Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Алхутов, О. В. Крашенинникова, Непрерывность в граничных точках решений квазилинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 6, 3–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/im509>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 06:36:06

УДК 517.946

Ю. А. Алхутов, О. В. Крашенинникова

**Непрерывность в граничных точках
решений квазилинейных эллиптических
уравнений с нестандартным условием роста**

Исследуется вопрос о поведении в граничных точках решения задачи Дирихле с непрерывной граничной функцией для уравнения Эйлера, порожденного интегрантом $|\nabla u|^{p(x)}/p(x)$ с переменным показателем суммируемости $p = p(x)$, обладающим логарифмическим модулем непрерывности и удовлетворяющим условию $1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \infty$. Получен критерий регулярности граничной точки винеровского типа, найдена оценка модуля непрерывности решения вблизи регулярной граничной точки, приведены геометрические условия регулярности.

Библиография: 40 наименований.

§ 1. Введение

Рассмотрим в ограниченной области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, уравнение

$$Lu = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = 0 \quad (1.1)$$

с измеримой в D функцией $p(x)$, удовлетворяющей условию

$$1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \infty. \quad (1.2)$$

Если $p(x) = \operatorname{const}$, то квазилинейное уравнение (1.1) и его естественные обобщения детально изучены. Обзор литературы по таким уравнениям содержится в монографии [1].

Уравнение (1.1) относится к обширному классу эллиптических уравнений с нестандартным условием роста и является уравнением Эйлера для вариационных задач с интегрантом $|\nabla u|^{p(x)}/p(x)$. Соответствующие вариационные задачи изучались в 1980-х годах В. В. Жиковым в [2]–[4]. В этих работах основное внимание было уделено эффекту Лаврентьева, о котором более подробно будет сказано ниже, и его связи с задачами усреднения. Кроме того, в работе [4] был приведен пример нерегулярного решения вариационной задачи, сыгравший важную роль в изучении качественных свойств решений уравнения (1.1). Этот пример и ряд других примеров разрывных и неограниченных решений вариационных задач, построенных М. Джаквинтой в [5] и П. Марчеллини в [6], инициировали исследование свойств регулярности решений эллиптических уравнений с нестандартным условием роста. Последние десять лет данная тематика активно

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 03-01-00138, 04-01-00717) и Минобразования РФ (грант Е02-1.0-57).

развивается и имеет не только самостоятельный интерес. Уравнение вида (1.1) и системы таких уравнений возникают во многих задачах математической физики, описание которых содержится в [7]. Одним из примеров является нелинейная система, описывающая динамику жидкостей, которые могут изменять свойства под действием электромагнитного поля. Другой пример – задача о термисторе (см. [8]). Система эллиптических краевых задач

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) &= f \quad \text{в } D, \quad u|_{\partial D} = 0, \\ -\Delta p &= |\nabla u|^{p(x)} \quad \text{в } D, \quad p|_{\partial D} = \operatorname{const} > 1, \end{aligned}$$

описывает взаимосвязь потенциала электрического поля $u(x)$ и температуры $p(x)$ в термисторе D .

Прежде чем описать известные нам свойства решений уравнения (1.1) и сформулировать полученные результаты, определим понятие решения. Для этого введем класс функций

$$W(D) = \{u: u \in W_1^1(D), |\nabla u|^{p(x)} \in L_1(D)\},$$

где $W_1^1(D)$ – соболевское пространство функций, суммируемых в D вместе с обобщенными производными первого порядка. Сходимость в классе $W(D)$ определим следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Последовательность функций $u_j \in W(D)$ сходится в $W(D)$ к функции $u \in W(D)$, если $u_j \rightarrow u$ в $L_1(D)$ и*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_D |\nabla u - \nabla u_j|^{p(x)} dx = 0. \quad (1.3)$$

В классе $W(D)$ можно определить норму Орлича

$$\|u\|_{W(D)} = \|u\|_{L_1(D)} + \inf \left\{ \lambda: \lambda > 0, \int_D |\nabla u|^{p(x)} \lambda^{-p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

Сходимость по этой норме эквивалентна введенной выше, но нам удобнее пользоваться определением 1.1. Введем еще класс $W_0(D)$ как замыкание в смысле указанной выше сходимости множества функций из $W(D)$ с компактным носителем в D . Ниже мы используем еще сходимость в $W_0(D)$: последовательность функций $u_j \in W_0(D)$ сходится в $W_0(D)$ к функции $u \in W_0(D)$, если выполнено равенство (1.3). Ясно, что в этом случае требование сходимости u_j в $L_1(D)$ излишне.

Теперь мы можем дать определение решения уравнения (1.1). Это будет одно из возможных понятий решения, называемого *W-решением*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Функция $u \in W(D)$ называется *W-решением уравнения (1.1)*, если интегральное тождество

$$\int_D |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \psi dx = 0 \quad (1.4)$$

выполнено для пробных функций $\psi \in W_0(D)$.

Из результатов работы [4] следует, что одного только предположения (1.2) недостаточно для плотности гладких функций в классах $W(D)$ и $W_0(D)$. В связи с этим возникают функциональные классы, порожденные гладкими функциями:

$$\begin{aligned} H(D) &= \{u: u \in W(D), \exists u_j \in C^\infty(D) \cap W(D), u_j \rightarrow u \text{ в } W(D)\}, \\ H_0(D) &= \{u: u \in W(D), \exists u_j \in C_0^\infty(D), u_j \rightarrow u \text{ в } W_0(D)\}. \end{aligned}$$

Другими словами, $H(D)$ есть замыкание в $W(D)$ множества $W(D) \cap C^\infty(D)$, а $H_0(D)$ – замыкание в $W_0(D)$ множества $C_0^\infty(D)$. Как хорошо известно, в случае постоянного показателя суммируемости $W(D) = H(D)$ и $W_0(D) = H_0(D)$ для любой области D .

Важное свойство уравнения (1.1) состоит в том, что оно может иметь решения из класса $H(D)$, для которых интегральное тождество (1.4) выполнено только на пробных функциях $\psi \in H_0(D)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Функция $u \in H(D)$ называется *H-решением уравнения* (1.1), если интегральное тождество (1.4) выполнено на пробных функциях $\psi \in H_0(D)$.

Введенные выше W -решения и H -уравнения (1.1) связаны с задачами Дирихле

$$Lu = 0 \text{ в } D, \quad u \in W(D), \quad h \in W(D), \quad (u - h) \in W_0(D) \quad (1.5)$$

и

$$Lu = 0 \text{ в } D, \quad u \in H(D), \quad h \in H(D), \quad (u - h) \in H_0(D) \quad (1.6)$$

соответственно.

Задачи Дирихле (1.5) и (1.6) были введены В.В. Жиковым в [3] под названием *задач первого и второго рода*. Он же заметил, что если коразмерность класса H в W больше единицы, то существуют и другие промежуточные задачи Дирихле и соответствующие им решения уравнения (1.1).

Доказательство разрешимости задачи Дирихле (1.5) основано на исследовании вариационной задачи

$$\min_{w \in W_0(D)} F(w + h), \quad F(u) = \int_D \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx, \quad h \in W(D). \quad (1.7)$$

Если измеримый в D показатель суммируемости удовлетворяет только условию (1.2), то возможна ситуация, при которой

$$\min_{w \in W_0(D)} F(w + h) < \inf_{w \in C_0^\infty(D)} F(w + h)$$

даже в случае, когда область D совпадает с шаром, а $h \in C^\infty(\overline{D})$. Такого рода неравенства принято называть *эффектом Лаврентьева* по имени ученого, обнаружившего подобное свойство в работе [9] на примере одномерной вариационной

задачи. Для рассматриваемых нами функционалов эффект Лаврентьева исследован в работах [4], [8], [10]. Если для решения вариационной задачи (1.7) не существует минимизирующей последовательности из $C_0^\infty(D)$, то наряду с (1.7) возникает задача

$$\inf_{w \in C_0^\infty(D)} F(w + h) = \min_{w \in H_0(D)} F(w + h), \quad h \in H(D). \quad (1.8)$$

Для областей с липшицевой границей однозначная разрешимость задач (1.7), (1.8) при выполнении одного только условия (1.2), налагаемого на измеримый показатель суммируемости $p(x)$, установлена в работах [8], [10]. Отметим, что если разрешимость задачи (1.7) следует из общих соображений выпуклого анализа, то с разрешимостью задачи (1.8) дело обстоит несколько иначе. Разрешимость этой задачи вытекает из [10, теорема 5.2], но доказательство этой теоремы неэлементарно, в частности, использует теорию двойственности. В теореме 3.1 предложено элементарное исследование вариационных задач (1.7), (1.8) в произвольной ограниченной области D , основанное на доказательстве сходимости минимизирующей последовательности в классе $W_0(D)$.

Задачи Дирихле (1.5) и (1.6) также однозначно разрешимы (теорема 3.2). Доказательство основано на том (см. [10], [11]), что (1.1) есть уравнение Эйлера для вариационных задач (1.7), (1.8) и минимизант $w(x)$ каждой из них связан с решением $u(x)$ соответствующей задачи Дирихле равенством $w(x) = u(x) - h(x)$.

В настоящей работе рассмотрена и задача Дирихле для неоднородного уравнения

$$Lu = -d\mu \quad \text{в } D, \quad u \in H_0(D), \quad (1.9)$$

с мерой μ , удовлетворяющей условию

$$\exists v \in W(D), \quad \left| \int_D \psi d\mu \right| \leq C \int_D |\nabla v|^{p(x)-1} |\nabla \psi| dx \quad \forall \psi \in C_0^\infty(D). \quad (1.10)$$

Под решением понимается функция $u \in H_0(D)$, для которой

$$\int_D |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \psi dx = \int_D \psi d\mu \quad \forall \psi \in C_0^\infty(D). \quad (1.11)$$

Однозначная разрешимость задачи (1.9) доказана в теореме 3.3, существенно используемой при исследовании граничных свойств решений уравнения (1.1).

Отметим, что для уравнения (1.1) с постоянным показателем суммируемости $p(x)$ и естественных обобщений такого уравнения однозначная разрешимость задач Дирихле (1.5) и (1.9) в произвольной ограниченной области D хорошо известна (см., например, [12]).

Условие для непрерывного в области D показателя $p(x)$, при выполнении которого множество гладких функций плотно в классах $W(D)$ и $W_0(D)$, не удавалось найти в течение длительного времени. Исследования В. В. Жикова [10] в этом направлении привели к ограничению

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c}{\ln \frac{1}{|x-y|}}, \quad x, y \in D, \quad |x - y| < \frac{1}{2}. \quad (1.12)$$

Им показано, что при условиях (1.2) и (1.12), выполненных в липшицевой области D , множество $C_0^\infty(D)$ плотно в классе $W(D) \cap \mathring{W}_{p_1}^1(D)$: для любой функции $u \in W(D) \cap \mathring{W}_{p_1}^1(D)$ существует последовательность $\{u_j\} \in C_0^\infty(D)$, сходящаяся к $u(x)$ в $W_0(D)$, и условие (1.12) является точным для справедливости этого свойства. Из этого результата вытекает плотность множества $C^\infty(D) \cap W(D)$ в классе $W(D)$ для произвольной ограниченной области D (см. лемму 2.2). При этом для функций класса $W_0(D)$ аппроксимирующая последовательность состоит из финитных бесконечно дифференцируемых в D функций и в интегральном тождестве (1.4) можно ограничиться пробными функциями $\psi \in C_0^\infty(D)$.

Гёльдеровость решений уравнения (1.1) с постоянным показателем $p(x)$ и более общих уравнений такого типа доказана О. А. Ладыженской и Н. Н. Уралцевой в работе [13]. Для уравнений вида (1.1) с гладким показателем $p(x)$ один из первых результатов о гёльдеровости решений получен П. Марчеллини в [14]. Работа [10], в которой было введено условие (1.12), стимулировала изучение качественных свойств решений уравнения (1.1) при меньших требованиях гладкости на $p(x)$. В [15] и [16] установлено, что при условии (1.12) решения уравнения (1.1) из класса

$$W_{\text{loc}}(D) = \{u: u \in W_{1,\text{loc}}^1(D), |\nabla u|^{p(x)} \in L_{1,\text{loc}}(D)\}, \quad (1.13)$$

понимаемые в смысле интегрального тождества (1.4) на пробных функциях $\psi \in W_{\text{loc}}(D)$ с компактным носителем в D , принадлежат пространству гёльдеровых в D функций. Для гёльдерова показателя $p(x)$ этот результат ранее был получен в [17]. Точность условия (1.12) для справедливости приведенного выше утверждения вытекает из контрпримера работы [10].

Гёльдеровость решений изучена в [16] и для кусочно непрерывного показателя $p(x)$ в предположении, что область D разделена гиперплоскостью Σ на две части, в каждой из которых $p(x)$ удовлетворяет условию (1.12) и скачок $p(x)$ при переходе через Σ не обращается в нуль. Отметим, что в этом случае гладкие функции также плотны в $W(D)$ и $W_0(D)$. Полученные в [16] результаты обобщают работу [18], где рассмотрено уравнение с кусочно постоянным показателем $p(x)$.

Второй автор настоящей статьи изучала гёльдеровость решений уравнения (1.1) в фиксированной точке $x_0 \in D$ в предположении, что в окрестности этой точки показатель $p(x)$ удовлетворяет условию

$$|p(x) - p(x_0)| \leq \frac{c}{\ln \frac{1}{|x - x_0|}}, \quad x \in D, \quad |x - x_0| < \frac{1}{2}. \quad (1.14)$$

Поскольку на характер разрыва функции $p(x)$ при $x \neq x_0$ не налагается никаких ограничений, то, вообще говоря, $H(D') \neq W(D')$ для любой подобласти $D' \Subset D$. Поэтому имеет смысл рассматривать решения из классов $W_{\text{loc}}(D)$ (см. (1.13)) и $H_{\text{loc}}(D)$: функция $u(x)$ принадлежит классу $H_{\text{loc}}(D)$, если существует последовательность $\{u_j(x)\} \in C^\infty(D)$, сходящаяся к $u(x)$ в $W(D')$ в любой подобласти $D' \Subset D$. Такие решения, которые также будем называть W -решениями и H -решениями, понимаются в смысле интегрального тождества (1.4) на соответствующих пробных функциях $\psi \in W_0(D)$ и $\psi \in H_0(D)$ с компактным носителем в D . В работе [19] показано, что если $p(x)$ удовлетворяет в фиксированной точке $x_0 \in D$ условию (1.14), то все H -решения и все W -решения уравнения (1.1) непрерывны по Гёльдеру в x_0 .

Настоящая работа посвящена исследованию граничных свойств решения обобщенной задачи Дирихле

$$Lu_f = 0 \text{ в } D, \quad u_f|_{\partial D} = f \quad (1.15)$$

с непрерывной на ∂D функцией $f(x)$ в предположении, что показатель суммируемости $p(x)$ удовлетворяет условиям (1.2) и (1.12). Решение данной задачи определим следующим образом. Продолжим граничную функцию $f \in C(\partial D)$ по непрерывности на $\bar{D}$, сохранив то же обозначение, и возьмем последовательность бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций $f_k(x)$, которые равномерно на $\bar{D}$ сходятся к $f(x)$. Решим задачи Дирихле

$$Lu_k = 0 \text{ в } D, \quad u_k \in W(D), \quad (u_k - f_k) \in W_0(D). \quad (1.16)$$

В теореме 4.1 доказано, что последовательность $\{u_k\}$ сходится равномерно на компактных подмножествах D к гёльдеровой в D функции $u_f(x)$, которая принадлежит классу $W_{\text{loc}}(D)$ и удовлетворяет уравнению (1.1). Предельная функция $u_f(x)$ не зависит от способов продолжения и аппроксимации граничной функции $f(x)$ и называется *решением задачи Дирихле* (1.15). При выводе существования и единственности такого решения используется принцип максимума (см. §3). В его формулировке важную роль играет понятие неравенства на границе для функций из классов $W(D)$ и $H(D)$ (см. определение 2.1), обобщающее хорошо известное аналогичное понятие для функций из соболевского пространства. Доказательство того, что функция $u_f(x)$ принадлежит классу $W_{\text{loc}}(D)$ и удовлетворяет уравнению (1.1), основано на свойстве повышенной суммируемости градиента решения (см. [8], [11]).

Для линейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка дивергентного вида введенное выше определение решения задачи Дирихле (1.15) содержится в обзорной статье [20]. В рассмотренном в [20] случае такое решение совпадает и с обобщенным по Винеру решением задачи Дирихле, и с обобщенным решением задачи Дирихле в смысле Пуанкаре–Перрона. Для уравнения (1.1) с постоянным показателем $p(x)$ такое определение решения задачи (1.15) ранее нам не встречалось. В монографии [21] описан другой подход к определению решения этой задачи, основанный на методе Пуанкаре–Перрона. Применение этого способа технически сложно и основано на методах теории нелинейного потенциала. Предложенная нами конструкция решения задачи (1.15) требует меньших технических усилий при доказательстве существования и единственности решения из класса $W_{\text{loc}}(D)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Граничная точка $x_0 \in \partial D$ называется *регулярной*, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in D} u_f(x) = f(x_0)$$

для любой непрерывной на ∂D функции f .

В известных нам работах по исследованию поведения вблизи границы решения задачи Дирихле для уравнения (1.1) с постоянным показателем $p(x)$ и естественных обобщений такого уравнения содержится эквивалентное данному выше понятие регулярной граничной точки: граничная точка регулярна, если решение задачи Дирихле (1.5) с любой граничной функцией $h \in C(\bar{D}) \cap W(D)$ непрерывно в этой точке.

Критерий регулярности граничной точки для уравнения Лапласа доказан Н. Винером [22]. В работе [23] установлено, что этот критерий справедлив и для линейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка дивергентного вида с измеримыми коэффициентами. Достаточное условие регулярности граничной точки и оценка модуля непрерывности решения вблизи границы для уравнения (1.1) с $p(x) = \text{const}$ получены В. Г. Мазьей в [24]. В работе [25] эти результаты распространены на более общие уравнения такого же типа. Необходимое условие регулярности граничной точки, совпадающее с достаточным условием при $p = 2$, установлено в [26]. Критерий регулярности граничной точки в случае постоянного показателя $p(x)$ доказан в работе [27] (частный случай см. в более ранней работе [28]), где показано, что необходимое условие совпадает с уже известным достаточным.

Важную роль в граничных свойствах решений играет понятие емкости компакта. Прежде чем его ввести, обозначим через B_R открытый шар радиуса R и будем считать, что $p(x)$ удовлетворяет в B_R условию (1.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пусть $K \subset B_R$ – компакт. Число

$$C_p(K, B_R) = \inf \int_{B_R} \frac{|\nabla \varphi|^{p(x)}}{p(x)} dx, \quad (1.17)$$

где точная нижняя грань берется по множеству функций $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$ таких, что $\varphi \geq 1$ на K , называется p -емкостью K относительно шара B_R .

В теореме 5.1 показано, что точная нижняя грань в (1.17) достигается на единственной функции $u \in H_0(B_R)$, которая называется *емкостным потенциалом компакта K* . Емкостный потенциал удовлетворяет уравнению (1.9) с мерой μ , сосредоточенной на ∂K , такой, что $\mu(K) = C_p(K, B_R)$. Данные утверждения имеют место при одном только условии (1.2) на показатель суммируемости $p(x)$.

Приведенное выше определение емкости для $p(x) = \text{const}$ восходит к работе [29]. В. А. Кондратьевым в случае $p = 2$ [30] предложено другое эквивалентное определение емкости, в том числе и применительно к уравнениям высокого порядка.

Существование и единственность емкостного потенциала для $p(x) = \text{const}$ следует из общих соображений выпуклого анализа (см., например, [31]).

Сформулируем основные результаты о регулярности граничной точки. Продолжим $p(x)$ на все $\mathbb{R}^n$ с сохранением свойств (1.2), (1.12) и положим для $x_0 \in \partial D$

$$p_0 = p(x_0), \quad \gamma(t) = (C_p(\overline{B}_t^{x_0} \setminus D, B_{2t}^{x_0}) t^{p_0-n})^{1/(p_0-1)}, \quad (1.18)$$

где $B_t^{x_0}$ – открытый шар радиуса t с центром в x_0 .

ТЕОРЕМА 1.1. Для регулярности граничной точки $x_0 \in \partial D$ необходимо и достаточно расходимости в нуле интеграла

$$\int_0 \gamma(t) t^{-1} dt = \infty. \quad (1.19)$$

Если $p_0 > n$, то емкость точки x_0 относительно шара $B_t^{x_0}$ удовлетворяет неравенству $C_p(\{x_0\}, B_t^{x_0}) \geq C(n, p) t^{n-p_0} > 0$ (см. §5) и граничная точка x_0 всегда регулярна.

