Общероссийский математический портал

А. Ю. Попов, О полноте редких подпоследовательностей систем функций вида $f^{(n)}(\lambda_n z)$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 5, 189–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/im507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:42:03

УДК 517.538.2

А. Ю. Попов

О полноте редких подпоследовательностей систем функций вида $f^{(n)}(\lambda_n z)$

Получены новые результаты о полноте систем функций $f^{(n)}(\lambda_n z)$ в пространстве целых функций с топологией равномерной сходимости на любом компакте в $\mathbb{C}$. При наличии лакун в разложении Тейлора функции $f(z)$ доказано существование базисов, состоящих из подсистем указанного вида.

Библиография: 18 наименований.

В работах [1] и [2] было найдено условие, которому должна удовлетворять целая функция $f(z)$, необходимое и достаточное для полноты системы её последовательных производных

$$\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty} \quad (1)$$

в пространстве целых функций (обозначим его $\mathcal{A}(\mathbb{C})$) с топологией равномерной сходимости на любом компакте в $\mathbb{C}$. Сформулируем этот результат.

ТЕОРЕМА А [1], [2]. Система (1) полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда f удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n y^{(n)}(z) = 0 \quad (2)$$

и характеристической функцией $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \neq 0$ экспоненциального типа.

Из теоремы А вытекает, что если система (1) полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, то она остается полной в этом же пространстве и после удаления из неё любого конечного числа элементов. Возникает следующий вопрос: “сколько много” можно удалить из полной системы (1) функций, чтобы оставшаяся система сохраняла свойство полноты в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$? Если стараться придать этому вопросу строгую формулировку, то мы приходим к двум типам задач.

1. Выделяется тот или иной класс $\mathfrak{M}$ “достаточно редких” последовательностей натуральных чисел. Требуется выяснить, будут ли все системы вида $\{f^{(\nu_k)}(z)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\nu_k\} \in \mathfrak{M}$, полны в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, где f – целая функция, порождающая полную в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ систему (1) и обладающая определенными дополнительными свойствами.

2. Для данной функции $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, порождающей полную в этом пространстве систему производных, найти “сколько возможно редкую” (в смысле какого-нибудь определения) последовательность $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что система функций $\{f^{(\nu_k)}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ будет полной в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

В работах [1]–[5] успешно решались задачи первого типа для различных подклассов аналитических функций. Так, Ю. А. Казьмин в [3] доказал, что любая подпоследовательность производных функции $f(z) = g(z) \exp(z^m)$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $g(z) \not\equiv 0$ – произвольная целая функция порядка, меньшего m), имеющая плотность, большую $1 - 1/m$, полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. В. П. Громов [4] установил, что то же заключение справедливо и для любой целой функции экспоненциального типа σ , $0 < \sigma < +\infty$, ассоциированная по Борелю с которой имеет на окружности $|t| = \sigma$ ровно m особых точек, и по крайней мере одна из них не является полюсом. Ю. Ф. Коробейник в [5] решал задачи первого типа для различных подклассов нецелых функций (полнота, естественно, рассматривалась не в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, а в пространствах функций, аналитических в ограниченных областях). Отметим, что В. П. Громов доказал теорему А в более общем случае – для обобщенных производных в смысле Гельфонда–Леонтьева, а Ю. А. Казьмин – только для классических производных. В настоящей статье будет также рассматриваться лишь обычное дифференцирование.

Задачи второго типа принципиально отличаются от задач первого типа. Поясним это на примере. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{(n^2)!}. \quad (3)$$

Она имеет экспоненциальный тип, равный единице, и не удовлетворяет никакому уравнению (2), так как среди функций конечного экспоненциального типа указанным свойством обладают только квазиполиномы. Значит, система всех её производных полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. В. П. Громов в [4] отметил, что существует последовательность производных $\{F^{(n_k)}(z)\}$, неполная в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, с номерами $\{n_k\}$ плотности 1, и поэтому утверждение о полноте в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ любых последовательностей производных функции (3), имеющих плотность $1 - \varepsilon$ (каково бы ни было заданное $\varepsilon \in (0, 1)$), неверно. Следовательно, относительно полноты подсистем системы функций $\{F^{(m)}(z)\}_{m=0}^{\infty}$ нельзя доказать какой-либо нетривиальный результат по задаче первого типа, если “густоту” последовательности измерять в терминах плотности. При переходе к задачам второго типа картина резко меняется. Сейчас мы установим, что найдется последовательность $\{\nu_k\}_{k=0}^{\infty}$ нулевой плотности такая, что система производных $\{F^{(\nu_k)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ не только полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, но даже образует базис в этом пространстве. Действительно, положим $\nu_k = (k+1)^2 - k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Очевидно, что плотность последовательности $\{\nu_k\}$ равна нулю. (Напомним, что плотностью возрастающей последовательности положительных чисел $\{\nu_k\}$ называется величина $\lim_{k \rightarrow \infty} k/\nu_k$.) Имеем

$$k! F^{(\nu_k)}(z) = \sum_{\{n \in \mathbb{N} | n^2 \geq \nu_k\}} \frac{z^{n^2 - \nu_k} k!}{(n^2 - \nu_k)!} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z^{n^2 - (k+1)^2 + k} k!}{(n^2 - (k+1)^2 + k)!} = z^k (1 + \varphi_k(z)),$$

где

$$\varphi_k(z) = \sum_{n=k+2}^{\infty} z^{n^2 - (k+1)^2} \frac{k!}{(n^2 - (k+1)^2 + k)!}.$$

Нетрудно убедиться в том, что при любых $k \in \mathbb{N}_0$ и $R > 0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \max_{|z| \leq R} |\varphi_k(z)| &= \sum_{n=k+2}^{\infty} R^{n^2-(k+1)^2} \frac{k!}{(n^2 - (k+1)^2 + k)!} \\ &\leq \sum_{m=2k+3}^{\infty} \frac{R^m k!}{(k+m)!} \leq \sum_{m=2k+3}^{\infty} \frac{R^m}{m!}. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда заключаем, что максимум модуля функции $\varphi_k(z)$ в круге $|z| \leq R$, $R > 0$, оценивается остатком степенного ряда для e^R с номером $2k+2$. Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\max_{|z| \leq R} |\varphi_k(z)| \right) = 0 \quad \forall R > 0. \quad (5)$$

Согласно теореме о базисности близких систем [6] условие (5) является достаточным для того, чтобы система функций $z^k(1 + \varphi_k(z)) = k! F^{(\nu_k)}(z)$ образовывала квазистепенной базис в $\mathcal{A}(|z| < R)$ для любого $R > 0$, а значит, и в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. Базисность в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ системы функций $\{F^{(\nu_k)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ доказана.

Разобраный пример, во-первых, демонстрирует, что задачи первого и второго типов принципиально различны между собой. Во-вторых, он наталкивает на мысль о том, что, быть может, из системы производных (1) каждой целой функции, не удовлетворяющей никакому уравнению (2), можно каким-то особым образом выделить полную в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ подсистему

$$\{f^{(\nu_k)}(z)\}_{k=1}^{\infty} \quad (6)$$

с последовательностью номеров $\{\nu_k\}$ нулевой плотности. Автор решил эту задачу для целых функций нулевого экспоненциального типа, т. е. таких, для которых

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(R^{-1} \ln \max_{|z| \leq R} |f(z)| \right) = 0.$$

Оказалось, что последовательность номеров производных, порождающих полную в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ систему (6), можно выбирать сколь угодно редкой и, в частности, добиться выполнения неравенств $\nu_{k+1} > \exp(\nu_k)$ или, например, $\nu_{k+1} > \exp(\nu_k!)$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Точнее говоря, справедлива

ТЕОРЕМА Б. Пусть f – целая функция экспоненциального типа нуль, отличная от полинома, а $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ – произвольная функция. Тогда найдется последовательность натуральных чисел $\{\nu_k\}_{k=0}^{\infty}$ (зависящая от f и ψ) такая, что:

- 1) $\nu_{k+1} > \psi(\nu_k)$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$;
- 2) система $\{f^{(\nu_k)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Теорема Б анонсирована в [7] и здесь будет получена как следствие более общей и сильной теоремы. Метод доказательств, используемый в статье, существенно отличается от методов работ [1]–[5]. Отметим также, что в [2] В. П. Громов нашел критерий полноты в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ систем из любых подпоследовательностей производных целых функций (обобщение теоремы А). Согласно его теореме последовательность

$\{f^{(n_k)}(z)\}_{k=0}^\infty$, $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда f не удовлетворяет никакому уравнению вида $\sum_{m=0}^\infty c_m y^{(m)}(z) = u(z)$, где $u(z)$ – произвольная целая функция, подчиненная условиям $u^{(n_k)}(0) = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$, а характеристическая функция уравнения $\sum_{m=0}^\infty c_m t^m \neq 0$ имеет конечный экспоненциальный тип. Этот критерий применялся в дальнейшем при решении задач первого типа (см., например, [4]). По мнению автора, использование упомянутого критерия вряд ли позволило бы без привлечения каких-либо дополнительных сложных соображений доказать теорему Б и, тем более, другие формулируемые ниже результаты.

