k)}$ выполнено $r_i^{(k)} \leq 0$. Если это не так, то все сводится к случаю с меньшим количеством вхождений P_{j_i} . Выберем произвольное k такое, что

$$r_i^{(k)} \sim p_i^{(k)} + \alpha_i^{(k)} x,$$

где $p_i^{(k)}$ не содержит x , и обозначим

$$y = p_i^{(k)} + \alpha_i^{(k)} x.$$

Тогда, заменив всюду x на $(y - p_i^{(k)})/\alpha_i^{(k)}$, вместо φ мы получим формулу φ' :

$$(\exists y \in \omega) \left((t'_1 \leq \alpha' y \leq t'_2) \wedge (s'_1 \ll_1^* \beta' y \ll_2^* s'_2) \wedge \left(\bigwedge_i (\neg)^{\varepsilon_i} P_{j_i}(\bar{r}'_i) \right) \right),$$

где каждый $r_i'^{(k)}$ имеет вид $p_i'^{(k)} + \alpha_i'^{(k)} y$. Упростим её.

Если $t'_1 \gg 0$, то формула ложна. Если $t'_2 \gg 0$, то неравенство $\alpha' y \leq t'_2$ является истинным и его можно исключить из формулы, не изменив ее истинности. Таким образом, можно считать, что t'_1 и t'_2 – натуральные числа.

Поскольку $y \in \omega$, то $\beta'y \in \omega$ и двойное неравенство

$$s'_1 \ll_1^* \beta'y \ll_2^* s'_2$$

сводится к неравенству

$$s'_1 \ll_1^* 0 \ll_2^* s'_2,$$

которое не содержит y и выносится из-под квантора.

Так как для всех $r_i^{(k)}$ выполнено $r_i^{(k)} \leq 0$ и $y \in \omega$, то и $p_i^{(k)} \in \omega$.

Итак, мы выяснили, что можно ограничиться только случаем, когда:

- 1) $t'_1, t'_2 \in \omega$;
- 2) неравенства $\ll$ и $\leq$ для y отсутствуют;
- 3) $p_i^{(k)} \in \omega$ для всех i, k .

Однако эта ситуация означает, что мы находимся внутри модели $(\omega, +, (P_i)_i)$ и формула φ' эквивалентна бескванторной по свойству исходной теории T .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если теория T допускает эффективную элиминацию кванторов, то элиминация кванторов в теории T' тоже выполняется эффективно.*

ЛЕММА 2. *Пусть $\mathfrak{B}$ – произвольная модель T' . Пусть I – произвольное термально изолированное множество в $\mathfrak{B}$, все элементы которого больше $\omega^{\mathfrak{B}}$ ($\omega^{\mathfrak{B}}$ – интерпретация символа ω в $\mathfrak{B}$ – может не совпадать с множеством натуральных чисел). Если*

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i d_i \in \omega^{\mathfrak{B}}$$

для каких-либо попарно различных d_i , то $\alpha_i = 0$ для $i = 1, \dots, k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение не верно, и для некоторых α_i (не равных нулю), $i = 1, \dots, k$, имеем

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i d_i \in \omega^{\mathfrak{B}}.$$

Выберем d_{i_0} – самое большое из d_i . Если $k = 1$, то

$$\alpha_1 d_1 \in \omega^{\mathfrak{B}}$$

и, следовательно, $d_1 \in \omega^{\mathfrak{B}}$, что противоречит тому, что все элементы I не входят в $\omega^{\mathfrak{B}}$.

Пусть $k \geq 2$. Если d_{i_1} – второе по величине среди d_i , то по свойству термальной изолированности получим

$$d_{i_0} \gg \gamma d_{i_1}$$

для любого натурального γ . Пусть

$$\gamma \geq \frac{\sum_{i=1}^k |\alpha_i|}{|\alpha_{i_0}|}.$$

Тогда

$$d_{i_0} \gg \gamma d_{i_1} \geq \frac{\sum_{i=1}^k |\alpha_i|}{|\alpha_{i_0}|} d_{i_1} \geq \frac{\sum_{i \neq i_0} |\alpha_i| d_i}{|\alpha_{i_0}|}.$$

Следовательно, $|\alpha_{i_0}| d_{i_0} \gg \sum_{i \neq i_0} |\alpha_i| d_i$. Получаем

$$\left| \sum_{i=1}^k \alpha_i d_i \right| \geq |\alpha_{i_0}| d_{i_0} - \sum_{i \neq i_0} |\alpha_i| d_i \gg 0,$$

что противоречит предположению.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i d_i \cong \sum_{i=1}^k \alpha_i d'_i$$

для каких-либо $d_i, d'_i \in I$, причем d_i и d'_i упорядочены по убыванию:

$$\begin{aligned} d_1 &> d_2 > \dots > d_k, \\ d'_1 &> d'_2 > \dots > d'_k, \end{aligned}$$

$\alpha_i \neq 0$ для $i = 1, \dots, k$, то $d_i = d'_i$ для всех i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если это не так, то

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i (d_i - d'_i) \in \omega^{\mathfrak{B}}.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству леммы 2.

3.3. I -сводимость. Напомним, что предикаты P_i определены на множестве ω так, что теория $T = \text{Th}(\omega, +, (P_i)_i)$ допускает элиминацию кванторов и $\mathfrak{A} \succ (\omega, +)$. Теперь можно доказать, что некоторые модели теории $T' = \text{Th}(\mathfrak{A}, (P_i)_i)$ являются I -сводимыми для подходящего I .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{B}$ – произвольная модель T' с носителем B . Пусть $I \subseteq B$ – произвольное термально изолированное неразличимое множество в $\mathfrak{B}$, все элементы которого больше $\omega^{\mathfrak{B}}$. Пусть система $\mathfrak{B}$ является малой. Тогда система $(\mathfrak{B}, (P_i)_i)$ является I -сводимой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную формулу $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$. Необходимо доказать, что существует порядковая формула ψ_φ такая, что для всякого $\bar{m} \in B$ существуют такие $\bar{c}_\varphi(\bar{m}) \in I$, что

$$(\mathfrak{B}, I) \models (\forall \bar{d} \in I)(\varphi(\bar{m}, \bar{d}) \leftrightarrow \psi_\varphi(\bar{c}_\varphi(\bar{m}), \bar{d})).$$

Согласно лемме 1 можно считать, что формула φ бескванторная. Покажем, что формула ψ_φ существует для каждой атомной формулы φ , откуда будет следовать утверждение в общем случае.

Атомная формула может иметь один из трех видов:

$$P_i\left(\sum \alpha_i d_i + \sum \beta_i m_i\right), \quad \sum \alpha_i d_i \ll^* \sum \beta_i m_i, \quad \sum \alpha_i d_i <^* \sum \beta_i m_i.$$

Здесь мы полагаем, что $\bar{d}$ – попарно различные элементы I , упорядоченные по убыванию, а $\bar{m}$ – произвольные элементы B . Мы будем рассматривать только строгие неравенства, нестрогие рассматриваются аналогично.

Для каждого терма t , который входит в $P_i(\bar{t})$, добавим дизъюнкцию

$$t \leq 0 \vee 0 \leq t$$

и раскроем скобки. Как и ранее, если $0 \leq t$ для некоторого терма t из $\bar{t}$, то формула $P_i(\bar{t})$ ложна, поэтому можно считать, что для всех термов t , которые входят в формулы вида $P_i(\bar{t})$, выполнено $t \leq 0$.

Согласно следствию 2 для каждого терма вида

$$t \sim \sum \alpha_i d_i + \sum \alpha_i m_i$$

существует не более одного набора $\bar{d} \in I$, для которого $t(\bar{d}) \cong 0$. Следовательно, на множестве I формула $t \leq 0$ или ложна для любых $\bar{d}$, или эквивалентна формуле $\bar{d} = \bar{d}^*$ для некоторого набора $\bar{d}^*$.

