Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Сергеев, Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 1, 149–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/im5035>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:16:59

УДК 517.926

И. Н. Сергеев

Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы

Определены новые ляпуновские характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейных дифференциальных уравнений или систем, а именно частота (среднее число нулей на временной оси) решения, какой-либо его координаты или всевозможных линейных комбинаций этих координат, средняя угловая скорость вращения решения (вокруг начала координат в фазовом пространстве) и различные, производные от нее, показатели блуждания. Доказано, что множества значений всех этих величин на решениях линейной автономной системы совпадают с множеством модулей мнимых частей собственных значений ее матрицы. Обнаружено, что частоты решений ограничены сверху их показателями блуждания, а частоты и показатели блуждания всех решений произвольного уравнения второго порядка одинаковы.

Библиография: 17 наименований.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, линейная система, нули решений, колеблемость и блуждаемость, показатели Ляпунова.

Введение

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty),$$

каждая из которых отождествляется со своей ограниченной непрерывной оператор-функцией $A: \mathbb{R}^+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$ (здесь и далее $\text{End } \mathbb{R}^n$ и $\text{Aut } \mathbb{R}^n$ – множества всех и, соответственно, всех невырожденных линейных операторов, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$).

Обозначим через $\mathcal{S}(A)$ и $\mathcal{S}_*(A)$ множества всех и, соответственно, всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^n$. Далее звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Кроме того, в линейном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ фиксируем базис и связанную с ним стандартную евклидову структуру, а в функциональном пространстве $\mathcal{M}^n$ зададим равномерную норму по формуле

$$\|A\| \equiv \sup_{t \in \mathbb{R}^+, u \in \mathbb{R}_*^n} \frac{|A(t)u|}{|u|}, \quad A \in \mathcal{M}^n.$$

§ 1. Описание исследуемых величин

Определим новые имеющие ляпуновский тип *характеристики колеблемости* решений систем и уравнений. Начнем с того, что для заданных вектора и вектор-функции

$$m \equiv (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x \equiv (x_1, \dots, x_n): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$$

обозначим через $\nu(x, m, t)$ число нулей (возможно, бесконечное) скалярной функции

$$(x(\tau), m) \equiv x_1(\tau)m_1 + \dots + x_n(\tau)m_n, \quad \tau \in (0, t].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем *нижней (верхней) частотой координаты* (x, m) функции x , *нижней (верхней) полной частотой* функции $x: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ и *нижней (верхней) ее векторной частотой* соответственно величины

$$\begin{aligned} \check{\nu}(x, m) &\equiv \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu(x, m, t) & \left(\hat{\nu}(x, m) &\equiv \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu(x, m, t) \right), \\ \check{\sigma}(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \check{\nu}(x, m) & \left(\hat{\sigma}(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \hat{\nu}(x, m) \right), \\ \check{\zeta}(x) &\equiv \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \nu(x, m, t) & \left(\hat{\zeta}(x) &\equiv \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \nu(x, m, t) \right). \end{aligned}$$

В случае совпадения верхней частоты (какой-либо) с нижней будем называть ее *точной*, не выписывая над ней ни “галочку”, ни “крышечку”.

Введенные частоты функции x могут быть наглядно представлены следующим образом. Пусть P_m – гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$ (проходящая через начало координат) с нормалью $m \in \mathbb{R}_*^n$ (случай $m = 0$, когда $\nu(x, m) = \infty$, интереса не представляет). Тогда:

(i) частота координаты (x, m) функции x – это временное среднее числа $\nu(x, m, t)$ попаданий фазовой траектории функции $x(t)$ в гиперплоскость P_m ;

(ii) полная частота – это частота наименее колеблющейся координаты вектор-функции x (по своему геометрическому смыслу она отвечает за частоту вращения вектора $x(t)$ вокруг нуля: действительно, всякому пересечению этим вектором той гиперплоскости, в которую он попадает реже всего, можно поставить в соответствие по меньшей мере однократное пересечение им всех остальных гиперплоскостей, что несколько напоминает полуоборот);

(iii) если в процессе усреднения величины $\nu(x, m, t)$ специальным образом манипулировать вектором m , выбирая для каждого значения $t \in \mathbb{R}^+$ ту гиперплоскость P_m , число попаданий в которую за время от 0 до t оказывается наименьшим, то в результате такого усреднения получится векторная частота функции x (заметим, что полученное наименьшее количество попаданий в гиперплоскость за данное время, а также и векторная, и полная частота решения уже не зависят от выбора координат в $\mathbb{R}^n$).

В множестве $\mathcal{M}^n$ естественным образом выделяется подмножество $\mathcal{E}^n$ систем, имеющих матрицы вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

и эквивалентных линейным уравнениям n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

каждое из которых задается своей ограниченной непрерывной вектор-функцией $a \equiv (a_1, \dots, a_n): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ и преобразуется в систему A стандартным переходом [1] от скалярной переменной y к векторной

$$x = \psi^n y \equiv (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}).$$

Будем отождествлять систему $A \in \mathcal{E}^n$ с эквивалентным ей уравнением $a \in \mathcal{E}^n$, а пространство решений последнего будем обозначать через $\mathcal{S}(a)$.

Особый интерес при исследовании таких уравнений вызывают частоты $\check{\nu}(y)$ и $\hat{\nu}(y)$ решения y уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, или, что то же самое, первой координаты $(x, m^1) \equiv y$, где $m^1 \equiv (1, 0, \dots, 0)$, решения x эквивалентной системы $A \in \mathcal{E}^n$ (см. работу [2], в которой даны определения таких частот и доказан ряд результатов, описывающих замечательные свойства этих частот; в частности, в [2] доказано, что в случае решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ величины $\nu(y, t)$, $\check{\nu}(y)$ и $\hat{\nu}(y)$ уже не могут принимать бесконечных значений).

Далее, опишем ляпуновские *характеристики блуждаемости* решений систем и уравнений, предварительно для произвольной вектор-функции x обозначив

$$\gamma(x, t) \equiv \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \left(\frac{x(\tau)}{|x(\tau)|} \right) \right| d\tau.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем *нижней (верхней) скоростью блуждания*, *нижним (верхним) показателем блуждаемости* и *нижним (верхним) показателем блуждания* вектор-функции $x: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^n$ соответственно величины

$$\begin{aligned} \check{\mu}(x) &\equiv \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma(x, t) & \left(\hat{\mu}(x) &\equiv \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma(x, t) \right), \\ \check{\rho}(x) &\equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \check{\mu}(Lx) & \left(\hat{\rho}(x) &\equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \hat{\mu}(Lx) \right), \\ \check{\eta}(x) &\equiv \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \gamma(Lx, t) & \left(\hat{\eta}(x) &\equiv \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \gamma(Lx, t) \right). \end{aligned}$$

В случае совпадения верхней характеристики (какой-либо) блуждаемости с нижней будем называть ее *точной*, не выписывая над ней ни “галочку”, ни “крышечку”.

Геометрическая интерпретация введенных величин такова. Пусть при изменении времени $t \in \mathbb{R}^+$ каждый луч (с началом в нуле), натянутый на вектор $x(t) \in \mathbb{R}_*^n$, оставляет свой след $e_x(t)$ на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$, описывая на ней некоторую траекторию. Тогда:

(i) величина $\gamma(x, t)$ – это длина пути следа e_x на сфере, пройденного за время от 0 до t (здесь лучше было бы сказать не длина, а вариация, так как при подсчете этой величины интегрируется не сама скорость, а ее модуль);

(ii) скорость блуждания функции x можно интерпретировать как временное среднее скорости движения единичного вектора e_x по сфере; эта величина инвариантна относительно ортогональных преобразований координат (разумеется,

не зависящих от времени: без этого ограничения блуждание всякого решения можно просто свести к нулю), но она может изменяться при неортогональных преобразованиях;

(iii) показатель блуждания или блуждаемости функции x получается какой-либо (зависящей или, соответственно, не зависящей от отрезка усреднения) минимизацией ее скорости блуждания по всем преобразованиям координат (следовательно, эти показатели содержат только ту информацию о траектории на сфере, которая не гасится линейными невырожденными преобразованиями: так, они учитывают обороты вектора $x(t)$ вокруг нуля, но не учитывают его локального вращения вокруг какого-либо другого вектора).

Для сравнения напомним, что довольно привычные и неплохо изученные к настоящему времени *показатели Ляпунова* и *показатели Перрона* (см. [3], [4]) вектор-функции $x: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^n$ – это по определению величины

$$\hat{\chi}(x) \equiv \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|x(t)|}{|x(0)|}, \quad \check{\chi}(x) \equiv \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|x(t)|}{|x(0)|},$$

отвечающие за экспоненциальный рост нормы функции x . В случае, когда $x \in \mathcal{S}_*(A)$ – ненулевое решение системы $A \in \mathcal{M}^n$, имеем следующее:

1) показатели Ляпунова и Перрона согласно цепочке равенств

$$\begin{aligned} \ln \frac{|x(t)|}{|x(0)|} &= \int_0^t \frac{1}{2} \frac{d \ln(x(\tau), x(\tau))}{d\tau} d\tau \\ &= \int_0^t \frac{(A(\tau)x(\tau), x(\tau)) + (x(\tau), A(\tau)x(\tau))}{2(x(\tau), x(\tau))} d\tau = \int_0^t (A(\tau)e_x(\tau), e_x(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

совпадают соответственно с верхним и нижним временными средними величины $(A(\tau)e_x(\tau), e_x(\tau))$, равной радиальной составляющей фазовых скоростей $A(\tau)e_x(\tau)$ решений, проходящих через точки траектории $e_x(\tau)$ на единичной сфере;

2) временное среднее вдоль той же траектории $e_x(\tau)$, но от модуля другой составляющей, перпендикулярной к радиусу (или касательной к сфере) и равной

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{x(\tau)}{|x(\tau)|} \right) = \frac{d}{d\tau} e_x(\tau) = A(\tau)e_x(\tau) - (A(\tau)e_x(\tau), e_x(\tau))e_x(\tau),$$

является скоростью блуждания решения x .