Всюду далее через $[\rho, \sigma]$, как обычно, обозначается множество всех целых функций, тип при порядке ρ которых не превосходит σ (см. ниже (8)). Через $\mathbb{C}[z]$ обозначено множество всех многочленов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ – произвольная ограниченная последовательность отличных от нуля комплексных чисел, $f \in [1, 0] \setminus \mathbb{C}[z]$, а ψ – произвольная положительная функция натурального аргумента. Тогда найдется последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=0}^\infty$ (зависящая от λ , f и ψ) такая, что:

- 1) $n_{k+1} > \psi(n_k)$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$;
- 2) система функций $\{f^{(n_k)}(\lambda_{n_k} z)\}_{k=0}^\infty$ полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$;
- 3) существует последовательность линейных агрегатов из функций системы 2)

$$g_q(z) = \sum_{\frac{q(q+1)}{2} \leq s < \frac{(q+1)(q+2)}{2}} d_{s,q} f^{(n_s)}(\lambda_{n_s} z), \quad q \in \mathbb{N}_0, \quad d_{s,q} \in \mathbb{C},$$

образующая квазистепенной базис в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Результаты, аналогичные теореме 1, получены автором для целых функций любого роста. Перед тем как их сформулировать, напомним необходимые сведения из теории роста целых функций (см. [8]–[10]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Целая функция $A(z) = \sum_{n=0}^\infty A_n z^n$ называется *функцией сравнения*, если:

- 1) $A_n > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$;
- 2) $A_{n+1}/A_n \searrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Класс всех функций сравнения обозначим $\mathfrak{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Целая функция $a(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ называется *сравнимой* с $A(z) \in \mathfrak{A}$, если существует постоянная $\tau > 0$ такая, что отношение $|a(z)|/A(\tau|z|)$ ограничено в $\mathbb{C}$. Нижняя грань таких чисел τ (обозначим её $\sigma_A(a)$) называется *A-типом* функции $a(z)$.

Известна теорема [10, с. 34–38], которая утверждает, что A-тип целой функции $a(z)$ выражается через коэффициенты рядов Маклорена $a(z)$ и $A(z)$ следующим образом:

$$\sigma_A(a) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{A_n} \right|^{1/n}. \quad (7)$$

Множество всех функций сравнения является шкалой роста в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, “обслуживающей” всё пространство $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ в том смысле, что для всякой целой функции

$f \notin \mathbb{C}[z]$ найдется $A(z) \in \mathfrak{A}$ такая, что $\sigma_A(f) = 1$. Этот результат является следствием цитированной теоремы Казьмина об A -типе и утверждения Адамара [11] (см. также [12, гл. 9, § 67]): для любой не финитной последовательности $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 0$, существует последовательность положительных чисел $\{A_n\}_{n=0}^\infty$, обладающая свойствами 1) и 2) из определения 1, такая, что $|a_n| \leq A_n$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$ и равенство $|a_n| = A_n$ выполнено для бесконечного числа номеров n . Подробное доказательство приведено в [13, предложение 4]. В теории целых функций конечного порядка часто используются функции сравнения

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}, \quad \mu > 0,$$

$$A_\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k!)^{1/\rho}}, \quad 0 < \rho < +\infty$$

(очевидно, что $E_1(z, 1) = A_1(z) = \exp z$). Достаточно обширные сведения о функциях $E_\rho(z, \mu)$ и их применениях как эталонов роста, так и ядер интегральных преобразований, имеются в монографии [14]. Классический тип целой функции $a(z)$ при порядке ρ , определяемый соотношением

$$\sigma_\rho(a) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \left(R^{-\rho} \ln \left(\max_{|z| \leq R} |a(z)| \right) \right), \quad (8)$$

связан с её E_ρ -типом и A_ρ -типом формулами

$$\sigma_\rho(a) = (\sigma_{E_\rho}(a))^\rho, \quad \sigma_\rho(a) = \frac{(\sigma_{A_\rho}(a))^\rho}{\rho}. \quad (9)$$

Класс $\mathfrak{A}$ как множество эталонов роста включает в себя и уточненные порядки. Для каждого сильного уточненного порядка $\rho(r)$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty)$ (определения см. в [15, с. 46–59]), найдется функция сравнения $A_{\rho(r)}(z)$ такая, что $A_{\rho(r)}$ -тип любой $a(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ связан с её типом $\sigma_{\rho(r)}$ при уточненном порядке $\rho(r)$ формулой

$$\sigma_{\rho(r)}(a) = \frac{(\sigma_{A_{\rho(r)}}(a))^\rho}{\rho}.$$

В качестве искомой функции сравнения подходит

$$A_{\rho(r)}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{ze^{1/\rho}}{v(n)} \right)^n,$$

где v – обратная функция к $x^{\rho(x)}$. Несложно проверить, что если $\rho(r)$ – сильный уточненный порядок, то отношение $(v(n))^n / (v(n+1))^{n+1}$ монотонно при $n > n_0$ (см. выше п. 2) в определении 1). Как доказано в [15, гл. 1], для каждой целой функции f конечного положительного порядка найдется сильный уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что $\sigma_{\rho(r)}(f) = 1$. Важное качество, которым обладает

множество $\mathfrak{A}$, состоит в том, что это – система эталонов роста, классифицирующая также целые функции нулевого и бесконечного порядков. Существуют и другие шкалы роста в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, служащие для тех же целей. Одна из них исследована В. А. Осолковым в работе [16]. Шкала является более “тонкой”, чем $\mathfrak{A}$, в классе целых функций бесконечного порядка, более “грубой” в классе целых функций нулевого порядка и по сути совпадает с уточненными порядками для целых функций конечного положительного порядка. В работах по теории целых функций обычно выбирается та шкала роста, которая наиболее удобна для конкретной решаемой задачи, лишь бы только она являлась плотным классом сравнения, т. е. для любой $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}[z]$ нашелся бы элемент рассматриваемой шкалы роста, относительно которого f имела бы конечный и положительный тип. В задачах, решаемых в настоящей работе, удобнее всего пользоваться системой эталонов роста $\mathfrak{A}$. Множество всех целых функций A -типа, не превосходящего σ , будем обозначать $[A, \sigma]$, а функций A -типа, меньшего σ , – через $[A, \sigma)$. Через $[A, +\infty)$ обозначим множество всех целых функций, сравнимых с $A(z)$ (см. выше определение 2), т. е. $[A, +\infty) = \bigcup_{0 \leq \sigma < +\infty} [A, \sigma]$.

В частности (см. (7)–(9)), справедливы равенства

$$\begin{aligned} [\rho, \sigma] &= [E_\rho, \sigma^{1/\rho}], & [\rho, \sigma] &= [E_\rho, \sigma^{1/\rho}], \\ [\rho, 0] &= [E_\rho, 0], & [\rho, +\infty) &= [E_\rho, +\infty) \quad \forall \rho, \sigma \in (0, +\infty). \end{aligned} \quad (10)$$

Следующая теорема является центральным результатом настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in \mathfrak{A}$, а $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность отличных от нуля комплексных чисел, удовлетворяющая ограничению

$$\lambda_n = O\left(\frac{A_n}{(n+1)A_{n+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Пусть $f \in [A, 0] \setminus \mathbb{C}[z]$, а ψ – произвольная положительная функция натурального аргумента. Тогда найдется последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ (зависящая от A, λ, f и ψ) такая, что:

- 1) $n_{k+1} > \psi(n_k)$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$;
- 2) система функций $\{f^{(n_k)}(\lambda_{n_k} z)\}_{k=0}^{\infty}$ полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$;
- 3) существует последовательность линейных агрегатов из функций системы 2)

$$g_q(z) = \sum_{\frac{q(q+1)}{2} \leq s < \frac{(q+1)(q+2)}{2}} d_{s,q} f^{(n_s)}(\lambda_{n_s} z), \quad d_{s,q} \in \mathbb{C}, \quad q \in \mathbb{N}_0,$$

образующая квазистепенной базис в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Нетрудно убедиться в том, что теорема 1 получается из теоремы 2 при $A(z) = e^z$, а теорема Б – из теоремы 1 при $\lambda_n = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$.

Очевидно, из полноты в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ редкой подсистемы функций $\{f^{(n)}(\lambda_n z)\}_{n=0}^{\infty}$ вытекает полнота и всей системы. По-видимому, приводимое ниже следствие из теоремы 2 для $A(z) \neq e^z$ является новым.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in \mathfrak{A}$, $f \in [A, 0] \setminus \mathbb{C}[z]$, $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность отличных от нуля комплексных чисел, удовлетворяющая условию (11). Тогда система функций $\{f^{(n)}(\lambda_n z)\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Интересно, что даже это существенное ослабление теоремы 2 в терминах роста функций f не может быть улучшено. Сказанное демонстрирует следующее утверждение (вторая часть теоремы 1 из [17]).