Если формула $\bar{t} \cong \bar{0}$ ложна на I для любых $\bar{d}$, то любая формула $P_i(\bar{t})$ тоже ложна. В противном случае существует только один набор $\bar{d}^*$, на котором формула $\bar{t} \cong \bar{0}$ истинна. Тогда в $P_i(\bar{t})$ достаточно подставить значение термов $\bar{t}$ на этом наборе. Таким образом, для каждого $\bar{m} \in A$ можно найти константы $c_1, c_2, \bar{d}^* \in I$ такие, что для всех $\bar{d} \in I$ будет выполнено

$$P_i(\bar{t}(\bar{d})) \Leftrightarrow c_1 = c_2 \wedge \bar{d} = \bar{d}^*.$$

Второй случай:

$$\sum \alpha_i d_i \leq \sum \beta_i m_i.$$

Это неравенство эквивалентно тому, что

$$\left(\sum \alpha_i d_i < \sum \beta_i m_i \right) \wedge \neg \left(\sum \alpha_i d_i \cong \sum \beta_i m_i \right).$$

Однако формула

$$\sum \alpha_i d_i \cong \sum \beta_i m_i$$

или ложна на I для любых $\bar{d}$, или эквивалентна $\bar{d} = \bar{d}^*$ для некоторого $\bar{d}^*$.

Третий случай:

$$\sum \alpha_i d_i < \sum \beta_i m_i.$$

Положим

$$M = \sum \beta_i m_i.$$

Поскольку множество I термально изолировано, то существует не более одного элемента $d^* \in I$ такого, что $M \in [d^*]$.

Покажем, что всякая формула указанного выше вида, если $\bar{d}$ пробегают I , а M фиксировано, эквивалентна порядковой формуле с константами из I индукцией по количеству d независимо от M . Если d отсутствуют, то это очевидно.

Предположим, что в сумме $\sum \alpha_i d_i$ все элементы d_i различны. В противном случае, приводя подобные члены, мы получим другую формулу с меньшим числом d . Будем считать, что $M > 0$. Другие случаи ничем принципиально не отличаются.

Сначала рассмотрим случай, когда $M \in [d^*]$ для некоторого $d^* \in I$.
Итак, рассмотрим неравенство вида

$$\sum \alpha_i d_i < M.$$

1) Если $d_1 > d^*$, то $\sum \alpha_i d_i > M$ при $\alpha_1 > 0$ и $\sum \alpha_i d_i < M$ при $\alpha_1 < 0$.
Следовательно,

$$\sum \alpha_i d_i < M \Leftrightarrow \alpha_1 < 0.$$

2) Если $d_1 < d^*$, то неравенство $\sum \alpha_i d_i < M$ истинно.

3) Если $d_1 = d^*$, то, перенеся d_1 в правую часть, мы получим

$$\sum_{i>1} \alpha_i d_i < M - \alpha_1 d^*.$$

По индукционному предположению эта формула эквивалентна порядковой формуле $\psi'(\bar{c}, \bar{d}')$ для некоторых констант $\bar{c}$ и для всех $\bar{d}'$.

Тогда неравенство

$$\sum \alpha_i d_i < M$$

эквивалентно формуле

$$(d_1 > d^*) \wedge (\alpha_1 < 0) \vee (d_1 < d^*) \vee (d_1 = d^* \wedge \psi'(\bar{c}, \bar{d}')).$$

Теперь предположим, что $M \notin [d]$ для всех $d \in I$. Возможны следующие варианты: $M < d$ для всех $d \in I$, $M > d$ для всех $d \in I$ или $d_1 < M < d_2$ для некоторых $d_1, d_2 \in I$. В первом случае

$$\sum \alpha_i d_i < M \Leftrightarrow \alpha_1 < 0$$

для любых $\bar{d}$, во втором случае $\sum \alpha_i d_i < M$ для любых $\bar{d}$.

Пусть теперь M находится в “середине” I . Разобьем I на два класса, меньших M и больших M , элементов. Оба класса непусты, не пересекаются, их объединение равно I . Поскольку I является плотным полным порядком, то или в меньшем классе существует наибольший элемент, или в большем существует наименьший. Рассмотрим первый случай. Пусть d^* – наибольший элемент I , который меньше M . Тогда неравенство

$$\sum \alpha_i d_i < M$$

эквивалентно формуле

$$d_1 \leq d^* \vee (d_1 > d^* \wedge \alpha_1 < 0).$$

Аналогично во втором случае.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если теория T допускает эффективную элиминацию кванторов, то система $(\mathfrak{B}, (P_i)_i)$ будет эффективно I -сводимой.

ТЕОРЕМА 2. Существуют обогащения арифметики Пресбургера, которые имеют независимую формулу и при этом имеют эффективно I -сводимые модели.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное обогащение системы счетным числом предикатов $T = \text{Th}(\omega, +, (P_i)_i)$. Пусть T'' – морлиевское обогащение теории T , т.е. для всякой формулы $\varphi(\bar{x})$ добавлен предикатный символ R_φ и теория T'' содержит формулу

$$(\forall \bar{x})(R_\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x})).$$

Тогда T'' допускает эффективную элиминацию кванторов. Кроме того, T'' имеет модель $(\omega, +, (P_i)_i, (R_\varphi)_\varphi)$. Таким образом, T'' удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, выбрав нестандартную модель $\mathfrak{A}$, можно построить эффективно I -сводимую модель для теории $\text{Th}(\mathfrak{A}, (P_i)_i, (R_\varphi)_\varphi)$.

Пусть предикат P :

$$P(x, y, z) \Leftrightarrow xy = z,$$

определяет умножение на натуральных числах. Тогда в теории $T = \text{Th}(\omega, +, P)$ есть независимая формула. Пусть $(\omega, +, P, (R_\varphi)_\varphi)$ – морлиевское обогащение T . Согласно теоремам 1, 2 теория $T' = \text{Th}(\mathfrak{A}, P, (R_\varphi)_\varphi)$ обладает всеми указанными в теореме свойствами. Заметим, что если в теории T имеется независимая формула φ , то эта формула останется независимой и в теории T' .

§ 4. Свойства I -сводимых алгебраических систем

Рассмотрим произвольную малую алгебраическую систему $\mathfrak{A}$ сигнатуры (Σ, P) , которая обладает свойством I -сводимости, I – плотно упорядоченное множество без конечных элементов, являющееся неразличимой в $\mathfrak{A}$ последовательностью.

Для доказательства тотальной I -сводимости системы $\mathfrak{A}$ покажем, что для каждой P -ограниченной формулы $\varphi(x, \bar{y})$ можно найти P -ограниченную формулу $\varphi'(\bar{y})$ такую, что

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\forall \bar{y})((\exists x)\varphi(x, \bar{y}) \leftrightarrow \varphi'(\bar{y})).$$

Сначала установим одно простое свойство порядковых формул.

ЛЕММА 3. Пусть $\psi(\bar{z}, \bar{y})$ – произвольная бескванторная порядковая формула. Если наборы $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ одинаково упорядочены, их элементы, лежащие вне отрезка $[a, b]$, совпадают (т.е. если $d_1^{(i)} \notin [a, b]$ или $d_2^{(i)} \notin [a, b]$, то $d_1^{(i)} = d_2^{(i)}$) и

$$\psi(\bar{c}, \bar{d}_1) \leftrightarrow \psi(\bar{c}, \bar{d}_2),$$

то на отрезке $[a, b]$ лежит хотя бы один элемент набора $\bar{c}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если внутри этого отрезка нет ни одного элемента $\bar{c}$, то $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ имеют одинаковый порядковый тип над $\bar{c}$, следовательно, формулы $\psi(\bar{c}, \bar{d}_1)$ и $\psi(\bar{c}, \bar{d}_2)$ должны быть эквивалентны.

Из леммы 3 и P -сводимости сразу получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ – произвольная P -ограниченная формула, $\bar{m} \in A$, $a, b, \bar{d}_1, \bar{d}_2 \in I$, $a < b$. Если наборы $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ одинаково упорядочены, их элементы, лежащие вне отрезка $[a, b]$, совпадают и

$$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi(\bar{m}, \bar{d}_1) \leftrightarrow \varphi(\bar{m}, \bar{d}_2),$$

то на отрезке $[a, b]$ лежит хотя бы один элемент набора $\bar{c}_\varphi(\bar{m})$.

Всякая P -ограниченная формула, очевидно, эквивалентна P -ограниченной предваренной формуле. Однако верно более сильное утверждение: можно добиться того, чтобы в этой предваренной формуле P -ограниченные кванторы образовывали приставку вида $\exists\forall$.

