Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Штепина, Обобщение теоремы Функа–Гекке на случай гиперболического пространства, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 5, 213–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 03:46:40

УДК 515.12

Т. В. Штепина

Обобщение теоремы Функа–Гекке на случай гиперболического пространства

Известная теорема Функа–Гекке утверждает, что для интегральных операторов, ядра которых зависят только от расстояния между точками в сферической геометрии, а интегрирование ведется по поверхности гиперболы, всякая поверхностная сферическая гармоника является собственным вектором. В настоящей работе эта теорема распространяется на случай некомпактного пространства Лобачевского. Для физически важных случаев подсчитано соответствующее собственное значение.

Библиография: 12 наименований.

Теорема Функа–Гекке утверждает, что поверхностные сферические гармоники являются собственными векторами для широкого класса интегральных операторов (интегрирование по поверхности сферы), ядра которых зависят лишь от угла между векторами ξ и η , концы которых лежат на сфере интегрирования. Поверхностные сферические гармоники на двумерной сфере рассматривались с разных точек зрения П. Функом в работе [1], чуть позднее Е. Гекке [2] обнаружил, что поверхностные сферические гармоники являются собственными векторами интегральных операторов, ядра которых являются гладкими функциями от расстояния ρ между точками ξ и η на поверхности сферы в сферической тригонометрии. В частности, для важного с физической точки зрения ядра вида $\exp(i\alpha\rho)$ собственное значение, согласно Гекке, имеет вид $2\pi i^n \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} J_{n+\frac{1}{2}}(\alpha)$, где n – степень сферической гармоники, $J_k(\alpha)$ – функция Бесселя. В 1938 г. А. Эрдейи [3] обобщил эту теорему в двух направлениях: с одной стороны, в направлении повышения размерности сферы, а с другой – в направлении ослабления требований, налагаемых на ядро интегрального оператора: оно может быть функцией из класса $L^1 \cap L^2$. В 1958 г. В. С. Владимиров [4] доказал, что эта теорема справедлива для ядра, принадлежащего только $L^1(-1; 1)$.

Примечательно, что для некоторых частных случаев теорема Функа–Гекке, видимо, неоднократно переоткрывалась. Так, например, И. Стейн и Г. Вейс в книге [5, гл. IV, § 2, 2.19] приводят по существу классический вариант этой теоремы без ссылок на ее авторов или на работу [3], однако собственное значение поверхностной сферической гармоники не было ими указано.

Теорема Функа–Гекке использовалась автором в работе [6] для изучения спектра эквивариантного расширения оператора Лапласа в шаре. Большой интерес представляет изучение эквивариантного расширения волнового оператора во внутренности светового конуса. Эта проблема потребовала обобщения теоремы Функа–Гекке на случай гиперболического симметрического пространства.

В настоящей работе мы доказываем соответствующую теорему для произвольной поверхностной гиперболической гармоник. Точнее, мы доказываем, что последние являются собственными векторами широкого класса интегральных операторов, ядра которых зависят от расстояния между точками ξ и η на поверхности гиперboloида $[x, x] = 1$ в гиперболической тригонометрии. Собственные значения известны нам (пока) лишь в случаях четномерных пространств малых размерностей ($n = 2$ или $n = 4$). В случае размерностей $n \geq 6$ вычисления оказались очень громоздкими и их не удалось довести до получения явной формулы, но автор не ставила себе целью дать результат в наибольшей общности, учитывая физическую подоплеку данной проблемы.

Автор глубоко благодарна Ю. А. Неретину, участие и советы которого оказались очень полезными.

Пусть $\mathfrak{H}^{n,l}$ – пространство однородных гармонических многочленов степени l от n переменных. Если $f(x) \in \mathfrak{H}^{n,l}$, то ее сужение на сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ называется поверхностной сферической гармоникой степени l и обозначается $f(\xi)$, $\xi \in S^{n-1}$. Связь между $f(x)$ и $f(\xi)$ устанавливается следующей формулой:

$$f(x) = f(r \cdot \xi) = r^l f(\xi), \quad r = |x|.$$

Поверхностные сферические гармоники степени l также образуют линейное пространство относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число из $\mathbb{C}$. Это пространство мы будем обозначать $\mathcal{R}^{nl}$. Очевидно, $\mathcal{R}^{nl} \subset L^2(S^{n-1})$. Пространство $\mathcal{R}^{nl}$ можно превратить в комплексное евклидово пространство, если ввести в нем скалярное произведение (см. [7, с. 445])

$$(f(\xi), g(\xi)) = \int_{S^{n-1}} f(\xi) \overline{g(\xi)} d\xi, \quad d\xi = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{n/2}} \sin^{n-2} \theta_{n-1} \dots \sin \theta_2 d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}.$$