§ 2. Формулировки основных результатов

Сформулируем теоремы, которые касаются определенных выше характеристик и доказаны в настоящей работе.

Неравенства типа

$$0 \leq \check{\kappa}(x) \leq \hat{\kappa}(x)$$

выполнены для каждой из величин $\kappa = \check{\zeta}, \hat{\zeta}, \check{\sigma}, \hat{\sigma}, \check{\nu}, \hat{\nu}, \check{\eta}, \hat{\eta}$, определенных выше. Уже первичный анализ определений 1, 2 позволяет упорядочить любые тройки рассматриваемых величин, имеющих общую природу.

ТЕОРЕМА 1. Для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}(x) &\leq \check{\sigma}(x) \leq \check{\nu}(x, m), & \hat{\zeta}(x) &\leq \hat{\sigma}(x) \leq \hat{\nu}(x, m), & m &\in \mathbb{R}^n, \\ \check{\eta}(x) &\leq \check{\rho}(x) \leq \check{\mu}(x), & \hat{\eta}(x) &\leq \hat{\rho}(x) \leq \hat{\mu}(x).\end{aligned}$$

Следующая теорема позволяет сравнивать между собой казалось бы совершенно разнородные величины: характеристики колеблемости и соответствующие им характеристики блуждаемости. Из нее также видно, что введенные в определениях 1, 2 характеристики, кроме, быть может, величин $\check{\nu}(x, m)$, $\hat{\nu}(x, m)$ и $\hat{\sigma}(x)$, заведомо ограничены нормой $\|A\|$ системы $A \in \mathcal{M}^n$.

ТЕОРЕМА 2. Для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ справедливы оценки

$$\check{\zeta}(x) \leq \check{\eta}(x), \quad \hat{\zeta}(x) \leq \hat{\eta}(x), \quad \check{\sigma}(x) \leq \check{\rho}(x), \quad \hat{\mu}(x) \leq \|A\|.$$

Поскольку в случае $A \in \mathcal{E}^n$ норма $\|A\|$ оказывается отделенной от нуля числом 1, теорема 2 не может за счет малости коэффициентов эквивалентного уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ гарантировать близость к нулю частот его решений. Эту близость обеспечивает

ТЕОРЕМА 3. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, удовлетворяющего оценке $\|a\| \leq \delta$, выполнено условие

$$\hat{\nu}(y) \leq \varepsilon, \quad y \in \mathcal{S}_*(a).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Спектром какой-либо величины $\varkappa: \mathcal{S}_*(A) \rightarrow \mathbb{R}$ для системы $A \in \mathcal{M}^n$ назовем область ее значений

$$\text{Sp}_\varkappa(A) \equiv \{\varkappa(x) \mid x \in \mathcal{S}_*(A)\}.$$

В случае $n = 1$ изучаемые в настоящей работе величины лишены содержания: их спектр в любой точке $A \in \mathcal{M}^1$ состоит только из одного числа 0, так как любое решение $x \in \mathcal{S}_*(A)$ нигде не равно нулю, а его след e_x на единичной сфере неподвижен.

Интересно, что в множестве $\mathcal{E}^n$ линейных уравнений определенное вырождение наблюдается также и при $n = 2$. Поясним, что в случае уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ полная и векторная частота решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$, а также все его характеристики блуждаемости по определению применяются к вектор-функции $\psi^n(y)$.

ТЕОРЕМА 4. Для любого уравнения $a \in \mathcal{E}^2$ спектр $\text{Sp}_\varkappa(a)$ любой из величин

$$\varkappa = \check{\zeta}, \hat{\zeta}, \check{\sigma}, \hat{\sigma}, \check{\nu}, \hat{\nu}, \check{\eta}, \hat{\eta}: \mathcal{S}_*(a) \rightarrow \mathbb{R}$$

состоит только из одного числа.

Указанное в теореме 4 единственное для каждой величины $\varkappa$ число, из которого состоит ее спектр в точке a , естественно было бы считать функцией от уравнения a , а не только от его решений, именно так мы и поступим, обозначая, к примеру, через $\check{\nu}(a)$ значение величины $\check{\nu}$ на решениях уравнения a .

ТЕОРЕМА 5. Для любого уравнения $a \in \mathcal{E}^2$ справедлива цепочка соотношений

$$\check{\zeta}(a) = \check{\sigma}(a) = \check{\nu}(a) = \check{\eta}(a) \leq \hat{\zeta}(a) = \hat{\sigma}(a) = \hat{\nu}(a) = \hat{\eta}(a),$$

причем единственное в этой цепочке неравенство для некоторого уравнения $a \in \mathcal{E}^2$ является строгим.

Любопытно, что, хотя частота скалярной функции y не превосходит частоты каждой из ее производных $\dot{y}, \ddot{y}, \dots$ (следствие теоремы Ролля; см. [2, лемма 7]), при $n > 2$ точная нижняя грань в формуле для вычисления полной частоты $\sigma(y)$ может достигаться вовсе не на самой функции y (как это происходит при $n = 2$ согласно теореме 5), а на некоторой специально подобранной ее линейной комбинации с производными.

ТЕОРЕМА 6. Существует уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, хотя бы одно решение $y \in \mathcal{S}_*(a)$ которого имеет точные частоты $\sigma(y)$, $\nu(y)$, удовлетворяющие неравенству

$$\sigma(y) < \nu(y).$$

Выделим в пространстве $\mathcal{M}^n$ подпространство $\mathcal{C}^n$ систем с постоянными коэффициентами и заметим, что пример уравнения a в теореме 6 можно подчинить дополнительному условию $a \in \mathcal{C}^n$.

Через $\text{Sp}_\lambda(A)$ обозначим множество собственных значений $\lambda(A)$ оператора A системы $A \in \mathcal{C}^n$, а через $|\text{Im Sp}_\lambda(A)|$ – множество модулей их мнимых частей $|\text{Im } \lambda(A)|$. Напомним, что если система $A \in \mathcal{C}^n$ эквивалентна уравнению $a \in \mathcal{C}^n$, то набор собственных значений оператора A совпадает с набором корней $\lambda(a)$ характеристического многочлена, соответствующего уравнению $a \in \mathcal{E}^n \cap \mathcal{C}^n$.

ТЕОРЕМА 7. Для любой системы $A \in \mathcal{C}^n$ полные частоты всех решений $x \in \mathcal{S}_*(A)$ являются точными, причем имеет место равенство

$$\text{Sp}_\sigma(A) = |\text{Im Sp}_\lambda(A)|.$$

Согласно теореме 7 “галочки” и “крышечки” над полными частотами решений автономных систем, по определению, можно не выписывать, что мы уже и сделали в заключительном равенстве этой теоремы (как и в неравенстве теоремы 6). По возможности будем поступать так же и далее в подобных ситуациях.

Справедливость теоремы 7 обусловлена некоторыми свойствами полной частоты σ , означающими то, что она на линейном пространстве $\mathcal{S}(A)$ решений фиксированной системы $A \in \mathcal{C}^n$ задает так называемое неархимедово нормирование (логарифмическое). Смысл этой фразы разъясняет

ТЕОРЕМА 8. Для любой системы $A \in \mathcal{C}^n$ полная частота σ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= \infty, \\ \sigma(cx) &= \sigma(x), \quad \sigma(x_1 + x_2) \geq \min\{\sigma(x_1), \sigma(x_2)\}, \quad x, x_1, x_2 \in \mathcal{S}(A), \quad c \in \mathbb{R}_*. \end{aligned}$$

Такое же нормирование задает, например, показатель Ляпунова (точнее, противоположный ему по знаку) на n -мерном пространстве решений любой

системы $A \in \mathcal{M}^n$, откуда сразу же следует¹, что этот показатель принимает на множестве $\mathcal{S}_*(A)$ не более n различных значений, а с учетом их кратностей – даже ровно n . То же относится и к полной частоте решений автономной системы.

ТЕОРЕМА 9. *В пространстве решений любой системы $A \in \mathcal{C}^n$ существует система вложенных подпространств*

$$\{0\} = S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_n \equiv \mathcal{S}(A), \quad \dim S_i = i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (1)$$

удовлетворяющая равенствам

$$\sigma(x) = |\operatorname{Im} \lambda_i(A)|, \quad x \in S_i \setminus S_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ – собственные значения оператора A , упорядоченные по убыванию модулей их мнимых частей.

Отметим, что здесь и далее, говоря об упорядочении чисел, например по убыванию, мы не подразумеваем, что все они попарно различны: среди них могут встретиться и одинаковые числа, которые тогда, конечно же, выписаны подряд. С этой точки зрения точнее было бы назвать их упорядоченными по *нестрогому* убыванию, или (что представляется менее естественным) по невозрастанию.