ЛЕММА 4 (см. также [1]). *Всякая P -ограниченная формула эквивалентна предваренной P -ограниченной формуле, в которой P -ограниченные кванторы образуют приставку вида $\exists\forall$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(\bar{y}, \bar{w})$ – произвольная формула сигнатуры Σ . Тогда

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\forall \bar{y})(\exists \bar{z} \in P)(\forall \bar{w} \in P)(\varphi(\bar{y}, \bar{w}) \leftrightarrow \psi_\varphi(\bar{z}, \bar{w})).$$

Пусть $Q_1, \dots, Q_n$ – произвольные кванторные символы. Тогда

$$\begin{aligned} & (Q_1 w_1 \in P) \dots (Q_n w_n \in P) \varphi(\bar{y}, \bar{w}) \\ & \Leftrightarrow (\exists \bar{z} \in P)((\forall \bar{w} \in P)(\varphi(\bar{y}, \bar{w}) \leftrightarrow \psi_\varphi(\bar{z}, \bar{w}))) \\ & \wedge (Q_1 w_1 \in P) \dots (Q_n w_n \in P) \psi_\varphi(\bar{z}, \bar{w}). \end{aligned}$$

Поскольку ψ_φ – порядковая формула, $\bar{z} \in I$, а порядок на I плотный, то все кванторы в формуле

$$(Q_1 w_1 \in P) \dots (Q_n w_n \in P) \psi_\varphi(\bar{z}, \bar{w})$$

элиминируются.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если система $\mathfrak{A}$ является эффективно I -сводимой, то приведенное в лемме 4 построение эффективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула ψ_φ строится эффективно, а теория плотного линейного порядка без конечных элементов допускает эффективную элиминацию кванторов.

Итак, мы имеем P -ограниченную формулу вида

$$(\exists \bar{z} \in P)(\forall \bar{w} \in P)\varphi(x, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}),$$

где φ – формула в сигнатуре Σ . Очевидно, что формула

$$(\exists x)(\exists \bar{z} \in P)(\forall \bar{w} \in P)\varphi(x, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w})$$

эквивалентна формуле

$$(\exists \bar{z} \in P)(\exists x)(\forall \bar{w} \in P)\varphi(x, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}).$$

Следовательно, достаточно показать, что любая формула вида

$$(\exists x)(\forall \bar{w} \in P)\varphi(x, \bar{y}, \bar{w})$$

эквивалентна ограниченной.

ЛЕММА 5. Пусть φ – формула в сигнатуре Σ . Формула

$$(\exists x)(\forall \bar{w} \in P)\varphi(x, \bar{y}_0, \bar{w})$$

истинна в системе $(\mathfrak{A}, I)$ тогда и только тогда, когда для любого конечного множества $S \subseteq I$ существует такое $x_S \in A$, что для любого набора $\bar{s} \in S$

$$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi(x_S, \bar{y}_0, \bar{s}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость утверждения очевидна. Докажем достаточность.

Рассмотрим множество формул

$$Y = \{\varphi(x, \bar{y}_0, \bar{d}) : \bar{d} \in I\}.$$

Множество Y конечно совместно, потому что если $Y_1 \subseteq Y$ – конечное подмножество Y , то в качестве S можно взять все элементы всех наборов $\bar{d}$ из формул множества Y_1 , и тогда, по условию, найдется x_S , удовлетворяющий всем формулам из Y_1 . Следовательно, Y – конечно совместное множество формул над множеством констант

$$C = I \cup \{y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(|\bar{y}|)}\}.$$

Очевидно, что множество C имеет мощность, меньшую, чем $|I|^+$. Поскольку система $\mathfrak{A}$ является $|I|^+$ -насыщенной, то множество Y реализуется на некотором элементе x_0 . Следовательно, будем иметь

$$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi(x_0, \bar{y}_0, \bar{d})$$

для всех $\bar{d} \in I$, из чего следует

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\exists x)(\forall \bar{w} \in P)\varphi(x, \bar{y}_0, \bar{w}),$$

что и требовалось доказать.

§ 5. (k, l) -формулы

Итак, мы рассматриваем произвольную формулу $\varphi(x, \bar{y}, \bar{w})$ в сигнатуре Σ . Для нее существует порядковая формула $\psi_\varphi(\bar{z}, \bar{w})$ такая, что для всяких $x_0, \bar{y}_0 \in A$ существует набор $\bar{c}_\varphi(x_0, \bar{y}_0) \in I$ такой, что

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\forall \bar{w} \in P)(\varphi(x_0, \bar{y}_0, \bar{w}) \leftrightarrow \psi_\varphi(\bar{c}_\varphi(x_0, \bar{y}_0), \bar{w})).$$

Пусть $L = |\bar{c}_\varphi(x, \bar{y})|$, $N = |\bar{w}|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $k \geq 0$, $l \geq 1$ – натуральные числа. Через $\langle v, \bar{w} \rangle_i$ мы обозначаем набор, который получается из набора $\bar{w}$, если в него подставить элемент v вместо i -го элемента $\bar{w}$. *Обобщенной (k, l) -формулой* мы будем называть формулу $\tilde{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})$, где $|\bar{v}| = k$, такую, что:

1) элементы наборов $\bar{u}$ и $\bar{v}$ образуют строго возрастающие последовательности, которые не содержат общих элементов;

2) между двумя соседними элементами $\bar{v}$ находится или один элемент набора $\bar{u}$, или не менее l элементов $\bar{u}$; если некоторые элементы $\bar{u}$ находятся левее v_1 (правее v_k или если $k = 0$), то на них распространяется то же требование: либо должен существовать один такой элемент, либо их должно быть не меньше l ;

3) для любого набора $\bar{w}$ длины N , составленного из элементов набора $\bar{u}$, выполнена формула $\varphi(x, \bar{y}, \bar{w})$;

4) для каждого элемента v набора $\bar{v}$ существуют набор $\bar{w}$ длины N , составленный из элементов $\bar{u}$, и номер $i \in [1, N]$, для которых выполнено $\neg\varphi(x, \bar{y}, \langle v, \bar{w} \rangle_i)$.

Части набора $\bar{u}$, которые располагаются между двумя соседними элементами набора $\bar{v}$ (а также те, которые меньше v_1 или больше v_k), будем для краткости называть *сериями*. Таким образом, в обобщенной (k, l) -формуле каждая серия состоит или из одного элемента (такие серии мы будем называть *точечными*), или из не менее l элементов. Если все неточечные серии имеют длину ровно l , то такую формулу будем называть просто (k, l) -*формулой*.

Через $\bar{u}_i$ обозначим серию набора $\bar{u}$, расположенную между v_i и v_{i+1} , а через $u_i^{(j)}$ — j -й элемент этой серии.

Через $\mathbf{Set}(\bar{r})$ здесь и далее обозначим множество, составленное из всех элементов набора $\bar{r}$.

Следующие лемма и следствие из нее являются ключевыми в доказательстве. Они устанавливают, что если обобщенная (k, l) -формула выполнима, то k не может быть сколь угодно большим.

ЛЕММА 6. Если $k \geq N + 2$, обобщенная (k, l) -формула $\tilde{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})$ истинна в $(\mathfrak{A}, I)$ на элементах $(x_0, \bar{y}_0, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in I$, $\bar{b} \in I$, и $i \leq k - N - 1$, то в каждом промежутке вида $[b_i, a_{i+N-1}^{(1)}]$ есть хотя бы один элемент набора $\bar{c}_\varphi(x_0, \bar{y}_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть обобщенная (k, l) -формула $\tilde{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})$ истинна в $(\mathfrak{A}, I)$ на элементах $(x_0, \bar{y}_0, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in I$, $\bar{b} \in I$. Пусть b_i — произвольный элемент набора $\bar{b}$, $i \leq k - N - 1$. Выберем набор $\bar{d} \in \mathbf{Set}(\bar{a})$ такой, что

$$(\mathfrak{A}, I) \models \neg\varphi(x_0, \bar{y}_0, \langle b_i, \bar{d} \rangle_j)$$

для некоторого j .