Ортонормированный базис в $\mathcal{R}^{nl}$ образуют многочлены

$$S_K^l(\theta) = A_K^l \prod_{j=0}^{n-3} C_{k_j - k_{j+1}}^{\frac{n}{2} - \frac{j}{2} - 1 + k_{j+1}}(\cos \theta_{n-j-1}) \sin^{k_{j+1}}(\theta_{n-j-1}) e^{\pm i k_{n-2} \theta_1},$$

где $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ – углы Эйлера на S^{n-1} , C_n^ν – многочлен Гегенбауэра, A_K^l – нормирующий множитель, $l = k_0$, $K = (k_1, k_2, \dots, k_{n-3}, \pm k_{n-2})$, причем $k_0 \geq k_1 \geq \dots \geq k_{n-3} \geq k_{n-2} \geq 0$ (см. [7, с. 444–445]). Таким образом,

$$(S_K^l(\theta), S_M^t(\theta)) = \int_{S^{n-1}} S_K^l(\xi) \overline{S_M^t(\xi)} d\xi = 0,$$

если $l \neq t$ или мультииндексы $K = (k_1, k_2, \dots, k_{n-3}, \pm k_{n-2})$, $M = (m_1, m_2, \dots, m_{n-3}, \pm m_{n-2})$ не совпадают.

ТЕОРЕМА ФУНКА–ГЕККЕ. Пусть $F(x)$ – функция действительной переменной x , абсолютно интегрируемая по Лебегу вместе с квадратом на $[-1, 1]$,

и пусть $S_K^l(\xi)$ – любая поверхностная сферическая гармоника степени l . Тогда для любого единичного вектора η имеет место равенство

$$\int_{S^{n-1}(\xi)} F[(\xi, \eta)] S_K^l(\xi) d\xi = \lambda_l S_K^l(\eta), \quad (1)$$

где

$$\lambda_l = i^l (2\pi)^{\frac{n+1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{\frac{1-n}{2}} J_{l+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}(t) f(t) dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-ixt} F(x) dx. \quad (2)$$

Рассмотрим псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{n-1,1}$, в котором задана билинейная форма

$$[x, y] = -x_1 y_1 - x_2 y_2 - \dots - x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n.$$

Эта форма является аналогом скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$. Определим расстояние между точками следующим образом:

$$r(x, y) = \sqrt{[x - y, x - y]}.$$

При таком определении $r(x, y)$ может принимать как действительные неотрицательные, так и мнимые значения.

Назовем *псевдосферой радиуса R* множество точек верхней полу конуса $[x, x] > 0$, для которых $[x, x] = R^2$. Мы будем использовать обозначения $S_H(R)$ для псевдосферы радиуса R и S_H для псевдосферы радиуса 1.

Известно [7, с. 482], что для любых двух точек x и y псевдосферы $[x, x] = 1$ существует единственное неотрицательное число r такое, что

$$\operatorname{ch} r = [x, y].$$

Это число r мы будем называть *расстоянием между точками x и y* .

Тогда псевдосфера превращается в риманово пространство постоянной отрицательной кривизны -1 . Это пространство называется $(n-1)$ -мерным *пространством Лобачевского*.

Обозначим $L^2(S_H, d\mu)$ пространство функций, заданных на гиперboloиде $[x, x] = 1$, $x_n > 0$, с интегрируемым квадратом модуля. Здесь $d\mu$ – двусторонне инвариантная относительно $G = \operatorname{SO}_0(n-1, 1)$ мера, равная

$$d\mu = \operatorname{sh}^{n-2} \theta_{n-1} \sin^{n-3} \theta_{n-2} \dots \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{n-1}.$$

В этом пространстве действует квазирегулярное представление группы Ли G , определяемое равенством

$$(T(g)f)(x) = f(g^{-1}x), \quad f(x) \in L^2(S_H, d\mu). \quad (3)$$

Представление T унитарно и имеет следующее разложение в прямой интеграл неприводимых представлений основной серии [8]:

$$T = \int_0^\infty T^\sigma d\rho, \quad \sigma = -\frac{n-2}{2} + i\rho$$

(см. [7, с. 494]).