Пусть $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ – произвольная функция сравнения. Тогда найдутся функция $f(z)$, имеющая A -тип, равный 1, и последовательность действительных чисел λ_n^* такие, что выполняются соотношения

$$f^{(n)}(\lambda_n^*) = 0, \quad |\lambda_n^*| \leq \frac{A_n}{(n+1)A_{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Отсюда заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют целая функция $g(z) = f(\varepsilon z)$ A -типа, равного ε , и последовательность $\xi_n = \lambda_n^*/\varepsilon$ такие, что

$$g^{(n)}(\xi_n) = 0, \quad \xi_n = O\left(\frac{A_n}{nA_{n+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Из равенств (12), очевидно, вытекает неполнота в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ системы функций

$$\{g^{(n)}(\xi_n z)\}_{n=0}^{\infty},$$

так как все функции этой системы обращаются в нуль в точке $z = 1$. Тем самым следствие 1 в классе целых функций f положительного (даже сколь угодно малого) A -типа перестает быть верным.

Результаты статьи допускают некоторые модификации. Сформулируем одну из них.

СЛЕДСТВИЕ 2. Теорема 2 остается справедливой для всех функций $f \in [A, +\infty) \setminus \mathbb{C}[z]$ при условии

$$\lambda_n = o\left(\frac{A_n}{nA_{n+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

(по-прежнему, $\lambda_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$).

В заключение попробуем разобраться, когда из системы $\{f^{(n)}(\lambda_n z)\}$ можно выбрать подсистему, которая сама (а не её линейные агрегаты) образует базис в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. Такое явление наблюдается для рядов с той или иной степенью лакунарности. Для краткости ограничимся случаем $\lambda_n = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и будем рассматривать только классические характеристики роста – тип при конечном порядке.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^{m_j}, \quad b_j \neq 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

– целая функция, имеющая конечный тип при порядке $\rho \geq 1$, последовательность номеров ненулевых коэффициентов ряда Маклорена которой удовлетворяет условию

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{m_{j+1} - m_j}{m_j^{1-1/\rho}} = +\infty. \quad (14)$$

Тогда для любой возрастающей положительной функции натурального аргумента ψ найдется последовательность натуральных чисел $\{\nu_n\}_{n=0}^{\infty}$ (зависящая от f и ψ) такая, что выполнено условие

$$\nu_{n+1} > \psi(\nu_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

и система $\{f^{(\nu_n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

ТЕОРЕМА 4. Для любой целой функции, являющейся суммой лакунарного степенного ряда

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^{m_j}, \quad b_j \neq 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{m_{j+1}}{m_j} = q > 1, \quad (15)$$

и любой возрастающей положительной функции натурального аргумента ψ найдется последовательность натуральных чисел $\{\nu_n\}_{n=0}^{\infty}$ (зависящая от f и ψ) такая, что выполнено условие

$$\nu_{n+1} > \psi(\nu_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

и система $\{f^{(\nu_n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Перейдем к доказательствам сформулированных утверждений. Теорема 2 будет получена из еще более общего результата о базисности линейных агрегатов редких подпоследовательностей систем функций со специального вида матрицей коэффициентов степенных рядов.

ТЕОРЕМА 5. Пусть имеются две бесконечные матрицы $(A_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}_0}$ и $(a_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}_0}$, n – номер строки, k – номер столбца, элементы которых удовлетворяют следующим ограничениям:

- 1) $A_{n,k} > 0$ для любых $n, k \in \mathbb{N}_0$;
- 2) при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ последовательность отношений $\alpha_{n,k} = A_{n,k+1}/A_{n,k}$ не возрастает по k при $k \geq 0$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n,k} = 0$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,0} = 0$;
- 4) $|a_{n,k}| \leq A_{n,k}$ для любых $k, n \in \mathbb{N}_0$;
- 5) для любого $k \in \mathbb{N}_0$ в столбце с номером k имеется бесконечно много чисел $a_{n,k}$, для которых $|a_{n,k}| = A_{n,k}$.

Рассмотрим систему функций¹

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k.$$

Тогда для любой наперед заданной положительной функции натурального аргумента ψ найдется последовательность натуральных чисел $\{n_s\}_{s=0}^{\infty}$ такая, что

- 1) $n_{s+1} > \psi(n_s)$ для любого $s \in \mathbb{N}_0$;
- 2) система функций $\{f_{n_s}(z)\}_{s=0}^{\infty}$ полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$;
- 3) существует последовательность линейных агрегатов из функций системы 2)

$$g_q(z) = \sum_{\frac{q(q+1)}{2} \leq s < \frac{(q+1)(q+2)}{2}} d_{s,q} f_{n_s}(z), \quad d_{s,q} \in \mathbb{C}, \quad q \in \mathbb{N}_0,$$

образующих квазистепенной базис в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Поясним, как из теоремы 5 следует теорема 2. Поскольку

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m \in [A, 0] \setminus \mathbb{C}[z],$$

то функция

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{A_m} z^m \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m z^m$$

является целой и отличной от многочлена. Согласно упоминавшейся выше теореме Адамара найдется функция сравнения $B(z) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m z^m$ такая, что:

- 1) $|\beta_m| \leq B_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$;
- 2) существует бесконечно много номеров m таких, что $|\beta_m| = B_m$.

Имеем

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} b_{n+k} z^k.$$

Следовательно,

$$f^{(n)}(\lambda_n z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} b_{n+k} \lambda_n^k z^k.$$

Положим

$$a_{n,k} = b_{n+k} \frac{(n+k)!}{k!} \lambda_n^k, \quad A_{n,k} = A_{n+k} B_{n+k} \frac{(n+k)!}{k!} |\lambda_n|^k$$

и проверим, что для двух бесконечных матриц $(A_{n,k})$ и $(a_{n,k})$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, выполнены все пять условий теоремы 5. Условие 1) выполняется ввиду положительности коэффициентов степенных рядов функций сравнения и неравенств $\lambda_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

¹Из условий 2) и 4) следует, что все функции f_n являются целыми.

Условия 4) и 5) выполняются в силу построения и отмеченных свойств последовательности $\{B_m\}$.

Теперь исследуем поведение отношений $\alpha_{n,k}$. Имеем

$$\alpha_{n,k} = |\lambda_n| \frac{A_{n+k+1}B_{n+k+1}}{A_{n+k}B_{n+k}} \frac{n+k+1}{k+1}.$$

Частные $\frac{A_{n+k+1}}{A_{n+k}}$ и $\frac{B_{n+k+1}}{B_{n+k}}$ убывают и стремятся к нулю как с ростом n , так и с ростом k по свойству 2) из определения 1. Очевидно также, что

$$\frac{n+k+1}{k+1} = 1 + \frac{n}{k+1}$$

при фиксированном n убывает с ростом k и стремится к 1. Отсюда заключаем, что условие 2) из теоремы 5 также выполнено. Наконец,

$$\alpha_{n,0} = |\lambda_n|(n+1) \frac{A_{n+1}}{A_n} \frac{B_{n+1}}{B_n}. \quad (16)$$

Из равенства (16) и ограниченности последовательности $\mu_n = \lambda_n(n+1)A_{n+1}/A_n$ получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,0} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n| \frac{B_{n+1}}{B_n} = 0,$$

а это и есть условие 3) теоремы 5. Таким образом, последовательность функций $f_n(z) = f^{(n)}(\lambda_n z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5, и мы выводим из теоремы 5 теорему 2.

Вывод следствия 2 из теоремы 2 базируется на доказательстве существования функции сравнения $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$, обладающей следующими свойствами:

- 1) $A(z)$ имеет нулевой C -тип;
- 2) $\lambda_n = o(C_n/(nC_{n+1}))$, $n \rightarrow \infty$.

Тогда произвольная функция $f \in [A, +\infty)$ имеет нулевой C -тип и ввиду свойства 2) применима теорема 2, в которой надо заменить $A(z)$ на $C(z)$.

Предъявим требуемую функцию сравнения. Обозначим

$$R_n = \frac{A_n}{A_{n+1}}, \quad x_n = \max\{k|\lambda_k| \mid k \leq n\}$$

и положим

$$r_n = \begin{cases} \sqrt{R_n}, & \text{если } x_n = O(1), \quad n \rightarrow \infty, \\ \sqrt{R_n x_n}, & \text{если } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty. \end{cases} \quad (17)$$

Последовательность x_n неубывает по построению, а последовательность R_n – по определению 1. Ввиду (17) тем же свойством обладает и $\{r_n\}$. По условию следствия $x_n = o(R_n)$, $n \rightarrow \infty$. Отсюда и из (17) заключаем, что

$$x_n = o(r_n), \quad r_n = o(R_n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Покажем, что

$$C(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \prod_{k=0}^{n-1} r_k^{-1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \quad (19)$$

является искомой функцией сравнения. Включение $C(z) \in \mathfrak{A}$ вытекает из положительности коэффициентов ряда (19) и монотонного стремления к нулю отношения $C_{n+1}/C_n = 1/r_n$. Соотношение $\lambda_n = o(C_n/(nC_{n+1}))$, $n \rightarrow \infty$, справедливость которого требуется проверить, в силу введенных обозначений переписывается в следующей эквивалентной форме: $n\lambda_n = o(r_n)$, $n \rightarrow \infty$, а это уже доказано в (18), поскольку $n|\lambda_n| \leq x_n$. Наконец, C -тип $A(z)$ согласно (7) (очевидно, что $A_n = A_0 \prod_{k=0}^{n-1} R_k^{-1}$) вычисляется по формуле²

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n}{C_n} \right)^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(A_0 \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{r_k}{R_k} \right) \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(A_0 \prod_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k \right)^{1/n} = 0.$$

Итак, функция сравнения, обладающая свойствами 1) и 2), предъявлена, и это доказывает следствие 2.