ТЕОРЕМА 10. *Для любой системы $A \in \mathcal{C}^n$ показатели блуждаемости всех решений $x \in \mathcal{S}_*(A)$ являются точными, причем имеет место равенство*

$$\operatorname{Sp}_\rho(A) = |\operatorname{Im} \operatorname{Sp}_\lambda(A)|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Скажем, что собственные значения оператора $A \in \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ упорядочены по возрастанию *роста решений*, если эти числа:

- 1) упорядочены по возрастанию их действительных частей;
- 2) при совпадении действительных частей упорядочены по возрастанию их *клеточных* номеров, которые образуются, если собственные значения разбить на группы в соответствии с жордановыми клетками оператора A (в случае $A \in \mathcal{E}^n$ каждому его собственному значению соответствует всего одна жорданова клетка), а затем пронумеровать независимо, начиная с первого номера внутри каждой группы;
- 3) при совпадении и действительных частей, и клеточных номеров упорядочены по убыванию модулей их мнимых частей.

ТЕОРЕМА 11. *В пространстве решений любой системы $A \in \mathcal{C}^n$ существует система вложенных подпространств (1), удовлетворяющая равенствам*

$$\rho(x) = |\operatorname{Im} \lambda_i(A)|, \quad x \in S_i \setminus S_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ – собственные значения оператора A , упорядоченные по возрастанию роста решений.

¹Примечательно, что на Московской математической олимпиаде в 2010 г. одиннадцати-классникам предлагалась следующая классическая задача: “Функция f каждому вектору v (с общим началом в точке O) пространства ставит в соответствие число $f(v)$, причем для любых векторов u, v и любых чисел α, β значение $f(\alpha u + \beta v)$ не превосходит хотя бы одного из чисел $f(u)$ или $f(v)$. Какое наибольшее количество значений может принимать такая функция?”.

Конкретное отличие показателя блуждаемости от полной частоты уже при $n = 3$ (в случае $n = 2$ согласно теореме 5 никакого отличия не существует) и даже при полном совпадении их спектров демонстрирует

ТЕОРЕМА 12. *Существует уравнение $a \in \mathcal{E}^3 \cap \mathcal{C}^3$, пространство решений которого разлагается в прямую сумму:*

$$\mathcal{S}(a) = S_1 \oplus S_2, \quad \dim S_1 = 1, \quad \dim S_2 = 2,$$

причем для любого решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} 0 = \sigma(y) = \rho(y), \quad y \in S_1; \quad \sigma(y) = \rho(y) = 1, \quad y \in S_2; \\ 0 = \sigma(y) < \rho(y) = 1, \quad y \notin S_1 \cup S_2. \end{aligned}$$

Система из следующей теоремы демонстрирует качественное отличие показателя блуждаемости от скорости блуждания: в этом примере последняя заполняет целый отрезок, тогда как показатель блуждаемости согласно теореме 10 принимает только два значения, совпадающие с концами этого отрезка.

ТЕОРЕМА 13. *Для любого значения $\omega > 1$ и системы $A_\omega \in \mathcal{C}^4$ с матрицей*

$$A_\omega \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \pm i, \pm \omega i,$$

скорости блуждания всех решений $x \in \mathcal{S}_*(A_\omega)$ являются точными, причем имеет место равенство

$$\mathrm{Sp}_\mu(A) = [1, \omega].$$

Один из возможных вариантов дополнительной регуляризации значений рассматриваемых характеристик решений линейной системы предлагает

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Для каждой системы $A \in \mathcal{M}^n$ главные значения какой-либо величины $\varkappa: \mathcal{S}_*(A) \rightarrow \mathbb{R}$ зададим формулами

$$\varkappa_i(A) \equiv \sup_{L \in \mathcal{G}^i(A)} \inf_{x \in L_*} \varkappa(x), \quad \varkappa_{\bar{i}}(A) \equiv \inf_{L \in \mathcal{G}^{n-i+1}(A)} \sup_{x \in L_*} \varkappa(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\mathcal{G}^i(A)$ – множество i -мерных подпространств пространства $\mathcal{S}(A)$.

Описанную в определении 5 конструкцию, с помощью которой по значениям данной величины на решениях данной системы определяются главные значения этой величины, впервые предложил, по-видимому, В. М. Миллионщиков [5]. Он применял эту конструкцию для задания явными и единообразными формулами показателей Ляпунова линейной системы, представленных в виде упорядоченного набора из n значений (А. М. Ляпунов определял их лишь описательно [3], [6]).

Как показывает следующая теорема, каждый из наборов главных значений полных частот, как и показателей блуждаемости, системы $A \in \mathcal{C}^n$ оказывается идентичным набору из n модулей мнимых частей $|\mathrm{Im} \lambda(A)|$ собственных значений оператора A (кроме того, в случае уравнения $a \in \mathcal{C}^n$ еще и набор главных частот решений так же совпадает [2] с набором модулей мнимых частей $|\mathrm{Im} \lambda(a)|$ корней соответствующего характеристического многочлена).

ТЕОРЕМА 14. Для любой системы $A \in C^n$ выполнены равенства

$$\sigma_{\underline{i}}(A) = \sigma_{\bar{i}}(A) = \rho_{\underline{i}}(A) = \rho_{\bar{i}}(A) = |\operatorname{Im} \lambda_i(A)|, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ – все собственные значения оператора A , упорядоченные по убыванию модулей их мнимых частей.

Как видно из следующей теоремы, даже и главные (экстремальные) значения скоростей блуждания не совпадают, вообще говоря, с главными значениями показателей блуждаемости, причем это явление наблюдается уже при $n = 2$.

ТЕОРЕМА 15. Существует система $A \in M^2$, для которой спектр $\operatorname{Sp}_{\hat{\mu}}(A)$ скоростей блуждания состоит из двух чисел, а спектр $\operatorname{Sp}_{\hat{\rho}}(A)$ показателей блуждаемости – из одного.

Все сформулированные выше теоремы частично анонсированы в цикле докладов автора [7]–[16] (однако в определениях полной частоты решения, данных в аннотациях к [9], [10], необходимо переставить местами операции перехода к нижнему пределу и взятия точной нижней грани).

§ 3. Доказательства теорем

Перейдем теперь к доказательству сформулированных выше теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 опирается только на определения 1, 2: например, оценки для нижних пределов получаются из соотношений

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \nu(x, m, t) &\leq \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu(x, m, t) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu(x, m, t), \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n} \gamma(Lx, t) &\leq \inf_{L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma(x, t) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma(x, t). \end{aligned}$$

Оценки для верхних пределов получаются аналогично. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 разобьем на пункты.

1. Произвольному решению $x \in \mathcal{S}_*(A)$ в каждый момент времени $\tau \in \mathbb{R}^+$ поставим в соответствие гиперплоскость $P_{x(\tau)}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, ортогональную вектору $x(\tau)$, и след $e_x(\tau)$ этого вектора на единичной сфере. Площадь (меру) $(n-1)$ -мерной поверхности единичной сферы S в $\mathbb{R}^n$ обозначим через $\operatorname{mes} S \equiv s_{n-1}$, причем здесь и далее будем считать $s_0 = 2$ и $s_k = 0$ при $k < 0$.

Найдем вариацию площади, которую гиперплоскость $P_{x(\tau)}$ замечает на единичной сфере за время от 0 до t . Эта вариация получается как предел интегральных сумм элементарных площадей ΔS , замечаемых за время от τ до $\tau + \Delta\tau$. Каждая из них в первом приближении задается выражением

$$\Delta S \equiv \frac{s_{n-1}}{\pi} |\dot{e}_x(\tau)| \Delta\tau, \quad \Delta\tau \rightarrow 0$$

(поскольку за время π , когда нормаль $x(\tau)$ с угловой скоростью $|\dot{e}_x(\tau)| = 1$ делает полуоборот в какой-нибудь фиксированной двумерной плоскости, гиперплоскость $P_{x(\tau)}$ замечает в точности сферу S). Таким образом, искомая вариация равна интегралу

$$S|_0^t \equiv \frac{s_{n-1}}{\pi} \int_0^t |\dot{e}_x(\tau)| d\tau = \frac{s_{n-1}}{\pi} \gamma(x, t),$$

причем подынтегральная функция непрерывна, а ее значения оцениваются сверху следующим образом:

$$|\dot{e}_x(\tau)| \leq |A(\tau)e_x(\tau)| \leq \|A\|.$$

2. Выберем такую фиксированную прямую в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ – пусть она натянута на вектор m_0 , – которая за время $\tau \in (0, t]$ попадает в подвижную гиперплоскость $P_{x(\tau)}$ наименьшее число раз (моментов времени), равное N . Тогда по каждой прямой в $\mathbb{R}^n$ эта гиперплоскость проходит не менее N (возможно, даже бесконечно много) раз, откуда по принципу Дирихле получаем оценку снизу для вариации площади²:

$$Ns_{n-1} \leq S|_0^t = \frac{s_{n-1}}{\pi} \gamma(x, t).$$

Это значит, что, и наоборот, на том же промежутке $\tau \in (0, t]$ вектор $x(\tau)$ попадает в гиперплоскость P_{m_0} , ортогональную вектору m_0 , ровно N раз. Поэтому справедлива оценка

$$\pi \nu(x, m_0, t) \leq \pi N \leq \gamma(x, t) \leq t \|A\|,$$

из которой вытекает цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}(x) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu(x, m, t) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu(x, m_0, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma(x, t) = \hat{\mu}(x) \leq \|A\|, \end{aligned}$$

а поскольку допредельное выражение в левой части этой цепочки не зависит от выбора базиса в $\mathbb{R}^n$, дополнительно получаем

$$\hat{\zeta}(x) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu(Lx, m, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \gamma(Lx, t) = \hat{\eta}(x).$$

3. Неравенство $\check{\zeta}(x) \leq \check{\eta}(x)$ доказывается аналогично. Теперь докажем неравенство $\check{\sigma}(x) \leq \check{\rho}(x)$.