Каждое из представлений T^σ входит в разложение T с кратностью 1. С помощью интегрального преобразования Гельфанда–Граева [8], [7, с. 507–513] представления T^σ в пространстве функций на S_H реализуются как представления в пространстве функций $f(x)$, заданных на верхней поле конуса $[x, x] > 0$, $x_n > 0$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) функции $f(x)$ бесконечно дифференцируемы в каждой точке верхней полы конуса;
- 2) функции $f(x)$ имеют степень однородности σ :

$$f(ax) = a^\sigma f(x), \quad a > 0.$$

Ортонормированный базис в $L^2(S_H, d\mu)$ образуют функции

$$\begin{aligned} H_K^\sigma(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= B_{KO}^{n\sigma} \operatorname{sh}^{\frac{3-n}{2}} \theta_{n-1} \mathfrak{P}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}^{\frac{3-n}{2}-k}(\operatorname{ch} \theta_{n-1}) \\ &\times \prod_{j=0}^{n-4} C_{k_j-k_{j+1}}^{\frac{n}{2}-\frac{j}{2}-\frac{3}{2}+k_{j+1}}(\cos \theta_{n-j-2}) \sin^{k_{j+1}}(\theta_{n-j-2}) e^{\pm i k_{n-3} \theta_1}, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{P}_\nu^\mu(x)$ – присоединенные функции Лежандра первого рода, $B_{KO}^{n\sigma}$ – нормирующий множитель, $K = (k, k_1, \dots, \pm k_{n-3})$, $k \geq k_1 \geq \dots \geq k_{n-3} \geq 0$, $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$ – углы Эйлера на гиперboloиде S_H : $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_l < \pi$, $0 \leq \theta_{n-1} < \infty$, $1 < l < n-1$ [7, с. 502, (9), (10)].

Пространство всех гиперболических гармоник степени однородности σ обозначим $\mathcal{H}^{n\sigma}$.

Докажем теперь следующую важную теорему, которая фактически утверждает, что зональная гиперболическая гармоника является собственным вектором для некоторого интегрального оператора.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $H_O^\sigma(\xi)$ – зональная гиперболическая гармоника степени однородности σ , принадлежащая $L^2(S_H, d\mu)$. Тогда для любой точки η , принадлежащей гиперboloиду $[\eta, \eta] = s^2$, имеет место равенство

$$\int_{[\xi, \xi]=1} e^{-i[\xi, \eta]} H_O^\sigma(\xi) d\xi = \nu_n(s, \sigma) H_O^\sigma(\eta). \quad (4)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \nu_2(s, \sigma) &= 2K_\sigma(is), \\ \nu_4(s, \sigma) &= -\frac{4\pi i}{s} K_{\sigma+1}(is), \end{aligned}$$

где $K_\nu(z)$ – функция Макдональда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что H_O^σ является собственным вектором интегрального оператора с ядром $\exp(-i[\xi, \eta])$, вытекает из лемм 2 и 3, доказанных ниже. Однако эти леммы не дают ответ на вопрос: каким является собственное значение $\nu_n(s, \sigma)$? Поэтому мы приведем здесь независимое доказательство интегрального равенства (4) для случая $n = 4$, случай $n = 2$ может быть рассмотрен аналогично.

Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \operatorname{sh} \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1, & \eta_1 &= s \operatorname{sh} \varphi_3 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1, \\ \xi_2 &= \operatorname{sh} \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1, & \eta_2 &= s \operatorname{sh} \varphi_3 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1, \\ \xi_3 &= \operatorname{sh} \theta_3 \cos \theta_2, & \eta_3 &= s \operatorname{sh} \varphi_3 \cos \varphi_2, \\ \xi_0 &= \operatorname{ch} \theta_3, & \eta_0 &= s \operatorname{ch} \varphi_3.\end{aligned}$$