Идея доказательства теоремы 5 состоит в следующем. Особым образом выбирается последовательность $\{n_s\}$, удовлетворяющая соотношениям $n_{s+1} > \psi(n_s) \forall s \in \mathbb{N}_0$, и разбивается на пачки из $q+1$ элемента в пачке с номером q , $q = 0, 1, 2, \dots$. Способ построения последовательности $\{n_s\}$ позволяет обеспечить наличие коэффициентов $d_{s,q}$ таких, что:

1) разложение в степенной ряд в точке $z = 0$ линейных комбинаций

$$g_q(z) = \sum_{\frac{q(q+1)}{2} \leq s < \frac{(q+1)(q+2)}{2}} d_{s,q} f_{n_s}(z)$$

начинается с z^q ;

2) разность $z^{-q}g_q(z) - 1$ равномерно стремится к нулю при $q \rightarrow +\infty$ в кругах $|z| \leq R$ при любом $R > 0$.

Отсюда по упоминавшейся в начале статьи теореме М.А. Евграфова вытекает квазистепенная базисность в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ системы функций $\{g_q(z)\}_{q=0}^\infty$, а вместе с этим и полнота $\{f_{n_s}(z)\}_{s=0}^\infty$.

Очевидно, что такой план осуществим лишь в силу специфических свойств матрицы $(a_{n,k})$. Наборы коэффициентов $\{d_{s,q}\}$ линейных комбинаций g_q находятся как решения систем линейных уравнений с матрицей X_q , состоящей из $q+1$ строк бесконечной матрицы $(a_{n,k})_{n,k=0}^\infty$ с номерами

$$n_s, \quad \frac{q(q+1)}{2} \leq s < \frac{(q+1)(q+2)}{2}$$

и столбцов с номерами от 0 до q . Для доказательства равномерного в любом круге стремления к нулю последовательности функций $z^{-q}g_q(z) - 1$ при $q \rightarrow +\infty$ требуется установить не только существование решений упомянутых систем, но и дать оценки этих решений. Поэтому сначала докажем три технические леммы, с помощью которых получим неравенства для определителей и миноров исследуемых матриц. Эти неравенства вместе с формулами Крамера позволяют должным образом оценить решения.

²Мы обозначили $\varepsilon_k = r_k/R_k$. Согласно (17) $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$. Поэтому

$$\left(\prod_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

ЛЕММА 1. Пусть $q \in \mathbb{N}$, $(x_{j,k})_{0 \leq j, k \leq q}$ – матрица с положительными элементами, удовлетворяющими следующим ограничениям:

- 1) отношения $\alpha_{j,k} = x_{j,k+1}/x_{j,k}$ не возрастают в каждой j -й строке с ростом k – номера столбца;
- 2) выполняются следующие неравенства:

$$\alpha_{0,0} \leq 1, \quad \alpha_{p,0} \leq \frac{1}{2(q+1)!} \prod_{\ell=0}^{p-1} \prod_{k=0}^{q-1} \alpha_{\ell,k}, \quad 1 \leq p \leq q.$$

Обозначим через S_{q+1} множество всех перестановок элементов $\{0, 1, \dots, q\}$, а через $\hat{\sigma}$ – перестановку, определяемую равенствами $\hat{\sigma}(j) = q - j$, $0 \leq j \leq q$. Тогда для любой перестановки $\sigma \in S_{q+1}$, отличной от $\hat{\sigma}$, имеем

$$\omega(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=0}^q \left(\frac{x_{j,\sigma(j)}}{x_{j,\hat{\sigma}(j)}} \right) \leq \frac{1}{2(q+1)!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала выведем несколько полезных для дальнейшего неравенств:

$$\alpha_{0,\nu} \leq 1, \quad 1 \leq \nu \leq q-1, \quad \alpha_{j,\nu} < 1, \quad 1 \leq j \leq q, \quad 0 \leq \nu \leq q-1. \quad (20)$$

Из условий 1) и 2) следует, что

$$\alpha_{0,\nu} \leq \alpha_{0,0} \leq 1, \\ \alpha_{1,\nu} \leq \alpha_{1,0} \leq \frac{1}{2(q+1)!} \prod_{k=0}^{q-1} \alpha_{0,k} \leq \frac{1}{2(q+1)!} < 1.$$

Если неравенства $\alpha_{j,\nu} < 1$ при всех $j = 1, \dots, p-1$ уже доказаны, то из условия 2) выводим

$$\alpha_{p,\nu} \leq \alpha_{p,0} \leq \frac{1}{2(q+1)!} \prod_{\ell=0}^{p-1} \prod_{k=0}^{q-1} \alpha_{\ell,k} < \frac{1}{2(q+1)!} < 1.$$

Тем самым неравенства (20) доказаны. Из (20) и определения величин $\alpha_{j,\nu}$ заключаем, что если $0 \leq t < m \leq q$, $0 \leq j \leq q$, то

$$\frac{x_{j,m}}{x_{j,t}} = \prod_{\nu=t}^{m-1} \alpha_{j,\nu} \leq \alpha_{j,t} \leq \alpha_{j,0}. \quad (21)$$

При всех $j, m, t \in \{0, 1, \dots, q\}$ выполняется оценка

$$\frac{x_{j,m}}{x_{j,t}} \leq \prod_{\nu=0}^{t-1} (\alpha_{j,\nu})^{-1}. \quad (22)$$

(Пустое произведение здесь и далее считается равным единице.) Действительно, если $t \leq m$, то ввиду (20) и (21) имеем

$$\frac{x_{j,m}}{x_{j,t}} \leq 1 \leq \prod_{\nu=0}^{t-1} (\alpha_{j,\nu})^{-1}.$$

Если же $t > m$, то

$$\frac{x_{j,m}}{x_{j,t}} = \prod_{\nu=m}^{t-1} (\alpha_{j,\nu})^{-1} \leq \prod_{\nu=0}^{t-1} (\alpha_{j,\nu})^{-1}.$$

Возьмем произвольную перестановку $\sigma \in S_{q+1}$ и зафиксируем её. Через p обозначим наибольший из номеров j , для которых $\sigma(j) \neq \hat{\sigma}(j)$. Поскольку значения различных перестановок не совпадают по меньшей мере в двух точках, то $p > 0$. Если $p < q$, то на множестве аргументов $\{p+1, \dots, q\}$ перестановка $\hat{\sigma}$, а вместе с ней и σ принимают все значения, меньшие $\hat{\sigma}(p) = q - p$. Так как в точке p значения этих перестановок не совпадают, то $\hat{\sigma}(p) < \sigma(p)$. Если же $p = q$, то $0 = \hat{\sigma}(q) < \sigma(q)$. Отсюда, учитывая (21), находим

$$\frac{x_{p,\sigma(p)}}{x_{p,\hat{\sigma}(p)}} \leq \alpha_{p,0}. \quad (23)$$

Неравенство (23) вместе с (22) и условием 2) леммы приводит нас к требуемой оценке $\omega(\sigma)$:

$$\begin{aligned} \omega(\sigma) &= \prod_{j=0}^q \left(\frac{x_{j,\sigma(j)}}{x_{j,\hat{\sigma}(j)}} \right) = \frac{x_{p,\sigma(p)}}{x_{p,\hat{\sigma}(p)}} \prod_{j=0}^{p-1} \left(\frac{x_{j,\sigma(j)}}{x_{j,\hat{\sigma}(j)}} \right) \\ &\leq \alpha_{p,0} \prod_{j=0}^{p-1} \prod_{\nu=0}^{\hat{\sigma}(j)-1} (\alpha_{j,\nu})^{-1} \leq \alpha_{p,0} \prod_{j=0}^{p-1} \prod_{\nu=0}^{q-1} (\alpha_{j,\nu})^{-1} \leq \frac{1}{2(q+1)!}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Совокупность всех взаимно однозначных отображений множества $\{t \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq t \leq q, t \neq j\}$ в $\{0, 1, \dots, q-1\}$ обозначим $S_{q,j}$, $0 \leq j \leq q$. Положим

$$\hat{\tau}_j(m) = \begin{cases} q - m, & m > j, \\ q - m - 1, & 0 \leq m < j. \end{cases}$$