3.а) Предположим сначала, что для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\check{\sigma}(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu(x, m, t) > \check{\mu}(x) + 3\varepsilon. \quad (2)$$

Из (2) следует, что для каждого вектора $m \in \mathbb{R}_*^n$ найдется такое $t_m \in \mathbb{R}^+$, что при любом $t > t_m$ решение $x(\tau)$ за время $(0, t)$ попадает в гиперплоскость P_m больше чем $\frac{t}{\pi}(\check{\mu}(x) + 2\varepsilon)$ раз. Тогда, и наоборот, прямая, натянутая на вектор m ,

²Эта идея использовалась на олимпиаде “Ломоносов–2009” (проводимой для абитуриентов МГУ) в следующей задаче: “Настенные часы сломались, отчего минутная стрелка стала в произвольные моменты времени мгновенно менять направление своего движения на противоположное, вращаясь со своей прежней угловой скоростью. Все потенциальные показания (в минутах) этой стрелки целиком заполняют промежуток $[0, 60)$.”

а) Может ли такая стрелка в течение одного часа бесконечно много раз показать каждое из двух чисел 15 и 45?

б) Какое наибольшее количество раз в течение трех суток может встретиться самое редкое показание такой стрелки (из всех потенциальных показаний за эти трое суток)?”.

столько же раз попадает в подвижную гиперплоскость $P_{x(\tau)}$. Поэтому если для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначить через X_k множество точек m единичной сферы S , удовлетворяющих неравенству $t_m \leq k$, то будут выполнены соотношения

$$X_1 \subset X_2 \subset \dots, \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k = S,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{mes } X_k = \text{mes } X_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \text{mes}(X_{k+1} \setminus X_k) = \text{mes } S = s_{n-1}.$$

3.6) В предыдущем п. 3.а) использован тот факт, что для каждого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ множество X_k измеримо (по Лебегу). Это действительно так, поскольку оно представляется в виде объединения двух множеств:

$$X_k = Y_k \cup Z_k,$$

где множество Y_k измеримо (по Борелю, типа G_δ), а множество Z_k имеет нулевую меру (по Жордану). Дадим их подробное описание.

Обозначим через Y_k множество тех точек $m \in X_k$, для которых кривая $x(\tau)$ ни в какой момент $\tau \in \mathbb{R}^+$ не касается гиперплоскости P_m (т.е. всякий раз, попадая в эту гиперплоскость, она пересекает ее трансверсально). Тогда это множество представимо в виде счетного пересечения:

$$Y_k = \bigcap_{k < l \in \mathbb{N}} U_l,$$

где U_l – множество таких точек $m \in S$, что при любом $t \in [l-1, l]$ кривая $x(\tau)$ за время $\tau \in (0, t)$ попадает в гиперплоскость P_m более чем $\frac{t}{\pi}(\dot{\mu}(x) + 2\varepsilon)$ раз, ни разу не касаясь ее. Свойство принадлежности точки $m \in S$ (служащей нормалью к гиперплоскости P_m) множеству U_l сохраняется при достаточно малых шевелениях этой точки (или самой гиперплоскости), что и обеспечивает открытость этого множества.

Обозначим через Z_k множество тех точек $m \in X_k$, а через V тех точек $m \in S$, для которых кривая $x(\tau)$ касается гиперплоскости P_m хотя бы в один из моментов $\tau \in \mathbb{R}^+$ (в этот момент выполнены условия $x(\tau), \dot{x}(\tau) \in P_m$). Тогда справедливы соотношения

$$Z_k \subset V = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} V_l,$$

где V_l – множество таких точек $m \in S$, что хотя бы при одном $\tau \in [0, l]$ кривая $x(\tau)$ касается гиперплоскости P_m .

Докажем, что каждое из множеств V_l имеет меру нуль, откуда будет следовать, что меру нуль имеют также и их объединение V , и его подмножество Z_k . Фиксируя $l \in \mathbb{N}$, применим рассуждение, близкое к доказательству леммы Сарда [17], а именно по произвольному $\varepsilon \in (0, 1)$ выберем такое большое значение $N \in \mathbb{N}$, чтобы при разбиении отрезка $[0, l]$ на N равных отрезков $\Delta_i \equiv [\alpha_i, \alpha_i + l/N]$, $i = 1, \dots, N$, колебание производной $\dot{e}_x(\tau)$ на каждом из них не превосходило ε^2 (что возможно в силу непрерывной дифференцируемости следа $e_x(\tau)$ на сфере S). Тогда, обозначив для краткости $e_x \equiv e$, имеем:

1) если $\max_{\tau \in \Delta_i} |\dot{e}(\tau)| < 2\varepsilon$, то множество V_{li} тех точек $m \in S$, для которых кривая $x(\tau)$ хотя бы при одном $\tau \in \Delta_i$ касается гиперплоскости P_m , содержится

в объединении $V_i \subset \bigcup_{\tau \in \Delta_i} P_{x(\tau)}$ и потому лежит на сфере S в открытой полосе меры $s_{n-2} \times (4\varepsilon l/N)$, являющейся $(2\varepsilon l/N)$ -окрестностью следа гиперплоскости $P_{e(\alpha_i)}$ на сфере S , так как за время $|\Delta_i| = l/N$ гиперплоскость $P_{x(\tau)}$ начинает свое движение из начального положения $P_{x(\alpha_i)}$ и поворачивается с угловой скоростью, меньшей 2ε ;

2) если $\max_{\tau \in \Delta_i} |\dot{e}(\tau)| \geq 2\varepsilon$, то при всех $\tau \in \Delta_i$ имеем $\dot{e}(\tau) \perp e(\tau)$ и $|\dot{e}(\tau)| \geq 2\varepsilon - \varepsilon^2 > \varepsilon$, а значит, $\|A\| > 0$, $n \geq 2$ и гиперплоскости $P_{\dot{e}(\alpha_i)}$ и $P_{e(\alpha_i)}$ пересекаются под прямым углом, а потому множество V_i тех точек $m \in S$, для которых кривая $x(\tau)$ хотя бы при одном $\tau \in \Delta_i$ касается гиперплоскости P_m , содержится в пересечении $(\bigcup_{\tau \in \Delta_i} P_{x(\tau)}) \cap (\bigcup_{\tau \in \Delta_i} P_{x(\tau)})$ и лежит на сфере S в открытом множестве меры $s_{n-3} \times (4\varepsilon) \times (4\|A\|l/N)$, образуемому в пересечении следующих двух полос на сфере S (пересекающихся под прямым углом):

(i) (2ε) -окрестности следа гиперплоскости $P_{\dot{e}(\alpha_i)}$ на сфере S в силу получаемых последовательно оценок

$$|\dot{e}(\tau) - \dot{e}(\alpha_i)| < \varepsilon^2, \quad \left| \frac{\dot{e}(\tau)}{|\dot{e}(\alpha_i)|} - e_{\dot{e}(\alpha_i)} \right| < \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon, \quad |e_{\dot{e}(\tau)} - e_{\dot{e}(\alpha_i)}| < 2\varepsilon$$

(см. п. 2 в доказательстве теорем 10, 11);

(ii) $(2\|A\|l/N)$ -окрестности следа гиперплоскости $P_{e(\alpha_i)}$ на сфере S в силу оценки

$$|e(\tau) - e(\alpha_i)| \leq \frac{\|A\|l}{N} < \frac{2\|A\|l}{N}.$$

Таким образом, множество V_l покрыто конечным объединением открытых множеств с суммарной мерой, оцениваемой сверху выражением

$$\left(s_{n-2} \frac{4\varepsilon l}{N} + s_{n-3} \cdot 4\varepsilon \frac{4\|A\|l}{N} \right) N \leq \varepsilon \cdot 4l \left(s_{n-2} + 4s_{n-3}\|A\| \right),$$

а значит, имеет меру нуль.

3.в) Выбрав числа $\delta > 0$ и $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие неравенствам

$$(\check{\mu}(x) + \varepsilon)s_{n-1} \leq (\check{\mu}(x) + 2\varepsilon)(s_{n-1} - \delta), \quad \text{mes } X_k \geq s_{n-1} - \delta,$$

получаем (опять же с помощью вариации площади и принципа Дирихле; см. пп. 1, 2 настоящего доказательства), что при всех $t \geq t_k$ выполнена цепочка неравенств

$$\frac{t}{\pi}(\check{\mu}(x) + \varepsilon)s_{n-1} \leq \frac{t}{\pi}(\check{\mu}(x) + 2\varepsilon)(s_{n-1} - \delta) \leq S|_0^t = \frac{s_{n-1}}{\pi}\gamma(x, t),$$

из которой делением на t и переходом к нижнему пределу при $t \rightarrow \infty$ выводим противоречие:

$$\check{\mu}(x) + \varepsilon \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t}\gamma(x, t) = \check{\mu}(x).$$

3.г) Итак, сделанное выше предположение (2) неверно, а верно неравенство $\check{\sigma}(x) \leq \check{\mu}(x)$, из которого имеем

$$\check{\sigma}(x) = \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \check{\sigma}(Lx) \leq \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \check{\mu}(Lx) = \check{\rho}(x).$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 основано на следующем утверждении, содержащем параметр $n \in \mathbb{N}$: для любого $l > 0$ существует такое $\delta = \delta_n(l) > 0$, что для любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, удовлетворяющего условию $\|a\| \leq \delta$, любое решение $y \in \mathcal{S}_*(a)$ на любом отрезке $J \subset \mathbb{R}^+$ длины l имеет менее n корней (откуда получим практически требуемое: $\hat{\nu}(y) \leq \varepsilon = \pi n/l$ при $l = l(\varepsilon) \equiv \pi n/\varepsilon$).