Тогда indefinite скалярное произведение в сферических координатах запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}[\xi, \eta] &= -s \operatorname{sh} \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \operatorname{sh} \varphi_3 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - s \operatorname{sh} \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 \\ &\quad \times \operatorname{sh} \varphi_3 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 - s \operatorname{sh} \theta_3 \cos \theta_2 \operatorname{sh} \varphi_3 \cos \varphi_2 + s \operatorname{ch} \theta_3 \operatorname{ch} \varphi_3 \\ &= -s \operatorname{sh} \theta_3 \operatorname{sh} \varphi_3 (\sin \theta_2 \sin \theta_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \\ &\quad + \cos \theta_2 \cos \varphi_2) + s \operatorname{ch} \theta_3 \operatorname{ch} \varphi_3.\end{aligned}$$

Полученное выражение можно формально записать следующим образом:

$$[\xi, \eta] = s \operatorname{ch} \theta_3 \operatorname{ch} \varphi_3 - s \operatorname{sh} \theta_3 \operatorname{sh} \varphi_3 \langle \xi', \eta' \rangle,$$

где ξ', η' принадлежат сферам, полученным пересечением гиперболоидов $[\xi, \xi] = 1$ и $[\eta, \eta] = s^2$ гиперплоскостями $\xi_0 = \operatorname{ch} \theta_3$, $\eta_0 = s \operatorname{ch} \varphi_3$.

Воспользуемся [7, с. 499, формула (4)]:

$$H^{4\sigma}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{\sqrt{2} \Gamma(\frac{3}{2})}{\sqrt{\operatorname{sh} \theta_3}} \mathfrak{P}_{\sigma+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \theta_3) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sh}^{-\frac{1}{2}}(\theta_3) \mathfrak{P}_{\sigma+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \theta_3).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}I &= \int_{[\xi, \xi]=1} e^{-i[\xi, \eta]} H^{4\sigma}(\xi) d\xi \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{S_H} e^{-i\alpha + i\beta \langle \xi', \eta' \rangle} \operatorname{sh}^{\frac{3}{2}} \theta_3 \mathfrak{P}_{\sigma+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \theta_3) \sin \theta_2 d\theta_3 d\theta_2 d\theta_1 \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-i\alpha} \operatorname{sh}^{\frac{3}{2}} \theta_3 \mathfrak{P}_{\sigma+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \theta_3) d\theta_3 \int_{S^2} e^{i\beta \langle \xi', \eta' \rangle} \sin \theta_2 d\theta_2 d\theta_1,\end{aligned}$$

где $\alpha = s \operatorname{ch} \theta_3 \operatorname{ch} \varphi_3$, $\beta = s \operatorname{sh} \theta_3 \operatorname{sh} \varphi_3$.

Внутренний интеграл по сфере S^2 может быть вычислен сведением к кратному: сначала по параллели $\{\eta' \in S^2: \langle \xi', \eta' \rangle = \cos \gamma\}$, затем по γ на $[0, \pi]$. Получим

$$\int_{S^2} e^{i\beta \langle \xi', \eta' \rangle} \sin \theta_2 d\theta_2 d\theta_1 = \frac{4\pi}{\beta} \sin \beta.$$

Поскольку $\beta = s \operatorname{sh} \theta_3 \operatorname{sh} \varphi_3$, то

$$\int_{S^2} e^{is \operatorname{sh} \theta_3 \operatorname{sh} \varphi_3 \langle \xi', \eta' \rangle} ds = 4\pi \frac{\sin(s \operatorname{sh} \theta_3 \operatorname{sh} \varphi_3)}{s \operatorname{sh} \theta_3 \operatorname{sh} \varphi_3}.$$

Подставим полученное выражение в исходный интеграл I и воспользуемся [9, т. 1, с. 151, формула (3)]:

$$\mathfrak{P}_\nu^{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(z^2 - 1)^{-\frac{1}{4}}}{2\nu + 1} \left[(z + \sqrt{z^2 - 1})^{\nu + \frac{1}{2}} - (z + \sqrt{z^2 - 1})^{-\nu - \frac{1}{2}} \right].$$

В нашем случае $\nu = \sigma + \frac{1}{2}$, $z = \operatorname{ch} \theta_3$. Тогда после некоторых простых преобразований получаем

$$\mathfrak{P}_{\sigma + \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \theta_3) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sh}((\sigma + 1)\theta_3)}{(\sigma + 1)\sqrt{\operatorname{sh} \theta_3}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \frac{4\pi}{s(\sigma + 1) \operatorname{sh} \varphi_3} \int_0^{+\infty} e^{-is \operatorname{ch} \theta_3 \operatorname{ch} \varphi_3} \sin(s \operatorname{sh} \theta_3 \operatorname{sh} \varphi_3) \operatorname{sh}((\sigma + 1)\theta_3) d\theta_3 \\ &= \frac{4\pi}{s(\sigma + 1) \operatorname{sh} \varphi_3} I_1. \end{aligned}$$