В следующей теореме дается оценка модуля непрерывности решения в регулярной граничной точке. Ниже $M = \max_{x \in \partial D} |f(x)|$.

ТЕОРЕМА 1.2. *Существуют положительные постоянные θ и C , зависящие только от n , p и M , такие, что при $r \leq \rho/4$ справедливо неравенство*

$$\sup_{D \cap B_r^{x_0}} |u_f(x) - f(x_0)| \leq C \left(\operatorname{osc}_{\partial D \cap B_{\rho}^{x_0}} f + \rho + \operatorname{osc}_{\partial D} f \exp \left(-\theta \int_r^{\rho} \gamma(t) t^{-1} dt \right) \right), \quad (1.20)$$

если $p_0 \leq n$, и неравенство

$$\sup_{D \cap B_r^{x_0}} |u_f(x) - f(x_0)| \leq \operatorname{osc}_{\partial D \cap B_{\rho}^{x_0}} f + C \left(\frac{r}{\rho} \right)^{1-n/p_0} \operatorname{osc}_{\partial D} f, \quad (1.21)$$

если $p_0 > n$.

Если $p(x) = \text{const}$, то критерий регулярности граничной точки (1.19), как уже отмечалось выше, получен в работе [27], а оценки модуля непрерывности решения (1.20) и (1.21) в регулярной граничной точке – в работе [24]. Важную роль в доказательстве теорем 1.1 и 1.2 играет неравенство Харнака для неотрицательных суперрешений уравнения (1.1) (см. лемму 6.4), которое в случае $p(x) = \text{const}$ установлено в [32].

Следующее достаточное условие на границу области D в окрестности точки $x_0 \in \partial D$, обеспечивающее гёльдеровость решения в x_0 и имеющее смысл при $p_0 \leq n$, является следствием (1.20) и оценок емкости замкнутого шара, полученных в § 5.

ТЕОРЕМА 1.3. *Если граничная функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера в точке $x_0 \in \partial D$ и внешность области D в окрестности x_0 содержит конус с вершиной в x_0 , то решение $u_f(x)$ непрерывно по Гёльдеру в x_0 .*

Приведем еще геометрические условия регулярности граничной точки, которую будем считать совпадающей с началом координат O . Предположим, что внутренность дополнения области D в окрестности точки O совпадает с областью вида

$$\left\{ x: 0 < x_n < a, \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < g^2(x_n) \right\}, \quad (1.22)$$

где $g(t)$ – непрерывная, неубывающая функция, удовлетворяющая для $\alpha > 1$ и $t \in [0, a]$ неравенствам $t^\alpha \leq g(t) \leq t$.

ТЕОРЕМА 1.4. *Если $n-1 \leq p_0 \leq n$, то граничная точка O регулярна, а если $p_0 < n-1$, то для ее регулярности необходимо и достаточно расходимости в нуле интеграла*

$$\int_0^a \left(\frac{g(t)}{t} \right)^{\frac{n-1-p_0}{p_0-1}} t^{-1} dt = \infty. \quad (1.23)$$

Отметим, что если $g(t) \geq Ct$, то область D удовлетворяет в точке $O \in \partial D$ условию внешнего конуса Пуанкаре и условие (1.19) выполнено при любом значении p_0 . В случае $p(x) = \text{const}$ утверждение теоремы 1.4 содержится в работе [24].

Полученные результаты остаются в силе и для решений уравнения

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0$$

с измеримой, симметрической и равномерно положительно определенной в D матрицей $\|a_{ij}(x)\|$.

§ 2. Сведения о классах $W(D)$ и $W_0(D)$

1. Плотность гладких функций в классах $W(D)$ и $W_0(D)$. Ниже, не оговаривая этого особо, будем считать, что измеримый показатель суммируемости $p(x)$, помимо прочих ограничений, удовлетворяет условию (1.2).

Сначала рассмотрим случай, когда функция $u \in W_0(D)$ имеет компактный носитель в D . Продолжим $u(x)$ нулем вне D и с помощью ядра

$$\omega \geq 0, \quad \omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \omega(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad |x| \geq 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = 1,$$

определим усредненные функции

$$u_\varepsilon(x) = \int_D u(y) \omega_\varepsilon(x - y) dy, \quad \omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \omega(\varepsilon^{-1} x).$$

ЛЕММА 2.1 [10]. *Если выполнено условие (1.12), то для любой функции $u \in W_0(D)$ с компактным носителем в D существует последовательность ее усреднений $\{u_{\varepsilon_j}\} \in C_0^\infty(D)$, сходящаяся в $W_0(D)$ к $u(x)$ при $\varepsilon_j \rightarrow 0$.*

Приведем еще одно вспомогательное утверждение, в котором характеризуется показатель степени суммируемости функций из классов $W_0(D)$ и $W_{\text{loc}}(D)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если показатель суммируемости $p(x)$ равномерно непрерывен в D , то существует постоянная $\gamma = \gamma(n) > 1$ такая, что:*

- а) *если $u \in W_0(D)$, то $|u|^{\gamma p(x)} \in L_1(D)$;*
- б) *если $u \in W_{\text{loc}}(D)$, то $|u|^{\gamma p(x)} \in L_{1,\text{loc}}(D)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем свойство а). Продолжим функцию $u \in W_0(D)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus D$ и рассмотрим $u(x)$ в произвольном шаре B_r с центром на $\bar{D}$, радиус $r = r(n, p)$ которого столь мал, что

$$\begin{aligned} \gamma p(x) &\leq sk, \quad x \in B_r \cap D, \quad k = \frac{n}{n-1}, \\ \gamma &= \frac{n^2}{n^2-1}, \quad s = \inf_{B_r \cap D} p(x). \end{aligned} \tag{2.1}$$

По теореме вложения Соболева имеем

$$\left(\int_{B_r} |u|^{ks} dx \right)^{1/k} \leq C \left(\int_{B_r} |\nabla u|^s dx + \int_{B_r} |u| dx \right).$$

Поэтому $|u|^{\gamma p(x)} \in L_1(B_r)$ в силу неравенства из (2.1) и свойство а) вытекает из произвольности шара B_r .

Для доказательства свойства б) достаточно заметить, что если $u \in W_{\text{loc}}(D)$, то функция $|u|^{\gamma p(x)}$ суммируема в шарах $B_r \Subset D$, радиус которых удовлетворяет условию (2.1). Предложение доказано.

Таким образом, для равномерно непрерывного в D показателя суммируемости $p(x)$ в интегральном тождестве (1.4) для W -решений и H -решений можно использовать пробные функции вида $\psi(x) = u(x)\eta(x)$, где $u(x)$ – соответствующее решение уравнения (1.1), а $\eta \in C_0^\infty(D)$.

ЛЕММА 2.2. Если выполнено условие (1.12), то справедливы следующие утверждения:

а) множество $C^\infty(D) \cap W(D)$ плотно в $W(D)$ относительно сходимости в $W(D)$;

б) множество $C_0^\infty(D)$ плотно в $W_0(D)$ относительно сходимости в $W_0(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in W(D)$, $\{\mathcal{B}_{r_j}\}$ – локально конечное покрытие области D шарами $\overline{\mathcal{B}_{r_j}} \subset D$, $j = 1, 2, \dots$, и $\{\eta_j\}$ – подчиненное этому покрытию разбиение единицы. Кратность покрытия будем считать конечной, зависящей только от размерности пространства n . Обозначим $u_j = \eta_j u$ и рассмотрим усреднение u_j , положив

$$w_j(x) = \int_D \omega_{\varepsilon_j}(x - y) u_j(y) dy.$$

Радиус усреднения ε_j выберем столь малым, что $w_j \in C_0^\infty(\mathcal{B}_{r_j})$. Согласно утверждению предложения 2.1 $u_j \in W_0(D)$. Поэтому в силу леммы 2.1 и свойства усреднения по заданному $\varepsilon \in (0, 1/2)$ найдется ε_j , для которого

$$\int_D (|u_j - w_j| + |\nabla u_j - \nabla w_j|^{p(x)}) dx \leq \varepsilon^j. \quad (2.2)$$

Положим $w = \sum_j w_j$. Ясно, что $w \in C^\infty(D)$. На любом открытом множестве G , $\overline{G} \subset D$, имеет место равенство $u = \sum_j u_j$, в котором сумма содержит конечное число слагаемых. Пусть $\tilde{G}$ – объединение шаров $\mathcal{B}_{r_j}$, имеющих непустое пересечение с G . Из неравенства (2.2) и конечной кратности покрытия имеем

$$\int_G (|u - w| + |\nabla u - \nabla w|^{p(x)}) dx \leq C \sum_j \int_{\tilde{G}} (|u_j - w_j| + |\nabla u_j - \nabla w_j|^{p(x)}) dx \leq C\varepsilon$$

с постоянной C , зависящей только от n и p . Отсюда свойство а) следует из произвольности G и ε .

Свойство б) вытекает из утверждения леммы 2.1 и определения класса $W_0(D)$. Лемма доказана.

Пользуясь приведенными выше рассуждениями, нетрудно показать, что при условии (1.12) множество $C^\infty(D)$ плотно и в классе $W_{\text{loc}}(D)$ относительно сходимости на открытых строго внутренних подмножествах D' области D :

$$\forall u \in W_{\text{loc}}(D) \quad \exists u_j \in C^\infty(D): u_j \rightarrow u \quad \text{в } W(D') \quad \forall D' \Subset D.$$

2. Свойства классов $W(D)$ и $H(D)$. Класс $W_0(D)$ можно определить и другим способом. При доказательстве эквивалентности обоих определений нам потребуется теорема Шеффе.

ТЕОРЕМА 2.1. Если последовательность $\{w_j\}$, состоящая из неотрицательных, суммируемых в D функций, сходится к функции $w \in L_1(D)$ почти всюду в D и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_D w_j dx = \int_D w dx,$$

то $w_j \rightarrow w$ в $L_1(D)$.

ЛЕММА 2.3. Для принадлежности функции $u(x)$ классу $W_0(D)$ необходимо и достаточно существования последовательности $\{u_j\}$, состоящей из функций $u_j \in \mathring{W}_1^1(D)$ с компактным носителем в D , такой, что

$$u_j \rightarrow u \quad \text{в} \quad \mathring{W}_1^1(D), \quad |\nabla u_j|^{p(x)} \rightarrow |\nabla u|^{p(x)} \quad \text{в} \quad L_1(D). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Если выполнены свойства (2.3), то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $|\nabla u_j|^p \rightarrow |\nabla u|^p$ почти всюду в D , и из теоремы Шеффе вытекает равностепенная интегрируемость последовательности $\{|\nabla u_j|^p\}$. Но тогда равностепенно интегрируема последовательность $\{|\nabla u - \nabla u_j|^p\}$, сходящаяся к нулю почти всюду в D , и нужное утверждение вытекает из теоремы Лебега. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $u \in W_0(D)$. Тогда существует последовательность функций $u_j \in W(D)$ с компактным носителем в D , которая сходится к $u(x)$ в $W(D)$. Поскольку сходимость в $W(D)$ влечет сходимость в $\mathring{W}_1^1(D)$, то достаточно установить, что $|\nabla u_j|^{p(x)} \rightarrow |\nabla u|^{p(x)}$ в $L_1(D)$. Пользуясь неравенством

$$||\xi|^p - |\zeta|^p| \leq p|\xi - \zeta|(|\xi|^{p-1} + |\zeta|^{p-1}) \quad (2.4)$$

и неравенством Юнга, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_D ||\nabla u|^{p(x)} - |\nabla u_j|^{p(x)}| dx &\leq C(\varepsilon, p) \int_D |\nabla u - \nabla u_j|^{p(x)} dx \\ &+ \varepsilon \int_D (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla u_j|^{p(x)}) dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Поскольку последовательность $\{|\nabla u_j|^p\}$ равномерно ограничена в $L_1(D)$, то ввиду произвольности ε приходим к требуемому свойству из (2.3). Необходимость доказана. Лемма доказана.

Аналогичный факт имеет место и для класса $W(D)$: для принадлежности функции $u(x)$ классу $W(D)$ необходимо и достаточно существования последовательности $\{u_j\}$, удовлетворяющей свойствам

$$u_j \in W_1^1(D), \quad u_j \rightarrow u \quad \text{в} \quad W_1^1(D), \quad |\nabla u_j|^{p(x)} \rightarrow |\nabla u|^{p(x)} \quad \text{в} \quad L_1(D). \quad (2.6)$$

Полученные результаты нетрудно перенести на классы $H_0(D)$ и $H(D)$. В этом случае последовательность $\{u_j\}$ из (2.3) принадлежит множеству $C_0^\infty(D)$, а последовательность из (2.6) – множеству $C^\infty(D) \cap W_1^1(D)$.

Из оценки (2.5) вытекает одно свойство сходящейся в $W_0(D)$ последовательности, которое нам потребуется в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Если последовательность функций $u_j \in W_0(D)$ сходится в $W_0(D)$ к функции $u \in W_0(D)$, то $|\nabla u_j|^p \rightarrow |\nabla u|^p$ в $L_1(D)$.

ЛЕММА 2.4. Классы $W(D)$ и $H(D)$ полны относительно сходимости в $W(D)$, а классы $W_0(D)$ и $H_0(D)$ – относительно сходимости в $W_0(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем полноту класса $W(D)$. Пусть $\{u_j\}$ – фундаментальная последовательность. Тогда по заданному $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$\int_D (|u_i - u_j| + |\nabla u_i - \nabla u_j|^{p(x)}) dx \leq \varepsilon, \quad i, j > N. \quad (2.7)$$

В частности, последовательность $\{u_i\}$ фундаментальна в $W_1^1(D)$, и существует функция $u \in W_1^1(D)$, к которой $\{u_i\}$ сходится в $W_1^1(D)$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $|u - u_i| + |\nabla(u - u_i)| \rightarrow 0$ почти всюду в D и по лемме Фату из (2.7) придем к неравенству

$$\int_D (|u - u_j| + |\nabla u - \nabla u_j|^{p(x)}) dx \leq \varepsilon, \quad i > N,$$

из которого следует, что $u_j \rightarrow u$ в $W(D)$ и $u \in W(D)$. Точно так же устанавливается полнота других классов. Лемма доказана.

Если $u \in W(D)$, то отрицательная и положительная части функции $u(x)$

$$u^-(x) = \min(u(x), 0), \quad u^+(x) = \max(u(x), 0)$$

также принадлежат классу $W(D)$. Аналогичный факт справедлив и для усеченных функций вида

$$u_m^-(x) = \min(u(x), m), \quad u_m^+(x) = \max(u(x), m).$$

Проверим выполнение этих свойств в классах $H(D)$, $W_0(D)$ и $H_0(D)$. Предварительно докажем следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 2.5. *Предположим, что функция $u \in W(D)$ является пределом последовательности $\{u_j\} \in W(D)$, сходящейся к $u(x)$ в $W(D)$. Тогда существует последовательность $\{v_j\} \in W(D)$, которая сходится к $u_m^-(x)$ в $W(D)$ и удовлетворяет следующим свойствам:*

- а) $v_j(x) \leq m$ почти всюду в D ;
- б) если $u_j \in C^\infty(D)$, то $v_j \in C^\infty(D)$;
- в) если $m \geq 0$ и функции $u_j(x)$ имеют компактный носитель в D , то функции $v_j(x)$ также обладают этим свойством;
- г) если $u_j(x) \geq m \geq 0$ почти всюду на множестве $E \subset D$, то $v_j(x) = m$ почти всюду на E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta_k(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $k = 1, 2, \dots$, $\eta(t) = 1$ при $t < -2^{-k} + m$, $\eta(t) = 0$ при $t \geq m$, $0 \leq \eta(t) \leq 1$ и $|\eta'(t)| \leq \text{const} \cdot 2^k$. Рассмотрим еще последовательность $\{g_k(t)\}$ непрерывно дифференцируемых на числовой прямой функций, задаваемых равенствами

$$g_k(t) = -((t - m)^2 + 2^{-2k})^{1/2} + 2^{-k} \quad \text{при } t < m, \quad g_k(t) = 0 \quad \text{при } t \geq m,$$

и положим $f_k(t) = g_k(t)\eta_k(t) + m$. Как нетрудно видеть, $f_k(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Простой проверкой получим, что последовательность $\{f_k(u_j)\}$ состоит из функций класса

$W(D)$, обладающих свойствами а)–г) утверждения леммы. Осталось установить, что при соответствующем выборе k и j выражение

$$I_{k,j} = \int_D (|f_k(u_j) - u_m^-| + |\nabla f_k(u_j) - \nabla u_m^-|^{p(x)}) dx$$

можно сделать сколь угодно малым. Поскольку $|f'_k(t)| \leq \text{const}$, то, как нетрудно видеть,

$$\begin{aligned} I_{k,j} &\leq C(p) \left(\int_D (|u_j - u| + |\nabla u_j - \nabla u|^{p(x)}) dx \right. \\ &\quad + \int_D (|f_k(u) - u_m^-| + |f'_k(u) \nabla u - \nabla u_m^-|^{p(x)}) dx \\ &\quad \left. + \int_D |f'_k(u_j) - f'_k(u)|^{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \\ &= C(p) (I_j^{(1)} + I_k^{(2)} + I_{k,j}^{(3)}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (2.8). Ясно, что $I_j^{(1)} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Для почти всех точек множества $\{x: u(x) \geq m\}$ выполнены равенства $u_m^-(x) = m$, $\nabla u_m^-(x) = 0$, $f_k(u(x)) = m$ и $f'_k(u(x)) = 0$. Поэтому, полагая $G_\delta = \{x: m - \delta < u < m\}$, $F_\delta = \{x: u \leq m - \delta\}$, где $\delta > 0$, и учитывая, что $|f'_k(t)| \leq \text{const}$, будем иметь

$$\begin{aligned} I_k^{(2)} &\leq \int_{G_\delta} (|f_k(u) - u|) dx + C(p) \int_{G_\delta} |\nabla u|^{p(x)} dx \\ &\quad + \int_{F_\delta} (|f_k(u) - u| + |f'_k(u) - 1|^{p(x)} |\nabla u|^{p(x)}) dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Первые два интеграла в правой части (2.9) стремятся к нулю при $\delta \rightarrow 0$, а так как $f'_k(t) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$ для всех $t \leq m - \delta$, то $I_k^{(2)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и по заданному ε найдется номер $k_0(\varepsilon)$ такой, что $I_{k_0}^{(2)} \leq \varepsilon$.

Зафиксируем номер $k_0(\varepsilon)$ и рассмотрим оставшийся интеграл $I_{k_0,j}^{(3)}$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $u_j \rightarrow u$ почти всюду в D . Функции $f'_k(t)$ непрерывны и последовательность $\{f'_{k_0}(u_j)\}$, $j = 1, 2, \dots$, тоже сходится почти всюду в D к функции $f'_{k_0}(u(x))$. Таким образом, $I_{k_0,j}^{(3)} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, и существует номер $j_0 = j_0(k_0, \varepsilon)$, для которого $I_j^{(1)} + I_{k_0}^{(2)} + I_{k_0,j_0}^{(3)} \leq \varepsilon$. В результате, с учетом (2.8), придем к требуемому неравенству $I_{k_0,j_0} \leq C\varepsilon$. Лемма доказана.

Замкнутость класса $H(D)$ относительно операции срезки вытекает из определения $H(D)$ и свойства б) леммы 2.5. Если же $u \in W_0(D)$ ($u \in H_0(D)$), то $u_m^- \in W_0(D)$ (соответственно, $u_m^- \in H_0(D)$) при $m \geq 0$ и $u_m^+ \in W_0(D)$ (соответственно, $u_m^+ \in H_0(D)$) при $m \leq 0$. Действительно, если $u \in W_0(D)$, то по определению класса $W_0(D)$ найдется последовательность $u_j \in W(D)$, состоящая из функций с компактным носителем, которая сходится к $u(x)$ в $W_0(D)$. Отсюда в силу свойства в) последовательности $\{u_j\}$ вытекает, что $u_m^- \in W_0(D)$ при $m \geq 0$. Соответствующее свойство для $u_m^+(x)$ следует из равенства $u_m^+(x) = -\min(-u(x), -m)$. Аналогичными рассуждениями разбирается и случай, когда $u \in H_0(D)$.