Тогда для любых $j = 0, 1, \dots, q$ и $\tau \in S_{q,j}$, $\tau \neq \hat{\tau}_j$, верно неравенство

$$\omega_j(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^q \left(\frac{x_{m,\tau(m)}}{x_{m,\hat{\tau}_j(m)}} \right) \leq \frac{1}{2(q+1)!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем целое число j , $0 \leq j \leq q$, и отображение $\tau \in S_{q,j}$. Обозначим через p наибольший из номеров m , для которых $\tau(m) \neq \hat{\tau}_j(m)$. Нетрудно убедиться в том, что $p > 0$ и

$$\omega_j(\tau) = \frac{x_{p,\tau(p)}}{x_{p,\hat{\tau}_j(p)}} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{p-1} \left(\frac{x_{m,\tau(m)}}{x_{m,\hat{\tau}_j(m)}} \right). \quad (24)$$

Рассуждая так же, как и в доказательстве леммы 1, получаем неравенство $\hat{\tau}_j(p) < \tau(p)$ и, используя соотношения (21) и (22), из (24) выводим

$$\omega_j(\tau) \leq \alpha_{p,0} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{p-1} \prod_{t=0}^{q-1} (\alpha_{m,t})^{-1} \leq \frac{1}{2(q+1)!}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия леммы 1 и имеется матрица $Y = (y_{j,k})_{0 \leq j,k \leq q}$, элементы которой – произвольные комплексные числа, удовлетворяющие следующим ограничениям:

- 1) $|y_{j,k}| \leq x_{j,k}$ для любого j и любого $k = 0, 1, \dots, q$;
- 2) $|y_{j,\hat{\sigma}(j)}| = x_{j,\hat{\sigma}(j)}$, $0 \leq j \leq q$.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^q u_j y_{j,k} = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq q-1, \\ 1, & k = q, \end{cases} \quad (25)$$

относительно переменных $\{u_j\}_{j=0}^q$. Тогда эта система имеет единственное решение и для его компонент справедливы оценки

$$|u_j| \leq 3x_{j,q-j}^{-1} \prod_{\ell=0}^{j-1} (\alpha_{\ell,q-\ell-1})^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим, что определитель матрицы Y отличен от нуля. Имеем

$$\Delta = \det Y = \sum_{\sigma \in S_{q+1}} \text{sign } \sigma \prod_{j=0}^q y_{j,\sigma(j)}. \quad (26)$$

Из (26) и условий 1), 2) леммы 3 находим

$$\begin{aligned} |\Delta| &\geq \prod_{j=0}^q |y_{j,\hat{\sigma}(j)}| - \sum_{\substack{\sigma \in S_{q+1} \\ \sigma \neq \hat{\sigma}}} \prod_{j=0}^q |y_{j,\sigma(j)}| = \prod_{j=0}^q x_{j,\hat{\sigma}(j)} - \sum_{\substack{\sigma \in S_{q+1} \\ \sigma \neq \hat{\sigma}}} \prod_{j=0}^q |y_{j,\sigma(j)}| \\ &\geq \prod_{j=0}^q x_{j,\sigma(j)} - \sum_{\substack{\sigma \in S_{q+1} \\ \sigma \neq \hat{\sigma}}} \prod_{j=0}^q x_{j,\sigma(j)} = \prod_{j=0}^q x_{j,\hat{\sigma}(j)} \left(1 - \sum_{\substack{\sigma \in S_{q+1} \\ \sigma \neq \hat{\sigma}}} \prod_{j=0}^q \left(\frac{x_{j,\sigma(j)}}{x_{j,\hat{\sigma}(j)}} \right) \right). \end{aligned}$$

Вспоминая определение величины $\omega(\sigma)$ и её оценку сверху из леммы 1, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \Delta &\geq \left(1 - \sum_{\substack{\sigma \in S_{q+1} \\ \sigma \neq \hat{\sigma}}} \frac{1}{2(q+1)!} \right) \prod_{j=0}^q x_{j,\hat{\sigma}(j)} \\ &= \left(1 - \frac{(q+1)! - 1}{2(q+1)!} \right) \prod_{j=0}^q x_{j,\hat{\sigma}(j)} > \frac{1}{2} \prod_{j=0}^q x_{j,\hat{\sigma}(j)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Тем самым показано, что $\Delta \neq 0$. Поэтому система линейных уравнений (25) имеет единственное решение $(u_0, u_1, \dots, u_q)$. Его компоненты u_j согласно формулам Крамера равны Δ_j / Δ , где Δ_j – определитель матрицы, получающейся из матрицы Y заменой её j -й строки $\{y_{j,k}\}_{0 \leq k \leq q}$ на строку $(0, 0, \dots, 0, 1)$. (Для удобства система уравнений (25) записана так, что переменные u_j меняются по столбцам,

а не по строкам.) Разлагая определитель Δ_j по j -й строке и используя обозначения, введенные в лемме 2, находим

$$\Delta_j = (-1)^{q+j} \det(y_{\ell,k})_{\substack{0 \leq \ell \leq q, \ell \neq j \\ 0 \leq k \leq q-1}} = (-1)^{q+j} \sum_{\tau \in S_{q,j}} \text{sign } \tau \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^q y_{\ell, \tau(\ell)}. \quad (28)$$

Используя представление (28), условия 1), 2) леммы 3 и лемму 2, оценим модуль определителя Δ_j сверху:

$$\begin{aligned} |\Delta_j| &\leq \sum_{\tau \in S_{q,j}} \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^q |y_{\ell, \tau(\ell)}| \leq \sum_{\tau \in S_{q,j}} \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^q x_{\ell, \tau(\ell)} = \left(1 + \sum_{\substack{\tau \in S_{q,j} \\ \tau \neq \hat{\tau}}} \omega_j(\tau)\right) \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^q x_{\ell, \hat{\tau}_j(\ell)} \\ &\leq \left(1 + \frac{q! - 1}{2(q+1)!}\right) \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^q x_{\ell, \hat{\tau}_j(\ell)} < \frac{3}{2} \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^q x_{\ell, \hat{\tau}_j(\ell)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Из соотношений (27) и (29) находим

$$|u_j| < \frac{3}{x_{j, \hat{\sigma}(j)}} \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^q \left(\frac{x_{\ell, \hat{\tau}_j(\ell)}}{x_{\ell, \hat{\sigma}(\ell)}} \right). \quad (30)$$

При $j < \ell \leq q$ имеем $\hat{\tau}_j(\ell) = \hat{\sigma}(\ell)$, а при $0 \leq \ell < j$ по определению перестановок $\hat{\tau}_j$ и $\hat{\sigma}$ справедливо соотношение $\hat{\tau}_j(\ell) = q - \ell - 1 = \hat{\sigma}(\ell) - 1$. Следовательно,

$$\frac{x_{\ell, \hat{\sigma}(\ell)}}{x_{\ell, \hat{\tau}_j(\ell)}} = \begin{cases} 1, & j < \ell \leq q, \\ \alpha_{\ell, q-\ell-1}, & 0 \leq \ell < j. \end{cases}$$

Отсюда и из (30) получаем оценку

$$|u_j| < 3 \left(x_{j, q-j} \prod_{\ell=0}^{j-1} \alpha_{\ell, q-\ell-1} \right)^{-1},$$

а это и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Сначала построим по индукции последовательность номеров $\{n_s\}_{s=0}^{\infty}$. Она будет объединением пачек E_q , $0 \leq q < +\infty$, содержащих $q+1$ элемент:

$$E_q = \left\{ n_s \mid \frac{q(q+1)}{2} \leq s < \frac{(q+1)(q+2)}{2}, q \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

В качестве номера n_0 возьмем наименьшее число m , для которого

$$\alpha_{\nu, 0} < 1 \quad \forall \nu \geq m, \quad |a_{m, 0}| = A_{m, 0}.$$

Из условия теоремы следует, что такие числа m существуют, поскольку $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_{\nu, 0} = 0$ и равенство $|a_{m, 0}| = A_{m, 0}$ выполняется для бесконечного количества $m \in \mathbb{N}$. Положим $E_0 = \{n_0\}$. Пусть теперь $q \in \mathbb{N}$ и пачки E_p при

$p < q$ уже построены. Опишем процесс построения пачки E_q , состоящей из $q + 1$ элемента. Номер $n_{q(q+1)/2}$ будет наименьшим числом m , для которого выполняются соотношения

$$m > \psi(n_{q(q+1)/2-1}), \quad |a_{m,q}| = A_{m,q}.$$

В силу условия 5) теоремы такие m существуют. Без ограничения общности можно считать, что $\psi(x) > x$ для любого $x \in \mathbb{N}$, это обеспечивает условие

$$n_{q(q+1)/2} > n_{q(q+1)/2-1}.$$

Номера $n_{q(q+1)/2+j}$, $1 \leq j \leq q$, выбираются следующим образом. Если уже имеются числа $n_{q(q+1)/2+\ell}$, $0 \leq \ell \leq j-1$, то в качестве $n_{q(q+1)/2+j}$ берем наименьшее $m \in \mathbb{N}$, для которого одновременно выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 1) & m > \psi(n_{q(q+1)/2+j-1}); \\ 2) & \alpha_{m,0} < \frac{1}{3(q+1)!} \prod_{\ell=0}^{j-1} \prod_{k=0}^{q-1} (\alpha_{n_{q(q+1)/2+\ell},k}); \\ 3) & A_{m,q-j} = |a_{m,q-j}|. \end{aligned} \quad (31)$$

(Из условий 3), 5) теоремы, а также из положительности чисел $\alpha_{n,k}$ вытекает, что таких m бесконечно много.) Таким образом, пачка E_q построена, и тем самым построена бесконечная последовательность номеров $\{n_s\}_{s=0}^{\infty}$, для которой выполнено требование $n_{s+1} > \psi(n_s) \forall s \in \mathbb{N}_0$.