Применяя формулу Эйлера, получим

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \sin(s \operatorname{ch}(\varphi_3 - \theta_3)) \operatorname{sh}((\sigma + 1)\theta_3) d\theta_3 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \sin(s \operatorname{ch}(\varphi_3 + \theta_3)) \operatorname{sh}((\sigma + 1)\theta_3) d\theta_3 \\ &\quad - \frac{i}{2} \int_0^{+\infty} \cos(s \operatorname{ch}(\varphi_3 - \theta_3)) \operatorname{sh}((\sigma + 1)\theta_3) d\theta_3 \\ &\quad + \frac{i}{2} \int_0^{+\infty} \cos(s \operatorname{ch}(\varphi_3 + \theta_3)) \operatorname{sh}((\sigma + 1)\theta_3) d\theta_3. \end{aligned}$$

Если в этих интегралах сделать замену переменных $\theta_3 = -\bar{\theta}_3$, то мы получим сумму тех же самых интегралов, но с пределами интегрирования от $-\infty$ до 0. Поэтому

можно в интегралах, составляющих интеграл I_1 , распространить пределы интегрирования на всю числовую ось, уменьшив числовые коэффициенты в два раза:

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(s \operatorname{ch}(\theta_3 - \varphi_3)) \operatorname{sh}((\sigma + 1)\theta_3) d\theta_3 \\ & + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(s \operatorname{ch}(\theta_3 + \varphi_3)) \operatorname{sh}((\sigma + 1)\theta_3) d\theta_3 \\ & - \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(s \operatorname{ch}(\theta_3 - \varphi_3)) \operatorname{sh}((\sigma + 1)\theta_3) d\theta_3 \\ & + \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(s \operatorname{ch}(\theta_3 + \varphi_3)) \operatorname{sh}((\sigma + 1)\theta_3) d\theta_3, \end{aligned}$$

откуда после несложных преобразований (замены переменных вида $\theta_3 \pm \varphi_3 = \psi$) получаем

$$\begin{aligned} I_1 = & -i \operatorname{sh}((\sigma + 1)\varphi_3) \int_0^{+\infty} e^{-is \operatorname{ch} \psi} \operatorname{ch}((\sigma + 1)\psi) d\psi \\ = & -i \operatorname{sh}((\sigma + 1)\varphi_3) K_{\sigma+1}(is) \end{aligned}$$

(см. [7, с. 256]).

Подставим теперь значение интеграла I_1 в интеграл I :

$$\begin{aligned} I = & \frac{4\pi}{s(\sigma + 1) \operatorname{sh} \varphi_3} I_1 = -\frac{4\pi i}{s(\sigma + 1) \operatorname{sh} \varphi_3} \operatorname{sh}((\sigma + 1)\varphi_3) K_{\sigma+1}(is) \\ = & -\frac{4\pi i}{s} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} \varphi_3}} \mathfrak{P}_{\sigma+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \varphi_3) K_{\sigma+1}(is) \sqrt{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4\pi i}{s} K_{\sigma+1}(is) H^{4\sigma}(\varphi_3). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следующая лемма выражает хорошо известный факт, что функция из L^2 , допускающая ограниченное аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость, является образом Фурье функции из L^2 , носитель которой сосредоточен на правой полупрямой.

ЛЕММА 1. *Если функция $F(\alpha)$ комплексного переменного $\alpha = \sigma + i\tau$ ограничена и аналитична в нижней полуплоскости $\tau \leq 0$ и если, кроме того, $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma)|^2 d\sigma < \infty$, то $F(\sigma)$ допускает представление*

$$F(\sigma) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^A f(t) e^{-i\sigma t} dt,$$

где $f(t) \in L^2(0; +\infty)$.

Доказательство леммы следует из теоремы Пэли–Винера [10, теорема VIII, с. 24].

Сформулируем теперь аналог теоремы Функа–Гекке.