3. Неравенства для функций из классов $W(D)$ и $H(D)$. При изучении граничных свойств решения задачи Дирихле важную роль играет понятие неравенства на границе для функций из классов $W(D)$ и $H(D)$. Следуя работе [33], определим это понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функция $u \in W(D)$ ($u \in H(D)$) удовлетворяет неравенству $u \geq 0$ на границе ∂D в смысле $W(D)$ (соответственно, в смысле $H(D)$), если ее отрицательная часть $u^-(x)$ принадлежит классу $W_0(D)$ (соответственно, классу $H(D)$).

Если функция $u(x)$, принадлежащая одному из классов $W(D)$ или $H(D)$, непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$ и $u(x) \geq 0$ на ∂D в обычном смысле, то $u \geq 0$ на ∂D и в соответствующем смысле данного определения.

К введенному понятию неравенства на границе ∂D (в смысле $W(D)$ или $H(D)$) сводятся и другие типы неравенств. Например, $u \leq 0$ на ∂D , если $-u \geq 0$ на ∂D ; функции $u(x)$ и $v(x)$ из одного и того же класса удовлетворяют неравенству $u \geq v$ на ∂D в соответствующем смысле, если $u - v \geq 0$ на ∂D ; эти же функции удовлетворяют равенству $u = v$ на ∂D , если $u - v \geq 0$ на ∂D и $v - u \geq 0$ на ∂D ;

$$\inf_{\partial D} u = \sup\{k: u \geq k \text{ на } \partial D\}, \quad \sup_{\partial D} u = -\inf_{\partial D} (-u).$$

Неравенства для функций из $W(D)$ и $H(D)$ на границе ∂D могут быть обобщены. С этой целью определим классы $W_0(D, E)$ и $H_0(D, E)$, связанные с подмножествами E замкнутой области $\bar{D}$. Класс $W_0(D, E)$ ($H_0(D, E)$) состоит из функций $u \in W(D)$ (соответственно, функций $u \in H(D)$), для каждой из которых существует последовательность $\{u_j\} \in W(D)$ (соответственно, $\{u_j\} \in H(D)$), состоящая из функций с носителем вне окрестности $E \cap \bar{D}$ и сходящаяся к $u(x)$ в $W(D)$. В частности, если $E = \partial D$, то $W_0(D, E) = W_0(D)$ и $H_0(D, E) = H_0(D)$.

Функция $u \in W(D)$ ($u \in H(D)$) удовлетворяет неравенству $u \geq 0$ на $E \subset \bar{D}$ в смысле $W(D)$ (соответственно, в смысле $H(D)$), если ее отрицательная часть $u^-(x)$ принадлежит классу $W_0(D, E)$ (соответственно, классу $H_0(D, E)$). Для непрерывной на $\bar{E}$ функции из класса $W(D)$ или $H(D)$ соответствующее определение выполнено, если $u(x) \geq 0$ на E в обычном смысле. Определения других типов неравенств на E аналогичны данным выше.

Приведем одно вспомогательное утверждение, которое нам понадобится далее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Для выполнения равенства $u(x) = 1$ на компакте $K \subset B_R$ в смысле $H(B_R)$ достаточно существования последовательности $\{u_j\} \in C_0^\infty(B_R)$ такой, что $u_j \rightarrow u$ в $W_0(B_R)$ и $u_j(x) = 1$ в окрестности K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если последовательность $\{u_j\} \in C_0^\infty(B_R)$ удовлетворяет условиям леммы, то последовательность $\{u_j(x) - 1\}$ сходится в $W(B_R)$ к функции $u(x) - 1$. Поскольку $u_j(x) - 1 = 0$ в окрестности K , то $(u - 1)^- \in H_0(B_R, K)$ по свойствам б) и г) леммы 2.5. Точно так же можно показать, что $(1 - u)^- \in H_0(B_R, K)$. Предложение доказано.

§3. Разрешимость задачи Дирихле в классах $W(D)$ и $H(D)$

1. Вспомогательные результаты. Сначала рассмотрим вариационные задачи (1.7) и (1.8). В предположении (1.2) интегрант $|\xi|^{p(x)}$ является строго выпуклой функцией переменной $\xi \in \mathbb{R}^n$. Условие выпуклости будем использовать либо в виде

$$|\xi|^p - |\zeta|^p \geq p|\zeta|^{p-2}\zeta \cdot (\xi - \zeta), \quad (3.1)$$

где точка означает скалярное произведение, либо в виде неравенства Кларксона (см. [34]): если $p \geq 2$, то

$$|\xi|^p - |\zeta|^p \geq p|\zeta|^{p-2}\zeta \cdot (\xi - \zeta) + \frac{|\xi - \zeta|^p}{2^{p-1} - 1}, \quad (3.2)$$

а если $1 < p < 2$, то

$$|\xi|^p - |\zeta|^p \geq p|\zeta|^{p-2}\zeta \cdot (\xi - \zeta) + \frac{3p(p-1)}{16} \frac{|\xi - \zeta|^2}{(|\xi| + |\zeta|)^{2-p}} \quad (3.3)$$

для ξ и ζ , не обращающихся в нуль одновременно.

Кроме того, нам потребуются еще два вспомогательных неравенства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Если $1 < p_1 \leq p \leq p_2 < \infty$, то существует постоянная $\delta \in (0, 1]$, зависящая только от p , такая, что для любых $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$ и $|t| \leq 1$ имеет место неравенство*

$$|(|\xi + t\zeta|^{p-2}(\xi + t\zeta) - |\xi|^{p-2}\xi) \cdot \zeta| \leq C(n, p)|t|^\delta(|\xi|^p + |\zeta|^p). \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать $\xi \neq 0$, $t \in (0, 1]$. Если $|\xi| < 4t|\zeta|$, то доказательство очевидно, и будем предполагать, что

$$|\xi| \geq 4t|\zeta|. \quad (3.5)$$

В этом случае

$$|\xi + \tau'\zeta| \geq |\xi| - \tau'|\zeta| \geq \frac{3|\xi|}{4} \quad \forall \tau' \in [0, t]. \quad (3.6)$$

Поэтому при фиксированных $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, функция переменного τ

$$g(\tau) = |\xi + \tau\zeta|^{p-2}(\xi + \tau\zeta) \cdot \zeta$$

непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, t]$ для любого $p \in [p_1, p_2]$ и по теореме Лагранжа существует точка $\tau' \in (0, t)$, для которой $g(t) - g(0) = tg'(\tau')$, т.е.

$$|(|\xi + t\zeta|^{p-2}(\xi + t\zeta) - |\xi|^{p-2}\xi) \cdot \zeta| \leq C(n, p)|t| |\zeta|^2 |\xi + \tau'\zeta|^{p-2}. \quad (3.7)$$

Если теперь $p \geq 2$, то согласно (3.5) и неравенству Юнга имеем

$$|(|\xi + t\zeta|^{p-2}(\xi + t\zeta) - |\xi|^{p-2}\xi) \cdot \zeta| \leq C(n, p)|t|(|\xi|^p + |\zeta|^p).$$

Если же $1 < p_1 \leq p < 2$, то $p > 1 + \delta$ для $\delta = (p_1 - 1)/2$ и в силу (3.5)–(3.7) и неравенства Юнга

$$\begin{aligned} |(|\xi + t\zeta|^{p-2}(\xi + t\zeta) - |\xi|^{p-2}\xi) \cdot \zeta| &\leq C(n, p)|t|^\delta |\zeta|^{\delta+1} |\xi|^{p-1-\delta} \\ &\leq C(n, p)|t|^\delta (|\xi|^p + |\zeta|^p). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Если $1 < p_1 \leq p \leq p_2 < \infty$, то для заданного $\varepsilon > 0$ и любых $\xi, \zeta, \eta \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство*

$$|(|\xi|^{p-2}\xi - |\zeta|^{p-2}\zeta) \cdot \eta| \leq C(n, p, \varepsilon)|\xi - \zeta|^p + \varepsilon(|\zeta|^p + |\eta|^p). \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|\zeta| < 4|\xi - \zeta|$, то, полагая, что $\xi = \zeta + (\xi - \zeta)$, легко приходим к (3.8) по неравенству Юнга. Случай $\zeta = 0$ также тривиален. Поэтому будем предполагать

$$|\zeta| \geq 4|\xi - \zeta|, \quad \zeta \neq 0, \quad (3.9)$$

что влечет неравенство

$$|\zeta + t(\xi - \zeta)| \geq |\zeta| - t|\xi - \zeta| \geq \frac{3}{4}|\zeta| \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (3.10)$$

В силу (3.2) и предположения $\zeta \neq 0$ функция

$$g(t) = |\zeta + t(\xi - \zeta)|^{p-2}(\zeta + t(\xi - \zeta)) \cdot \eta$$

непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$ и по теореме Лагранжа существует точка $\tau \in (0, 1)$, для которой $g(1) - g(0) = g'(\tau)$. После несложного подсчета будем иметь

$$|(|\xi|^{p-2}\xi - |\zeta|^{p-2}\zeta) \cdot \eta| \leq C(n, p)|\xi - \zeta| |\zeta + \tau(\xi - \zeta)|^{p-2}|\eta|. \quad (3.11)$$

Если $p > 2$, то в силу (3.9)

$$|(|\xi|^{p-2}\xi - |\zeta|^{p-2}\zeta) \cdot \eta| \leq |\xi - \zeta| |\zeta|^{p-2}|\eta|$$

и (3.8) следует из неравенства Юнга. Если же $1 < p_1 \leq p < 2$, то $p > 1 + \delta$ для $\delta = (p_1 - 1)/2$ и с учетом соотношений (3.9)–(3.11) приходим к оценке

$$|(|\xi|^{p-2}\xi - |\zeta|^{p-2}\zeta) \cdot \eta| \leq |\xi - \zeta|^\delta |\zeta|^{p-1-\delta}|\eta|,$$

из которой (3.8) вновь вытекает по неравенству Юнга. Предложение доказано.

Прежде чем переходить к изучению вариационных задач, обозначим через d нижнюю грань функционала в (1.7) и приведем одно вспомогательное утверждение для минимизирующей последовательности $\{w_j\} \in W_0(D)$, на которой $F(w_j + h) \rightarrow d$ при $j \rightarrow \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Пусть $\{w_j\}$ – минимизирующая последовательность задачи (1.7) и d_0 – некоторое положительное число. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что при $j > N$ для любой функции $\psi \in W_0(D)$, удовлетворяющей условию $F(\psi) < d_0$, выполнено неравенство*

$$\left| \int_D |\nabla(w_j + h)|^{p(x)-2} \nabla(w_j + h) \cdot \nabla \psi \, dx \right| < \varepsilon. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v_j = w_j + t\psi$, где $t \neq 0$, $|t| \leq 1$, – некоторое число, которое подберем позже. Так как $F(v_j + h) \geq d$, то $F(w_j + h) - F(v_j + h) \leq F(w_j + h) - d$, и, полагая $z_j = w_j + h$, в силу неравенства (3.1) имеем

$$-t \int_D |\nabla(z_j + t\psi)|^{p(x)-2} \nabla(z_j + t\psi) \cdot \nabla\psi \, dx \leq F(z_j) - d.$$

Выбирая знак t противоположным знаком интеграла в (3.12), после простого преобразования получим оценку

$$\begin{aligned} & \left| \int_D |\nabla z_j|^{p(x)-2} \nabla z_j \cdot \nabla\psi \, dx \right| \\ & \leq \int_D \left(|\nabla(z_j + t\psi)|^{p(x)-2} \nabla(z_j + t\psi) - |\nabla z_j|^{p(x)-2} \nabla z_j \right) \cdot \nabla\psi \, dx + \frac{F(z_j) - d}{|t|}. \end{aligned}$$

Пусть d_1 – положительная постоянная, оценивающая сверху сходящуюся последовательность $\{F(z_j)\}$. Из оценки (3.4) и неравенства $F(\psi) < d_0$ вытекает, что

$$\int_D \left(|\nabla(z_j + t\psi)|^{p(x)-2} \nabla(z_j + t\psi) - |\nabla z_j|^{p(x)-2} \nabla z_j \right) \cdot \nabla\psi \, dx \leq C(n, p) |t|^\delta (d_0 + d_1).$$

Выберем теперь t из равенства $C(n, p) |t|^\delta (d_0 + d_1) = \varepsilon/2$, а после этого найдем такое N , чтобы при $j > N$ было справедливо

$$\frac{F(z_j) - d}{|t|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Предложение доказано.

Результат предложения 3.3 остается в силе и по отношению к задаче (1.8). В этом случае неравенство (3.12) имеет место на допустимых функциях $\psi \in C_0^\infty(D)$.

Утверждение, аналогичное предложению 3.3, имеет место и для минимизирующей последовательности $\{u_j\} \in C_0^\infty(D)$ вариационной задачи

$$\inf_{u \in C_0^\infty(D)} F_\mu(u), \quad F_\mu(u) = \int_D \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} \, dx - \int_D u \, d\mu, \quad (3.13)$$

в которой мера μ удовлетворяет условию (1.10). Отметим, что в силу этого условия последовательность значений функционалов $\{F_\mu(u_j)\}$ имеет конечный предел.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть $\{u_j\}$ – минимизирующая последовательность задачи (3.13) и d_0 – некоторое положительное число. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что при $j > N$ для любой функции $\psi \in C_0^\infty(D)$, удовлетворяющей условию $F(\psi) < d_0$, выполнено неравенство

$$\left| \int_D |\nabla u_j|^{p(x)-2} \nabla u_j \cdot \nabla\psi \, dx - \int_D \psi \, d\mu \right| < \varepsilon. \quad (3.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства повторим рассуждения, использованные при выводе неравенства (3.12).

2. Разрешимость вариационных задач. Разрешимость вариационных задач (1.7), (1.8) мы установим при одном только предположении (1.2) относительно функции $p(x)$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Вариационные задачи (1.7) и (1.8) однозначно разрешимы в классах $W_0(D)$ и $H_0(D)$ соответственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вариационную задачу (1.7) и покажем, что минимизирующая последовательность $\{w_j\}$ фундаментальна в $W_0(D)$. В силу неравенств (3.2), (3.3) имеем

$$\begin{aligned} & \int_E |\nabla(w_i - w_j)|^{p(x)} dx + \int_{D \setminus E} \frac{|\nabla(w_i - w_j)|^2}{(|\nabla(w_i + h)| + |\nabla(w_j + h)| + 1)^{2-p(x)}} dx \\ & \leq C(p) \left(\left| \int_D |\nabla(w_j + h)|^{p(x)-2} \nabla(w_j + h) \cdot \nabla(w_j - w_i) dx \right| \right. \\ & \quad \left. + |F(w_i + h) - F(w_j + h)| \right), \end{aligned}$$

где $E = \{x: x \in D, p(x) \geq 2\}$. Зададим $\varepsilon > 0$. Пользуясь предложением 3.3 и свойством минимизирующей последовательности, найдем такое N , что при $i > N$ и $j > N$ выражение в правой части не превосходит ε , т. е.

$$\int_E |\nabla(w_i - w_j)|^{p(x)} dx + \int_{D \setminus E} \frac{|\nabla(w_i - w_j)|^2}{(|\nabla(w_i + h)| + |\nabla(w_j + h)| + 1)^{2-p(x)}} dx \leq \varepsilon. \quad (3.15)$$

Поскольку

$$\int_E |\nabla(w_i - w_j)|^{p(x)} dx \leq \varepsilon,$$

остается получить аналогичную оценку на множестве $D \setminus E$. Для этого разобьем $D \setminus E$ на множества

$$E_{i,j}^1 = \left\{ x: x \in D, |\nabla(w_i - w_j)|^{2-p(x)} \leq \varepsilon^{1/2} (|\nabla(w_i + h)| + |\nabla(w_j + h)| + 1)^{2-p(x)} \right\}$$

и

$$E_{i,j}^2 = \left\{ x: x \in D, |\nabla(w_i - w_j)|^{2-p(x)} > \varepsilon^{1/2} (|\nabla(w_i + h)| + |\nabla(w_j + h)| + 1)^{2-p(x)} \right\}.$$

Ясно, что

$$\int_{E_{i,j}^1} |\nabla(w_i - w_j)|^{p(x)} dx \leq C(p) \varepsilon^{1/2} (F(w_i + h) + F(w_j + h) + 1) \leq C \varepsilon^{1/2},$$

а в силу (3.15) имеем

$$\int_{E_{i,j}^2} |\nabla(w_i - w_j)|^{p(x)} dx < \varepsilon^{1/2}.$$

Таким образом, последовательность $\{w_j\}$ фундаментальна в $W_0(D)$ и из леммы 2.4 следует существование предельной функции $w \in W_0(D)$. Согласно предположению 2.2

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_D \frac{|\nabla w_j|^{p(x)}}{p(x)} dx = \int_D \frac{|\nabla w|^{p(x)}}{p(x)} dx.$$

Поэтому функция $w(x)$ является решением вариационной задачи (1.7) и из строгой выпуклости функционала следует, что это решение единственно. Аналогичными рассуждениями доказывается и однозначная разрешимость задачи (1.8). Отличие заключается лишь в том, что минимизирующая последовательность состоит из функций $C_0^\infty(D)$. Теорема доказана.

3. Разрешимость задачи Дирихле в классах $W(D)$ и $H(D)$. Сначала покажем однозначную разрешимость задач (1.5) и (1.6).

ТЕОРЕМА 3.2. *Каждая из задач Дирихле (1.5), (1.6) однозначно разрешима. Если выполнено условие (1.12), то рассматриваемые задачи совпадают и существует единственное решение из класса $W(D)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу (1.5). Нетрудно видеть, что доказательство ее разрешимости сводится к нахождению функции $w \in W_0(D)$, удовлетворяющей интегральному тождеству

$$\int_D |\nabla(w+h)|^{p(x)-2} \nabla(w+h) \cdot \nabla \psi dx = 0 \quad (3.16)$$

на пробных функциях $\psi \in W_0(D)$. Искомым решением (3.16) является минимизант задачи (1.7). Действительно, в силу линейности класса $W_0(D)$ минимизант $w(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_D \frac{|z + t \nabla \psi|^{p(x)} - |z|^{p(x)}}{tp(x)} dx \geq 0 \quad \forall \psi \in W_0(D), \quad t > 0, \quad (3.17)$$

где полагается $z = \nabla(w+h)$. Очевидно, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{|z + t \nabla \psi|^{p(x)} - |z|^{p(x)}}{tp(x)} = |z|^{p(x)-2} z \cdot \nabla \psi$$

почти всюду в D , и необходимо проверить, что здесь имеет место сходимость в $L_1(D)$. Если $t \in (0, 1)$, то в силу неравенства (2.4) имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{|z + t \nabla \psi|^p - |z|^p}{tp} \right| &\leq (|z + t \nabla \psi|^{p-1} + |z|^{p-1}) |\nabla \psi| \\ &\leq C(p) (|z|^{p-1} + |\nabla \psi|^{p-1}) |\nabla \psi| \leq C(p) (|z|^p + |\nabla \psi|^p) \in L_1(D), \end{aligned}$$

и по теореме Лебега в (3.17) можно перейти к пределу при $t \rightarrow +0$. Отсюда вытекает, что интеграл в (3.16) неотрицателен для любой функции $\psi \in W_0(D)$, а потому равен нулю и тождество (3.16) установлено. Осталось показать единственность.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – решения задачи (1.5). Из интегральных тождеств (1.4) для $u(x)$ и $v(x)$ с пробной функцией $\psi = (u - v) \in W_0(D)$ следует, что

$$\int_D (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v) \cdot \nabla (u - v) dx = 0. \quad (3.18)$$

Поскольку

$$(|\xi|^{p(x)} \xi - |\zeta|^{p(x)} \zeta) \cdot (\xi - \zeta) > 0 \quad \forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \neq \zeta, \quad (3.19)$$

то предыдущее тождество влечет совпадение $u(x)$ и $v(x)$ почти всюду в D . Точно так же устанавливается и однозначная разрешимость задачи (1.6). Если выполнено условие (1.12), то $W(D) = H(D)$, $W_0(D) = H_0(D)$ и рассматриваемые задачи совпадают. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.3. *Если мера μ удовлетворяет условию (1.10), то задача Дирихле (1.9) однозначно разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь оценкой (3.14) и повторяя доказательство теоремы 3.1, нетрудно установить фундаментальность в $W_0(D)$ минимизирующей последовательности $\{u_j\} \in C_0^\infty(D)$ вариационной задачи (3.13). Покажем, что предельная функция $u \in H_0(D)$ является решением задачи (1.9). Пусть $\psi \in C_0^\infty(D)$. В силу неравенства (3.8) и сходимости $u_j(x)$ к $u(x)$ в $W_0(D)$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_D (|\nabla u_j|^{p(x)-2} \nabla u_j - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) \cdot \nabla \psi dx \right| \\ & \leq C(n, p, \varepsilon) \int_D |\nabla(u - u_j)|^{p(x)} dx + \varepsilon \int_D (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla \psi|^{p(x)}) dx \\ & \leq \varepsilon + \varepsilon \int_D (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla \psi|^{p(x)}) dx \quad \text{при } j > j_0(\varepsilon), \end{aligned}$$

и из оценки (3.14) при $j > j_1(n, p, \psi, \varepsilon)$ получим

$$\left| \int_D |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \psi dx - \int_D \psi d\mu \right| \leq 2\varepsilon + \varepsilon \int_D (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla \psi|^{p(x)}) dx.$$

Отсюда ввиду произвольности ε следует, что функция $u \in H_0(D)$ удовлетворяет интегральному тождеству (1.11), а значит, является решением задачи (1.9).