Покажем, что для подпоследовательности функций $\{f_{n_s}(z)\}_{s=0}^{\infty}$ выполняется утверждение 3) теоремы (а значит, и утверждение 2)). Всюду ниже во избежание громоздких обозначений вместо $n_{j+q(q+1)/2}$ при $0 \leq j \leq q$ будем писать $n(j, q)$. При каждом фиксированном $q \in \mathbb{N}$ рассмотрим матрицы $Y_q = (y_{j,k,q})_{0 \leq j,k \leq q}$, где $y_{j,k,q} = a_{n(j,q),k}$, и систему линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^q u_{j,q} y_{j,k,q} = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq q-1, \\ 1, & k = q. \end{cases} \quad (32)$$

Если положить $x_{j,k,q} = A_{n(j,q),k}$, то окажется, что в силу (31) для матриц $X_q = (x_{j,k,q})_{0 \leq j,k \leq q}$ и Y_q выполняются все условия леммы 3. Следовательно, система уравнений (32) имеет единственное решение $(u_{0,q}, \dots, u_{q,q})$, для компонент которого справедлива оценка

$$|u_{j,q}| \leq \frac{3}{A_{n(j,q),q-j}} \prod_{\ell=0}^{j-1} (\alpha_{n(\ell,q),q-\ell-1})^{-1}, \quad 0 \leq j \leq q. \quad (33)$$

Положим³

$$g_0(z) = (a_{n_0})^{-1} f_{n_0}(z), \quad g_q(z) = \sum_{j=0}^q u_{j,q} f_{n(j,q)}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

³Напомним, что согласно выбору номера n_0 выполняется равенство $|a_{n_0,0}| = A_{n_0,0}$, а по условию теоремы 5 $A_{n,k} > 0$ при всех $n, k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $a_{n_0,0} \neq 0$.

Отсюда заключаем, что функции $g_q(z)$ имеют следующее разложение в ряд Тейлора:

$$g_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^q a_{n(j,q),k} u_{j,q} \right) z^k, \quad q \in \mathbb{N}. \quad (34)$$

В силу (32) коэффициенты ряда (34) при $0 \leq k \leq q-1$ обращаются в нуль, а коэффициент при z^q равен единице. Поэтому функции $g_q(z)$ имеют вид

$$g_q(z) = z^q(1 + \varphi_q(z)), \quad q \in \mathbb{N}_0,$$

где $\varphi_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n_0,k}}{a_{n_0,0}} z^k$, а при $q \geq 1$

$$\varphi_q(z) = \sum_{k=q+1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^q a_{n(j,q),k} u_{j,q} \right) z^k. \quad (35)$$

Для доказательства утверждения 3) теоремы осталось установить квазистепенную базисность в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ последовательности функций $g_q(z) = z^q(1 + \varphi_q(z))$. Как отмечалось выше, для этого достаточно проверить справедливость соотношения

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \left(\max_{|z| \leq R} |\varphi_q(z)| \right) = 0 \quad \forall R > 0. \quad (36)$$

Воспользуемся оценкой сверху (33) для величин $|u_{j,q}|$ и подставим ее в ряд (35). Получим

$$\max_{|z| \leq R} |\varphi_q(z)| \leq 3 \sum_{k=q+1}^{\infty} R^{k-q} \sum_{j=0}^q \frac{|a_{n(j,q),k}|}{A_{n(j,q),q-j}} \prod_{\ell=0}^{j-1} (\alpha_{n(\ell,q),q-\ell-1})^{-1}. \quad (37)$$

Согласно (31) имеем

$$3(q+1)! \prod_{\ell=0}^{j-1} \prod_{k=0}^{q-1} (\alpha_{n(\ell,q),k})^{-1} \leq \frac{1}{\alpha_{n(j,q),0}}, \quad 0 \leq j \leq q. \quad (38)$$

Напомним, что при $\nu \geq n_0$ все величины $\alpha_{\nu,0}$ меньше единицы. Поскольку последовательность $\alpha_{n,k}$ не возрастает по k при любом фиксированном n , то $\alpha_{\nu,k} < 1$ при всех $\nu \geq n_0$, $k \geq 0$. Поэтому, удалив некоторое количество сомножителей из произведения, стоящего в левой части неравенства (38), мы только усилим неравенство. В частности,

$$3(q+1)! \prod_{\ell=0}^{j-1} (\alpha_{n(\ell,q),q-\ell-1})^{-1} \leq \frac{1}{\alpha_{n(j,q),0}}, \quad 0 \leq j \leq q. \quad (39)$$

Из неравенств (37) и (39), учитывая, что $|a_{n,k}| \leq A_{n,k}$ при всех $n, k \in \mathbb{N}_0$, находим

$$\max_{|z| \leq R} |\varphi_q(z)| \leq \frac{1}{(q+1)!} \sum_{k=q+1}^{\infty} R^{k-q} \sum_{j=0}^q \frac{A_{n(j,q),k}}{A_{n(j,q),q-j}} \frac{1}{\alpha_{n(j,q),0}}.$$

Поскольку при любых $\nu, k, t \in \mathbb{N}$, $k > t$, имеем

$$\frac{A_{\nu,k}}{A_{\nu,t}} = \prod_{m=t}^{k-1} \alpha_{\nu,m},$$

то при $\nu > n_0$ и $0 \leq j \leq q$ справедлива оценка

$$\frac{A_{\nu,k}}{A_{\nu,q-j}} = \prod_{m=q-j}^{k-1} \alpha_{\nu,m} \leq \prod_{m=q}^{k-1} \alpha_{\nu,m}.$$

Следовательно,

$$\max_{|z| \leq R} |\varphi_q(z)| \leq \frac{1}{(q+1)!} \sum_{j=0}^q \frac{1}{\alpha_{n(j,q),0}} \sum_{k=q+1}^{\infty} \prod_{m=q}^{k-1} (R\alpha_{n(j,q),m}). \quad (40)$$

Поскольку $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_{\nu,0} = 0$, то при $q > q_0(R)$ выполнено неравенство

$$\alpha_{n(j,q),0} R < \frac{1}{2}.$$

Отсюда в силу убывания последовательности $\alpha_{\nu,m}$ с ростом m получаем оценку

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \prod_{m=q}^{k-1} (R\alpha_{n(j,q),m}) \leq \sum_{k=q+1}^{\infty} (R\alpha_{n(j,q),0})^{k-q} = \frac{R\alpha_{n(j,q),0}}{1 - R\alpha_{n(j,q),0}} < 2R\alpha_{n(j,q),0}. \quad (41)$$

Из соотношений (40) и (41) находим

$$\max_{|z| \leq R} |\varphi_q(z)| \leq \frac{1}{(q+1)!} \sum_{j=0}^q 2R = \frac{2R}{q!}, \quad q > q_0(R). \quad (42)$$

Отсюда вытекает (36); это завершает доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Напомним [18, гл. 7, § 12], что если целая функция $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет тип при порядке ρ , равный σ , то

$$(\sigma e \rho)^{1/\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{|a_n|} n^{1/\rho}).$$

Из этого соотношения и определения верхнего предела вытекает ограниченность последовательности $\sqrt[n]{|a_n|} n^{1/\rho}$. Значит, существует положительная постоянная c , зависящая от функции $a(z)$, такая, что

$$\sqrt[n]{|a_n|} n^{1/\rho} < c \Leftrightarrow |a_n| n^{n/\rho} < c^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} (c^{-n} |a_n| (n!)^{1/\rho}) = 0$.

Возьмем и зафиксируем функцию $f(z)$, имеющую конечный тип при порядке ρ , разложение в ряд Маклорена (13) которой удовлетворяет условию (14).

Согласно доказанному выше существует постоянная $c = c(f) > 0$ такая, что $\lim_{j \rightarrow \infty} (c^{-m_j} b_j (m_j!)^{1/\rho}) = 0$. Обозначим

$$x_j = c^{-m_j} |b_j| (m_j!)^{1/\rho} \quad (43)$$

и построим для последовательности x_j монотонно стремящуюся к нулю мажоранту по формуле $y_j = \max_{j \leq k} x_k$.