Докажем сформулированное утверждение по индукции.

1. При $n = 1$ утверждение верно для любого $\delta > 0$.

2. Пусть для заданного $n > 1$ верно предположение индукции: если задано число $l > 0$, а уравнение $b \in \mathcal{E}^{n-1}$ удовлетворяет оценке $\|b\| \leq \delta_{n-1}(l)$, то любое его решение $z \in \mathcal{S}_*(b)$ на любом отрезке $J \subset \mathbb{R}^+$ длины l имеет менее $n - 1$ корней.

Возьмем произвольное $l > 0$.

2.а) Если, зная решение $y_0 \in \mathcal{S}_*(a)$ исходного уравнения $a \in \mathcal{E}^n$, не равное нулю ни в одной точке какого-либо отрезка $J \subset \mathbb{R}^+$, сделать замену $y = uy_0(t)$, $t \in J$, то для функции u на J получится [1] снова линейное уравнение c , тоже n -го порядка, но с последним коэффициентом $c_n = 0$ (поскольку $u = 1$ – его решение). Остальные его коэффициенты $c_1, \dots, c_{n-1}$ будут представлять собой стандартные линейные комбинации выражений $\dot{y}_0/y_0, \dots, y_0^{(n-1)}/y_0$ с коэффициентами, являющимися также стандартными (зависящими только от n) линейными комбинациями коэффициентов уравнения a , а функция $z = \dot{u}$ на том же отрезке J будет решением нового также линейного уравнения $b \equiv (c_1, \dots, c_{n-1})$, но только $(n - 1)$ -го порядка. Поэтому существует такое $\alpha > 0$, что если $\|a\| \leq \alpha$ и на каком-либо отрезке $J \subset \mathbb{R}^+$ решение y_0 удовлетворяет условиям

$$y_0(t) \geq 1, \quad |\dot{y}_0(t)| \leq \alpha, \quad \dots, \quad |y_0^{(n-1)}(t)| \leq \alpha, \quad t \in J, \quad (3)$$

то построенное для функции z уравнение b удовлетворяет оценке

$$\|b(t)\| \leq \delta_{n-1}(l), \quad t \in J. \quad (4)$$

2.б) Выберем такое $\beta > 0$, что если $\|a\| \leq \beta$, то для любого $t_0 \in \mathbb{R}^+$ на отрезке $J = [t_0, t_0 + l]$ решение $y_0 \in \mathcal{S}_*(a)$, определяемое начальными условиями

$$y_0(t_0) = 2, \quad \dot{y}_0(t_0) = 0, \quad \dots, \quad y_0^{(n-1)}(t_0) = 0, \quad (5)$$

удовлетворяет условиям (3) (это возможно в силу непрерывной зависимости решений от правых частей задачи Коши; см. [1] и [2, лемма 2]).

2.в) Положим

$$\delta = \min\{\alpha, \beta\} \equiv \delta_n(l).$$

Тогда если уравнение $a \in \mathcal{E}^n$ удовлетворяет оценке $\|a\| \leq \delta$, то на любом отрезке $J = [t_0, t_0 + l] \subset \mathbb{R}^+$ никакое решение $y \in \mathcal{S}_*(a)$ не может иметь n (или более) нулей, поскольку в противном случае по функции $y_0 \in \mathcal{S}_*(a)$, удовлетворяющей начальным условиям (5) и, стало быть, (3), можно было бы построить уравнения c и b (второе – удовлетворяющее оценке (4)) с решениями $u = y/y_0$ и $z = \dot{u}$ соответственно, первое из которых имело бы на J те же нули (в количестве не менее n), что и функция y , а тогда второе по теореме Ролля имело бы на J не менее $n - 1$ нулей, что вошло бы в противоречие с предположением индукции.

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 4, 5 разобьем на пункты.

1. Прежде всего для любого уравнения $a \in \mathcal{E}^2$ и его решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ установим справедливость оценок

$$\hat{\zeta}(y) \geq \hat{\nu}(y) \geq \hat{\eta}(y)$$

(которые, с учетом вытекающих из теорем 1, 2 оценок $\hat{\zeta}(y) \leq \hat{\sigma}(y) \leq \hat{\nu}(y)$ и $\hat{\zeta}(y) \leq \hat{\eta}(y)$, дадут все равенства для верхних пределов; аналогично доказываются равенства для нижних пределов).

Действительно, пусть $t_1 < \dots < t_k$ – все нули функции y на $(0, t]$. Тогда:

1) фазовая кривая $x(\tau) \equiv \psi^2 y(\tau)$ на плоскости с координатами $(x_1, x_2) \equiv (y, \dot{y})$ для любого вектора $m \in \mathbb{R}_*^2$ по меньшей мере по одному разу пересекает прямую P_m , перпендикулярную вектору m , на каждом промежутке

$$\tau \in (t_i, t_{i+1}], \quad i = 1, \dots, k-1 = \nu(y, t) - 1,$$

поскольку вектор $x(\tau)$ на таком промежутке обязательно совершает полуоборот между двумя своими противоположно направленными вертикальными положениями (см. [2, лемма 11]), следовательно, справедлива цепочка соотношений

$$\hat{\zeta}(y) \equiv \hat{\zeta}(x) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \nu(x, m, t) \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} (\nu(y, t) - 1) = \hat{\nu}(y),$$

доказывающая первую из двух требуемых оценок;

2) окружим нули функции y достаточно малыми интервалами

$$t_i \in (\alpha_i, \beta_i) \subset \mathbb{R}^+, \quad i = 1, \dots, k = \nu(y, t),$$

внутри которых вектор-след $e_x(\tau)$ на единичной окружности поворачивается на фазовой плоскости строго по часовой стрелке (так как в точках $e_x(t_i) = (0, \pm 1)$ это требование выполнено автоматически), тогда после перехода к новым координатам $x'_1 = Kx_1$, $x'_2 = x_2$ суммарная вариация пути нового вектора $e_{x'}(\tau)$ по единичной окружности:

i) на объединении указанных интервалов будет не больше $\pi(k+1)$, так как не превышает π на каждом из $k+1$ множеств

$$(\alpha_1, t_1), \quad (t_1, \beta_1) \cup (\alpha_2, t_2), \quad \dots, \quad (t_{k-1}, \beta_{k-1}) \cup (\alpha_k, t_k), \quad (t_k, \beta_k);$$

ii) на дополнении к объединению указанных интервалов до промежутка $(0, t]$ может быть сделана меньшей π за счет увеличения числа K , приводящего к сжатию соответствующих участков кривой $e_{x'}$ в направлении точек $(\pm 1, 0)$ (вариация пути на каждом из них стремится к нулю при $K \rightarrow \infty$); в результате этого получится вторая из двух требуемых оценок

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(y) \equiv \hat{\eta}(x) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} \gamma(Lx, t) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma(x', t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} (\nu(y, t) + 2) = \hat{\nu}(y). \end{aligned}$$

2. Инвариантность каждой из величин $\hat{\nu}(y)$ и $\check{\nu}(y)$ относительно выбора решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ уравнения $a \in \mathcal{E}^2$ вытекает из свойства перемежаемости

решений уравнения второго порядка (см. [1] и [2, лемма 7]), а инвариантность остальных величин – из их совпадения с этими двумя.

3. Построим уравнение $a \in \mathcal{E}^2$ с решением $y \in \mathcal{S}_*(a)$, удовлетворяющим неравенству $\check{\nu}(y) < \hat{\nu}(y)$.

Пусть уравнение a и его решение y , удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$ и $\dot{y}(0) = 0$, уже построены на отрезке $[0, t_0]$. Тогда доопределим функцию a с сохранением непрерывности:

1) на отрезок $[t_0, t_1]$ так, чтобы уравнение a и его решение y (с теми же начальными условиями) удовлетворяли условиям *первого типа*

$$a(t) = 0, \quad t \in [t_0 + 1, t_1], \quad \pi\nu(y, t_1) \leq \frac{t_1}{3}$$

(этого можно добиться простым увеличением числа t_1 , так как решение y на отрезке $[t_0 + 1, t_1]$ совпадает с линейной функцией и имеет не более одного нуля);

2) на отрезок $[t_1, t_2]$ так, чтобы выполнялись условия *второго типа*

$$a(t) = 1, \quad t \in [t_1 + 1, t_2], \quad \pi\nu(y, t_2) \geq \frac{t_2}{2}$$

(за счет увеличения числа t_2 , так как решение y на отрезке $[t_1 + 1, t_2]$ совпадает с синусоидой $A \sin(t + \varphi)$ и расстояние между ее соседними нулями равно π);

3) на всю полуось $\mathbb{R}^+$, продолжив аналогично построение цепочки моментов $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \dots$, удовлетворяющих условиям поочередно то первого, то второго типа.