Докажем единственность. Пусть $u, v \in H_0(D)$ – решения задачи (1.9), $w = u - v$ и $\{\psi_j\} \in C_0^\infty(D)$ – последовательность, сходящаяся к w в $W_0(D)$. Согласно интегральным тождествам для $u(x)$ и $v(x)$ имеем

$$\int_D (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v) \cdot \nabla \psi_j dx = 0.$$

Переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$, приходим к равенству (3.18), из которого вытекает, что $u(x) = v(x)$ почти всюду в D . Теорема доказана.

Для W - и H -решений уравнения (1.1) имеет место принцип максимума.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА. Если функции $u, v \in W(D)$ ($u, v \in H(D)$) являются W -решениями (H -решениями) уравнения (1.1) и $u \geq v$ на ∂D в смысле $W(D)$ (соответственно, в смысле $H(D)$), то $u(x) \geq v(x)$ почти всюду в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u, v \in W(D)$. Из интегральных тождеств (1.4) для решений $u(x)$ и $v(x)$ с пробной функцией $\psi = (u - v)^- \in W_0(D)$ следует, что

$$\int_E (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v) \cdot \nabla \psi \, dx = 0,$$

где $E = \{x: u(x) \leq v(x)\}$ и $u(x) = v(x)$ почти всюду в D в силу неравенства (3.19). Если $u, v \in H(D)$, то доказательство ничем не отличается от приведенного выше.

Принцип максимума справедлив при одном только предположении (1.2) относительно измеримого в D показателя суммируемости $p(x)$. Если выполнено условие (1.12), то, как отмечалось выше, решения уравнения (1.1) из класса $W_{\text{loc}}(D)$ гёльдеровы в D и в формулировке принципа максимума $u(x) \geq v(x)$ всюду в D .

§ 4. Разрешимость обобщенной задачи Дирихле

Для доказательства разрешимости обобщенной задачи Дирихле используется свойство повышенной суммируемости градиента ограниченного в области D решения из класса $W_{\text{loc}}(D)$. Ключевую роль в доказательстве этого свойства играют локальное обобщение леммы Геринга [35], полученное в [36], и оценка градиента ограниченного решения во внутренних шарах области D , доказанная в работе [8].

Ниже $u(x)$ – ограниченное решение уравнения (1.1) из класса $W_{\text{loc}}(D)$, $M = \sup_D |u(x)|$,

$$\int_{B_r} \varphi(x) \, dx = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \varphi(x) \, dx \quad \text{– среднее функции по } B_r. \quad (4.1)$$

В следующей лемме полагается $t = \min(p_1, (n+1)/n)$, где $p_1 > 1$ – постоянная из условия (1.2).

ЛЕММА 4.1 [8]. Если выполнены условия (1.2) и (1.12), то существует положительная постоянная $r_0(n, p) < 1/4$ такая, что для любого решения $u(x)$ уравнения (1.1) из класса $W_{\text{loc}}(D) \cap L_\infty(D)$ в произвольном шаре $B_{2r} \subset D$ при $r \leq r_0(n, p)$ имеет место оценка

$$\int_{B_{r/2}} |\nabla u|^{p(x)} \, dx \leq C(n, p, M) \left(\left(\int_{B_r} |\nabla u|^{p(x)/t} \, dx \right)^t + 1 \right). \quad (4.2)$$

Сформулируем теперь свойство повышенной суммируемости градиента решения уравнения (1.1).

ЛЕММА 4.2. Если выполнены условия (1.2) и (1.12), то существует положительная постоянная $\delta = \delta(n, p, M)$ такая, что для любого решения $u \in W_{\text{loc}}(D) \cap L_\infty(D)$ уравнения (1.1) выполнено $|\nabla u|^{p(x)} \in L_{1+\delta, \text{loc}}(D)$

и в каждой строго внутренней подобласти D' области D имеет место оценка

$$\int_{D'} |\nabla u|^{(1+\delta)p(x)} dx \leq C, \quad (4.3)$$

в которой постоянная C зависит только от размерности пространства n , показателя суммируемости $p(x)$, диаметра области D , расстояния от D' до границы ∂D области D и точной верхней грани M модуля решения $u(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{dist}(D', \partial D)$ – расстояние от подобласти D' до границы области D , $\rho \leq \min(\text{dist}(D', \partial D), r)$, где r_0 – постоянная из условия леммы 4.1, и $B_{\rho/2}^{x_0}$ – шар с центром на $\overline{D}'$. Воспользуемся оценкой (4.2) в произвольном шаре $B_r \subset B_{\rho/2}^{x_0}$. Из этой оценки и полученного в [36] результата, содержащего локальное обобщение леммы Геринга, следует существование положительной постоянной δ , зависящей только от n , p и M , такой, что $|\nabla u|^{p(x)} \in L_{1+\delta, \text{loc}}(B_{\rho/2}^{x_0})$ и выполнено неравенство

$$\int_{B_{\rho/4}^{x_0}} |\nabla u|^{(1+\delta)p(x)} dx \leq C(n, p, M) \left(\left(\int_{B_{\rho/2}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} dx \right)^{1+\delta} + 1 \right). \quad (4.4)$$

Для оценки интеграла в правой части (4.4) выберем из интегрального тождества (1.4) пробную функцию $\psi(x) = u(x)\eta^s(x)$, где s – точная верхняя грань $p(x)$ в шаре $B_{\rho}^{x_0}$, $\eta \in C_0^\infty(B_{\rho}^{x_0})$, $0 \leq \eta(x) \leq 1$, $\eta(x) \equiv 1$ при $x \in B_{\rho/2}^{x_0}$ и $|\nabla \eta| \leq C\rho^{-1}$. В силу интегрального тождества

$$\int_{B_{\rho}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} \eta^s dx \leq C(p) \int_{B_{\rho}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-1} |u| \eta^{s-1} \rho^{-1} dx.$$

Применяя неравенство Юнга

$$|\nabla u|^{p(x)-1} |u| \eta^{s-1} \rho^{-1} \leq \varepsilon |\nabla u|^{p(x)} \eta^s + C(\varepsilon) |u|^{p(x)} \eta^{s-p(x)} \rho^{-p(x)},$$

после соответствующего выбора ε придем к соотношению

$$\int_{B_{\rho/2}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq C(p) \int_{B_{\rho}^{x_0}} |u|^{p(x)} \rho^{-p(x)} dx \leq C(p) \rho^{-p_2} (M^{p_2} + 1),$$

в котором p_2 – постоянная из условия (1.2). Теперь неравенство (4.4) примет вид

$$\int_{B_{\rho/4}^{x_0}} |\nabla u|^{(1+\delta)p(x)} dx \leq C(n, p, \rho, M). \quad (4.5)$$

Покроем D' конечным числом шаров $B_{\rho/4}^{x_i}$ с центрами на $\overline{D}'$. Кратность такого покрытия можно считать зависящей только от размерности пространства n , так что количество покрывающих D' шаров не превосходит $C(n) \cdot \text{diam}(D) \cdot \rho^{-n}$, где $\text{diam}(D)$ – диаметр области D . Суммируя неравенства (4.5) по всем шарам покрытия, придем к требуемому соотношению (4.3). Лемма доказана.

Ниже $C^\alpha(D)$ означает пространство гёльдеровых в D функций с показателем Гёльдера $\alpha \in (0, 1)$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Если выполнены условия (1.2) и (1.12), то обобщенное решение $u_f(x)$ задачи (1.15) существует, единственно и принадлежит классу $W_{\text{loc}}(D)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in C(\mathbb{R}^n)$ – непрерывное продолжение в $\mathbb{R}^n$ граничной функции задачи (1.15), $\{f_k\} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – последовательность, сходящаяся к f равномерно на $\overline{D}$, и $\{u_k\}$ – последовательность решений задач Дирихле (1.16). По теореме 3.2 задачи (1.16) однозначно разрешимы в классе $W(D)$. Из принципа максимума следует равномерная сходимость $\{u_k\}$ на компактных подмножествах D и независимость предельной функции $u_f(x)$ от способа продолжения и аппроксимации граничной функции $f(x)$. Поскольку решения задач (1.16) равномерно ограничены в D , то (см. [16]) существует показатель $\alpha \in (0, 1)$ такой, что последовательность $\{u_k\}$ компактна в $C^\alpha(D')$ в каждой строго внутренней подобласти D' области D . Таким образом, $u_f \in C^\alpha(D)$.

Покажем, что $u_f(x)$ принадлежит классу $W_{\text{loc}}(D)$ и удовлетворяет интегральному тождеству (1.4) на пробных функциях $\psi \in C_0^\infty(D)$. Обозначим через M постоянную, равномерно ограничивающую сверху точные верхние грани модулей решений $u_k(x)$. Согласно лемме 4.2 существует постоянная $\delta(n, p, M) > 0$ такая, что $|\nabla u_k|^{p(x)} \in L_{1+\delta, \text{loc}}(D)$. Пусть $\overline{B}_r \subset D$ – шар, радиус r которого столь мал, что

$$(1 + \delta)p(x) > q = \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)s, \quad x \in B_r, \quad s = \sup_{B_r} p(x). \quad (4.6)$$

Из оценки (4.3) и равномерной ограниченности решений $u_k(x)$ вытекает слабая компактность последовательности $\{u_k\}$ в соболевском пространстве $W_q^1(B_r)$. Поскольку $u_k(x)$ сходится к $u_f(x)$ поточечно в D , то, как хорошо известно (см., например, [21, теорема 1.32]),

$$u_k \rightarrow u_f \quad \text{слабо в } W_q^1(B_r). \quad (4.7)$$

При этом согласно (4.6) имеем

$$|\nabla u_f|^{p(x)-1} \in L_{q'}(B_r), \quad q' = \frac{q}{q-1}. \quad (4.8)$$

Будем пользоваться равенствами

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_r} |\nabla u_f|^{p(x)-2} \nabla u_f \cdot (\nabla(u_f \eta) - \nabla(u_k \eta)) dx = 0 \quad (4.9)$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_r} (|\nabla u_f|^{p(x)-2} \nabla u_f - |\nabla u_k|^{p(x)-2} \nabla u_k) \cdot \nabla \eta (u_f - u_k) dx = 0, \quad (4.10)$$

в которых $\eta \in C_0^\infty(B_r)$. Данные равенства являются простым следствием равномерной сходимости $u_k(x)$ к $u_f(x)$ на компактных подмножествах D , слабой сходимости (4.7) и соотношения (4.8). Поскольку функции $u_k(x)$ являются решениями задач Дирихле (1.16), то из интегрального тождества с пробной функцией $\psi(x) = \eta(x)u_k(x)$ вытекает, что

$$\begin{aligned} & \int_{B_r} |\nabla u_f|^{p(x)-2} \nabla u_f \cdot (\nabla(u_f \eta) - \nabla(u_k \eta)) dx \\ &= \int_{B_r} (|\nabla u_f|^{p(x)-2} \nabla u_f - |\nabla u_k|^{p(x)-2} \nabla u_k) \cdot (\nabla(u_f \eta) - \nabla(u_k \eta)) dx. \end{aligned}$$

Перепишав последнее равенство в виде

$$\begin{aligned} & \int_{B_r} (|\nabla u_f|^{p(x)-2} \nabla u_f - |\nabla u_k|^{p(x)-2} \nabla u_k) \cdot (\nabla u_f - \nabla u_k) \eta \, dx \\ &= \int_{B_r} |\nabla u_f|^{p(x)-2} \nabla u_f \cdot (\nabla(u_f \eta) - \nabla(u_k \eta)) \, dx \\ & \quad - \int_{B_r} (|\nabla u_f|^{p(x)-2} \nabla u_f - |\nabla u_k|^{p(x)-2} \nabla u_k) \cdot \nabla \eta (u_f - u_k) \, dx, \end{aligned}$$

в силу (4.9) и (4.10) имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_r} (|\nabla u_f|^{p(x)-2} \nabla u_f - |\nabla u_k|^{p(x)-2} \nabla u_k) \cdot (\nabla u_f - \nabla u_k) \eta \, dx = 0. \quad (4.11)$$

Рассмотрим выражение (4.11) на неотрицательных функциях $\eta(x)$. Из неравенства (3.19) и произвольности $\eta \in C_0^\infty(B_r)$ следует существование подпоследовательности последовательности $\{u_k\}$, за которой сохраним прежнее обозначение, такой, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (|\nabla u_f(x)|^{p(x)-2} \nabla u_f(x) - |\nabla u_k(x)|^{p(x)-2} \nabla u_k(x)) \cdot (\nabla u_f(x) - \nabla u_k(x)) = 0 \quad (4.12)$$

для почти всех $x \in B_r$.

Пусть $x \in B_r$ — точка, в которой выполнено равенство (4.12), $\xi = \nabla u_f(x)$ и ξ^* — какая-либо предельная точка последовательности $\{\nabla u_k(x)\}$. Если $|\xi^*| = \infty$, то $|\nabla u_k(x)| \rightarrow \infty$ по некоторой подпоследовательности номеров k и неравенство

$$\begin{aligned} & (|\nabla u_f(x)|^{p(x)-2} \nabla u_f(x) - |\nabla u_k(x)|^{p(x)-2} \nabla u_k(x)) \cdot (\nabla u_f(x) - \nabla u_k(x)) \\ & \geq |\nabla u_k(x)|^{p(x)} - |\nabla u_f(x)| |\nabla u_k(x)|^{p(x)-1} - |\nabla u_f(x)|^{p(x)-1} |\nabla u_k(x)| \end{aligned}$$

ведет к противоречию с (4.12). Поэтому $|\xi^*| < \infty$, а так как

$$\sum_{i=1}^n (|\xi|^{p(x)-2} \xi_i - |\xi^*|^{p(x)-2} \xi_i^*) (\xi_i - \xi_i^*) = 0,$$

то $\xi^* = \xi = \nabla u_f(x)$ и

$$\nabla u_k \rightarrow \nabla u_f \quad \text{почти всюду в } B_r. \quad (4.13)$$

Из (4.13) следует, что в интегральном тождестве

$$\int_{B_r} |\nabla u_k|^{p(x)-2} \nabla u_k \cdot \nabla \eta \, dx = 0, \quad \eta \in C_0^\infty(B_r),$$

можно перейти к пределу под знаком интеграла. Действительно, слабая компактность последовательности $\{u_k\}$ в $W_q^1(B_r)$ (см. (4.6)) влечет равностепенную интегрируемость последовательности $\{|\nabla u_k|^{p(x)-1}\}$, и по теореме Лебега

$$\int_{B_r} |\nabla u_f|^{p(x)-2} \nabla u_f \cdot \nabla \eta \, dx = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(B_r). \quad (4.14)$$

Осталось показать, что

$$\int_D |\nabla u_f|^{p(x)-2} \nabla u_f \cdot \nabla \psi \, dx = 0 \quad \forall \psi \in C_0^\infty(D). \quad (4.15)$$

Пусть $\{\mathcal{B}_{r_k}\}$ – локально конечное покрытие области D открытыми шарами $\overline{\mathcal{B}_{r_k}} \subset D$, радиусы r_k которых удовлетворяют условию (4.6), $\{\eta_k\}$ – подчиненное этому покрытию разбиение единицы и $\psi_k(x) = \psi(x) \cdot \eta_k(x)$. Поскольку на носителе $\psi(x)$ в разложении $\psi(x) = \sum \psi_k(x)$ участвует только конечное число слагаемых, то, пользуясь тождеством (4.14) на пробных функциях $\psi_k(x) \in C_0^\infty(\mathcal{B}_{r_k})$, придем к (4.15). Теорема доказана.

§ 5. Емкость и емкостный потенциал

1. Емкость. В определении 1.5 емкости компакта $K \subset B_R$ относительно шара B_R точная нижняя грань функционала в (1.17) берется по множеству функций

$$\mathcal{N}(K) = \{\varphi \in C_0^\infty(B_R) : \varphi \geq 1 \text{ на } K\}.$$

Сначала покажем, что

$$C_p(K, B_R) = \inf_{\varphi \in \mathcal{M}(K)} F(\varphi), \quad F(\varphi) = \int_{B_R} \frac{|\nabla \varphi|^{p(x)}}{p(x)} \, dx, \quad (5.1)$$

где

$$\mathcal{M}(K) = \{\varphi \in C_0^\infty(B_R) : \varphi = 1 \text{ в окрестности } K\}. \quad (5.2)$$

Действительно, так как $\mathcal{M}(K) \subset \mathcal{N}(K)$, то точную нижнюю грань в (5.1) достаточно оценить емкостью $C_p(K, B_R)$ только сверху. Пусть $\varphi \in \mathcal{N}(K)$ – такая функция, что $F(\varphi) < C_p(K, B_R) + \varepsilon$ для заданного $\varepsilon > 0$. Обозначим через $\{\eta_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, последовательность функций из $C^\infty(\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющую условиям: $0 \leq \eta_j(t) \leq 1 + j^{-1}$, $\eta_j(t) = 0$ в окрестности $(-\infty, 0]$, $\eta_j(t) = 1$ в окрестности $[1, \infty)$ и $0 \leq \eta_j(t) \leq 1$ при всех j . Поскольку $\eta_j(\varphi(x)) \in \mathcal{M}(K)$, то

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{M}(K)} F(\varphi) \leq \int_{B_R} \frac{|\eta'_j(\varphi(x))|^{p(x)} |\nabla \varphi|^{p(x)}}{p(x)} \, dx.$$

Переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$, получим

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{M}(K)} F(\varphi) \leq C_p(K, B_R) + \varepsilon,$$

что и доказывает (5.1).

Из определения емкости вытекают следующие свойства:

- i) для любых компактов $K_1 \subset K_2$ выполнено $C_p(K_1, B_R) \leq C_p(K_2, B_R)$;
- ii) емкость компакта $K \subset B_R$ не возрастает при расширении шара B_R .

2. Оценки емкости шара. В случае $p(x) \equiv p_0 = \text{const}$ свойства емкости исследованы в [40]. В частности,

$$C_{p_0}(\overline{B}_r, B_R) = \begin{cases} \omega_n \left(\frac{|n - p_0|}{p_0 - 1} \right)^{p_0 - 1} \left| r^{\frac{p_0 - n}{p_0 - 1}} - R^{\frac{p_0 - n}{p_0 - 1}} \right|^{1 - p_0}, & \text{если } p_0 \neq n, \\ \omega_n \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{1 - n}, & \text{если } p_0 = n, \end{cases} \quad (5.3)$$

где ω_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Приведем оценки емкости замкнутого шара $\overline{B}_r = \overline{B}_r^{x_0}$ относительно концентрического ему шара B_R достаточно малого радиуса $R < R_0(p)$ для показателя суммируемости $p(x)$, удовлетворяющего условию (1.12). Положим $p_0 = p(x_0)$ и, не ограничивая общности, будем считать, что x_0 совпадает с началом координат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Если $r \leq R/2$, то

$$C_p(\overline{B}_r, B_R) \leq \begin{cases} C(n, p) r^{n - p_0}, & \text{если } p_0 < n, \\ C(n, p) R^{n - p_0}, & \text{если } p_0 > n, \\ C(n, p) \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{1 - n}, & \text{если } p_0 = n. \end{cases} \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $p_0 < n$ рассмотрим срезающую функцию $\varphi \in C_0^\infty(B_{2r})$, $\varphi = 1$ в окрестности B_r , $|\nabla \varphi| \leq C r^{-1}$. По определению емкости и условию (1.12) имеем

$$C_p(\overline{B}_r, B_R) \leq C(p) \int_{B_R} |\nabla \varphi|^{p(x)} dx \leq C(p) \int_{B_{2r}} r^{-p(x)} dx \leq C(n, p) r^{n - p_0},$$

что доказывает первую оценку в (5.4).