ТЕОРЕМА 2 (обобщение теоремы Функа–Гекке). Пусть функция действительного переменного $F(x)$ такова, что:

а) $F(x) \in L^1(-\infty, \infty) \cap L^2(-\infty, \infty)$;

б) $F(x) = \begin{cases} O(e^{-\mu x}) & \text{при } x \rightarrow +\infty, \\ O(e^{\lambda x}) & \text{при } x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad \lambda, \mu > 0$;

в) $F(x)$ допускает аналитическое продолжение до функции $F(\alpha)$ комплексного переменного $\alpha = \sigma + i\tau$, ограниченной и аналитической в нижней полуплоскости $\tau \leq 0$.

Пусть $H_K^{n\sigma}(\xi)$ – произвольная гиперболическая гармоника степени однородности σ . Тогда для любого вектора η , принадлежащего псевдосфере единичного радиуса (т.е. $[\eta, \eta] = 1$), имеет место равенство

$$\int_{[\xi, \eta]=1} F([\xi, \eta]) H_K^{n\sigma}(\xi) d\xi = \lambda_\sigma^n H_K^{n\sigma}(\eta). \quad (5)$$

В частности,

$$\lambda_\sigma^2 = 2 \int_0^{+\infty} f(\alpha) K_\sigma(i\alpha) d\alpha,$$

$$\lambda_\sigma^4 = -4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha) K_{\sigma+1}(i\alpha)}{\alpha} d\alpha, \quad f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i\alpha t} dt,$$

где $K_\nu(z)$ – функция Макдональда.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Введем интегральный оператор $\mathcal{A}: L^2(S_H, d\mu) \rightarrow L^2(S_H, d\mu)$,

$$[\mathcal{A}f](\eta) = \int_{[\xi, \eta]=1} F([\xi, \eta]) f(\xi) d\xi. \quad (6)$$

ЛЕММА 2. Определенный формулой (6) интегральный оператор $\mathcal{A}: L^2(S_H, d\mu) \rightarrow L^2(S_H, d\mu)$ является сплетающим оператором квазирегулярного представления (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для любого $g \in G$ и вектора η длиной 1 имеем

$$\begin{aligned} [\mathcal{A} \circ T(g)f](\eta) &= \mathcal{A}(T(g)f)(\eta) = \int_{[\xi, \eta]=1} F([\xi, \eta]) (T(g)f)(\xi) d\xi \\ &= \int_{[\xi, \eta]=1} F([\xi, \eta]) f(g^{-1}\xi) d\xi. \end{aligned}$$

После замены переменной $g^{-1}\xi = \varphi$ получаем $d\xi = d\varphi$ (в силу инвариантности меры), $\xi = g\varphi$, следовательно, для любого $g \in \text{SO}_0(n-1, 1)$

$$\begin{aligned} [\mathcal{A} \circ T(g)f](\eta) &= \int_{[g\varphi, g\varphi]=1} F([g\varphi, \eta]) f(\varphi) d(g\varphi) = \int_{[\varphi, \varphi]=1} F([g\varphi, \eta]) f(\varphi) d\varphi \\ &= \int_{[\varphi, \varphi]} F([\varphi, g^{-1}\eta]) f(\varphi) d\varphi = [\mathcal{A}f](g^{-1}\eta) = T(g)[\mathcal{A}f](\eta) \\ &= [T(g) \circ \mathcal{A}f](\eta). \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что псевдоортогональное вращение сохраняет скалярное произведение $[\cdot, \cdot]$. Лемма доказана.

Согласно лемме Шура всякий сплетающий оператор, действующий из неприводимого представления в себя, является скалярным. Поэтому нам важно доказать теперь, что всякая гиперболическая гармоника $H_K^\sigma(\theta)$ принадлежит пространству некоторого неприводимого подпредставления квазирегулярного представления (3). Тогда действие сплетающего оператора $\mathcal{A}$ на этом пространстве неприводимого подпредставления, а значит, и на $H_K^\sigma(\theta)$ будет скалярным.