Построим новый набор $\bar{d}^*$ из набора $\langle b_i, \bar{d} \rangle_j$ следующим образом. Элемент b_i заменим на $a_i^{(1)}$. Если в наборе $\langle b_i, \bar{d} \rangle_j$ элемент $a_i^{(1)}$ уже встречался, то заменим его на следующий за ним по порядку элемент из $\mathbf{Set}(\bar{a})$ и т.д. Мы произведем не больше N замен, следовательно, все новые элементы $\bar{d}^*$ не превосходят $a_{i+N-1}^{(1)}$. Очевидно, что наборы $\bar{d}^*$ и $\langle b_i, \bar{d} \rangle_j$ одинаково упорядочены, и вне отрезка $[b_i, a_{i+N-1}^{(1)}]$ они совпадают.

Поскольку $\bar{d}^* \in \mathbf{Set}(\bar{a})$, то

$$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi(x, \bar{y}_0, \bar{d}^*).$$

Согласно следствию 4 это и означает наличие хотя бы одного элемента набора $\bar{c}_\varphi(x_0, \bar{y}_0)$ на указанном отрезке.

СЛЕДСТВИЕ 6. Существует константа R такая, что для всех $k > R$ все обобщенные (k, l) -формулы $\tilde{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})$ не выполнимы ни на каких наборах $(x_0, \bar{y}_0, \bar{a}, \bar{b})$, если $\bar{a} \in I$, $\bar{b} \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем

$$R = N(L + 1).$$

Предположим, что $k \geq R + 1$ и некоторая (k, l) -формула $\tilde{\varphi}$ выполнима на некотором наборе указанного вида. Согласно лемме на всяком отрезке вида $[b_i, a_{i+N-1}^{(1)}]$ имеется элемент набора $\bar{c}_{\varphi}(x_0, \bar{y}_0)$. Таким образом, на каждом из $L + 1$ отрезков

$$[b_1, a_N^{(1)}], [b_{N+1}, a_{2N}^{(1)}], \dots, [b_{LN+1}, a_{(L+1)N}^{(1)}]$$

существует не меньше одного элемента набора $\bar{c}_{\varphi}(x_0, \bar{y}_0)$. Но эти отрезки не пересекаются, а различных элементов в наборе $\bar{c}_{\varphi}(x_0, \bar{y}_0)$ не больше L . Противоречие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $\bar{a}_i$ – некоторая серия. Тогда через $[\bar{a}_i]$ мы обозначаем отрезок, в точности покрывающий все элементы этой серии, т. е. если

$$\bar{a}_i = (a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(l)}),$$

то

$$[\bar{a}_i] = [a_i^{(1)}, a_i^{(l)}].$$

Если $\tilde{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})$ – обобщенная формула, а $\bar{a}$ – некоторый набор, имеющий такую же длину, как $\bar{u}$, и упорядоченный соответствующим образом, то через $[\bar{a}]_{\tilde{\varphi}}$ мы будем обозначать объединение всех отрезков $[\bar{a}_i]$, где $\bar{a}_i$ – все серии, на которые разбивается набор $\bar{a}$ в формуле $\tilde{\varphi}$.

На множестве (обобщенных) (k, l) -формул введем отношение “быть расширением”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Формулу (обобщенную формулу) $\tilde{\varphi}_i(x, \bar{y}, \bar{u}', \bar{v}')$ мы называем *расширением формулы (обобщенной формулы) $\tilde{\varphi}_j(x, \bar{y}, \bar{u}'', \bar{v}'')$* , если для наборов $(\bar{a}', \bar{b}') \in I$ и $(\bar{a}'', \bar{b}'') \in I$, которые упорядочены по требованиям формул $\tilde{\varphi}_i$ и $\tilde{\varphi}_j$ соответственно, существует сохраняющее порядок разностное отображение

$$f: \mathbf{Set}(\bar{a}'') \cup \mathbf{Set}(\bar{b}'') \rightarrow [\bar{a}']_{\tilde{\varphi}_i} \cup \mathbf{Set}(\bar{b}')$$

такое, что

$$f[\mathbf{Set}(\bar{b}'')] \subseteq \mathbf{Set}(\bar{b}'),$$

и для каждой серии $\bar{a}_i''$ существует серия $\bar{a}_j'$, для которой

$$f[\mathbf{Set}(\bar{a}_i'')] \subseteq [\bar{a}_j'].$$

В частности, каждая (обобщенная) формула является расширением самой себя. Очевидно также, что отношение “быть расширением” транзитивно, так как I плотно упорядочено.

Зафиксируем константу R , существование которой следует из следствия 6. Пусть

$$Q = \max\{N(2L + 1), R(N - 1) + 2\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. k -формулой (обобщенной) мы будем называть (k, Q) -формулу (обобщенную), в которой существует хотя бы одна неточечная серия (заметьте, что $Q \geq 2$, поэтому определение корректно).

Очевидно, что для каждого $k \geq 1$ существует $9 \cdot 2^{k-1} - 4$ различных k -формул (каждая из $k - 1$ “внутренних” серий $\bar{u}$ или является точечной, или не является таковой, серии левее v_1 или правее v_k могут отсутствовать, быть точечными или иметь длину Q , четыре формулы содержат только точечные серии). Для $k = 0$ существует только одна k -формула. Всего различных выполнимых k -формул не больше, чем

$$K = 1 + \sum_{k=1}^R (9 \cdot 2^{k-1} - 4),$$

т.е. их количество заранее ограничено константой K .

Отношение “быть расширением” является частичным порядком на множестве k -формул. Будем считать, что для $k \in [0, R]$ все k -формулы $\tilde{\varphi}_i$ упорядочены по i так, что если $\tilde{\varphi}_i$ является расширением $\tilde{\varphi}_j$, то $i \geq j$. Пусть $\tilde{\varphi}_0, \dots, \tilde{\varphi}_{K-1}$ – все эти формулы. Поскольку мы не рассматриваем формул, которые содержат только точечные серии, то $\tilde{\varphi}_0$ не содержит никаких v и содержит одну серию $\bar{u}$ длины Q .

Из следующих лемм вытекает, что при некоторых преобразованиях выполнимые (обобщенные) k -формулы остаются выполнимыми, но приобретают необходимые нам свойства.

ЛЕММА 7. Пусть $\tilde{\varphi}_i(x, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})$ – обобщенная k -формула, которая выполняется на $(x_0, \bar{y}_0, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in I$, $\bar{b} \in I$. Тогда в любую неточечную серию $\bar{a}_i$ можно добавить некоторый элемент $a^* \in I$ и формула, полученная аналогичным добавлением новой переменной u^* , будет истинной на вновь полученном наборе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную неточечную серию $\bar{a}_i$ из $\bar{a}$. Она содержит не менее $N(2L + 1)$ элементов. Поскольку число различных элементов в наборе $\bar{c}_\varphi(x_0, \bar{y}_0)$ не больше L , то существует не более $2L + 1$ различных способов расположения каждой точки относительно этого набора. Следовательно, среди Q элементов серии $\bar{a}_i$ есть как минимум N различных элементов $a'_1 < \dots < a'_N$, которые одинаково расположены относительно $\bar{c}_\varphi(x_0, \bar{y}_0)$. Рассмотрим любой новый элемент $a^* \in [a'_1, a'_N] \cap I$, вставим его в $\bar{a}$ и получим $\bar{a}^*$. Построим новую формулу $\tilde{\varphi}_j(x, \bar{y}, \bar{u}^*, \bar{v})$ аналогичным образом, добавив новую переменную u^* к уже существующим $\bar{u}$. Пусть набор $\bar{d}^*$ составлен из элементов нового множества $\mathbf{Set}(\bar{a}^*)$. Тогда он имеет такой же порядковый тип над $\bar{c}_\varphi(x_0, \bar{y}_0)$, как и некоторый набор $\bar{d}$, который составлен из элементов старого множества $\mathbf{Set}(\bar{a})$. Следовательно,

$$\psi_\varphi(\bar{c}_\varphi(x_0, \bar{y}_0), \bar{d}^*) \Leftrightarrow \psi_\varphi(\bar{c}_\varphi(x_0, \bar{y}_0), \bar{d}).$$

Из этого получаем истинность $\varphi(x_0, \bar{y}_0, \bar{d}^*)$. Следовательно, формула $\tilde{\varphi}_j$ истинна на $(x_0, \bar{y}_0, \bar{a}^*, \bar{b})$, если формула $\tilde{\varphi}_i$ была истинна на наборе $(x_0, \bar{y}_0, \bar{a}, \bar{b})$.