Если $p_0 > n$, то возьмем срезающую функцию $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$, $\varphi = 1$ в окрестности $B_{R/2}$, $|\nabla \varphi| \leq C R^{-1}$. Действуя так же, как и выше, получим вторую оценку в (5.4).

В случае $p_0 = n$ определим на множестве $B_R \setminus B_r$ функцию $v(x) = (\ln(R/r))^{-1} \times \ln(R/|x|)$ и обозначим через $\eta(t)$ бесконечно дифференцируемую на $[0, 1]$ функцию, равную нулю вблизи точки $t = 0$, единице вблизи $t = 1$ и такую, что $0 \leq \eta(t) \leq 1$. Пусть $\varphi(x) = \eta(v(x))$ при $x \in B_R \setminus B_r$ и $\varphi(x) = 1$ в B_r . Ясно, что функция $\varphi(x)$ принадлежит классу допустимых функций, участвующих в определении емкости, и $|\nabla \varphi(x)| \leq C (\ln(R/r))^{-1} |x|^{-1}$ на $B_R \setminus B_r$. Поэтому

$$C_p(\overline{B}_r, B_R) \leq C(p) \int_{B_R} |\nabla \varphi|^{p(x)} dx \leq C(p) \int_{B_R \setminus B_r} \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{-p(x)} |x|^{-p(x)} dx.$$

Пусть радиус R столь мал, что $|p(x) - n| \leq 1/2$ для всех $x \in B_R$. Тогда в силу монотонности функции $\ln(R/t)$ по переменной $t \in [r, R]$ и условия (1.12) имеем

$$\begin{aligned} & \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{-p(x)} |x|^{-p(x)} \\ & \leq C(p) \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{1/2 - n} \left(\ln \frac{R}{|x|} \right)^{-1/2} |x|^{-n} \quad \forall x \in B_R \setminus B_r. \end{aligned}$$

Теперь с учетом предыдущей оценки получим

$$\begin{aligned} C_p(\overline{B}_r, B_R) &\leq C(p) \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{1/2-n} \int_{B_R \setminus B_r} \left(\ln \frac{R}{|x|} \right)^{-1/2} |x|^{-n} dx \\ &= C(n, p) \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{1-n}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Если существуют постоянные $\alpha \geq 1$ и $\beta > 0$ такие, что $R^\alpha/4 \leq r \leq R/2$ в случае $p_0 < n$ и $\exp(-\beta R^{-1}) \leq r \leq R/2$ в случае $p_0 = n$, то*

$$C_p(\overline{B}_r, B_R) \geq \begin{cases} C(n, p, \alpha) r^{n-p_0}, & \text{если } p_0 < n, \\ C(n, p) R^{n-p_0}, & \text{если } p_0 > n, \\ C(n, p, \beta) \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{1-n}, & \text{если } p_0 = n. \end{cases} \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к сферической системе координат (ρ, ω) , $|\omega| = 1$, и рассмотрим множество функций $\mathcal{M}(\overline{B}_r)$ (см. (5.2)). Ясно, что

$$\begin{aligned} C_p(\overline{B}_r, B_R) &\geq \inf_{\varphi \in \mathcal{M}(\overline{B}_r)} \int_{\partial B_1} d\omega \int_r^R \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right|^p \frac{\rho^{n-1}}{p(\rho, \omega)} d\rho \\ &\geq \int_{\partial B_1} d\omega \inf_{\varphi \in \mathcal{M}(\overline{B}_r)} \int_r^R \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right|^p \frac{\rho^{n-1}}{p(\rho, \omega)} d\rho. \end{aligned}$$

Точная нижняя грань внутреннего интеграла достигается на функции

$$v(\rho, \omega) = \int_\rho^R d^{1/(p-1)} t^{-(n-1)/(p-1)} dt,$$

где $p = p(t, \omega)$, а неотрицательная, непрерывная на единичной сфере функция $d = d(\omega)$ такова, что

$$\int_r^R d^{1/(p-1)} t^{-(n-1)/(p-1)} dt = 1. \quad (5.6)$$

Таким образом,

$$C_p(\overline{B}_r, B_R) \geq \int_{\partial B_1} d\omega \int_r^R d^{p/(p-1)} t^{-(n-1)/(p-1)} dt. \quad (5.7)$$

Если $d \leq 1$, то, полагая $s = \max_{\overline{B}_R} p(x)$, из неравенства Гёльдера, соотношения (5.6) и условия (1.12) имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_r^R d^{p/(p-1)} t^{-(n-1)/(p-1)} dt \geq \int_r^R d^{s/(p-1)} t^{-(n-1)/(p-1)} dt \\ &\geq \left(\int_r^R d^{1/(p-1)} t^{-(n-1)/(p-1)} dt \right)^s \left(\int_r^R t^{-(n-1)/(p-1)} dt \right)^{1-s} \\ &\geq C(p) \left(\int_r^R t^{-(n-1)/(p_0-1)} dt \right)^{1-p_0}. \end{aligned}$$

Если $d > 1$, то, обозначив $\sigma = \min_{\overline{B_R}} p(x)$, точно так же можно показать, что

$$I \geq \left(\int_r^R t^{-(n-1)/(p-1)} dt \right)^{1-\sigma} \geq C(p) \left(\int_r^R t^{-(n-1)/(p_0-1)} dt \right)^{1-p_0}.$$

Требуемые оценки (5.5) вытекают из (5.7) и двух последних неравенств. Предложение доказано.

Из полученных оценок следует, что если $p_0 > n$, то емкость точки $\{x_0\}$ относительно шара $B_R^{x_0}$ положительна и имеют место оценки

$$C_1(n, p) R^{n-p_0} \leq C_p(\{x_0\}, B_R^{x_0}) \leq C_2(n, p) R^{n-p_0}. \quad (5.8)$$

Если же $p_0 \leq n$, то

$$C_p(\overline{B}_{bR}, B_R) \geq C(n, p, b) R^{n-p_0} \quad \text{при } 0 < b \leq \frac{1}{2}. \quad (5.9)$$

3. Емкостный потенциал. Рассмотрим вариационную задачу (5.1).

ТЕОРЕМА 5.1. *Существует единственная функция $u \in H_0(B_R)$ такая, что $u = 1$ на K в смысле $H(B_R)$ и*

$$C_p(K, B_R) = F(u). \quad (5.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{u_j\} \in C_0^\infty(B_R)$ — минимизирующая последовательность задачи (5.1). Как и в доказательстве предложения 3.3, можно показать, что для заданного $\varepsilon > 0$ и любой функции $\psi \in C_0^\infty(B_R)$, равной нулю в окрестности компакта K и удовлетворяющей условию $F(\psi) \leq d_0$, при $j > N(n, p, d_0, \varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\left| \int_{B_R} |\nabla u_j|^{p(x)-2} \nabla u_j \cdot \nabla \psi \, dx \right| < \varepsilon.$$

Поэтому (см. доказательство теоремы 3.1) последовательность $\{u_j\}$ фундаментальна в $H_0(B_R)$, а предельная функция $u \in H_0(B_R)$ удовлетворяет равенству (5.10). В силу строгой выпуклости функционала решение единственно. Поскольку минимизирующая последовательность состоит из функций множества (5.2), то по предложению 2.3 $u = 1$ на K в смысле $H(B_R)$. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Функция, на которой реализуется нижняя грань функционала (1.17), называется *емкостным потенциалом K (относительно шара B_R)*.

Для того чтобы привести свойства емкостного потенциала, нам потребуется еще одно понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Функция $u \in H(D)$ называется *суперрешением уравнения (1.1) в области D* , если

$$\int_D |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx \geq 0 \quad (5.11)$$

для всех неотрицательных почти всюду в D функций $\psi \in H_0(D)$.

ТЕОРЕМА 5.2. *Емкостный потенциал $u(x)$ компакта $K \subset B_R$ является H -решением уравнения (1.1) в области $B_R \setminus K$ и имеет граничные значения $u = 1$ на ∂K и $u = 0$ на ∂B_R в смысле $H(B_R)$. Более того, $u(x)$ – суперрешение уравнения (1.1) в B_R .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку емкостный потенциал $u(x)$ является минимизантом задачи (1.17), то $(F(u + t\nabla\varphi) - F(u))t^{-1} \geq 0$ для любого $t > 0$ и произвольной неотрицательной на K функции $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$. Повторяя рассуждения теоремы 3.2, приходим к неравенству

$$\int_{B_R} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \geq 0. \quad (5.12)$$

Пусть $\psi \in H_0(D)$ и $\psi(x) \geq 0$ почти всюду в B_R . Поскольку $\psi(x) = \psi^+(x) = -(-\psi^-(x))$, то из определения класса $H_0(D)$ и свойств а) и б) леммы 2.5 следует существование последовательности неотрицательных в B_R функций $\psi_j \in C_0^\infty(B_R)$, сходящейся к $\psi(x)$ в $W_0(B_R)$. Полагая в неравенстве (5.12) $\varphi = \psi_j$, после перехода к пределу приходим к соотношению (5.11), из которого следует, что функция $u(x)$ является суперрешением уравнения (1.1) в смысле данного выше определения. Далее, так как любую функцию $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$ с компактным носителем в $B_R \setminus K$ можно подставить в (5.12), мы выводим, что $u(x)$ является решением уравнения (1.1) в $B_R \setminus K$. Принятие граничных значений $u = 1$ на ∂K и $u = 0$ на ∂B_R , понимаемых в смысле $H(B_R)$, вытекает из того, что $u \in H_0(B_R)$ и $u = 1$ на K в смысле $H(B_R)$. Теорема доказана.

Емкостный потенциал $u(x)$ компакта $K \subset B_R$ удовлетворяет неравенству (5.12) для любой неотрицательной на K функции $\psi \in C_0^\infty(B_R)$. По теореме Шварца [37] существует неотрицательная мера μ на K такая, что

$$\int_{B_R} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{B_R} \psi \, d\mu \quad \forall \psi \in C_0^\infty(B_R). \quad (5.13)$$

Поскольку $u = 1$ на K в смысле $H(B_R)$, то носитель меры μ находится на ∂K . Найденную меру по аналогии со случаем, когда $p = \text{const}$, назовем *емкостным распределением K* .

Из (5.13) вытекает, что емкостное распределение удовлетворяет условию (1.10). Рассмотрим равенство (5.13) на последовательности $\{\psi_j\}$, сходящейся в $W_0(B_R)$ к емкостному потенциалу и состоящей из функций $\psi_j \in C_0^\infty(B_R)$, равных единице в окрестности K . Поскольку носитель меры находится на K , то выражение в правой части равно $\mu(K)$ для любого j , в то время как левая часть стремится к интегралу, эквивалентному емкости:

$$p_1 C_p(K, B_R) \leq \int_{B_R} |\nabla u|^{p(x)} \, dx \leq p_2 C_p(K, B_R), \quad (5.14)$$

где p_1, p_2 – постоянные из условия (1.2). Таким образом, мы доказали, что

$$p_1 C_p(K, B_R) \leq \mu(K) \leq p_2 C_p(K, B_R). \quad (5.15)$$

Прежде чем переходить к доказательству следующего утверждения, отметим, что если мера μ является емкостным распределением компакта $K \subset B_R$, то ее сужение на борелевское множество $E \subset B_R$ в B_R удовлетворяет условию (1.10), которое в силу теоремы 3.3 влечет однозначную разрешимость задачи (1.9) в шаре B_R .

ЛЕММА 5.1. Если μ – емкостное распределение компакта $K \subset B_R$, то для любого компакта $E \subset B_R$ выполнено неравенство

$$\mu(E) \leq C(p)C_p(K \cap E, B_R). \quad (5.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть мера ν является сужением емкостного распределения μ на компакт F . Обозначим через u_μ емкостный потенциал K , а через u_ν решение задачи Дирихле

$$Lu_\nu = -d\nu \quad \text{в } B_R, \quad u_\nu \in H_0(B_R),$$

однозначная разрешимость которой вытекает из сделанного выше замечания о выполнении свойства (1.10) для меры ν . Сначала покажем, что $u_\nu(x)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leq u_\nu(x) \leq u_\mu(x) \quad \text{почти всюду в } B_R. \quad (5.17)$$

Покажем оценку сверху. Так как функция $v(x) = u_\mu(x) - u_\nu(x)$ принадлежит классу $H_0(B_R)$, то по свойствам а) и б) леммы 2.5 существует последовательность неотрицательных в B_R функций $v_j \in C_0^\infty(B_R)$, сходящаяся в $W_0(B_R)$ к $v^-(x)$. Выбирая в интегральных тождествах для $u_\nu(x)$ и $u_\mu(x)$ пробную функцию $v_j(x)$, получим

$$\int_{B_R} (|\nabla u_\mu|^{p(x)-2} \nabla u_\mu - |\nabla u_\nu|^{p(x)-2} \nabla u_\nu) \cdot \nabla v_j \, dx \leq 0.$$

После перехода к пределу придем к неравенству

$$\int_G (|\nabla u_\mu|^{p(x)-2} \nabla u_\mu - |\nabla u_\nu|^{p(x)-2} \nabla u_\nu) \cdot \nabla (u_\mu - u_\nu) \, dx \leq 0,$$

где $G = \{x: u_\mu(x) < u_\nu(x)\}$, из которого вытекает требуемая оценка сверху. Аналогично выводится и оценка снизу.

Переходя к доказательству (5.16), возьмем в интегральном тождестве для $u_\nu(x)$ пробную функцию $\psi \in C_0^\infty(B_R)$, равную единице в окрестности компакта $E \subset B_R$. После применения неравенства Юнга получим

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \int_{B_R} \psi \, d\mu = \int_{B_R} |\nabla u_\nu|^{p(x)-2} \nabla u_\nu \cdot \nabla \psi \, dx \\ &\leq \int_{B_R} |\nabla u_\nu|^{p(x)} \, dx + C(p) \int_{B_R} \frac{|\nabla \psi|^{p(x)}}{p(x)} \, dx. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Оценим сверху первый интеграл в правой части (5.18). Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \max(\psi(x), u_\nu(x))$, принадлежащую, как нетрудно видеть, классу $H_0(B_R)$. Ясно, что $\psi - \varphi \in H_0(B_R \setminus E)$, $\varphi - u_\nu \in H_0(B_R)$ и $\varphi - u_\nu \geq 0$ почти всюду в B_R . Поскольку $u_\nu(x)$ – суперрешение в B_R и решение в $B_R \setminus E$, то

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |\nabla u_\nu|^{p(x)-2} \nabla u_\nu \cdot \nabla (\psi - u_\nu) \, dx &= \int_{B_R} |\nabla u_\nu|^{p(x)-2} \nabla u_\nu \cdot \nabla (\varphi - u_\nu) \, dx \\ &+ \int_{B_R \setminus E} |\nabla u_\nu|^{p(x)-2} \nabla u_\nu \cdot \nabla (\psi - \varphi) \, dx \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда получим, что

$$\int_{B_R} |\nabla u_\nu|^{p(x)} dx \leq \int_{B_R} |\nabla u_\nu|^{p(x)-1} |\nabla \psi| dx,$$

и по неравенству Юнга имеем

$$\int_{B_R} |\nabla u_\nu|^{p(x)} dx \leq C(p) \int_{B_R} \frac{|\nabla \psi|^{p(x)}}{p(x)} dx.$$

Поэтому в силу (5.18)

$$\mu(E) \leq C(p) \int_{B_R} \frac{|\nabla \psi|^{p(x)}}{p(x)} dx.$$

Минимизируя интеграл, стоящий в правой части этого неравенства, придем к требуемому неравенству (5.16). Лемма доказана.

§ 6. Неравенство Харнака слабого типа

1. Интегральные оценки решений. Всюду далее предполагается, что показатель суммируемости $p(x)$, удовлетворяющий в области D условиям (1.2) и (1.12), продолжен на все $\mathbb{R}^n$ с сохранением своих свойств. Рассмотрим неотрицательное решение задачи Дирихле

$$Lu = 0 \text{ в } D, \quad u \in W(D), \quad (u - f) \in W_0(D) \quad (6.1)$$

с граничной функцией $f \in C^\infty(\overline{D})$, $f(x) \geq 0$ при $x \in \overline{D}$. Нашей целью будет доказательство интегральных оценок $u(x)$ в шарах B_R достаточно малого радиуса $R < 1/16$ с центром в граничной точке $x_0 \in \partial D$. Ниже

$$s = \sup_{B_{4R}} p, \quad \bar{s} = \inf_{B_{4R}} p, \quad p_0 = p(x_0), \quad (6.2)$$

$$m = \inf_{\partial D \cap B_{4R}} f, \quad M = \max_{\partial D} f, \quad (6.3)$$

$$u_m(x) = \begin{cases} \min(u(x), m), & x \in D \cap B_{4R}, \\ m, & x \in B_{4R} \setminus D, \end{cases} \quad v_m(x) = u_m(x) + R, \quad (6.4)$$

а $\eta(x)$ – функция из $C_0^\infty(B_{4R})$, удовлетворяющая неравенствам $0 \leq \eta(x) \leq 1$. Отметим, что по принципу максимума точная верхняя грань решения $u(x)$ не превосходит постоянной M .

Пользуясь обозначением (4.1), будем применять теорему вложения Соболева в виде

$$\left(\int_{B_R} |\varphi|^{kq} dx \right)^{1/k} \leq CR^q \int_{B_R} |\nabla \varphi|^q dx, \quad (6.5)$$

$$q \geq 1, \quad k = \frac{n}{n-1}, \quad \varphi \in C_0^\infty(B_R).$$

Предварительно приведем одно вспомогательное утверждение, в котором $\sigma = \inf_{B_r} p(x)$, а $B_r \subset B_{4R}$ – произвольный шар радиуса r с центром, совпадающим с центром B_{4R} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Для любых $r \leq 4R$ и $\gamma \leq \gamma_0 < 0$ справедливо неравенство

$$\int_{B_r} v_m^{\gamma-1} |\nabla v_m|^\sigma \eta^s dx \leq C(p, \gamma_0) \int_{B_{4R}} (v_m^{\gamma-1} + v_m^{\gamma+p(x)-1} |\nabla \eta|^{p(x)}) dx. \quad (6.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбирая в интегральном тождестве (1.4) пробную функцию

$$\psi(x) = [v_m^\gamma(x) - (m + R)^\gamma] \eta^s(x),$$

которая, как нетрудно видеть, принадлежит классу $W_0(D)$, придем к оценке

$$|\gamma_0| \int_{B_{4R}} v_m^{\gamma-1} |\nabla v_m|^{p(x)} \eta^s dx \leq s \int_{B_{4R}} v_m^\gamma |\nabla v_m|^{p(x)-1} |\nabla \eta| \eta^{s-1} dx.$$

Отсюда, по неравенству Юнга, примененному к подынтегральному выражению в правой части, имеем

$$\int_{B_r} v_m^{\gamma-1} |\nabla v_m|^{p(x)} \eta^s dx \leq C(p, \gamma_0) \int_{B_{4R}} v_m^{\gamma+p(x)-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx \quad (6.7)$$

и неравенство (6.6) следует из оценки $v_m^{\gamma-1} |\nabla v_m|^\sigma \eta^s \leq v_m^{\gamma-1} |\nabla v_m|^{p(x)} \eta^s + v_m^{\gamma-1} \eta^s$, выполненной почти всюду в B_r . Предложение доказано.