Нетрудно убедиться в том, что $x_j \leq y_j \forall j \in \mathbb{N}$ и множество $E = \{j \in \mathbb{N} \mid x_j = y_j\}$ состоит из бесконечного числа элементов.

Выберем E_1 – бесконечное подмножество E – по следующему правилу:

- 1) наименьший элемент E_1 совпадает с наименьшим элементом E ;
- 2) если построены первые k элементов множества E_1 (обозначим их $j_0, j_1, \dots, j_{k-1}$), то следующий $(k+1)$ -й находится так: среди всех чисел $n \in E$, больших j_{k-1} (они существуют, поскольку количество элементов E бесконечно), выбирается наименьшее из тех, для которых выполняются неравенства

$$2\psi(m_{j_{k-1}}) < n, \quad 2 + j_{k-1} < n, \quad (44)$$

$$k < m_n - m_{n-1}. \quad (45)$$

Требование (45) осуществимо, так как ввиду (14) $\lim_{t \rightarrow \infty} (m_t - m_{t-1}) = +\infty$.

Положим $\nu_k = m_{j_k} - k$ и докажем, что, во-первых, $\psi(\nu_{k-1}) < \nu_k$ при любом натуральном k , а во-вторых, последовательность функций

$$f_k(z) = \frac{f^{(\nu_k)}(z) k!}{b_{j_k} m_{j_k}!}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (46)$$

образует квазистепенной базис в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. Одновременная справедливость этих утверждений и означает, что теорема 3 верна.

Первое утверждение доказывается просто. Заметим, что согласно выбору последовательности $\{j_k\}$, определяемому соотношениями (44) и (45), верны неравенства

$$2\psi(m_{j_{k-1}}) < j_k, \quad 2 + j_{k-1} < j_k, \quad k < m_{j_k} - m_{j_{k-1}}.$$

Отсюда находим $j_k \geq 2k + 1$. А так как $j_k \leq m_{j_k}$, то $\nu_k = m_{j_k} - k > m_{j_k} - j_k/2 \geq m_{j_k}/2$. Следовательно, $m_{j_k}/2 < \nu_k < m_{j_k}$. Поэтому в силу возрастания ψ имеем

$$\psi(\nu_n) < \psi(m_{j_n}) < \frac{j_{n+1}}{2} \leq \frac{m_{j_{n+1}}}{2} < \nu_{n+1},$$

что и требуется доказать.

Докажем квазистепенную базисность системы функций (46). Проверим сначала, что ряд Маклорена $f_k(z)$ начинается с z^k . Если продифференцировать ν_k раз функцию $f(z)$, то все слагаемые ее ряда Маклорена, содержащие степени z , меньшие ν_k , обратятся в нуль. В силу выбора ν_k и неравенства (45) имеем $\nu_k = m_{j_k} - k > m_{j_{k-1}}$. Ввиду лакунарности ряда (13) в нем отсутствуют слагаемые, содержащие степени z , лежащие в интервалах $(m_{j_{k-1}}, m_{j_k})$. Поэтому производная функции f порядка ν_k имеет вид

$$f^{(\nu_k)}(z) = \sum_{j=j_k}^{\infty} b_j z^{m_j - \nu_k} \prod_{n=0}^{\nu_k-1} (m_j - n). \quad (47)$$

Из соотношений (46) и (47), учитывая, что $m_{j_k} - \nu_k = k$, находим

$$\begin{aligned} f_k(z) &= z^k + \sum_{j=j_k+1}^{\infty} \frac{b_j m_j! k!}{b_{j_k} (m_j - \nu_k)! m_{j_k}!} z^{m_j - m_{j_k} + k} \\ &= z^k \left(1 + \sum_{j=j_k+1}^{\infty} \frac{b_j}{b_{j_k}} \frac{m_j! k!}{(m_j - m_{j_k} + k)! m_{j_k}!} z^{m_j - m_{j_k}} \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Согласно теореме Евграфова (см. выше) для доказательства квазистепенной базисности в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ системы функций $\{f_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, разложение которых в ряды Маклорена начинается с z^k , достаточно установить, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (z^{-k} f_k(z) - 1) = 0 \quad (49)$$

равномерно в любом круге на комплексной плоскости. Из (48) видно, что предельное равенство (49) вытекает из следующего более сильного соотношения⁴

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(R) = 0 \quad \forall R > 0, \quad (50)$$

где

$$S_k(R) = \sum_{j=j_k+1}^{\infty} \left| \frac{b_j}{b_{j_k}} \right| \frac{m_j! R^{m_j - m_{j_k}}}{(m_j - m_{j_k})! m_{j_k}!}. \quad (51)$$

Именно равенство (50) сейчас и будет доказано.

Воспользовавшись введенным выше обозначением (43), получим

$$\left| \frac{b_j}{b_{j_k}} \right| = \frac{x_j}{x_{j_k}} \frac{(m_{j_k}!)^{1/\rho}}{(m_j!)^{1/\rho}} c^{m_j - m_{j_k}} \leq c^{m_j - m_{j_k}} \left(\frac{m_{j_k}!}{m_j!} \right)^{1/\rho} \quad \forall j > j_k. \quad (52)$$

Неравенство в (52) является следствием включения $j_k \in E$: согласно определению множества E имеем $x_j \leq x_n$ ($\forall n \in E, \forall j > n$). Из (51) и (52) находим

$$S_k(R) \leq \sum_{j=j_k+1}^{\infty} \frac{(cR)^{m_j - m_{j_k}}}{(m_j - m_{j_k})!} \left(\frac{m_{j_k}!}{m_j!} \right)^{1 - \frac{1}{\rho}}.$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы осталось решить следующую задачу. Требуется установить справедливость соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k(r) = 0 \quad \forall r > 0, \quad (53)$$

⁴Были использованы два очевидных неравенства:

$$\max_{|z| \leq R} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n \quad \forall R > 0, \quad \frac{k!}{(p+k)!} \leq \frac{1}{p!} \quad \forall p, k \in \mathbb{N}.$$

где $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ – произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию (14),

$$\sigma_k(r) = \sum_{j=j_k+1}^{\infty} \frac{r^{m_j-m_{j_k}}}{(m_j-m_{j_k})!} \left(\frac{m_j!}{m_{j_k}!} \right)^{1-\frac{1}{\rho}}. \quad (54)$$

Обозначим $A_k = m_{j_k+1} - m_{j_k}$, $b = 1 - 1/\rho$. Получим

$$\sigma_k(r) < \sum_{m=m_{j_k+1}}^{\infty} \frac{r^{m-m_{j_k}}}{(m-m_{j_k})!} \left(\frac{m!}{m_{j_k}!} \right)^b = \sum_{n=A_k}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \left(\frac{(m_{j_k}+n)!}{m_{j_k}!} \right)^b. \quad (55)$$

Если $\rho = 1$, то последняя сумма в (55) является остатком степенного ряда для e^r . Поскольку остатки степенного ряда произвольной целой функции равномерно сходятся к нулю в любом круге на комплексной плоскости, то из (55) и равенства $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = +\infty$ (см. (14)) сразу же вытекает (53) в случае $\rho = 1$.

При $\rho > 1$ согласно (14) имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (A_k m_{j_k}^{-b}) = +\infty. \quad (56)$$

Рассмотрим последовательность

$$u_{n,k} = \frac{(2r)^n}{n!} \left(\frac{(m_{j_k}+n)!}{m_{j_k}!} \right)^b.$$

Тогда оценка (55) переписывается в следующем виде:

$$\sigma_k(r) \leq \sum_{n=A_k}^{\infty} 2^{-n} u_{n,k}. \quad (57)$$

Докажем, что при любом достаточно большом k последовательность $u_{n,k}$ является убывающей по n при $n \geq A_k$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{A_k,k} = 0. \quad (58)$$

Нетрудно убедиться в том, что это завершит доказательство соотношения (53). Действительно, из (57) и (58), учитывая убывание $u_{n,k}$ по n при $n \geq A_k$, находим

$$\sigma_k(r) < u_{A_k,k} \sum_{n=A_k}^{\infty} 2^{-n} = o(u_{A_k,k}) = o(1), \quad k \rightarrow \infty,$$

что и требовалось доказать.