Тогда по определению 1 имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \check{\nu}(y) &\equiv \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu(y, t) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t_{2m-1}} \nu(y, t_{2m-1}) \leq \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t_{2m}} \nu(y, t_{2m}) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu(y, t) \equiv \hat{\nu}(y). \end{aligned}$$

Теоремы 4, 5 доказаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6 базируется на следующем примере: частота решения

$$y(t) = \sin t + \cos t + 1$$

уравнения

$$\ddot{y} + \dot{y} = 0, \quad \lambda = 0, \pm i,$$

есть $\nu(y) = 1$ (так как на каждом промежутке длины 2π это решение имеет только два нуля), тогда как полная частота $\sigma(y) = 0$ этого решения, реализуется на его координате

$$(\psi^3 y, m) \equiv ((y, \dot{y}, \ddot{y}), (1, 0, 1)) = \ddot{y} + y = 1.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 7–9 разобьем на пункты.

1. Как известно [1], стандартная фундаментальная система решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ с постоянным оператором $A \in \text{End } \mathbb{R}^n$ строится по его жордановому базису:

1) каждой жордановой клетке $J_{\lambda,m}$ порядка m , отвечающей m одинаковым собственным значениям λ (с клеточными номерами $1, \dots, m$; см. определение 4) и подсистеме $h_1, \dots, h_m$ векторов жорданова базиса, ставится в соответствие подсистема решений

$$z_1(t) = e^{\lambda t} h_1, \quad \dots, \quad z_m(t) = e^{\lambda t} h_m + t e^{\lambda t} h_{m-1} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda t} h_1; \quad (6)$$

2) в результате слияния всех таких подсистем получаем общую фундаментальную систему решений (вообще говоря, комплексных);

3) с целью овеществления полученной фундаментальной системы решений все ее невещественные решения разбиваются на пары комплексно сопряженных и каждая такая пара решений заменяется действительной и мнимой частью одного из них (кстати, эти части раскладываются по овеществленному жорданову базису, также составленному из действительных и мнимых частей соответствующих векторов жорданова базиса); например, каждое слагаемое в каждом решении из системы (6) после ее овеществления превратится в действительную или мнимую часть следующего слагаемого (с множителем вида $t^j/j!$):

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} h &= e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) (u + iv) \\ &= e^{\alpha t} (\cos(\beta t) u - \sin(\beta t) v) + i e^{\alpha t} (\sin(\beta t) u + \cos(\beta t) v), \end{aligned}$$

где $\lambda = \alpha + i\beta$ и $h = u + iv$ (это один из векторов $h_1, \dots, h_m$).

2. Упорядочим все собственные значения $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ оператора A по убыванию модулей их мнимых частей. Пусть список этих модулей состоит из l различных неотрицательных чисел

$$\beta_1 > \dots > \beta_l,$$

причем каждое число β_j , $j = 1, \dots, l$, равно модулю мнимой части для m_j собственных значений оператора A , которым соответствуют m_j решений (овеществленных) из фундаментальной системы, их линейную оболочку обозначим через Q_j . Таким образом, пространство решений системы разбивается в прямую сумму:

$$\mathcal{S}(A) = Q_1 \oplus \dots \oplus Q_l, \quad \dim Q_j = m_j.$$

Если в соответствии с этой прямой суммой решение $x \in \mathcal{S}_*(A)$ разлагается в сумму:

$$x = x_1 + \dots + x_l, \quad x_j \in Q_j, \quad j = 1, \dots, l, \quad x_k \neq 0 = x_{k+1} = \dots = x_l, \quad (7)$$

то его полная частота является точной и имеет вид $\sigma(x) = \beta_k$ (откуда немедленно вытекает справедливость утверждения теоремы 7). В самом деле, для этого решения x :

1) неравенство $\delta(x) \geq \beta_k$ следует из того, что любая координата решения x в овеществленном жордановом базисе имеет вид

$$e^{\alpha t} (p(t) \cos(\beta_j t) - q(t) \sin(\beta_j t)), \quad (8)$$

где p, q – многочлены, а нижняя частота произвольной линейной комбинации таких координат не меньше наименьшей из частот³ самих координат (см. [2, доказательство теоремы IV]), т. е. числа β_k ;

2) неравенство $\hat{\sigma}(x) \leq \beta_k$ следует из того, что хотя бы одна ненулевая координата решения x в овециствленном жордановом базисе имеет вид (8) при $j = k$ (так как $x_k \neq 0$), а значит, приводится к виду

$$Ae^{\alpha t} t^r (\sin(\beta_k t + \varphi) + \psi(t)), \quad A \neq 0,$$

где $r \geq 0$ – максимальная из степеней многочленов p, q , а функция $\psi(t)$ вместе со своей производной стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, поэтому сумма функций, записанных в скобках, будет иметь верхнюю частоту, равную частоте β_k первого слагаемого (см. [2, доказательство теоремы IV]).

3. Обозначив $M_j \equiv m_1 + \dots + m_j$, $M_0 \equiv 0$, образуем систему вложенных подпространств

$$\{0\} = S_{M_0} \subset S_{M_1} \subset \dots \subset S_{M_l} = \mathcal{S}(A), \quad S_{M_j} \equiv Q_1 \oplus \dots \oplus Q_j, \quad j = 0, 1, \dots, l,$$

для которой выполнены равенства

$$\sigma(x) = \beta_j | = \operatorname{Im} \lambda_{M_{j-1}+1}(A) | = \dots = | \operatorname{Im} \lambda_{M_j}(A) |, \quad x \in S_{M_j} \setminus S_{M_{j-1}}, \quad j = 1, \dots, l,$$

и которая:

а) позволяет доказать теорему 8, а именно последнее свойство (остальные проверяются без труда): если

$$\sigma(x_1) = \beta_{j_1} \geq \sigma(x_2) = \beta_{j_2},$$

то выполнены соотношения

$$\begin{aligned} x_1 \in S_{M_{j_1}}, \quad x_2 \in S_{M_{j_2}}, \quad S_{M_{j_1}} \subset S_{M_{j_2}}, \quad (x_1 + x_2) \in S_{M_{j_2}}, \\ \sigma(x_1 + x_2) \geq \beta_{j_2} = \min\{\sigma(x_1), \sigma(x_2)\}; \end{aligned}$$

б) произвольным образом достраивается до полной системы вложенных подпространств (1) с требуемым в теореме 9 условием, налагаемым на полные частоты их решений; например, она может быть построена по решениям овециствленной стандартной фундаментальной системы $z_1, \dots, z_n$, упорядоченной вместе с соответствующими собственными значениями оператора A по убыванию модулей их мнимых частей (достаточно при каждом $i = 0, 1, \dots, n$ определить подпространство S_i как линейную оболочку решений $z_1, \dots, z_i$).

Теоремы 7–9 доказаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 10, 11 разобьем на пункты.

1. Упорядочим все собственные значения $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ оператора A системы $A \in \mathcal{C}^n$ по возрастанию роста решений (см. определение 4). Каждому

³В 2004 г. на Московской математической олимпиаде одиннадцатиклассникам была предложена следующая, как оказалось, довольно трудная (с ней справились всего трое участников) задача: “Для заданных натуральных чисел $k_0 < k_1 < k_2$ выясните, какое наименьшее число корней на промежутке $[0, 2\pi)$ может иметь уравнение вида $\sin(k_0 x) + A_1 \sin(k_1 x) + A_2 \sin(k_2 x) = 0$, где $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ ”.

действительному собственному значению λ из этого списка, имеющему клеточный номер j , поставим в соответствие решение z_j из стандартной подсистемы (6), а затем каждую пару решений z_j и $\bar{z}_j$, соответствующую паре комплексно сопряженных значений λ и $\bar{\lambda}$, заменим действительной и мнимой частями одного из них, задав какое-нибудь соответствие двух новых решений значениям λ и $\bar{\lambda}$.

В результате будет установлено взаимно однозначное соответствие между собственными значениями и решениями из о вещественной стандартной фундаментальной системы.

2. Пусть все l собственных значений с первыми клеточными номерами и с одинаковыми действительными частями, равными заданному числу α , упорядочены по убыванию модулей их мнимых частей:

$$\beta_1 \geq \dots \geq \beta_l,$$

и им соответствуют решения $x_1, \dots, x_l$ из о вещественной стандартной фундаментальной системы, линейную оболочку которых обозначим через $Q \subset \mathcal{S}(A)$.

Тогда любое решение $x \in Q_*$, представимое при некотором $k \in \{1, \dots, l\}$ в виде линейной комбинации

$$x = c_1 x_1 + \dots + c_l x_l, \quad c_k \neq 0 = c_{k+1} = \dots = c_l,$$

имеет точный показатель блуждаемости, равный $\rho(x) = \beta_k$. В самом деле, для этого решения x :

1) оценка $\check{\rho}(x) \geq \beta_k$ следует из цепочки соотношений (см. теоремы 2, 8)

$$\check{\rho}(x) \geq \check{\sigma}(x) = \sigma(x) \geq \min\{\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_k)\} = \beta_k,$$

так как $\sigma(x_j) = \beta_j$, $j = 1, \dots, k$;

2) оценка $\hat{\rho}(x) \leq \beta_k$ следует из цепочки соотношений (см. определение 2)

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(x) &= \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma(Lx, t) \leq \hat{\mu}(x_k) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma(x_k, t) \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma(e^{\alpha t} R^{\beta_k t} x_k(0), t) = \beta_k, \end{aligned}$$