Введем для неотрицательных функций $w(x)$ и постоянных $q \neq 0$ функционал

$$\Phi(q, B_r, w) = \left(\int_{B_r} w^q dx \right)^{1/q}. \quad (6.8)$$

ЛЕММА 6.1. Существуют положительные постоянные q_0 и C , зависящие только от n, p и M , такие, что

$$\Phi(q_0, B_{3R}, v_m) \leq C \Phi(-q_0, B_{3R}, v_m). \quad (6.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_{2r} \subset B_{4R}$ и $\eta \in C_0^\infty(B_{2r})$ – срезающая функция: $\eta = 1$ в B_r , $|\nabla \eta| \leq 2/r$. Выбирая в (6.6) $\gamma = 1 - \sigma$, будем иметь

$$\int_{B_r} |\nabla \ln v_m|^\sigma dx \leq C(n, p) \int_{B_{2r}} (v_m^{-\sigma} + v_m^{p(x)-\sigma} r^{-p(x)}) dx.$$

Поскольку $v_m \geq R$ в B_{4R} , то $v_m^{-\sigma} \leq r^{-\sigma}$, а в силу логарифмического условия (1.12) имеем $v_m^{p-\sigma} \leq C(p, M)$ и $r^{-p(x)} \leq C(p) r^{-\sigma}$ при $x \in B_{2r}$. С учетом перечисленных соотношений и неравенства Гёльдера получим

$$\int_{B_r} |\nabla \ln v_m| dx \leq C(n, p, M) r^{n-1}.$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться леммой Джона–Ниренберга [38]. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.2. Для любого $q < 0$ справедливо неравенство

$$\Phi(q, B_{3R}, v_m) \leq C(n, p, q, M) \inf_{B_R} v_m. \quad (6.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в неравенстве (6.6) $B_r = B_{2R}$, $\sigma = \bar{s}$ и $\gamma = \beta - \bar{s} + 1$, где $\beta < 0$, получим

$$\int_{B_{4R}} v_m^{\beta - \bar{s}} |\nabla v_m|^{\bar{s}} \eta^s dx \leq C(p) \int_{B_{4R}} (v_m^{\beta - \bar{s}} + v_m^{\beta - \bar{s} + p(x)} |\nabla \eta|^{p(x)}) dx.$$

Перепишем последнюю оценку в виде

$$\begin{aligned} \int_{B_{4R}} |\nabla(v_m^{\beta/\bar{s}} \eta)|^{\bar{s}} dx &\leq C(p)(1 + |\beta|)^s \left(\int_{B_{4R}} v_m^{\beta} |\nabla \eta|^{\bar{s}} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{B_{4R}} (v_m^{\beta - \bar{s}} + v_m^{\beta - \bar{s} + p(x)} |\nabla \eta|^{p(x)}) dx \right). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Пусть $R \leq \rho < r \leq 3R$, а срезающая функция η такова, что $\eta = 1$ в B_ρ и $|\nabla \eta| \leq Cr(R(r - \rho))^{-1}$. Поскольку $v_m^{p - \bar{s}} \leq C(p, M)$, $v_m^{-\bar{s}} \leq R^{-\bar{s}}$ и согласно условию (1.12)

$$|\nabla \eta|^p \leq C(p) R^{-\bar{s}} \left(\frac{r}{r - \rho} \right)^s, \quad x \in B_{4R},$$

то, учитывая эти соотношения, оценим интеграл в левой части (6.11) по неравенству теоремы вложения (6.5). В результате придем к оценке

$$\left(\int_{B_\rho} v_m^{k\beta} dx \right)^{1/k} \leq C(n, p, M)(1 + |\beta|)^s \left(\frac{r}{r - \rho} \right)^s \int_{B_r} v_m^{\beta} dx,$$

из которой следует, что

$$\Phi(\beta, B_r, v_m) \leq C^{1/|\beta|} (1 + |\beta|)^{s/|\beta|} \left(\frac{r}{r - \rho} \right)^{s/|\beta|} \Phi(k\beta, B_\rho, v_m), \quad (6.12)$$

где $C = C(n, p, M)$. Проитерируем это соотношение. Для $j = 0, 1, \dots$ обозначим $r_j = R + 2^{-j+1}R$, $\chi_j = qk^j$ и выберем в (6.12) $r = r_j$, $\rho = r_{j+1}$, $\beta = -\chi_j$. Полагая $\Psi_j = \Phi(-\chi_j, B_{r_j}, v_m)$, имеем

$$\Psi_j \leq C^{1/\chi_j} [(1 + \chi_j)2^j]^{s/\chi_j} \Psi_{j+1}.$$

Теперь по индукции $\Psi_0 \leq C(n, p, q, M) \lim_{j \rightarrow \infty} \Psi_j$, и поскольку $\Psi_j \rightarrow \inf_{B_R} v_m$ при $j \rightarrow \infty$, приходим к требуемому неравенству (6.10). Лемма доказана.

ЛЕММА 6.3. Для любых $0 < q_1 < q_2 < n(p_0 - 1)/(n - 1)$ выполнено неравенство

$$\Phi(q_2, B_{5R/2}, v_m) \leq C(n, p, q_1, q_2, M) \Phi(q_1, B_{3R}, v_m). \quad (6.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем для $5R/2 \leq \rho < r \leq 3R$ срезающую функцию $\eta(x)$ леммы 6.2 и воспользуемся неравенством (6.6), полагая в нем $B_r = B_{4R}$, $\sigma = \bar{s}$ и $\gamma = 1 - p_0 + \beta$, где $0 < \beta \leq q_2/k$, $k = n/(n-1)$. Так как $v_m^{-p_0} \geq v_m^{-\bar{s}}$ и в силу (1.12) $v_m^{-p_0} \leq C(p)v_m^{-\bar{s}}$, то имеющееся соотношение можно переписать в виде

$$\int_{B_{4R}} v_m^{\beta-\bar{s}} |\nabla v_m|^{\bar{s}} \eta^s dx \leq C(p) \int_{B_{4R}} (v_m^{\beta-\bar{s}} + v_m^{\beta-\bar{s}+p(x)} |\nabla \eta|^{p(x)}) dx.$$

Повторяя рассуждения леммы 6.2, как и при выводе (6.12), придем к неравенству

$$\Phi(k\beta, B_\rho, v_m) \leq C(n, p, \beta, M) \left(\frac{r}{r-\rho} \right)^{s/\beta} \Phi(\beta, B_r, v_m). \quad (6.14)$$

Для $j = 0, 1, \dots$ положим $r_j = 3R - 2^{-j-1}R$, $\chi_j = q_2 k^{-j}$. Пусть $\chi_{j_0+1} \leq q_1 < \chi_{j_0}$ и $\Psi_j = \Phi(\chi_j, B_{r_j}, v_m)$. Выбирая в (6.14) $r = r_{j+1}$, $\rho = r_j$ и $\beta = \chi_{j+1}$, получим

$$\Psi_j \leq C(n, p, q_2, j) \Psi_{j+1}.$$

Итерируя данное соотношение для номеров $j = 0, 1, \dots, j_0$, будем иметь

$$\Psi_0 = \Phi(q_2, B_{5R/2}, v_m) \leq C(n, p, q_1, q_2, M) \Phi(\tilde{q}, B_{3R}, v_m),$$

где $\tilde{q} = \chi_{j_0+1} \leq q_1$. Если теперь $\tilde{q} = q_1$, то сразу приходим к (6.13), а если $\tilde{q} < q_1$, то (6.13) вытекает из неравенства Гёльдера. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6.1 (неравенство Харнака слабого типа). Для любого $0 < q < n(p_0 - 1)/(n - 1)$ имеет место неравенство

$$\left(\int_{B_{5R/2}} v_m^q dx \right)^{1/q} \leq C(n, p, q, M) \inf_{B_R} v_m. \quad (6.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть q_0 – постоянная леммы 6.1. Выбирая в неравенстве (6.10) $q = -q_0$ и пользуясь (6.9), получим

$$\Phi(q_0, B_{3R}, v_m) \leq C(n, p, q, M) \inf_{B_R} v_m. \quad (6.16)$$

Если $q \leq q_0$, то (6.15) следует из (6.16) и неравенства Гёльдера, а в случае $q > q_0$ нужно дополнительно воспользоваться оценкой (6.13) с постоянными $q_1 = q_0$, $q_2 = q$. Теорема доказана.

2. Неравенство Харнака слабого типа для суперрешений. Неравенство Харнака слабого типа имеет место и для неотрицательных ограниченных суперрешений уравнения (1.1) в области D .

ЛЕММА 6.4. Если $u(x)$ – неотрицательное, ограниченное суперрешение уравнения (1.1) в области D , то в произвольном шаре $B_R = B_R^{x_0}$ таком, что

$B_{4R} \subset D$, для любого $0 < q < n(p_0 - 1)/(n - 1)$, где $p_0 = p(x_0)$, справедливо неравенство

$$\left(\int_{B_{2R}} u^q dx \right)^{1/q} \leq C(n, p, q, M) \left(\inf_{B_R} u + R \right), \quad (6.17)$$

в котором $M = \sup_D u(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $v(x) = u(x) + R$ и заметим, что для любых $r \leq 4R$ и $\gamma \leq \gamma_0 < 0$ выполнено неравенство

$$\int_{B_r} v^{\gamma-1} |\nabla v|^\sigma \eta^s dx \leq C(p, \gamma_0) \int_{B_{4R}} (v^{\gamma-1} + v^{\gamma+p(x)-1} |\nabla \eta|^{p(x)}) dx, \quad (6.18)$$

где $\eta \in C_0^\infty(B_{4R})$, $0 \leq \eta \leq 1$. Для вывода (6.18) необходимо в интегральном неравенстве (5.11) выбрать пробную функцию $\psi(x) = v^\gamma(x) \eta^s(x)$ и повторить рассуждения, использованные при доказательстве оценки (6.6). Теперь таким же способом, каким оценка (6.15) была получена из (6.6), установим оценку

$$\left(\int_{B_{5R/2}} v^q dx \right)^{1/q} \leq C(n, p, q, M) \inf_{B_R} v,$$

влекущую (6.17). Лемма доказана.

Важным следствием неравенства (6.17) является возможность представления ограниченного суперрешения полунепрерывной снизу функцией.

ЛЕММА 6.5. Если $u \in W(D)$ является ограниченным суперрешением уравнения (1.1), то существует полунепрерывная снизу функция $\hat{u}(x)$ такая, что $u(x) = \hat{u}(x)$ почти всюду в D и для любой точки $x \in D$

$$\hat{u}(x) = \sup \lim_{y \rightarrow x} v(y), \quad (6.19)$$

где точная верхняя грань берется по всем функциям v , совпадающим с $\hat{u}$ почти всюду в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя, если нужно, к функции $\sup_D u + u(x)$, можно считать, что рассматриваемое суперрешение неотрицательно в D . Покажем в произвольной точке $x \in D$ равенство

$$\sup \lim_{y \rightarrow x} u(y) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r^x} u(x) dx. \quad (6.20)$$

Для этого зафиксируем $x \in D$ и рассмотрим шар B_r^x достаточно малого радиуса, удовлетворяющий условию $B_{4r}^x \subset D$. Пусть $M = \sup_D u$ и $m_r = \inf_{B_r^x} u$. Из неравенства Харнака слабого типа (6.17) для $0 < q < 1$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{B_r^x} (u - m_r) dx \leq (M - m_r)^{(q-1)/q} \left(\int_{B_r^x} (u - m_r)^q dx \right)^{1/q} \\ &\leq C(n, p, q, M)(r + m_{r/2} - m_r), \end{aligned}$$

откуда и вытекает (6.20). По теореме Лебега правая часть в (6.20) совпадает с $u(x)$ почти всюду в D . Поэтому после изменения $u(x)$ на множестве меры нуль придем к функции $\hat{u}(x)$, удовлетворяющей равенству (6.19). Полунепрерывность снизу $\hat{u}(x)$ является следствием (6.19). Лемма доказана.

3. Оценка типа Мозера. Далее B_R – шар с центром в замыкании области D . Нашей целью является доказательство мозеровской оценки для ограниченного и неотрицательного в $D \cap B_{4R}$ решения $u(x)$ уравнения (1.1). Если $B_{4R} \cap \partial D \neq \emptyset$, то предполагается, что решение имеет нулевой след на $B_{4R} \cap D$, или, более точно, принадлежит классу $W_0(D \cap B_{4R}, \partial D \cap B_{4R})$. В этом случае будем считать $u(x) = 0$ при $x \in B_{4R} \setminus D$.

В следующей лемме используются обозначения из (6.2) и полагается $v(x) = u(x) + R$, $M = \sup_{D \cap B_{4R}} u$.

ЛЕММА 6.6. *Справедливо неравенство*

$$\sup_{D \cap B_R} u \leq C(n, p, M) \left(\int_{B_{2R}} u \, dx + R \right). \quad (6.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбирая в интегральном тождестве (1.4) пробную функцию

$$\psi(x) = (v^\beta(x) - R^\beta) \eta^s(x), \quad \beta \geq 1, \quad \eta \in C_0^\infty(B_{4R}), \quad 0 \leq \eta(x) \leq 1,$$

получим

$$\beta \int_{B_{4R}} |\nabla v|^{p(x)} v^{\beta-1} \eta^s \, dx \leq s \int_{B_{4R}} |\nabla v|^{p(x)-1} v^\beta |\nabla \eta| \, dx.$$

После применения неравенства Юнга с соответствующим ε найдем

$$\int_{B_{4R}} |\nabla v|^{p(x)} v^{\beta-1} \eta^s \, dx \leq C(p) \int_{B_{4R}} v^{\beta+p(x)-1} |\nabla \eta|^{p(x)} \, dx.$$

Далее, $v^{\beta+p(x)-1} \leq C(p, M) v^{\beta+\bar{s}-1}$, и, пользуясь в B_{4R} неравенством

$$|\nabla v|^{\bar{s}} v^{\beta-1} \eta^s \leq |\nabla v|^{p(x)} v^{\beta-1} \eta^s + v^{\beta-1} \eta^s,$$

получим

$$\int_{B_{4R}} |\nabla v|^{\bar{s}} v^{\beta-1} \eta^s \, dx \leq C(p, M) \left(\int_{B_{4R}} v^{\beta-1} \eta^s \, dx + \int_{B_{4R}} v^{\beta+\bar{s}-1} |\nabla \eta|^p(x) \, dx \right).$$

Применяя теорему вложения Соболева (6.5), придем к оценке

$$\begin{aligned} & \left(\int_{B_{4R}} (v^{\beta+\bar{s}-1} \eta^s)^k \, dx \right)^{1/k} \leq C(n, p, M) (\beta + \bar{s} - 1)^s R^{\bar{s}} \\ & \times \left(\int_{B_{4R}} v^{\beta-1} \eta^s \, dx + \int_{B_{4R}} v^{\beta+\bar{s}-1} |\nabla \eta|^{p(x)} \, dx \right). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Пусть $R \leq \rho < r \leq 3R$, $\eta \in C_0^\infty(B_r)$, $\eta = 1$ в B_ρ и $|\nabla \eta| \leq Cr(R(r - \rho))^{-1}$. Пользуясь условием (1.12) и неравенством $v^{\beta-1} \leq R^{-\bar{s}} v^{\beta+\bar{s}-1}$, перепишем (6.22) в виде

$$\left(\int_{B_\rho} v^{k(\beta+\bar{s}-1)} \, dx \right)^{1/k} \leq C(n, p, M) (\beta + \bar{s} - 1)^s \left(\frac{r}{r - \rho} \right)^s \int_{B_r} v^{\beta+\bar{s}-1} \, dx. \quad (6.23)$$

Проитерируем это неравенство. Для $j = 0, 1, \dots$ обозначим $r_j = \rho + 2^{-j}(r - \rho)$, $\chi_j = k^j \bar{s}$ и выберем в (6.23) $r = r_j$, $\rho = r_{j+1}$, $\beta = \chi_j - \bar{s} + 1$. Полагая

$$\Phi_j = \Phi(\chi_j, B_{r_j}, v),$$

где выражение в правой части определено в (6.8), получим соотношение

$$\Phi_{j+1} \leq C^{1/\chi_j} (2^j \chi_j)^{s/\chi_j} \left(\frac{r}{r - \rho} \right)^{s/\chi_j} \Phi_j,$$

в котором $C = C(n, p, M)$. Итерируя это неравенство, найдем, что

$$\sup_{B_\rho} v \leq C(n, p, M) \left(\frac{r}{r - \rho} \right)^a \Phi(\bar{s}, B_r, v), \quad a = a(p) > 0.$$

Отсюда требуемая оценка (6.21) вытекает в силу рассуждений, приведенных в доказательстве леммы 3.2 работы [39]. Лемма доказана.

§ 7. Достаточное условие регулярности граничной точки

1. Вспомогательные интегральные оценки. Приведем интегральные оценки для неотрицательного решения задачи (6.1) с граничной функцией $f \in C^\infty(\bar{D})$, $f(x) \geq 0$ при $x \in \bar{D}$. Предполагается, что показатель суммируемости $p(x)$ продолжен в $\mathbb{R}^n$ с сохранением условий (1.2) и (1.12). Ниже используются обозначения (6.2)–(6.4), а $B_R^{x_0}$ – шар с центром в граничной точке $x_0 \in \partial D$ достаточно малого радиуса $R < 1/16$. Следующие вспомогательные утверждения являются следствиями теоремы 6.1.

ЛЕММА 7.1. *Если $0 < q < p_0 - 1$, то*

$$\int_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{q-p_0} |\nabla v_m|^{p(x)} dx \leq C(n, p, q, M) R^{-p_0} \left(\inf_{B_R^{x_0}} v_m \right)^q. \quad (7.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем срезающую функцию $\eta \in C_0^\infty(B_{5R/2}^{x_0})$, $\eta = 1$ в B_{2R} , $|\nabla \eta| \leq CR^{-1}$, и выберем в неравенстве (6.7) $\gamma = q + 1 - p_0$, $r = 2R$. Пользуясь условием (1.12) и ограниченностью $u(x)$, в силу чего $R^{-p(x)} \leq C(p)R^{-p_0}$ и $v_m^{p(x)-p_0} \leq C(M, p)$, получим

$$\int_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{q-p_0} |\nabla v_m|^p dx \leq C(n, p, q, M) R^{-p_0} \int_{B_{5R/2}^{x_0}} v_m^q dx.$$

Теперь неравенство (7.1) вытекает из (6.15). Лемма доказана.

ЛЕММА 7.2. *Справедливо неравенство*

$$\int_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla v_m|^{p(x)-1} dx \leq C(n, p, M) R^{1-p_0} \left(\inf_{B_R^{x_0}} v_m \right)^{p_0-1}. \quad (7.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau = \min(p_0, n/(n-1))$, $t = (1 + \tau)/2$ и постоянная $\lambda = \lambda(x)$, где $x \in B_{2R}^{x_0}$, такова, что

$$\lambda^{-p(x)} = R^{1-p_0} \left(\int_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{t(p_0-1)} dx \right)^{(1-t)/t}.$$

По неравенству Юнга имеем

$$\begin{aligned} \int_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla v_m|^{p(x)-1} dx &\leq \int_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{-t} |\nabla v_m|^{p(x)} \lambda^{p(x)/(p(x)-1)} dx \\ &+ R^{1-p_0} \left(\int_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{t(p_0-1)} dx \right)^{(1-t)/t} \int_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{t(p(x)-1)} dx. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Пользуясь условием (1.12) и неравенством $R \leq v_m(x) \leq M + R$, выполненным в $B_{4R}^{x_0}$, получим

$$\lambda^{p(x)/(p(x)-1)} \leq C(n, p, M) R \left(\int_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{t(p_0-1)} dx \right)^{(t-1)/t(p_0-1)}, \quad (7.4)$$

$$\int_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{t(p(x)-1)} dx \leq C(n, p, M) \int_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{t(p_0-1)} dx. \quad (7.5)$$

Учитывая в (7.3) оценки (7.4) и (7.5), имеем

$$\begin{aligned} \int_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla v_m|^{p(x)-1} dx &\leq C(n, p, M) R \left(\int_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{-t} |\nabla v_m|^{p(x)} dx \right) \\ &\times \left(\int_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{t(p_0-1)} dx \right)^{\frac{t-1}{t(p_0-1)}} \\ &+ C(n, p, M) R^{1-p_0} \left(\int_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{t(p_0-1)} dx \right)^{1/t}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Для доказательства (7.2) осталось, используя выбор t , оценить первый интеграл в (7.6) по неравенству (7.1), а остальные – по неравенству (6.15). Лемма доказана.

В следующей лемме полагается

$$\gamma(R) = C_p(\overline{B}_R^{x_0} \setminus D, B_{2R}^{x_0}) R^{p_0-n},$$

а функция $u_m(x)$ имеет тот же смысл, что и в (6.4).