Убывание $\{u_{n,k}\}$ по n при $n \geq A_k$ вытекает из неравенства

$$\frac{u_{n,k}}{u_{n-1,k}} < 1 \quad \forall n > A_k. \quad (59)$$

Установим его справедливость при любом достаточно большом k . Имеем

$$\frac{u_{n,k}}{u_{n-1,k}} = \frac{2r(m_{j_k}+n)^b}{n}. \quad (60)$$

Ввиду (56) при всех достаточно больших k выполняется неравенство

$$A_k > 8rm_{j_k}^b. \quad (61)$$

Из (60) и (61), учитывая убывание функции $x^{-1}(m+x)^b$ на полуоси $0 < x < +\infty$ при любых $m > 0$ и $b \in (0, 1)$, получаем оценки

$$\frac{u_{n,k}}{u_{n-1,k}} < \frac{2r(m_{j_k} + A_k)^b}{A_k} < \frac{(m_{j_k} + 8rm_{j_k}^b)^b}{4m_{j_k}^b}. \quad (62)$$

Правая часть неравенства (62) имеет при $k \rightarrow \infty$ предел, равный $1/4$, что влечет за собой справедливость неравенства (59) при $n > A_k$ и всех достаточно больших k .

Теперь докажем предельное соотношение (58). Имеем

$$\begin{aligned} u_{A_k,k} &= \frac{(2r)^{A_k}}{A_k!} \left(\frac{(m_{j_k} + A_k)!}{m_{j_k}!} \right)^b \leq \frac{(2r)^{A_k} (m_{j_k} + A_k)^{A_k b}}{A_k!} \\ &\leq \frac{(2r)^{A_k} A_k^{A_k}}{A_k!} \frac{(m_{j_k} + A_k)^{A_k b}}{A_k^{A_k}}. \end{aligned} \quad (63)$$

Из (63) и неравенства

$$\frac{m^m}{m!} < \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{m^\nu}{\nu!} = e^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

находим

$$u_{A_k,k} < (2er)^{A_k} \left(\frac{(m_{j_k} + A_k)^b}{A_k} \right)^{A_k}. \quad (64)$$

Исходя из убывания функции $x^{-1}(m+x)^b$ на луче $0 < x < +\infty$ ($m > 0$, $0 < b < 1$), заключаем, что, подставив в выражение $A_k^{-1}(m_{j_k} + A_k)^b$ вместо A_k оценку снизу $8rm_{j_k}^b$ этих величин (см. (61)), мы только усилим неравенство (64):

$$\begin{aligned} u_{A_k,k} &< (2er)^{A_k} \left(\frac{(m_{j_k} + 8rm_{j_k}^b)^b}{8rm_{j_k}^b} \right)^{A_k} = \left(\frac{e}{4} \right)^{A_k} \left(\frac{m_{j_k} + 8rm_{j_k}^b}{m_{j_k}} \right)^{bA_k} \\ &= \left(\frac{e}{4} \right)^{A_k} (1 + o(1))^{A_k} = o(1), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Стремление к нулю последовательности $u_{A_k,k}$ при $k \rightarrow \infty$ доказано, и это завершает доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Зафиксируем функцию $f(z)$, заданную лакунарным степенным рядом (15). Свяжем с ней функцию сравнения

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n$$

(см. [13, предложение 4]), тейлоровы коэффициенты которой обладают следующими свойствами:

$$1) |b_j| \leq B_{m_j} \text{ для любого } j \in \mathbb{N};$$

2) множество $E = \{j \in \mathbb{N} \mid |b_j| = B_{m_j}\}$ состоит из бесконечного числа элементов.

Построим E_1 – бесконечное подмножество E – точно так же, как и в теореме 3. Потом тем же способом определяем числовую $\{\nu_k\}_{k=0}^\infty$ и функциональную $\{f_k(z)\}_{k=0}^\infty$ последовательности. Неравенство $\psi(\nu_{k-1}) < \nu_k$ установлено в доказательстве теоремы 3. Осталось доказать предельные соотношения (50), из которых, как было отмечено выше, вытекает квазистепенная базисность в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ системы функций (46). Возьмем произвольное число $R > 0$ и зафиксируем его. В соответствии с построением множества E_1 и свойствами 1), 2) тейлоровых коэффициентов функции сравнения из (47) находим⁵

$$\begin{aligned} S_k(R) &\leq \sum_{j=j_k+1}^{\infty} \frac{B_{m_j}}{B_{m_{j_k}}} \frac{m_j! R^{m_j-m_{j_k}}}{(m_j-m_{j_k})! m_{j_k}!} \\ &< \sum_{j=j_k+1}^{\infty} \left(\frac{B_{m_j}}{B_{m_{j_k}}} \right) 2^{m_j} R^{m_j-m_{j_k}}. \end{aligned} \quad (65)$$

В силу стремления к нулю отношения B_{n+1}/B_n при всех достаточно больших n выполняются неравенства

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} < (2^{1+\frac{q}{q-1}} R)^{-1}$$

(число $q > 1$ определено в (15)). Следовательно, при всех достаточно больших k имеем

$$\begin{aligned} \frac{B_{m_j}}{B_{m_{j_k}}} &= \prod_{n=m_{j_k}}^{m_j-1} \frac{B_{n+1}}{B_n} \\ &\leq \left(\max \left\{ \frac{B_{n+1}}{B_n} \mid n \geq m_{j_k} \right\} \right)^{m_j-m_{j_k}} < \left(2^{1+\frac{q}{q-1}} R \right)^{m_{j_k}-m_j}. \end{aligned} \quad (66)$$

Из соотношений (65) и (66) находим

$$\begin{aligned} S_k(R) &< \sum_{j=j_k+1}^{\infty} 2^{m_j} \left(2^{1+\frac{q}{q-1}} \right)^{m_{j_k}-m_j} = 2^{m_{j_k}} \sum_{j=j_k+1}^{\infty} 2^{\frac{q(m_{j_k}-m_j)}{q-1}} \\ &< 2^{m_{j_k}} \sum_{m=p_k}^{\infty} 2^{-\frac{mq}{q-1}} = O\left(2^{m_{j_k}} \cdot 2^{-\frac{p_k q}{q-1}} \right), \end{aligned} \quad (67)$$

где $p_k = m_{j_k+1} - m_{j_k}$. В силу (15) имеем

$$q = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{m_{j+1}}{m_j} = 1 + \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{m_{j+1} - m_j}{m_j} \leq 1 + \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{m_{j_k}}.$$

⁵Ниже используется оценка сверху числа сочетаний: $\frac{m!}{k!(m-k)!} < 2^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

Отсюда $p_k/m_{j_k} \geq (q-1)(1+o(1))$, $k \rightarrow \infty$, или, что то же самое, $m_{j_k} \leq p_k/(q-1) + o(p_k)$, $k \rightarrow \infty$. Это соотношение вместе с (67) влечет за собой асимптотические оценки

$$\begin{aligned} \log_2 S_k(R) &< m_{j_k} - \frac{p_k q}{q-1} + O(1) \\ &= -p_k + \left(m_{j_k} - \frac{p_k}{q-1} \right) + O(1) \leq -p_k + o(p_k) \rightarrow -\infty, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(R) = 0$, что и доказывает теорему.

Список литературы

1. Казьмин Ю. А. О полноте одной системы аналитических функций. I, II // Вестн. МГУ. 1960. №5. С. 3–13; №6. С. 11–19.
2. Громов В. П. О полноте системы производных аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25. №3. С. 543–551.
3. Казьмин Ю. А. О подпоследовательностях полиномов Эрмита и Лагерра // Вестн. МГУ. 1960. №2. С. 6–9.
4. Громов В. П. К вопросу о циклических элементах оператора дифференцирования в пространствах аналитических функций // Матем. заметки. 1983. Т. 33. №4. С. 529–538.
5. Коробейник Ю. Ф. О полноте одной системы аналитических функций // Матем. сб. 1965. Т. 67(109). №4. С. 561–569.
6. Евграфов М. А. Метод близких систем в пространстве аналитических функций и его применение к проблеме интерполяции // Тр. Моск. матем. об-ва. 1956. Т. 5. С. 89–201.
7. Попов А. Ю. Об аппроксимативных свойствах некоторых типов последовательностей целых функций // Докл. РАН. 1999. Т. 366. №1. С. 18–20.
8. Казьмин Ю. А. Сравнения функция // Матем. энциклопедия. Т. 5. М.: Сов. энциклопедия, 1985. С. 160.
9. Казьмин Ю. А. Об одной задаче А. О. Гельфонда // Матем. сб. 1973. Т. 90. №4. С. 521–543.
10. Казьмин Ю. А. Методы теории интерполяции аналитических функций и их приложения: Дис. . . . доктора физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1972.
11. Hadamard J. Essai sur l'etude des fonctions données par leur development de Taylor // J. Math. Pures. Appl. 1892. Ser. 4. V. 8.
12. Валирон Ж. Аналитические функции. М.: ГИТТЛ, 1957.
13. Попов А. Ю. Об обращении обобщенного преобразования Бореля // Фундам. и прикл. математика. 1999. Т. 5. №3. С. 817–841.
14. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления целых функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
15. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
16. Осколков В. А. О некоторых вопросах теории целых функций // Матем. сб. 1993. Т. 184. №1. С. 129–148.
17. Попов А. Ю. Границы сходимости и единственности интерполяционных задач Абеля–Гончарова // Матем. сб. 2002. Т. 193. №2. С. 97–128.
18. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1977.

Поступило в редакцию
25.11.2003