где $R^{\beta_k t}$ – поворот на угол $\beta_k t$ в плоскости, натянутой на соответствующие решению x_k два вектора (при $\beta_k = 0$ они сливаются в один, а поворот вырождается в тождественное преобразование натянутой на них прямой) о вещественного жорданова базиса в $\mathbb{R}^n$, принятого за ортонормированный, причем тогда норма и след этого решения на единичной окружности задаются формулами

$$|x_k(t)| \equiv e^{\alpha t}, \quad e_{x_k}(t) = R^{\beta_k t} x_k(0), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Чтобы доказать единственное неравенство в записанной выше цепочке, достаточно для произвольного наперед заданного $\varepsilon > 0$ умножить остальные, кроме упомянутых двух или даже одного, векторы базиса на такие числа, а по сути подобрать такое преобразование $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$, чтобы для тех же решений $Lx \equiv y$ и $Lx_k = x_k \equiv z$ в новом базисе выполнялась оценка

$$\gamma(Lx, t) < \gamma(x_k, t) + \varepsilon t, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

которая обеспечивается:

а) разложением функции y' (неправильно нормированного решения y , поскольку было бы правильно поделить это решение на его собственную норму)

$$\frac{y(t)}{|c_k x_k(t)|} \equiv y'(t) = \frac{y(t)}{|c_k| e^{\alpha t}} = e_z(t) + \varphi(t),$$

в котором остаток φ представляет собой конкретную сумму векторов овеществленного жорданова базиса с ограниченными множителями вида $c_j \sin(\beta_j t)/|c_k|$ и $c_j \cos(\beta_j t)/|c_k|$ при $j = 1, \dots, k-1$, а сами эти векторы можно сделать произвольно малыми по норме (за счет смены базиса);

б) вытекающей из этого разложения малостью нормы

$$|y'(t) - e_z(t)| < \delta \equiv \frac{\varepsilon}{8\|A\| + 1};$$

в) а значит, и малостью нормы

$$|e_y(t) - e_z(t)| \leq |y'(t) - e_y(t)| + |y'(t) - e_z(t)| \leq 2|y'(t) - e_z(t)| \leq 2\delta;$$

г) следовательно, и малостью нормы

$$\begin{aligned} |\gamma(Lx, t) - \gamma(x_k, t)| &= |\gamma(y, t) - \gamma(z, t)| \\ &= \left| \int_0^t |A(\tau)e_y(\tau) - (A(\tau)e_y(\tau), e_y(\tau))e_y(\tau)| d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t |A(\tau)e_z(\tau) - (A(\tau)e_z(\tau), e_z(\tau))e_z(\tau)| d\tau \right| \\ &\leq \int_0^t |A(\tau)e_y(\tau) - A(\tau)e_z(\tau)| d\tau \\ &\quad + \int_0^t |(A(\tau)e_y(\tau), e_y(\tau))e_y(\tau) - (A(\tau)e_z(\tau), e_z(\tau))e_z(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_0^t |A(\tau)(e_y(\tau) - e_z(\tau))| d\tau + \int_0^t |(A(\tau)e_y(\tau), e_y(\tau))(e_y(\tau) - e_z(\tau))| d\tau \\ &\quad + \int_0^t |(A(\tau)e_y(\tau), e_y(\tau) - e_z(\tau))e_z(\tau)| d\tau \\ &\quad + \int_0^t |(A(\tau)(e_y(\tau) - e_z(\tau)), e_z(\tau))e_z(\tau)| d\tau \\ &\leq 4 \int_0^t \|A(\tau)\| |e_y(\tau) - e_z(\tau)| d\tau \leq 4\|A\| \cdot 2\delta t < \varepsilon t. \end{aligned}$$

3. Пусть все собственные значения упорядочены по возрастанию роста решений. Тогда они автоматически оказываются разбитыми на m групп, расположенных в порядке возрастания их действительных частей:

$$\alpha_1 < \dots < \alpha_N.$$

Внутри группы с номером i , $i = 1, \dots, N$, собраны все числа с одинаковыми действительными частями, равными α_i , которые упорядочены по возрастанию

их клеточных номеров $1, \dots, N_i$. Поэтому они автоматически оказываются разбитыми еще на N_i подгрупп, в каждой из которых собраны числа с действительными частями, равными α_i , и с одинаковыми клеточными номерами.

На такие же группы и подгруппы разобьем и соответствующие этим собственным значениям решения из о вещественной стандартной фундаментальной системы. Расположим все получившиеся l подгрупп в указанном порядке, пронумеруем их подряд числами $j = 1, \dots, l$ и обозначим через Q_j линейную оболочку тех решений, которые попадают в подгруппу с номером j .

Пусть решение $x \in S_*(A)$ разлагается в сумму (7), где подгруппа Q_k содержит базисные функции, соответствующие собственным числам с действительной частью α и клеточным номером m . Поставим этому решению в соответствие функцию z , которая получится, если в его разложении по о вещественному жорданову базису:

1) оставить только члены, имеющие при себе множитель $e^{\alpha t} t^{m-1}$ (с максимальным показателем α и с максимальной степенью t), такие члены присутствуют у базисных функций из k -й подгруппы и отсутствуют у функций из подгрупп с меньшими номерами;

2) удалить остальные члены;

3) разделить оставшуюся сумму на t^{m-1} .

Тогда полученная функция $z(t) \equiv e^{\alpha t} z'(t)$ окажется ненулевым решением, принадлежащим тому из множеств Q_j , которое содержит базисные функции, отвечающие собственным числам с действительной частью, равной α , и клеточным номером, равным 1. Поэтому функция z имеет точный показатель блуждаемости, который вычисляется по правилу, описанному в п. 2 настоящего доказательства (там же фактически для любой функции $z \in Q_j$ доказано равенство

$$|z(t)| = e^{\alpha t} |z(0)|, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

поскольку оно справедливо для всех решений о вещественной стандартной фундаментальной системы из группы Q_j , причем их значения в любой момент времени взаимно ортогональны).

Показатель блуждаемости $\rho(x)$ решения x будет в точности равен $\rho(z)$. В самом деле, при любом операторе $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$ для функции $Lx \equiv y$ имеем разложение

$$\frac{y(t)}{|t^{m-1} Lz(t)|} \equiv y'(t) = \frac{e^{\alpha t} t^{m-1} L(z'(t) + \varphi(t))}{|t^{m-1} e^{\alpha t} Lz'(t)|} = e_{Lz}(t) + \frac{\varphi(t)}{|Lz'(t)|},$$

в котором числитель φ последней дроби представляет собой конкретную сумму векторов о вещественного жорданова базиса с множителями вида $ce^{-\delta t} t^j \sin(\beta t)$ и $ce^{-\delta t} t^j \cos(\beta t)$ при $\delta > 0$ или $ct^{-j} \sin(\beta t)$ и $ct^{-j} \cos(\beta t)$ при $j > 0$, стремящимися к нулю при $t \rightarrow \infty$, а знаменатель этой дроби отделен от нуля в силу оценки

$$|Lz'(t)| \geq \frac{|z'(t)|}{\|L^{-1}\|} = \frac{|z(0)|}{\|L^{-1}\|} > 0,$$

откуда имеем

$$|y'(t) - e_{Lz}(t)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Поэтому с помощью выкладок, аналогичных проведенным в п. 2, в) настоящего доказательства, получаем

$$|e_y(t) - e_{Lz}(t)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Далее, с помощью выкладок, аналогичных проведенным в п. 2, г) настоящего доказательства, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} |\gamma(y, t) - \gamma(Lz, t)| &\leq \frac{4}{t} \int_0^t \|A(\tau)\| |e_y(\tau) - e_{Lz}(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{4\|A\|}{t} \int_0^t |e_y(\tau) - e_{Lz}(\tau)| d\tau \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

откуда имеем

$$\hat{\mu}(Lx) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma(Lx, t) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma(Lz, t) = \hat{\mu}(Lz).$$

Наконец, выводим равенство для верхних показателей блуждаемости

$$\hat{\rho}(x) = \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \hat{\mu}(Lx) = \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \hat{\mu}(Lz) = \hat{\rho}(z)$$

и, аналогично, для нижних.

4. Теорема 10 является следствием теоремы 11, в которой утверждается существование в пространстве $\mathcal{S}(A)$ решений системы $A \in \mathcal{C}^n$ специальной системы вложенных подпространств (1). Последняя может быть построена по решениям овегцественной стандартной фундаментальной системы решений $z_1, \dots, z_n$, упорядоченной по возрастанию роста решений вместе с соответствующими собственными значениями оператора A . Исходя из структуры показателей блуждаемости на пространстве решений, описанной в пп. 2, 3 настоящего доказательства, достаточно при каждом $i = 0, 1, \dots, n$ определить подпространство S_i как линейную оболочку решений $z_1, \dots, z_i$.

Теоремы 10, 11 доказаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 12. В качестве подтверждающего примера рассмотрим систему, эквивалентную уравнению

$$\ddot{y} + \ddot{y} + \dot{y} + y = 0, \quad \lambda = -1, \pm i,$$

а в качестве пространств S_1 и S_2 , на которых полные частоты и показатели блуждаемости совпадают друг с другом (а именно, равны 0 и 1 соответственно), можно взять линейную оболочку одного решения $y_1(t) = e^{-t}$ и, соответственно, двух решений $y_2(t) = \cos t$ и $y_3(t) = \sin t$. Тогда из доказательства теорем 9, 11 будет следовать, что для остальных решений полные частоты равны 0, а показатели блуждаемости равны 1. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 13. Любое решение $x \in \mathcal{S}_*(A_\omega)$ данной системы $A_\omega \in \mathcal{C}^4$ имеет вид

$$x(t) \equiv x_1(t) + x_2(t) = R_1^t x_1(0) + R_2^{\omega t} x_2(0),$$

где R_1^t – поворот в плоскости первой пары базисных векторов на угол t , а $R_2^{\omega t}$ – поворот в плоскости второй пары базисных векторов на угол ωt , причем эти две плоскости взаимно ортогональны, как и лежащие в них ортогональные проекции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ решения $x(t)$ в любой момент $t \in \mathbb{R}^+$. Поэтому имеем

$$e_x(t) \equiv \frac{x(t)}{|x(t)|} = \frac{R_1^t x_1(0) + R_2^{\omega t} x_2(0)}{|x(0)|},$$

откуда получаем

$$\gamma(x, t) \equiv \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} e_x(\tau) \right| d\tau = \int_0^t |A_\omega e_x(t)| d\tau = \int_0^t \frac{\sqrt{|x_1(0)|^2 + |\omega x_2(0)|^2}}{\sqrt{|x_1(0)|^2 + |x_2(0)|^2}} d\tau.$$

Выражение под интегралом есть константа, принимающая все значения из отрезка $[1, \omega]$ и только их. Те же значения принимает и скорость блуждания (см. определение 2). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 14. Пусть собственные значения $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ оператора A упорядочены по убыванию модулей их мнимых частей вместе с соответствующими решениями овегцественной стандартной фундаментальной системы $z_1, \dots, z_n$ (см. доказательство теоремы 9).