ЛЕММА 7.3. *Справедливо неравенство*

$$(R + m)(\gamma(R))^{1/(p_0-1)} \leq C_0(n, p, M) \left(\inf_{B_R^{x_0}} u_m + R \right). \quad (7.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \in C_0^\infty(B_{2R}^{x_0})$, $\eta = 1$ в $B_R^{x_0}$ и $|\nabla \eta| \leq CR^{-1}$. Выбирая в интегральном тождестве (1.4) пробную функцию $\psi(x) = (m + R - v_m(x))\eta^s(x)$, получим

$$\begin{aligned} \int_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla v_m|^{p(x)} \eta^s dx &\leq C(p)R^{-1} \int_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla v_m|^{p(x)-1} (m + R - v_m) dx \\ &\leq C(p)R^{-1}(m + R) \int_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla v_m|^{p(x)-1} dx. \end{aligned}$$

Полагая $w_m(x) = v_m(x)/(m + R)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{B_{2R}^{x_0}} (m + R)^{p(x)} |\nabla(w_m \eta)|^{p(x)} dx \\ \leq C(p)(m + R) \left(R^{-1} \int_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla v_m|^{p(x)-1} dx + \int_{B_{2R}^{x_0}} v_m^{p(x)-1} R^{-p(x)} dx \right). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Согласно логарифмическому условию (1.12) и ограниченности $u(x)$ в шаре $B_{2R}^{x_0}$ выполнены неравенства

$$(m + R)^{p(x)} \geq C(p)(m + R)^{p_0}, \quad R^{-p(x)} \leq C(p)R^{-p_0}, \quad v_m^{p(x)-1} \leq C(p, M)v_m^{p_0-1}.$$

Применяя еще оценки (6.15) и (7.2) к интегралам в правой части (7.8), найдем, что

$$(m + R)^{p_0-1} \int_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla(w_m \eta)|^{p(x)} dx \leq C(n, p, M)R^{n-p_0} \left(\inf_{B_R^{x_0}} u_m + R \right)^{p_0-1}.$$

Поскольку $w_m(x)\eta(x) = 1$ при $x \in \overline{B_R^{x_0}} \setminus D$ и $w_m \eta \in W_0(B_{2R}^{x_0})$, то, пользуясь определением емкости, придем к требуемому соотношению (7.7). Лемма доказана.

В случае $p_0 > n$ нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 7.4. Если функция $u \in W(D)$, удовлетворяющая условию $|u(x)| \leq 1$ в D , является решением задачи (6.1) с граничной функцией $f \in C^\infty(\overline{D})$, равной нулю для $x \in \partial D \cap B_\rho^{x_0}$, то при $\rho < \rho_0(n, p)$ и $r \leq \rho/4$ имеет место неравенство

$$\sup_{D \cap B_r^{x_0}} |u(x)| \leq C(n, p) \left(\frac{r}{\rho} \right)^{1-n/p_0}. \quad (7.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $p_0 > n$, то $p(x) > n$ в $\overline{B_\rho^{x_0}}$ для достаточно малых $\rho < \rho_0(p, n)$. Положим

$$l = \sup_{B_\rho^{x_0}} p(x), \quad \sigma = \inf_{B_r^{x_0}} p(x), \quad D_t^{x_0} = D \cap B_t^{x_0}, \quad M(t) = \sup_{D_t^{x_0}} |u(x)|.$$

По теореме вложения Соболева, неравенству Юнга и логарифмическому условию (1.12) имеем

$$\begin{aligned} M(r) &\leq C(n, p) r^{1-n/\sigma} \left(\int_{D_r^{x_0}} |\nabla u|^\sigma dx \right)^{1/\sigma} \\ &\leq C(n, p) \left(r^{1-n/p_0} \left(\int_{D_{\rho/4}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} dx \right)^{1/\sigma} + r \right). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Для оценки интеграла в правой части (7.10) возьмем срезающую функцию $\eta \in C_0^\infty(B_\rho^{x_0})$, $\eta = 1$ в $B_{\rho/4}^{x_0}$, $|\nabla \eta| \leq C\rho^{-1}$, и выберем в интегральном тождестве (1.4) пробную функцию $\psi(x) = u(x)\eta^l(x)$. После несложного подсчета, использующего условие (1.12) и неравенство $|u(x)| \leq 1$, получим оценку

$$\left(\int_{D_{\rho/4}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} dx \right)^{1/\sigma} \leq C(p) \left(\int_{D_\rho^{x_0}} |u|^{p(x)} \rho^{-p(x)} dx \right)^{1/\sigma} \leq C(p) \rho^{-1+n/p_0}.$$

Отсюда в силу (7.10) имеем

$$M(r) \leq C(n, p) \left(\left(\frac{r}{\rho} \right)^{1-n/p_0} + r \right),$$

что влечет (7.9). Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1.2. Докажем при $p_0 \leq n$ оценку модуля непрерывности (1.20) в предположении расходимости в нуле интеграла (1.19). Сначала рассмотрим решение $u(x)$ задачи (6.1) с граничной функцией $f \in C^\infty(\overline{D})$. Пусть

$$M = \max_{\partial D} |f|, \quad F_R = \sup_{\partial D \cap B_R} f, \quad f_R = \inf_{\partial D \cap B_R} f, \quad M_R = \sup_{D \cap B_R} u, \quad m_R = \inf_{D \cap B_R} u.$$

Применяя неравенство (7.7) к функциям $M_{4R} - u(x)$ и $u(x) - m_{4R}$, получим

$$\begin{aligned} (M_{4R} - F_{4R} + R)\mu(R) &\leq C_0(M_{4R} - M_R + R), \\ (f_R - m_{4R} + R)\mu(R) &\leq C_0(m_R - m_{4R} + R), \end{aligned}$$

где $\mu(R) = (\gamma(R))^{1/(p_0-1)}$. Суммируя эти оценки, придем к соотношению

$$\operatorname{osc}_{D \cap B_R} u \leq (1 - \sigma\mu(R)) \operatorname{osc}_{D \cap B_{4R}} u + \sigma\mu(R) \operatorname{osc}_{\partial D \cap B_{4R}} f + R \quad (7.11)$$

с постоянной $\sigma = 1/C_0$. Проитерлируем это неравенство. Для $j = 0, 1, \dots$ и $0 < \rho < 1/16$ положим $r_j = 4^{-j}\rho$, $\omega_j = \operatorname{osc}_{D \cap B_{r_j}} u$, $f_j = \operatorname{osc}_{\partial D \cap B_{r_j}} f$, $\mu_j = \mu(r_j)$ и перепишем неравенство (7.11) в виде

$$\omega_j \leq (1 - \sigma\mu_j)\omega_{j-1} + \sigma\mu_j f_{j-1} + r_j.$$

Отсюда по индукции в предположении $\prod_{i=0}^k a_i = 1$ при $k < 0$ для $j \geq 1$ будем иметь

$$\begin{aligned} \omega_j \leq & \omega_0 \prod_{i=0}^{j-1} (1 - \sigma \mu_{j-i}) + \sum_{k=0}^{j-1} \mu_{j-k} f_{j-k-1} \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \sigma \mu_{j-i}) \\ & + \sum_{k=0}^{j-1} r_{j-k} \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \sigma \mu_{j-i}). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Для оценки полученных произведений заметим, что

$$\prod_{i=0}^k (1 - \sigma \mu_{j-i}) \leq \exp \left(-\theta_0 \sum_{i=0}^k \mu_{j-i} \right),$$

где $\theta_0 = \text{const} \cdot \sigma$. Поскольку

$$\begin{aligned} C_1(n, p_0) \int_{r_{j-i+1}}^{r_{j-i}} \frac{\mu(\tau)}{\tau} d\tau \leq \mu_{j-i} \leq C_2(n, p_0) \int_{r_{j-i}}^{r_{j-i-1}} \frac{\mu(\tau)}{\tau} d\tau, \\ \sum_{k=0}^{j-1} r_{j-k} \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \sigma \mu_{j-i}) \leq \rho, \end{aligned}$$

то из (7.12) придем к оценке

$$\begin{aligned} \omega_j \leq & \omega_0 \exp \left(-\theta \int_{r_{j+1}}^{\rho} \frac{\mu(\tau)}{\tau} d\tau \right) \\ & + C(n, p_0) f_0 \sum_{k=0}^{j-1} \exp \left(-\theta \int_{r_{j+1}}^{r_{j+1-k}} \frac{\mu(\tau)}{\tau} d\tau \right) \int_{r_{j-k}}^{r_{j-k-1}} \frac{\mu(\tau)}{\tau} d\tau + \rho. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Пользуясь неравенством $\mu(\tau) \leq C(n, p)$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{j-1} \exp \left(-\theta \int_{r_{j+1}}^{r_{j+1-k}} \frac{\mu(\tau)}{\tau} d\tau \right) \int_{r_{j-k}}^{r_{j-k-1}} \frac{\mu(\tau)}{\tau} d\tau \\ & \leq \sum_{k=0}^{j-1} C(n, p, M) \int_{r_{j-k}}^{r_{j-k-1}} \frac{\mu(t)}{t} \exp \left(-\theta \int_{r_{j+1}}^t \frac{\mu(\tau)}{\tau} d\tau \right) dt \\ & \leq C(n, p, M) \int_{r_j}^{\rho} \frac{\mu(t)}{t} \exp \left(-\theta \int_{r_j}^t \frac{\mu(\tau)}{\tau} d\tau \right) dt \leq C(n, p, M) \end{aligned}$$

и из (7.13) после соответствующего выбора j при $r \leq \rho/4$ будем иметь

$$\text{osc}_{D \cap B_r^{x_0}} u \leq C(n, p, M) \left(\text{osc}_{\partial D \cap B_\rho^{x_0}} f + \rho + \text{osc}_{\partial D} f \exp \left(-\theta \int_r^{\rho} \frac{\mu(\tau)}{\tau} d\tau \right) \right). \quad (7.14)$$

При выполнении условия (1.19) отсюда следует существование предела решения $u(x)$ при $x \rightarrow x_0$, $x \in D$. Покажем, что этот предел совпадает со значением

$f(x_0)$ граничной функции в точке x_0 . Предположим противное. Тогда в силу непрерывности $f(x)$ в $\bar{D}$ следует существование положительных постоянных ε_0 и r таких, что $|u(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0$ для всех $x \in D \cap B_r^{x_0}$. Не ограничивая общности, будем считать $u(x) - f(x) \geq \varepsilon_0$ при $x \in D \cap B_r^{x_0}$. Положим $E_r = \bar{B}_r^{x_0} \setminus D$ и покажем, что $C_p(E_{r/2}, B_r^{x_0}) = 0$. Пусть $\tilde{E}_r = \partial D \cap \bar{B}_r^{x_0}$ и $w(x) = (u(x) - f(x))/\varepsilon_0$. Так как $w \in W_0(D)$, то $w \in W_0(D \cap B_r^{x_0}, \tilde{E}_r)$ и усеченная функция $v(x) = \min(w(x), 1)$ равна нулю на $\tilde{E}_r$ в смысле $W(D \cap B_r^{x_0})$. С другой стороны, в силу сделанного предположения $w \geq 1$ на $\tilde{E}_r$ в смысле $W(D \cap B_r^{x_0})$ и $v(x) = 1$ на $\tilde{E}_r$ в смысле $W(D \cap B_r^{x_0})$. Поэтому функция, тождественно равная единице в $D \cap B_r^{x_0}$, принадлежит классу $W_0(D \cap B_r^{x_0}, \tilde{E}_r)$. Отсюда вытекает принадлежность классу $W_0(B_r^{x_0}, E_r)$ функции $\eta(x)$, равной единице в $D \cap B_r^{x_0}$ и нулю на E_r . Ясно, что $|\nabla \eta| = 0$ почти всюду в $B_r^{x_0}$, и из теоремы вложения (см. [30])

$$\int_{B_r^{x_0}} (1 - \eta)^2 dx \leq C(n, D \cap B_r^{x_0}) \int_{B_r^{x_0}} |\nabla(1 - \eta)|^2 dx$$

получаем равенство нулю лебеговой меры $|E_r|$ множества E_r :

$$|E_r| = \int_{B_r^{x_0}} (1 - \eta)^2 dx \leq C \int_{B_r^{x_0}} |\nabla(1 - \eta)|^2 dx = 0.$$

Рассмотрим теперь функцию $\psi(x) = \varphi(x)(1 - \eta(x))$, где $\varphi \in C_0^\infty(B_r^{x_0})$ и $\varphi(x) = 1$ в окрестности $E_{r/2}$. Поскольку $\psi \in W_0(B_r^{x_0})$ и $\psi = 1$ на $E_{r/2}$ в смысле $W(B_r^{x_0})$, то

$$C_p(E_{r/2}, B_r^{x_0}) \leq \int_{B_r^{x_0}} |\nabla \psi|^{p(x)} dx = \int_{E_r} |\nabla \varphi|^{p(x)} dx = 0.$$

Таким образом, $C_p(E_{r/2}, B_r^{x_0}) = 0$, что противоречит расходимости интеграла в (1.19). Следовательно, предел решения $u(x)$ при $x \rightarrow x_0$, $x \in D$, совпадает с $f(x_0)$, и оценку (7.14) для $r \leq \rho/4$ можно записать в виде

$$|u(x) - f(x_0)| \leq C(n, p, M) \left(\operatorname{osc}_{D \cap B_\rho^{x_0}} f + \rho + \operatorname{osc}_{\partial D} f \exp \left(-\theta \int_r^\rho \frac{\mu(\tau)}{\tau} d\tau \right) \right) \quad \forall x \in D \cap B_r^{x_0}. \quad (7.15)$$

Применяя (7.15) к решениям $u_k(x)$ задач (1.16), участвующих в определении обобщенного решения $u_f(x)$ задачи (1.15) с непрерывной граничной функцией $f(x)$, будем иметь

$$|u_k(x) - f_k(x_0)| \leq C(n, p, M_k) \left(\operatorname{osc}_{D \cap B_\rho^{x_0}} f_k + \rho + \operatorname{osc}_{\partial D} f_k \exp \left(-\theta \int_r^\rho \frac{\mu(\tau)}{\tau} d\tau \right) \right) \quad \forall x \in D \cap B_r^{x_0}, \quad (7.16)$$

где M_k – максимум $|f_k(x)|$ на ∂D . Поскольку последовательность $\{u_k\}$ сходится к $u_f(x)$ равномерно на компактных подмножествах D и последовательность $\{f_k\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на $\overline{D}$, то, пользуясь равномерной ограниченностью постоянных $C(n, p, M_k)$ из (7.16), после перехода к пределу придем к требуемой оценке (1.20).

Предположим теперь, что $p_0 > n$, и сначала рассмотрим решение задачи (6.1) с граничной функцией $f \in C^\infty(\overline{D})$. По теореме вложения Соболева это решение непрерывно в $B_\rho^{x_0} \cap \overline{D}$ для достаточно малых ρ .

Пусть $0 < \alpha < 1/2$, $\beta = 1 + \alpha$, $\sigma = \inf_{B_{2\rho}^{x_0}} p(x)$, $v(x)$ – емкостный потенциал точки x_0 относительно шара $B_{\beta\rho}^{x_0}$, а радиус ρ столь мал, что $p(x) > n$ в $B_{2\rho}^{x_0}$.

Емкостный потенциал непрерывен в $B_{\beta\rho}^{x_0}$, и нам понадобится его оценка при $x \in D \cap S_\rho^{x_0}$. По теореме вложения Соболева, неравенству Юнга и условию (1.12) имеем

$$\begin{aligned} v(x) &\leq C(n, p)(\alpha\rho)^{1-n/\sigma} \left(\int_{B_{\alpha\rho}^x} |\nabla v|^\sigma dx \right)^{1/\sigma} \\ &\leq C(n, p)\alpha^{1-n/\sigma} \left(\rho^{1-n/p_0} \left(\int_{B_{\beta\rho}^{x_0}} |\nabla v|^{p(x)} dx \right)^{1/\sigma} + \rho \right). \end{aligned} \quad (7.17)$$

В силу (5.14) и (5.8) получим

$$\int_{B_{\beta\rho}^{x_0}} |\nabla v|^{p(x)} dx \leq C(n, p),$$

и из (7.17) следует, что

$$v(x) \leq \frac{1}{2}, \quad x \in D \cap B_\rho^{x_0}, \quad \alpha \leq \alpha_0(n, p). \quad (7.18)$$

Перейдем к выводу оценки (1.21). Согласно (7.18) при соответствующем выборе α будем иметь

$$u(x) - \inf_{D \cap B_\rho^{x_0}} u \leq 2 \operatorname{osc}_{D \cap B_\rho^{x_0}} u (1 - v(x)), \quad x \in D \cap S_\rho^{x_0}.$$

С другой стороны,

$$u(x) - \inf_{D \cap B_\rho^{x_0}} u \leq \operatorname{osc}_{\partial D \cap B_\rho^{x_0}} f, \quad x \in \partial D \cap \overline{B}_\rho^{x_0}.$$

Следовательно, при $x \in \partial(D \cap B_\rho^{x_0})$

$$u(x) - \inf_{D \cap B_\rho^{x_0}} u \leq \operatorname{osc}_{\partial D \cap B_\rho^{x_0}} f + 2 \operatorname{osc}_{D \cap B_\rho^{x_0}} u (1 - v(x)).$$

По принципу максимума данное неравенство имеет место и при $x \in D \cap B_\rho^{x_0}$. В силу оценки (7.9), примененной к функции $1 - v(x)$, имеем

$$u(x) - \inf_{D \cap B_\rho^{x_0}} u \leq \operatorname{osc}_{\partial D \cap B_\rho^{x_0}} f + C(n, p) \operatorname{osc}_{\partial D} f \left(\frac{r}{\rho} \right)^{1-n/p_0}, \quad x \in D \cap B_r^{x_0}, \quad r \leq \frac{\rho}{4}.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\operatorname{osc}_{D \cap B_r^{x_0}} u \leq \operatorname{osc}_{\partial D \cap B_\rho^{x_0}} f + C(n, p) \operatorname{osc}_{\partial D} f \left(\frac{r}{\rho} \right)^{1-n/p_0},$$

исходя из которого доказательство (1.21) завершается так же, как и в случае $p_0 \leq n$. Теорема доказана.

Из теоремы 1.2 следует, что расходимость в нуле интеграла (1.19) является достаточным условием регулярности граничной точки $x_0 \in \partial D$.

3. Доказательство теоремы 1.3. Если внешность области D в окрестности граничной точки x_0 содержит конус с вершиной в x_0 , то для достаточно малых t существует шар $B_{\delta t}^{x'}$ радиуса δt с постоянной δ , зависящей от раствора конуса, такой, что $B_{\delta t}^{x'} \subset E_t$. В силу свойств емкости, нижней оценки (5.9) и условия (1.12) имеем

$$C_p(E_t, B_{2t}^{x_0}) \geq C_p(\bar{B}_{\delta t}^{x'}, B_{2t}^{x_0}) \geq C_p(\bar{B}_{\delta t}^{x'}, B_{2t}^{x'}) \geq C t^{n-p(x')} \geq C t^{n-p_0}.$$

Поэтому начиная с достаточно малых ρ получим

$$\int_r^\rho (\gamma(t))^{1/(p_0-1)} t^{-1} dt \geq C \ln \left(\frac{r}{\rho} \right),$$

$$\exp \left(-\theta \int_r^\rho (\gamma(t))^{1/(p_0-1)} t^{-1} dt \right) \leq \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\beta_0}.$$

Отсюда и из неравенства (1.20) для гёльдеровой в точке x_0 граничной функции $f(x)$ с показателем Гёльдера β имеем

$$\sup_{B_r^{x_0} \cap D} |u_f(x) - f(x_0)| \leq C \left(\rho^\beta + \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\beta_0} \right), \quad r \leq \frac{\rho}{4}.$$

Выбирая здесь $\rho = r^{1/2}$, будем иметь

$$\sup_{B_r^{x_0} \cap D} |u_f(x) - f(x_0)| \leq C (r^{\beta/2} + r^{\beta_0/2}) \leq C r^\alpha,$$

где $\alpha = \min(\beta/2, \beta_0/2)$. Теорема доказана.

§ 8. Необходимое условие регулярности граничной точки

1. Вспомогательные результаты. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, в которой изучается обобщенное решение задачи (1.15), $x_0 \in \partial D$ – граничная точка. Продолжим показатель суммируемости $p(x)$ в $\mathbb{R}^n \setminus D$ с сохранением условий (1.2) и (1.12). Вопрос о регулярности граничной точки $x_0 \in \partial D$ задачи Дирихле (1.15) тесно связан с поведением в окрестности x_0 емкостного потенциала

$u(x) = u_\rho(x)$ компакта $E_\rho = (\mathbb{R}^n \setminus D) \cap \overline{B}_\rho^{x_0}$ относительно шара $B_{8\rho}^{x_0}$. Напомним, что функция $u(x)$ принадлежит классу $H_0(B_{8\rho}^{x_0})$ и удовлетворяет в $B_{8\rho}^{x_0}$ уравнению

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = -d\mu$$

с мерой $\mu = \mu_\rho$, реализующей емкость E_ρ . Решение понимается в смысле интегрального тождества

$$\int_{B_{8\rho}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{B_{8\rho}^{x_0}} \psi \, d\mu \quad (8.1)$$

на пробных функциях $\psi \in C_0^\infty(B_R)$. Поскольку емкостный потенциал является неотрицательным в $B_{8\rho}^{x_0}$ суперрешением, то, основываясь на утверждении леммы 6.5, будем рассматривать его как полунепрерывную снизу функцию в $B_{8\rho}^{x_0}$. Всюду далее предполагается, что $p_0 = p(x_0) \leq n$.