Итерируя применение этой леммы, получаем

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $\tilde{\varphi}_i$ – обобщенная k -формула и выполнена формула $\tilde{\varphi}_i(x_0, \bar{y}_0, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in I$, $\bar{b} \in I$. Тогда все неточечные серии можно увеличить до произвольной длины таким образом, что обобщенная k -формула, полученная аналогичным увеличением количества переменных $\bar{u}$, будет истинной на вновь полученном наборе.

ЛЕММА 8. Пусть обобщенная k -формула $\tilde{\varphi}_i(x, \bar{y}, \bar{a}, \bar{b})$ выполнена на наборе $(x_0, \bar{y}_0, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in I$, $\bar{b} \in I$. Пусть $G \subseteq I$ – конечное множество и для любого $\bar{g} \in G \cup \text{Set}(\bar{a})$ выполнено $\varphi(x_0, \bar{y}_0, \bar{g})$. Тогда существуют обобщенная k' -формула $\tilde{\varphi}_j$ – расширение $\tilde{\varphi}_i$ – и наборы $\bar{a}' \in I$, $\bar{b}' \in I$ такие, что:

- 1) выполнена формула $\tilde{\varphi}_j(x_0, \bar{y}_0, \bar{a}', \bar{b}')$;
- 2) $\text{Set}(\bar{a}) \cup G \subseteq \text{Set}(\bar{a}')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала включим каждый элемент g множества G в подходящую серию $\bar{a}_i$, т. е. такую, чтобы между элементами $\bar{a}_i$ и g не было никаких b . Возможно, что придется создать новые серии, если какой-то элемент $g \in G$ меньше b_1 или больше b_k , а соответствующие серии отсутствуют.

После этих действий может оказаться, что появились новые неточечные серии длины, меньшей Q , и мы должны избавиться от таких серий. Будем делать это пошагово.

На каждом шаге рассмотрим произвольную “короткую” серию $\bar{a}_i$. Если в $[\bar{a}_i]$ существует элемент $h \in I$ такой, что для некоторого набора $\bar{d} \in \text{Set}(\bar{a})$ имеет место $\neg\varphi(x_0, \bar{y}_0, \langle h, \bar{d} \rangle_n)$ для некоторого n , то берем такое h в качестве нового элемента b , а серию $\bar{a}_i$ расщепляем на две более короткие. Если же таких элементов нет, то любой элемент из $[\bar{a}_i] \cap I$ можно добавить к серии $\bar{a}_i$. Аналогичные изменения производим и с формулой: в первом случае добавляем новую переменную v , во втором – новое u .

Поскольку количество элементов v в любой выполнимой обобщенной k -формуле не может быть больше R , то количество шагов, на которых в формулу добавляется новое v , ограничено этим числом. Следовательно, рано или поздно любую “короткую” серию мы сможем довести до необходимой длины Q или эта серия будет разбита на точечные.

Очевидно, что новая формула будет расширением старой, так как все серии старой формулы остались, неточечные серии старой формулы только увеличили свою длину и, возможно, появились новые серии.

ЛЕММА 9. Пусть обобщенная k -формула $\tilde{\varphi}_i(x, \bar{y}, \bar{a}, \bar{b})$ выполнена на наборе $(x_0, \bar{y}_0, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in I$, $\bar{b} \in I$. Тогда существуют k' -формула $\tilde{\varphi}_j$ – расширение $\tilde{\varphi}_i$ – и наборы $\bar{a}' \in I$, $\bar{b}' \in I$ такие, что:

- 1) выполнено $\tilde{\varphi}_j(x_0, \bar{y}_0, \bar{a}', \bar{b}')$;
- 2) $\text{Set}(\bar{a}) \subseteq [\bar{a}']_{\tilde{\varphi}_j}$;
- 3) для любого набора $\bar{e} \in [\bar{a}']_{\tilde{\varphi}_j} \cap I$ выполнено $\varphi(x_0, \bar{y}_0, \bar{e})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство будем проводить в два этапа: на первом этапе мы построим обобщенную k' -формулу, для которой будут выполнены условия 1)–3), а на втором – “сократим” эту обобщенную k' -формулу до k' -формулы.

Если указанные условия выполняются для $\tilde{\varphi}_j = \tilde{\varphi}_i$, $k' = k$, $\bar{a}' = \bar{a}$, $\bar{b}' = \bar{b}$, то переходим ко второй части доказательства.

Допустим, что это не так, и условие 3) не выполняется. Заметим, что условия 1) и 2) выполнены. Покажем, как построить $\tilde{\varphi}_j$, $\bar{a}'$ и $\bar{b}'$, чтобы условие 3) стало выполняться.

Пусть для некоторого $\bar{e} \in [\bar{a}]_{\tilde{\varphi}_i} \cap I$ выполнено $\neg\varphi(x_0, \bar{y}_0, \bar{e})$. Поочередно будем добавлять в $\bar{a}$ те элементы e из $\bar{e}$, для которых формула $\varphi(x_0, \bar{y}_0, \langle e, \bar{d} \rangle_n)$ истинна для любых $\bar{d} \in \text{Set}(\bar{a})$ и всех n , в формулу вносим аналогичные изменения. Очевидно, что все элементы из $\bar{e}$ мы добавить не сможем, следовательно, на некотором

шаге для любого e из оставшихся элементов $\bar{e}$ существует такое $\bar{d} \in \mathbf{Set}(\bar{a})$, что выполняется $\neg\varphi(x_0, \bar{y}_0, \langle e, \bar{d} \rangle_n)$ для некоторого n .

Согласно лемме 7 и следствию 7 можно считать, что между двумя элементами $\bar{b}$ находится или один элемент $\bar{a}$, или не меньше, чем $Q + 1$ элементов.

Если существует $h \in I$, отделенный от существующих элементов $\bar{b}$ ровно одним элементом $\bar{a}$, и для h существует $\bar{d} \in \mathbf{Set}(\bar{a})$ такой, что $\neg\varphi(x_0, \bar{y}, \langle h, \bar{d} \rangle_n)$ для некоторого n , то этот элемент добавим в качестве нового b . Получим новые наборы $\bar{a}''$ и $\bar{b}''$, обобщенную формулу $\tilde{\varphi}_m$, которая выполняется на этих наборах, и перейдем к поиску новых возможных b . Заметим только, что все элементы старого $\bar{a}$ попадают в новое $\bar{a}''$ и все неточечные серии сохранили достаточную длину. Следовательно, формула $\tilde{\varphi}_m$ – расширение $\tilde{\varphi}_i$, $\mathbf{Set}(\bar{a}) \subseteq \mathbf{Set}(\bar{a}'')$.

Предположим теперь, что любой $h \in I$, отделенный от $\bar{b}$ ровно одним элементом $\bar{a}$, удовлетворяет условию $\varphi(x_0, \bar{y}_0, \langle h, \bar{d} \rangle_n)$ для любых $\bar{d} \in \mathbf{Set}(\bar{a})$ и всех n . В частности, это означает, что все оставшиеся элементы e отделены от каждого из элементов b не менее чем двумя элементами $\bar{a}$. Предположим, что существует такой $h' \in I \cap [\bar{a}]_{\tilde{\varphi}_i}$, для которого найдется $\bar{d} \in \mathbf{Set}(\bar{a})$ такой, что $\neg\varphi(x_0, \bar{y}, \langle h', \bar{d} \rangle_n)$ для некоторого n , и h' отделен от всех элементов $\bar{b}$ не менее чем Q элементами $\bar{a}$. В этом случае добавляем этот h' в формулу в качестве нового b , а серию, внутри которой он находится, расщепляем на две неточечные, то же самое делаем с формулой. Очевидно, что новые серии будут иметь достаточную длину, новая формула станет расширением старой и $\mathbf{Set}(\bar{a}) \subseteq \mathbf{Set}(\bar{a}'')$.