ЛЕММА 3. *Для любых значений параметра*

$$\sigma = -\frac{n-2}{2} + i\rho, \quad \rho \geq 0,$$

и мультииндекса $K = (k, k_1, \dots, \pm k_{n-3})$ такого, что $k \geq k_1 \geq \dots \geq k_{n-3} \geq 0$, $H_K^\sigma(\theta)$ принадлежит пространству некоторого неприводимого конечномерного подпредставления представления (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [8, гл. VI, §3, п.3] доказано, что квазирегулярное представление (3) разлагается в прямой интеграл неприводимых подпредставлений:

$$T = \int_0^{+\infty} T^\sigma d\rho, \quad \sigma = -\frac{n-2}{2} + i\rho,$$

где подпредставление T^σ действует в пространстве $\mathcal{H}^{n\sigma}$ гиперболических гармоник степени σ , причем подпредставления в пространствах $\mathcal{H}^{n\sigma}$ и $\mathcal{H}^{n\sigma'}$, $\sigma = -\frac{n-2}{2} + i\rho$, $\sigma' = -\frac{n-2}{2} + i\rho'$, $\rho \neq \rho'$, $\rho, \rho' \geq 0$, попарно не эквивалентны. Функции $H_K^\sigma(\theta)$ при фиксированном σ образуют ортогональный базис пространства $\mathcal{H}^{n\sigma}$ [11, т. 2, с. 83]. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сплетающий оператор $\mathcal{A}$ может переводить инвариантное подпространство $\mathcal{H}^{n\sigma}$ только в себя, так как $\text{SO}_0(n-1, 1)$ -представления в других инвариантных подпространствах $\mathcal{H}^{n\sigma'}$ не эквивалентны представлению в $\mathcal{H}^{n\sigma}$, $\sigma = -\frac{n-2}{2} + i\rho$, $\sigma' = -\frac{n-2}{2} + i\rho'$, $\rho \neq \rho'$, $\rho, \rho' \geq 0$. Тогда по лемме Шура имеем

$$\mathcal{A}|_{\mathcal{H}^{n\sigma}} = \lambda_\sigma E,$$

где E – тождественный оператор, откуда для всех $K = (k, k_1, \dots, \pm k_{n-3})$ таких, что $k \geq k_1 \geq \dots \geq k_{n-3} \geq 0$, получим

$$[AH_K^\sigma](\eta) = \int_{[\xi, \xi]=1} F([\xi, \eta]) H_K^\sigma(\xi) d\xi = \lambda_\sigma H_K^\sigma(\eta).$$

Вычислим явный вид константы λ_σ при $n = 4$ (случай $n = 2$ проще). Для облегчения вычислений заметим, что поскольку собственное значение λ_σ не зависит от мультииндекса K (так как от него не зависит представление T^σ), то можно положить $K = (0, 0)$, т.е. вместо произвольной гиперболической гармоник рассмотреть зональную гиперболическую гармонику $H_O^{4\sigma}(\xi)$.

Прежде всего отметим, что для векторов ξ и η таких, что $[\xi, \xi] = 1$, $[\eta, \eta] = 1$, справедливо $[\xi, \eta] \geq 1$, поэтому фактически в (5) значения функции $F(x)$ будут вычисляться лишь на промежутке $[1, +\infty)$. Пусть, как и в лемме 1,

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{i\alpha x} dx,$$

причем $f(\alpha)$ аналитична внутри полосы $-\lambda < \tau < \mu$ [10, теорема 1, с. 12], $f(\alpha) \in L^2(0, +\infty)$. Тогда

$$F(\alpha) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^A f(x) e^{-i\alpha x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} F_A(\alpha).$$

С помощью этого представления $F(\alpha)$ при $n = 4$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{[\xi, \xi]=1} F([\xi, \eta]) H_O^{4\sigma}(\xi) d\xi &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{[\xi, \xi]=1} F_A([\xi, \eta]) H_O^{4\sigma}(\xi) d\xi \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[\xi, \xi]=1} H_O^{4\sigma} \int_0^A f(x) e^{-ix[\xi, \eta]} dx d\xi \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(x) \int_{[\xi, \xi]=1} e^{-ix[\xi, \eta]} H_O^{4\sigma}(\xi) d\xi dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_\varepsilon^A f(x) \int_{[\xi, \xi]=1} e^{-i[\xi, x\eta]} H_O^{4\sigma}(\xi) d\xi dx. \end{aligned}$$

Заметим, что при $[\eta, \eta] = 1$ вектор $x\eta$ принадлежит псевдосфере радиуса x , поэтому мы можем применить к внутреннему интегралу по $[\xi, \xi] = 1$ утверждение теоремы 1. Тогда

$$\int_{[\xi, \xi]=1} F([\xi, \eta]) H_O^{4\sigma}(\xi) d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_\varepsilon^A f(x) \left(-\frac{4\pi i}{x} \right) K_{\sigma+1}(ix) H_O^{4\sigma}(\eta) dx.$$