1. При каждом $i = 1, \dots, n$ главное значение полной частоты

$$\sigma_{\underline{i}}(A) \equiv \sup_{L \in \mathcal{G}^i(A)} \inf_{x \in L_*} \sigma(x) = |\operatorname{Im} \lambda_i(A)|$$

реализуется, например (согласно теореме 9), на подпространстве $\underline{L}^i \in \mathcal{G}^i(A)$, натянутом на решения $z_1, \dots, z_i$: в этой формуле точная верхняя грань достигается при $L = \underline{L}^i$ (а точная нижняя грань – при $x = z_i$). Аналогично, точная нижняя и верхняя грани в формуле

$$\sigma_{\bar{i}}(A) \equiv \inf_{L \in \mathcal{G}^{n-i+1}(A)} \sup_{x \in L_*} \sigma(x) = |\operatorname{Im} \lambda_i(A)|$$

достигаются, когда соответственно $L = \bar{L}^i \in \mathcal{G}^{n-i+1}(A)$ – линейная оболочка решений $z_i, \dots, z_n$ и x – решение z_i .

2. Для нахождения главных значений $\rho_{\underline{i}}(A)$ и $\rho_{\bar{i}}(A)$, $i = 1, \dots, n$, полной частоты при любом фиксированном $i \in \{1, \dots, n\}$ заметим следующее: если взять подпространства $\underline{L}^i, \bar{L}^i$ и решение x точно такими же, как для реализации главных значений полной частоты в п. 1 доказательства настоящей теоремы, то согласно теореме 11 будут выполняться равенства

$$\inf_{x \in \underline{L}^i_*} \rho(x) = \sup_{x \in \bar{L}^i_*} \rho(x) = \rho(x) = |\operatorname{Im} \lambda_i(A)| = \sigma_{\underline{i}}(A),$$

влекущие за собой двойное неравенство

$$\rho_{\underline{i}}(A) \equiv \sup_{L \in \mathcal{G}^i(A)} \inf_{x \in L_*} \rho(x) \geq \sigma_{\underline{i}}(A) \geq \inf_{L \in \mathcal{G}^{n-i+1}(A)} \sup_{x \in L_*} \rho(x) \equiv \rho_{\bar{i}}(A),$$

которое непременно обращается в двойное равенство в силу оценок

$$\rho(x) \geq \sigma(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A), \quad \rho_{\underline{i}}(A) \leq \rho_{\bar{i}}(A)$$

(см. [2, теорема 2, теорема VI и замечание 8]).

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 15. Пусть вектор-функции $x_1, x_2: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ образуют первый и второй столбцы фундаментальной матрицы X системы $A \equiv \dot{X}X^{-1} \in \mathcal{M}^2$, где

$$X(t) \equiv \begin{pmatrix} \cos(\sin t) & 0 \\ \sin(\sin t) & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad A(t) \equiv \begin{pmatrix} -\operatorname{tg}(\sin t) \cdot \cos t & 0 \\ \cos t + \operatorname{tg}(\sin t) & -1 \end{pmatrix}$$

(из этих формул видны невырожденность матрицы X и ограниченность матрицы A). Тогда первое решение имеет точную скорость блуждания $\mu(x_1) = 2/\pi$, так как его след $e_{x_1}(t) = x_1(t)$ движется 2π -периодически, проходя за период путь длиной 4.

Далее, для второго решения имеем $\rho(x_2) = \mu(x_2) = 0$, так как его след $e_{x_2}(t)$ неподвижен.

Наконец, для любого решения $y = x_1 + cx_2$, $c \in \mathbb{R}$, выполнены равенства

$$\mu(y) = \mu(x_1) = \frac{2}{\pi}, \quad \rho(y) = \rho(x_1) = 0,$$

поскольку

$$y'(t) \equiv \frac{y(t)}{|x_1(t)|} = x_1(t) + cx_2(t) = e_{x_1}(t) + o(t), \quad t \rightarrow \infty,$$

откуда (аналогично п. 3 доказательства теоремы 11) получаем

$$\mu(y) = \mu(x_1), \quad \rho(y) = \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \mu(Ly) = \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \mu(Lx_1) = 0$$

(последнее равенство в этой цепочке объясняется тем, что переход L к новым координатам, при котором абсцисса умножается на достаточно большое число K , приводит к сжатию кривой $e_{x_1}(\tau)$ в направлении оси абсцисс, отчего вариация пути нового вектора $e_{Lx_1}(\tau)$ за тот же период может быть сделана меньшей любого наперед заданного $\varepsilon > 0$). Теорема доказана.

Список литературы

1. А. Ф. Филиппов, *Введение в теорию дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2004.
2. И. Н. Сергеев, “Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **25**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2006, 249–294; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **135**:1 (2006), 2764–2793.
3. Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости*, Наука, М., 1966.
4. Н. А. Изобов, *Введение в теорию показателей Ляпунова*, Изд-во БГУ, Минск, 2006.
5. В. М. Миллионщиков, “Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I”, *Дифференц. уравнения*, **16**:8 (1980), 1408–1416; англ. пер.: V. M. Millionshchikov, “Birov classes of functions and Lyapunov indices. I”, *Differ. Equ.*, **16** (1981), 902–907.
6. А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, Гостехиздат, М.–Л., 1950; англ. пер.: А. М. Lyapunov, *The general problem of the stability of motion*, Taylor & Francis, London, 1992.
7. И. Н. Сергеев, “Определение характеристических частот линейного уравнения”, *Дифференц. уравнения*, **40**:11 (2004), 1573; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Definition of characteristic frequencies of a linear equation”, *Differ. Equ.*, **40**:11 (2004), 1657–1658.
8. И. Н. Сергеев, “Подвижность характеристических частот линейного уравнения при равномерно малых и бесконечно малых возмущениях”, *Дифференц. уравнения*, **40**:11 (2004), 1576; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Movability of the characteristic frequencies of a linear equation under uniformly small and infinitely small perturbations”, *Differ. Equ.*, **40**:11 (2004), 1661.

9. И. Н. Сергеев, “Определение полных частот решений линейного уравнения”, *Дифференц. уравнения*, **44**:11 (2008), 1577; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Determination of complete frequencies of solutions of a linear equation”, *Differ. Equ.*, **44**:11 (2008), 1639–1640.
10. И. Н. Сергеев, “Определение полных частот решений линейной системы”, *Дифференц. уравнения*, **45**:6 (2009), 908; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Determination of complete frequencies of solutions of a linear system”, *Differ. Equ.*, **45**:6 (2009), 927–928.
11. И. Н. Сергеев, “Определение характеристик блуждаемости решений линейной системы”, *Дифференц. уравнения*, **46**:6 (2010), 902; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Determining the wandering characteristics of solutions of a linear system”, *Differ. Equ.*, **46**:6 (2010), 1639–1640.
12. И. Н. Сергеев, “Сравнение полных частот и показателей блуждаемости решений линейной системы”, *Дифференц. уравнения*, **46**:11 (2010), 1667–1668; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Comparison of complete frequencies and wandering exponents of solutions of a linear system”, *Differ. Equ.*, **46**:11 (2010), 1669–1670.
13. И. Н. Сергеев, “Характеристики колеблемости ляпуновского типа”, *Международная математическая конференция “Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям”*, Ин-т математики НАН Беларуси, Минск, 2010, 73–74.
14. И. Н. Сергеев, “Комплексные характеристические показатели экспоненциально разделенных систем”, *Дифференц. уравнения*, **47**:6 (2011), 900–901; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Complex characteristic exponents of exponentially separated systems”, *Differ. Equ.*, **47**:6 (2011), 907–908.
15. И. Н. Сергеев, “Колеблемость и блуждаемость решений линейных дифференциальных уравнений малого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **47**:6 (2011), 906–907; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Oscillation and wandering of solutions of linear differential equations of small order”, *Differ. Equ.*, **47**:6 (2011), 915–916.
16. И. Н. Сергеев, “Распределение полных частот и показателей блуждаемости в пространстве решений линейной автономной системы”, *Международная конференция, посвященная 110-й годовщине И. Г. Петровского (XXIII совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского)*, Изд-во МГУ, М., 2011, 342–343.
17. В. А. Зорич, *Математический анализ*, т. II, Наука, М., 1984; англ. пер.: V. A. Zorich, *Mathematical analysis*, v. II, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

И. Н. СЕРГЕЕВ (I. N. SERGEEV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: igniserg@gmail.com

Поступило в редакцию
01.09.2010