Если ни одно из двух предыдущих условий не выполнено, то для каждого оставшегося элемента e существует соседний с ним элемент b , отделенный от e менее чем Q , но не менее чем двумя элементами $\bar{a}$. Вставим в этот промежуток новый элемент h набора $\bar{a}$, для которого выполняется $\varphi(x_0, \bar{y}_0, \langle h, \bar{d} \rangle_n)$ при любых $\bar{d} \in \mathbf{Set}(\bar{a})$ и всех n . Такой h , как мы уже доказали, существует. Для нового набора $\bar{a}''$ будем иметь $\mathbf{Set}(\bar{a}) \subseteq \mathbf{Set}(\bar{a}'')$. Заметим, что мы не будем выполнять более $2QN$ шагов такого вида подряд, так как когда мы их выполним, будут созданы условия для выполнения шага предыдущего вида – каждый элемент e окажется отделен от соседних b не менее чем Q элементами $\bar{a}$.

Поскольку на каждом шаге мы получаем выполнимую формулу, то $|\bar{b}''| \leq R$. Отсюда следует, что общее количество шагов ограничено константой $(2QN + 1)R$. Следовательно, на каком-либо этапе мы не сможем найти очередного $\bar{e} \in [\bar{a}'']_{\tilde{\varphi}_m} \cap I$, что и будет означать выполнение условия 3).

Мы получили обобщенную k' -формулу $\tilde{\varphi}_m$, которая удовлетворяет условиям 1)–3). Теперь необходимо преобразовать ее в k' -формулу, удалив “лишние” элементы из $\bar{a}''$. Элементы $\bar{b}''$ оставим без изменений: $\bar{b}' = \bar{b}''$.

Для каждого элемента b из набора $\bar{b}'$ требуется не более $N - 1$ элемента набора $\bar{a}''$ – те $\bar{d} \in \mathbf{Set}(\bar{a}'')$, вместе с которыми получаем $\neg\varphi(x_0, \bar{y}_0, \langle b, \bar{d} \rangle_n)$ для некоторого n (d_n , естественно, включать не нужно). Поскольку общее количество элементов $\bar{b}$ не превышает R , то для истинности некоторой k' -формулы необходимо не больше

$$R(N - 1) \leq Q - 2$$

элементов $\bar{a}''$. Для каждой серии оставляем ровно столько элементов, оставляем также по два крайних элемента каждой серии, а остальные элементы из середины серий $\bar{a}''$ можно удалить. Получим k' -формулу $\tilde{\varphi}_j$ и набор $\bar{a}'$, для которых

выполнено $[\bar{a}']_{\tilde{\varphi}_j} = [\bar{a}'']_{\tilde{\varphi}_m}$. Следовательно, $\mathbf{Set}(\bar{a}'') \subseteq [\bar{a}']_{\tilde{\varphi}_j}$, а так как $\mathbf{Set}(\bar{a}) \subseteq \mathbf{Set}(\bar{a}'')$, то $\mathbf{Set}(\bar{a}) \subseteq [\bar{a}']_{\tilde{\varphi}_j}$.

Итак, мы получили новые $\bar{a}'$, $\bar{b}'$ и $\tilde{\varphi}_j$ такие, что $\tilde{\varphi}_j(x_0, \bar{y}_0, \bar{a}', \bar{b}')$.

Очевидно, что k' -формула $\tilde{\varphi}_j$ является расширением обобщенной k -формулы $\tilde{\varphi}_i$.

Комбинируя две предыдущие леммы, получаем

ЛЕММА 10. Пусть k -формула $\tilde{\varphi}_i(x, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})$ выполнена на наборе $(x_0, \bar{y}_0, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in I, \bar{b} \in I$. Пусть $G \subseteq I$ – конечное множество и для любого $\bar{g} \in G \cup \mathbf{Set}(\bar{a})$ выполнено $\varphi(x_0, \bar{y}, \bar{g})$. Тогда существуют k' -формула $\tilde{\varphi}_j$ – расширение $\tilde{\varphi}_i$ – и наборы $\bar{a}' \in I, \bar{b}' \in I$ такие, что:

- 1) выполнено $\tilde{\varphi}_j(x_0, \bar{y}_0, \bar{a}', \bar{b}')$;
- 2) $\mathbf{Set}(\bar{a}) \cup G \subseteq [\bar{a}']_{\tilde{\varphi}_j}$;
- 3) для любого набора $\bar{e} \in [\bar{a}']_{\tilde{\varphi}_j} \cap I$ выполнено $\varphi(x_0, \bar{y}_0, \bar{e})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала воспользуемся леммой 8, получим обобщенную k'' -формулу $\tilde{\varphi}_m(x_0, \bar{y}_0, \bar{a}'', \bar{b}'')$ такую, что $G \cup \mathbf{Set}(\bar{a}) \subseteq \mathbf{Set}(\bar{a}'')$.

После этого по лемме 9 получим искомую k' -формулу $\tilde{\varphi}_j$ и наборы $\bar{a}', \bar{b}'$.

СЛЕДСТВИЕ 8. Если в условиях леммы 10 для некоторого $\bar{e} \in [\bar{a}]_{\tilde{\varphi}_i} \cap I$ выполнено $\neg\varphi(x_0, \bar{y}_0, \bar{e})$, то для построенной формулы $\tilde{\varphi}_j$ имеет место $j > i$.

§6. Основные результаты

Теперь можно построить P -ограниченную формулу, которая будет эквивалентна формуле

$$(\exists x)(\forall \bar{w} \in P)\varphi(x, \bar{y}, \bar{w}).$$

Определим формулы $\tilde{\varphi}'_i(x, \bar{y}, \bar{a}, \bar{b})$ обратной индукцией по i . Если $i = K - 1$, то $\tilde{\varphi}'_i \sim \tilde{\varphi}_i$. Пусть для $j > i$ формулы $\tilde{\varphi}'_j$ определены. По индукции считаем, что формулы $(\exists x)\tilde{\varphi}'_j$ для $j > i$ эквивалентны P -ограниченным, следовательно, для каждой формулы $\tilde{\varphi}'_j$ существует порядковая бескванторная формула ψ_j такая, что

$$(\forall \bar{y})(\exists \bar{f}_j \in P)(\forall \bar{a}, \bar{b} \in P)((\exists x)\tilde{\varphi}'_j(x, \bar{y}, \bar{a}, \bar{b})) \leftrightarrow \psi_j(\bar{f}_j, \bar{a}, \bar{b}).$$

Если длина набора $\bar{f}_j$ равна n , то длину набора $\bar{e}_j$ полагаем равной $(n + 1)(R + 2)$, а формула $\Theta_j(\bar{f}_j, \bar{e}_j)$ утверждает, что в каждом из открытых промежутков, на которые разбивает I набор $\bar{f}_j$ (будем называть их $\bar{f}_j$ -промежутками), содержится как минимум $R + 2$ различных элементов $\bar{e}_j$. Очевидно, можно считать, что Θ_j – порядковая бескванторная формула. Обозначим с помощью $\tilde{\varphi}'_i$ следующую формулу:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}'_i(x, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}) &\sim (\exists \bar{f}_K, \dots, \bar{f}_{i+1} \in P) \\ &\left(\left(\bigwedge_{j=i+1}^{K-1} (\forall \bar{u}_j, \bar{v}_j \in P)((\exists x)\tilde{\varphi}'_j(x, \bar{y}, \bar{u}_j, \bar{v}_j)) \leftrightarrow \psi_j(\bar{f}_j, \bar{u}_j, \bar{v}_j)) \right) \right. \\ &\quad \wedge (\exists \bar{e}_K, \dots, \bar{e}_{i+1} \in P) \left(\left(\bigwedge_{j=i+1}^{K-1} \Theta_j(\bar{f}_j, \bar{e}_j) \right) \right. \\ &\quad \left. \left. \wedge \left(\bigwedge_{\bar{g} \in G_i \cup \mathbf{Set}(\bar{u})} \varphi(x, \bar{y}, \bar{g}) \right) \wedge \tilde{\varphi}_i(x, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}) \right) \right). \end{aligned}$$

Здесь G_i – множество, составленное из всех переменных наборов $\bar{f}_K, \bar{e}_K, \dots, \bar{f}_{i+1}, \bar{e}_{i+1}$. Ясно, что формула $(\exists x)\tilde{\varphi}'_i$ эквивалентна P -ограниченной.