Согласно неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\left(\int_\varepsilon^A \frac{f(x) K_{\sigma+1}(ix)}{x} dx \right)^2 \leq \int_\varepsilon^A |f(x)|^2 dx \cdot \int_\varepsilon^A \left| \frac{K_{\sigma+1}(ix)}{x} \right|^2 dx.$$

Здесь оба интеграла в правой части неравенства имеют предел при $A \rightarrow +\infty$, так как $f(x) \in L^2(0, +\infty)$, а функция Макдональда $K_{\sigma+1}(ix)$ ограничена при $x \rightarrow +\infty$ (см., например, [12]). Следовательно,

$$\int_{[\xi, \xi]=1} F([\xi, \eta]) H_O^{4\sigma}(\xi) d\xi = \left(-4\pi i \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x) K_{\sigma+1}(ix)}{x} dx \right) H_O^{4\sigma}(\eta).$$

Далее, предел при $\varepsilon \rightarrow +0$ существует в силу аналитичности функции $f(x)$ в нуле (так как $f(x)$ аналитична в нуле и ее носитель сосредоточен на правой полупрямой, то $f(x) = O(x)$ при $x \rightarrow +0$), кроме того, функция Макдональда $K_{\sigma+1}(ix)$ ограничена при $x \rightarrow +0$. Действительно, воспользуемся представлением функции Макдональда через функцию Бесселя. Учитывая, что $\sigma + 1 = i\rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, имеем

$$K_{\sigma+1}(ix) = K_{i\rho}(ix) = \frac{\pi}{2i \operatorname{sh}(\pi\rho)} (e^{\frac{\pi\rho}{2}} J_{-i\rho}(x) - e^{-\frac{\pi\rho}{2}} J_{i\rho}(x)).$$

С другой стороны, при малых значениях x имеет место асимптотика

$$J_{i\rho}(x) \sim \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{i\rho}}{\Gamma(1+i\rho)}, \quad x \rightarrow 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} K_{\sigma+1}(ix) &\sim \frac{\pi}{2i \operatorname{sh}(\pi\rho)} \left(\frac{e^{\frac{\pi\rho}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-i\rho}}{\Gamma(1-i\rho)} - \frac{e^{-\frac{\pi\rho}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{i\rho}}{\Gamma(1+i\rho)} \right) \\ &= \frac{1}{2i\rho} \left[e^{\frac{\pi\rho}{2}} \Gamma(1+i\rho) \left(\cos\left(\rho \ln \frac{x}{2}\right) - i \sin\left(\rho \ln \frac{x}{2}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{\pi\rho}{2}} \Gamma(1-i\rho) \left(\cos\left(\rho \ln \frac{x}{2}\right) + i \sin\left(\rho \ln \frac{x}{2}\right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\int_{[\xi, \xi]=1} F([\xi, \eta]) H_K^{4\sigma}(\xi) d\xi = \left(-4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha) K_{\sigma+1}(i\alpha)}{\alpha} d\alpha \right) H_K^{4\sigma}(\eta),$$

где

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i\alpha t} dt.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Funk P. Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen // Math. Ann. 1916. V. 77. P. 136–152.
2. Hecke E. Über orthogonalinvariante Integralgleichungen // Math. Ann. 1918. V. 78. P. 398–404.
3. Erdélyi A. Die Funksche Integralgleichung der Kugelflächenfunktionen und ihre Übertragung auf die Überkugel // Math. Ann. 1938. V. 115. P. 456–465.
4. Владимиров В. С. Об интегральном уравнении, связанном со сферическими функциями // Научные доклады высшей школы. Физ.-мат. науки. 1958. № 6. С. 142–146.

5. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
6. *Бурский В. П., Штепина Т. В.* О спектре эквивариантного расширения оператора Лапласа в шаре // Укр. матем. журн. 2000. Т. 52. № 11. С. 1473–1483.
7. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
8. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Обобщенные функции. Вып. 5. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974.
10. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964.
11. *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения. М.: Мир, 1980.
12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/ Под ред. М. Абрамовица. М.: Наука, 1979.

Поступило в редакцию
28.11.2003