Определим формулы Φ_i :

$$\begin{aligned} \Phi_i(\bar{y}) \sim & (\exists \bar{f}_i \in P) \left((\forall \bar{u}, \bar{v} \in P) ((\exists x)\tilde{\varphi}'_i(x, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})) \leftrightarrow \psi_i(\bar{f}_i, \bar{u}, \bar{v}) \right) \\ & \wedge (\exists \bar{e}_i \in P) \left(\Theta_i(\bar{f}_i, \bar{e}_i) \right. \\ & \left. \wedge (\exists \bar{u}, \bar{v} \in P)(\exists x) \underbrace{\left((\mathbf{Set}(\bar{f}_i, \bar{e}_i) \subseteq [\bar{u}]_{\tilde{\varphi}_i}) \wedge \tilde{\varphi}'_i(x, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}) \right)}_{\Phi'_i} \right) \right). \end{aligned}$$

Сокращение $\mathbf{Set}(\bar{f}_i, \bar{e}_i) \subseteq [\bar{u}]_{\tilde{\varphi}_i}$, очевидно, можно записать в виде порядковой бескванторной формулы. Пусть

$$\Phi \sim \bigvee_{j=0}^{K-1} \Phi_j.$$

Очевидно, что формулы Φ_i и, следовательно, Φ эквивалентны P -ограниченным.

СЛЕДСТВИЕ 9. Если система $\mathfrak{A}$ является эффективно I -сводимой, то формулы $\tilde{\varphi}'_i$, Φ_i и Φ строятся по формуле φ эффективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что если I -сведение является эффективным, то константы N, L, R, Q, K могут быть эффективно найдены по формуле φ .

ЛЕММА 11. Пусть выполнено $\Phi(\bar{y}_0)$, и пусть i – максимальный номер, для которого выполнено $\Phi_i(\bar{y}_0)$. Пусть $\bar{f}_i \in I$, $\bar{e}_i \in I$, $x_0, \bar{a} \in I$ и $\bar{b} \in I$ – конкретные элементы, на которых выполняется формула Φ'_i . Тогда для любых $\bar{a}' \in I$ и $\bar{b}' \in I$, расположенных относительно $\bar{f}_i$ так же, как $\bar{a}$ и $\bar{b}$, существует такой x'_0 , что

$$(\mathfrak{A}, I) \models \tilde{\varphi}'_i(x'_0, \bar{y}_0, \bar{a}', \bar{b}'),$$

и для любого $\bar{g} \in [\bar{a}']_{\tilde{\varphi}_i}$ выполняется $\varphi(x'_0, \bar{y}_0, \bar{g})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\forall \bar{u}, \bar{v} \in P) ((\exists x)\tilde{\varphi}'_i(x, \bar{y}_0, \bar{u}, \bar{v})) \leftrightarrow \psi_i(\bar{f}_i, \bar{u}, \bar{v}),$$

то если взять любые $\bar{a}'$ и $\bar{b}'$, которые имеют такой же порядковый тип над $\bar{f}_i$, что и исходные, то для этих $\bar{a}'$ и $\bar{b}'$ тоже найдется некоторый x'_0 , для которого выполнено $\tilde{\varphi}'_i(x'_0, \bar{y}_0, \bar{a}', \bar{b}')$. Из этого следует, что для любого набора $\bar{g} \in G_i \cup \mathbf{Set}(\bar{a}')$ имеет место $\varphi(x'_0, \bar{y}_0, \bar{g})$.

Рассмотрим любой $\bar{g} \in [\bar{a}']_{\tilde{\varphi}_i}$. Предположим, что для него выполнена формула $\neg\varphi(x'_0, \bar{y}_0, \bar{g})$. Тогда согласно лемме 10 можно построить $\tilde{\varphi}_j$ – расширение формулы $\tilde{\varphi}_i$ – такое, что:

- 1) выполнено $\tilde{\varphi}_j(x'_0, \bar{y}_0, \bar{a}'', \bar{b}'')$;
- 2) $G_i \cup \mathbf{Set}(\bar{a}') \subseteq [\bar{a}'']_{\tilde{\varphi}_j}$;
- 3) для всех $\bar{g} \in [\bar{a}'']_{\tilde{\varphi}_j}$ выполнено $\varphi(x'_0, \bar{y}_0, \bar{g})$.

Согласно следствию 8 имеем $j > i$. Рассмотрим произвольный элемент

$$g \in G_j \cup \mathbf{Set}(\bar{f}_j, \bar{e}_j) \cup \mathbf{Set}(\bar{a}'').$$

Очевидно, что $G_j \cup \mathbf{Set}(\bar{f}_j, \bar{e}_j) \subseteq G_i$, так как $j > i$. Следовательно, g является элементом множества $G_i \cup \mathbf{Set}(\bar{a}'')$. Но тогда $g \in [\bar{a}'']_{\tilde{\varphi}_j}$. Из этого получаем, что для любого $\bar{g} \in G_j \cup \mathbf{Set}(\bar{a}'')$ выполняется $\varphi(x'_0, \bar{y}_0, \bar{g})$, откуда следует истинность $\tilde{\varphi}'_j(x'_0, \bar{y}_0, \bar{a}', \bar{b}')$. Из этого получается истинность $\Phi_j(\bar{y}_0)$, что противоречит максимальной истинности i .

Докажем, что Φ как раз и является P -ограниченной формулой, которая эквивалентна

$$(\exists x)(\forall \bar{w} \in P)\varphi(x, \bar{y}, \bar{w}).$$

ЛЕММА 12. Если

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\exists x)(\forall \bar{w} \in P)\varphi(x, \bar{y}_0, \bar{w}),$$

то $(\mathfrak{A}, I) \models \Phi(\bar{y}_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что k -формула $\tilde{\varphi}_0$ не содержит никаких v , следовательно, формула $\Phi_0(\bar{y})$ утверждает, что существует x , при котором формула $\varphi(x, \bar{y}, \bar{w})$ истинна в некоторых точках $\bar{w}$, и что все элементы $\bar{f}_0$ и $\bar{e}_0$ можно окружить такими точками. Но если существует x , при котором формула φ истинна во всех точках, то истинно $\Phi_0(\bar{y})$ и, следовательно, $\Phi(\bar{y})$.

СЛЕДСТВИЕ 10. Существует константа M такая, что для любого $\bar{y}_0$ из истинности

$$(\forall \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_M \in P)(\exists \bar{x}) \left(\bigwedge_{i=1}^M \varphi(x, \bar{y}_0, \bar{w}_i) \right)$$

следует истинность $\Phi_0(\bar{y}_0)$ и, следовательно, $\Phi(\bar{y}_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что длина набора $\bar{u}$ в формуле $\tilde{\varphi}_0(x, \bar{y}, \bar{u})$ равна Q ($\tilde{\varphi}_0$ не содержит v). Пусть

$$M = (|\bar{f}_K| + |\bar{e}_K| + \dots + |\bar{f}_1| + |\bar{e}_1| + Q)^N.$$

В этой формуле основанием степени является количество элементов множества $G_0 \cup \mathbf{Set}(\bar{u})$ из формулы $\tilde{\varphi}'_0(x, \bar{y}, \bar{u})$. Константа M , следовательно, является количеством всевозможных наборов длины N , которые можно составить из этого множества. Поэтому из истинности

$$(\forall \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_M \in P)(\exists \bar{x}) \left(\bigwedge_{i=1}^M \varphi(x, \bar{y}_0, \bar{w}_i) \right)$$

следует истинность

$$(\exists x)\tilde{\varphi}'_0(x, \bar{y}, \bar{u})$$

для любого $\bar{u} \in I$, а значит, и истинность $\Phi_0(\bar{y}_0)$.

СЛЕДСТВИЕ 11. Если система $\mathfrak{A}$ является эффективно I -сводимой, то константа M находится по формуле φ эффективно.

Теперь докажем утверждение в обратную сторону.

ЛЕММА 13. Если $(\mathfrak{A}, I) \models \Phi(\bar{y}_0)$, то

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\exists x)(\forall \bar{w} \in P)\varphi(x, \bar{y}_0, \bar{w}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть истинно $\Phi(\bar{y}_0)$. Пусть i – наибольший номер, при котором истинно $\Phi_i(\bar{y}_0)$, и $\bar{f}_i \in I$, $\bar{e}_i \in I$, $x_0, \bar{a} \in I$, $\bar{b} \in I$ – элементы, на которых истинна Φ'_i . Поскольку между соседними элементами $\bar{f}_i$ находится не меньше $R+2$ разных элементов $\bar{e}_i$, а количество серий в формуле φ'_i не превосходит $R+1$, то хотя бы два из них покрываются одной и той же серией $\bar{a}$, т.е. в любом $\bar{f}_i$ -промежутке есть элементы, попадающие в какую-то неточечную серию $\bar{a}$.

Рассмотрим произвольное конечное множество $S \subseteq I$. Покажем, что существует x_S такой, что для любого $\bar{s} \in S$ имеет место $\varphi(x_S, \bar{y}_0, \bar{s})$.

Предположим, что для некоторого $s \in S$ имеет место $s \notin [\bar{a}]_{\bar{f}_i}$. Но это означает, что в том же $\bar{f}_i$ -промежутке, что и s , есть крайний элемент какой-то неточечной серии из $\bar{a}$. Переместим элементы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ внутри этого $\bar{f}_i$ -промежутка без изменения их положения относительно друг друга так, чтобы все элементы S из этого $\bar{f}_i$ -промежутка (а их, конечно, много) оказались бы внутри нового $[\bar{a}']_{\bar{f}_i}$.

Проделав эту процедуру несколько раз, мы добьемся того, что $S \subseteq [\bar{a}']_{\bar{f}_i}$. Так как расположение $\bar{a}'$ и $\bar{b}'$ относительно $\bar{f}_i$ и друг друга не изменилось, то согласно лемме 11 существует такое x'_0 , что для любого $\bar{s} \in S$ выполняется $\varphi(x'_0, \bar{y}_0, \bar{s})$. Возьмем это x'_0 в качестве x_S . Согласно лемме 5 отсюда следует

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\exists x)(\forall \bar{w} \in P)\varphi(x, \bar{y}_0, \bar{w}).$$

ЛЕММА 14. Пусть M – константа из следствия 10; тогда

$$\begin{aligned} & (\exists x)(\forall \bar{w} \in P)\varphi(x, \bar{y}, \bar{w}) \\ & \Leftrightarrow (\forall \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_M \in P)(\exists x) \bigwedge_{i=1}^M \varphi(x, \bar{y}, \bar{w}_i) \\ & \Leftrightarrow \Phi_0(\bar{y}) \Leftrightarrow \Phi(\bar{y}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\exists x)(\forall \bar{w} \in P)\varphi(x, \bar{y}_0, \bar{w})$$

следует

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\forall \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_M \in P)(\exists x) \bigwedge_{i=1}^M \varphi(x, \bar{y}_0, \bar{w}_i),$$

отсюда вытекает согласно следствию 10, что

$$(\mathfrak{A}, I) \models \Phi_0(\bar{y}_0), \quad (\mathfrak{A}, I) \models \Phi(\bar{y}_0),$$

а из последнего по лемме 13 получаем

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\exists x)(\forall \bar{w} \in P)\varphi(x, \bar{y}_0, \bar{w}).$$

ТЕОРЕМА 3. Во всякой малой I -сводимой системе $\mathfrak{A}$ ($I \subseteq A$) для каждой формулы $\varphi(x, \bar{y}, \bar{w})$ сигнатуры Σ существует константа M такая, что в системе $(\mathfrak{A}, I)$

$$(\exists x)(\forall \bar{w} \in P)\varphi(x, \bar{y}, \bar{w}) \Leftrightarrow (\forall \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_M \in P)(\exists x) \bigwedge_{i=1}^M \varphi(x, \bar{y}, \bar{w}_i).$$

ТЕОРЕМА 4. Во всякой малой I -сводимой системе $\mathfrak{A}$ для каждой P -ограниченной формулы $\varphi(x, \bar{y})$ существует P -ограниченная формула $\varphi'(\bar{y})$ такая, что в системе $(\mathfrak{A}, I)$

$$(\exists x)\varphi(x, \bar{y}) \Leftrightarrow \varphi'(\bar{y}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 4 и теоремы 3.

ТЕОРЕМА 5. Во всякой малой I -сводимой системе $\mathfrak{A}$ для каждой формулы $\varphi(\bar{y})$ существует P -ограниченная формула $\varphi'(\bar{y})$ такая, что в системе $(\mathfrak{A}, I)$

$$\varphi'(\bar{y}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{y}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многократно применяем предыдущую теорему.

СЛЕДСТВИЕ 12. Если система $\mathfrak{A}$ эффективно I -сводима, то формула φ' строится по φ эффективно.

ТЕОРЕМА 6. Каждая малая I -сводимая алгебраическая система является тотально I -сводимой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной формулы φ в сигнатуре (Σ, P) по теореме 5 строим эквивалентную P -ограниченную формулу φ' , а для φ' по определению имеет место I -сведение. Следовательно, оно имеет место и для φ .

СЛЕДСТВИЕ 13. Если система является эффективно I -сводимой, то тотальное I -сведение тоже является эффективным.

ТЕОРЕМА 7. Если тип неразличимой последовательности I в малой эффективно I -сводимой системе $\mathfrak{A}$ является рекурсивным и система $\mathfrak{A}$ является малой, то тип I в системе $(\mathfrak{A}, I)$ тоже рекурсивен (в частности, теория системы $(\mathfrak{A}, I)$ разрешима).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную формулу $\varphi(\bar{y})$ в сигнатуре (Σ, P) . Нужно установить истинность $\varphi(\bar{y})$, когда $\bar{y}$ – возрастающая последовательность элементов I . Согласно теореме 5 и следствию 12 по формуле $\varphi(\bar{y})$ можно эффективно построить P -ограниченную формулу $\varphi'(\bar{y})$, эквивалентную $\varphi(\bar{y})$. Формула $\varphi'(\bar{y})$ имеет вид

$$(\mathbb{Q}_1 x_1 \in P) \dots (\mathbb{Q}_n x_n \in P) \varphi''(\bar{x}, \bar{y}),$$

где $\varphi''(\bar{x}, \bar{y})$ является формулой в сигнатуре Σ , а $\mathbb{Q}_1, \dots, \mathbb{Q}_n$ – какие-то кванторные символы. Поскольку тип неразличимой последовательности I в системе $\mathfrak{A}$ рекурсивен, то по $\varphi''(\bar{x}, \bar{y})$ эффективно строится порядковая формула $\psi(\bar{x}, \bar{y})$, которая эквивалентна на I формуле $\varphi''(\bar{x}, \bar{y})$. А так как теория плотного линейного порядка разрешима, то истинность формулы

$$(\mathbb{Q}_1 x_1 \in P) \dots (\mathbb{Q}_n x_n \in P) \psi(\bar{x}, \bar{y}),$$

когда $\bar{y}$ образуют возрастающую последовательность, устанавливается алгоритмически.

ТЕОРЕМА 8. Если теория T имеет I -сводимую модель, то в теории T выполняется трансляционная теорема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 6 и [7, теорема 2.6].

Автор выражает благодарность М. А. Тайцлину за обсуждение статьи и ценные советы.

Список литературы

1. Baldwin J., Benedikt M. Stability theory, permutations of indiscernibles, and embedded finite models // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. № 11. P. 4937–4969.
2. Belegardek O. V., Stolboushkin A. P., Taitlin M. A. Extended order-generic queries // Annals of Pure and Applied Logic. 1999. V. 97. P. 85–125.
3. Benedikt M., Dong G., Libkin L., Wong L. Relational expressive power of constraint query languages // Proc. 15th ACM Symp. on Principles of Database Systems, 1996. P. 5–16.
4. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
5. Chang C. C., Keisler H. J. Model Theory. Amsterdam: North Holland, 1990.
6. Shelah S. Classification theory and the number of non-isomorphic models. Amsterdam: North Holland, 1990.
7. Taitlin M. A. A general condition for collapse results // Annals of Pure and Applied Logic. 2001. V. 113. P. 323–330.
8. Тайцлин М. А. Трансляционные результаты в теории баз данных // Сложные системы: обработка информации, моделирование и оптимизация. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2002. С. 5–23.
9. Тайцлин М. А. Ограниченные псевдоконечная однородность и изолированность // Вестн. Тверского гос. ун-та. Сер. “Прикладная математика”. 2003. Т. 2. № 1. С. 5–15.

Тверской государственный университет
E-mail: Sergey.Dudakov@tversu.ru

Поступило в редакцию
18.02.2003