ЛЕММА 8.1. *Если существует постоянная $\rho > 0$, для которой емкостной потенциал $u(x) = u_\rho(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$u(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) < 1, \quad (8.2)$$

то граничная точка x_0 иррегулярна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала приведем используемое ниже следствие предположения (8.2). В силу полунепрерывности снизу $u(x)$ имеем

$$u(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \sup \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{u}(x) < 1, \quad (8.3)$$

где точная верхняя грань берется по всем функциям $\tilde{u}(x)$, совпадающим с $u(x)$ почти всюду. Емкостный потенциал $u(x)$ равен единице почти всюду на E_ρ . Более того, функция $u(x)$ непрерывна в области $B_{8\rho}^{x_0} \setminus E_\rho$, где совпадает с решением $w(x)$ задачи Дирихле

$$Lw = 0 \text{ в } B_{8\rho}^{x_0} \setminus E_\rho, \quad w|_{\partial B_{8\rho}^{x_0}} = 0, \quad w|_{\partial E_\rho} = 1.$$

Поэтому согласно (8.3) имеем

$$u(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in B_{8\rho}^{x_0} \setminus E_\rho}} u(x) < 1. \quad (8.4)$$

Отметим, что если данное соотношение выполнено для емкостного потенциала $u(x) = u_\rho(x)$, то по принципу максимума оно будет иметь место и для емкостного потенциала $u_{\rho'}(x)$ при $\rho' < \rho$.

Обозначим через $u_f(x)$ решение задачи Дирихле (1.15) с гладкой граничной функцией $f(x)$, удовлетворяющей условиям: $f(x) = 3/2$ при $x \in \partial D \cap B_{r/2}^{x_0}$,

$0 \leq f(x) < 3/2$ при $x \in \partial D \cap (B_r^{x_0} \setminus B_{r/2}^{x_0})$ и $f(x) = 0$ на оставшейся части границы ∂D . Докажем для $\rho < \rho_0(n, p)$ и $r < r_0(n, p, \rho)$ неравенство

$$u_f(x) \leq \frac{1}{2} + u(x), \quad x \in D \cap B_{8\rho}^{x_0}. \quad (8.5)$$

Будем считать, что $D \cap \partial B_{8\rho}^{x_0} \neq \emptyset$. Поскольку $u_f(x) \leq \frac{1}{2} + u(x)$ на множестве $\partial D \cap \overline{B}_{8\rho}^{x_0}$ в смысле $W_0(D \cap B_{8\rho}^{x_0})$ (см. § 3) и $u(x) = 0$ на $\partial B_{8\rho}^{x_0}$ в том же смысле, то по принципу максимума достаточно установить поточечную оценку

$$u_f(x) < \frac{1}{2}, \quad x \in D \cap \partial B_{8\rho}^{x_0}. \quad (8.6)$$

Пусть B_ρ – произвольный шар с центром на $\partial B_{8\rho}^{x_0} \cap D$. Если $\partial D \cap B_{2\rho} \neq \emptyset$, то $u_f \in W_0(D \cap B_{2\rho}, \partial D \cap B_{2\rho})$, и, полагая $u_f(x) = 0$ при $x \in B_{2\rho} \setminus D$, по неравенству (6.21) будем иметь

$$\sup_{B_{\rho/2}} u_f(x) \leq C(n, p) \left(\int_{B_\rho} u_f(x) dx + \rho \right). \quad (8.7)$$

Для оценки интеграла в правой части (8.7) рассмотрим вспомогательную функцию $v_r(x)$, являющуюся решением задачи Дирихле

$$Lv_r = 0 \quad \text{в} \quad B_R^{x_0} \setminus E_r, \quad v_r|_{\partial B_R^{x_0}} = 0, \quad v_r|_{\partial E_r} = \frac{3}{2},$$

где R – диаметр области D . Положим $v_r(x) = 3/2$ при $x \in E_r$. По принципу максимума $u_f(x) \leq v_r(x)$ при $x \in D$, и с учетом (8.7) имеем

$$\sup_{B_{\rho/2}} u_f(x) \leq C(n, p) \left(\rho^{-n} \int_{B_R^{x_0}} v_r dx + \rho \right). \quad (8.8)$$

Заметим, что функция $v_r(x)$ реализует точную нижнюю грань функционала $F(\varphi)$ (см. (5.1)) по множеству функций $\varphi \in C_0^\infty(B_R^{x_0})$, равных $3/2$ в окрестности E_r . Отсюда и из определения емкости компакта E_r вытекает неравенство

$$\int_{B_R^{x_0}} |\nabla v_r|^{p(x)} dx \leq \text{const}(p) C_p(E_r, B_R^{x_0}) \leq \text{const}(p) C_p(\overline{B}_r^{x_0}, B_{8\rho}^{x_0}),$$

а из верхних оценок емкости шара (5.4), взятых для значений $p_0 \leq n$, следует, что $v_r \rightarrow 0$ в $W_0(B_R^{x_0})$ при $r \rightarrow 0$. В частности, $v_r \rightarrow 0$ в $L_1(B_R^{x_0})$. Поэтому в силу (8.8) при $\rho < \rho_0(n, p)$ и $r < r_0(n, p, \rho)$ справедливы и неравенство (8.6), и требуемое соотношение (8.5). Таким образом согласно (8.5) и (8.4) имеем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} u_f < \frac{3}{2},$$

что влечет иррегулярность граничной точки x_0 . Лемма доказана.

Доказательство следующих двух утверждений, в которых получены оценки введенного выше емкостного потенциала $u(x) = u_\rho(x)$, основано на схеме рассуждений работы [27], где $p(x) \equiv \text{const}$. Напомним, что $p_0 \leq n$, и для $r \leq 2\rho$ положим

$$\bar{s} = \inf_{B_r^{x_0}} p(x), \quad s = \sup_{B_r^{x_0}} p(x), \quad G_r^a = \{x: x \in B_r^{x_0}, u(x) > a\}.$$

ЛЕММА 8.2. Если $r \leq 4\rho$ и существуют постоянные $d \geq r$ и $\gamma \in (p_0 - 1, n(p_0 - 1)/(n - p_0 + 1))$ такие, что для $a \in [0, 1]$ выполнено соотношение

$$|G_{2r}^a| \leq 2^{-1} d^{-\gamma} \int_{G_r^a} (u - a)^\gamma dx, \quad (8.9)$$

то при $\rho \leq \rho_0(n, p, \gamma)$ функция $u(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} d^{-\gamma} r^{-n} \int_{G_r^a} (u - a)^\gamma dx &\leq C(n, \gamma, p) \\ &\times \left(d^{-\gamma} r^{-n} \int_{G_{2r}^a} (u - a)^\gamma dx + d^{1-p_0} r^{p_0-n} \mu(B_{2r}^{x_0}) \right)^{q/p_0}, \end{aligned} \quad (8.10)$$

в котором $q = q(p_0, \gamma) > p_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать $a = 0$. В этом случае

$$|G_{2r}^0| \leq 2^{-1} d^{-\gamma} \int_{G_r^0} u^\gamma dx \quad (8.11)$$

и нетрудно заметить, что согласно предположению (8.9)

$$\int_{G_{2r}^0} \left(1 + \frac{u}{d} \right)^\gamma dx \leq C(\gamma) d^{-\gamma} \int_{G_{2r}^0} u^\gamma dx. \quad (8.12)$$

В силу (8.11) имеем

$$\begin{aligned} d^{-\gamma} \int_{G_r^0 \setminus G_r^d} u^\gamma dx &\leq 2^{-1} d^{-\gamma} \int_{G_r^0} u^\gamma dx, \\ d^{-\gamma} \int_{G_r^0} u^\gamma dx &\leq 2 d^{-\gamma} \int_{G_r^d} u^\gamma dx. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Поскольку $0 \leq u(x) \leq 1$, то отсюда и из (8.9) вытекает неравенство $d \leq 1$. Кроме того, $d \geq r$ по условию леммы, так что

$$r \leq d \leq 1. \quad (8.14)$$

Для оценки интеграла в правой части (8.13) положим

$$q = \frac{p_0 \gamma}{p_0 - \gamma / (p_0 - 1)} \quad (8.15)$$

и рассмотрим вспомогательную функцию

$$w(x) = \left(1 + \frac{u(x)}{d} \right)^{\gamma/q} - 1.$$

Отметим, что

$$q > p_0, \quad q < \frac{n\bar{s}}{n-\bar{s}}, \quad \rho \leq \rho_0(n, p, \gamma). \quad (8.16)$$

Сначала проверим неравенство

$$d^{-\gamma} \int_{G_r^d} u^\gamma dx \leq C(\gamma) \int_{G_r^d} w^q dx. \quad (8.17)$$

Оно заведомо выполнено с постоянной $C = C_0^{-q}$, если только

$$\left(1 + \frac{u(x)}{d}\right)^{\gamma/q} - 1 \geq C_0 \left(\frac{u(x)}{d}\right)^{\gamma/q}, \quad x \in G_r^d.$$

Поскольку

$$\inf_{u \geq d} \left(\left(1 + \frac{u}{d}\right)^{\gamma/q} - 1 \right) \left(1 + \frac{u}{d}\right)^{-\gamma/q} = 1 - 2^{-\gamma/q},$$

то в качестве C_0 можно взять $1 - 2^{-\gamma/q}$. Таким образом, в силу (8.13) и (8.17) имеем

$$d^{-\gamma} r^{-n} \int_{G_r^0} u^\gamma dx \leq C(\gamma) \int_{B_r^{x_0}} w^q dx. \quad (8.18)$$

Оценим интеграл в правой части этого неравенства. Возьмем срезающую функцию $\eta \in C_0^\infty(B_{2r}^{x_0})$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ в $B_r^{x_0}$, $|\nabla \eta| \leq 2/r$. Так как $q > \bar{s}$ и при $\bar{s} < n$ константа q не превосходит критического показателя Соболева (см. (8.16)), то из теоремы вложения, примененной к функции $w\eta^{s/\bar{s}}$, следует, что

$$\int_{B_r^{x_0}} w^q dx \leq C(n, \bar{s}) \left(r^{\bar{s}} \int_{B_{2r}^{x_0}} |\nabla w|^{\bar{s}} \eta^s dx + \int_{B_{2r}^{x_0}} w^{\bar{s}} dx \right)^{q/\bar{s}}.$$

По неравенству Гёльдера, соотношению (8.12) и предположению (8.11) имеем

$$\begin{aligned} \int_{B_{2r}^{x_0}} w^{\bar{s}} dx &\leq \left(\int_{G_{2r}^0} \left(1 + \frac{u}{d}\right)^\gamma dx \right)^{\bar{s}/q} |G_{2r}^0|^{1-\bar{s}/q} \\ &\leq C(\gamma) \left(d^{-\gamma} \int_{G_{2r}^0} u^\gamma dx \right)^{\bar{s}/q} |G_{2r}^0|^{1-\bar{s}/q} \leq C(\gamma) d^{-\gamma} \int_{G_{2r}^0} u^\gamma dx. \end{aligned}$$

Из неравенства (8.18) и двух последних соотношений будем иметь

$$d^{-\gamma} r^{-n} \int_{G_r^0} u^\gamma dx \leq C(n, \bar{s}, \gamma) \left(r^{\bar{s}} \int_{B_{2r}^{x_0}} |\nabla w|^{\bar{s}} \eta^s dx + d^{-\gamma} r^{-n} \int_{G_{2r}^0} u^\gamma dx \right)^{q/\bar{s}}. \quad (8.19)$$

Для оценки первого интеграла в правой части (8.19) заметим, что

$$r^{\bar{s}} \int_{B_{2r}^{x_0}} |\nabla w|^{\bar{s}} \eta^s dx \leq C(\gamma) d^{-\bar{s}} r^{\bar{s}-n} \int_{G_{2r}^0} |\nabla u|^{\bar{s}} \left(1 + \frac{u}{d}\right)^{-\tau} \eta^s dx,$$

где

$$\tau = \frac{\gamma \bar{s}}{p_0(p_0 - 1)}, \quad \tau > 1, \quad \rho \leq \rho_0(p, \gamma). \quad (8.20)$$

По неравенству Юнга имеем

$$\begin{aligned} |\nabla u|^{\bar{s}} \left(1 + \frac{u}{d}\right)^{-\tau} \eta^s &\leq |\nabla u|^{p(x)} \left(1 + \frac{u}{d}\right)^{-\tau} \eta^s + \left(1 + \frac{u}{d}\right)^{-\tau} \eta^s \\ &\leq |\nabla u|^{p(x)} \left(1 + \frac{u}{d}\right)^{-\tau} \eta^s + \left(1 + \frac{u}{d}\right)^{\gamma} \eta^s. \end{aligned}$$

Кроме того, $d^{-\bar{s}} \leq d^{-p_0}$ (см. (8.14)) и $r^{-\bar{s}} \leq C(p)r^{-p_0}$ в силу логарифмического условия (1.12). В результате, пользуясь еще неравенством (8.12), получим

$$\begin{aligned} r^{\bar{s}} \int_{B_{2r}^{x_0}} |\nabla w|^{\bar{s}} \eta^s dx &\leq C(n, \gamma, p) \left(d^{-p_0} r^{p_0-n} \int_{G_{2r}^0} |\nabla u|^{p(x)} \left(1 + \frac{u}{d}\right)^{-\tau} \eta^s dx \right. \\ &\quad \left. + d^{-\gamma} r^{-n} \int_{G_{2r}^0} u^{\gamma} dx \right). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Переходя к оценке первого слагаемого в правой части (8.21), выберем в интегральном тождестве (8.1) пробную функцию

$$\psi(x) = \left(1 - \left(1 + \frac{u(x)}{d}\right)^{1-\tau}\right) \eta^s(x),$$

где $\eta(x)$ имеет тот же смысл, что и выше. Поскольку $u(x)$ – емкостный потенциал компакта $E_\rho \subset B_{8\rho}^{x_0}$, то существует последовательность функций $u_j \in C_0^\infty(B_{8\rho}^{x_0})$, равных единице на E_ρ , такая, что $u_j \rightarrow u$ в $W_0(B_{8\rho}^{x_0})$. Соответствующая последовательность функций

$$\psi_j(x) = \left(1 - \left(1 + \frac{u_j(x)}{d}\right)^{1-\tau}\right) \eta^s(x)$$

сходится в $W_0(B_{8\rho}^{x_0})$ к $\psi(x)$ и состоит из функций, удовлетворяющих неравенству $\psi_j(x) \leq 2$ при $x \in E_\rho$. Поэтому, переходя в интегральном тождестве

$$\int_{B_{2r}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \psi_j dx = \int_{B_{2r}^{x_0}} \psi_j d\mu$$

к пределу при $j \rightarrow \infty$, придем к соотношению

$$\int_{B_{2r}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \psi dx \leq 2\mu(B_{2r}^{x_0}).$$

После несложных преобразований, использующих явный вид $\psi(x)$ и неравенство Юнга, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{G_{2r}^0} |\nabla u|^{p(x)} \left(1 + \frac{u}{d}\right)^{-\tau} \eta^s dx \\ \leq C(n, \gamma, \bar{s}) \left(\int_{G_{2r}^0} \left(\frac{d}{r}\right)^{p(x)} \left(1 + \frac{u}{d}\right)^{p(x)-\tau} dx + d \cdot \mu(B_{2r}^{x_0}) \right). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Далее, так как $\tau > 1$ (см. (8.20)) и в силу предположения леммы $\gamma > p_0 - 1$, то $p(x) - \tau < \gamma + p(x) - p_0$. Поэтому, используя (8.14) и условие (1.12), получим

$$\left(1 + \frac{u(x)}{d}\right)^{p(x)-\tau} \leq C(p) \left(1 + \frac{u(x)}{d}\right)^{\gamma}, \quad \left(\frac{d}{r}\right)^{p(x)} \leq C(p) d^{p_0} r^{-p_0}, \quad x \in G_{2r}^0.$$

Теперь с учетом (8.12) неравенство (8.22) примет вид

$$\int_{G_{2r}^0} |\nabla u|^{p(x)} \left(1 + \frac{u}{d}\right)^{-\tau} \eta^s dx \leq C(n, \gamma, p) \left(d^{p_0-\gamma} r^{-p_0} \int_{G_{2r}^0} u^{\gamma} dx + d \cdot \mu(B_{2r}^{x_0})\right)$$

и из (8.21), (8.19) получим оценку

$$\begin{aligned} d^{-\gamma} r^{-n} \int_{G_r^0} u^{\gamma} dx &\leq \\ &\leq C(n, \gamma, p) \left(d^{-\gamma} r^{-n} \int_{G_{2r}^0} u^{\gamma} dx + d^{1-p_0} r^{p_0-n} \mu(B_{2r}^{x_0})\right)^{q/\bar{s}}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Заметим (см. (8.15)), что $\frac{q}{\bar{s}} = \frac{q}{p_0} + \frac{q(p_0-\bar{s})}{\bar{s}p_0}$. Поскольку

$$\mu(B_{2r}^{x_0}) \leq C_p(\bar{B}_r^{x_0}, B_{2r}^{x_0}) \leq C(n, p) r^{n-p_0}$$

(см. (5.4)), то согласно (8.14) и условию (1.12) имеем

$$\left(d^{-\gamma} r^{-n} \int_{G_{2r}^0} u^{\gamma} dx + d^{1-p_0} r^{p_0-n} \mu(B_{2r}^{x_0})\right)^{q(p_0-\bar{s})/\bar{s}p_0} \leq C(n, \gamma, p),$$

и из (8.23) вытекает требуемое неравенство (8.10). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 8.1. *Для любого $\gamma > p_0 - 1$ при $\rho \leq \rho_0(n, p, \gamma)$ имеет место неравенство*

$$u(x_0) \leq C(n, \gamma, p) \left(\int_{B_{\rho}^{x_0}} u^{\gamma} dx\right)^{1/\gamma} + C(n, \gamma, p) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\mu(B_{r_j}^{x_0})}{r_j^{n-p_0}} + r_j^{p_0-1}\right)^{1/(p_0-1)}, \quad (8.24)$$

в котором $r_j = 2^{1-j}\rho$, $j = 0, 1, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно предположить

$$\gamma < \frac{n(p_0 - 1)}{n - p_0 + 1},$$

так как для остальных значений γ требуемое утверждение вытекает из неравенства Гёльдера. Зафиксируем константу $\delta \in (0, 1)$, которая будет определена позже, и, задав последовательность $\{a_j\}$:

$$a_0 = 0, \quad a_{j+1} = a_j + \delta^{-1} \left(r_j^{-n} \int_{G_{r_{j+1}}^{a_j}} (u - a_j)^{\gamma} dx\right)^{1/\gamma}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

в которой множество $G_{r_j}^{a_j}$ имеет тот же смысл, что и в лемме 8.2, докажем неравенство

$$a_{j+1} - a_j \leq \frac{1}{2}(a_j - a_{j-1}) + C(n, \gamma, p) \left(\frac{\mu(B_{r_j}^{x_0})}{r_j^{n-p_0}} + r_j^{p_0-1} \right)^{1/(p_0-1)}. \quad (8.25)$$

Сначала, предполагая

$$a_{j+1} - a_j \geq 2^{(n+1)/\gamma} r_j, \quad (8.26)$$

установим оценку

$$\delta^{p_0\gamma/q} \leq C(n, \gamma, p) \delta^\gamma \left(\frac{a_j - a_{j-1}}{a_{j+1} - a_j} \right)^\gamma + C(n, \gamma, p) (a_{j+1} - a_j)^{1-p_0} \frac{\mu(B_{r_j}^{x_0})}{r_j^{n-p_0}}, \quad (8.27)$$

где q – постоянная леммы 8.2 (см. (8.15)). Имеем

$$\begin{aligned} |G_{r_j}^{a_j}| &\leq (a_j - a_{j-1})^{-\gamma} \int_{G_{r_j}^{a_j}} (u - a_{j-1})^\gamma dx \\ &\leq (a_j - a_{j-1})^{-\gamma} \int_{G_{r_j}^{a_{j-1}}} (u - a_{j-1})^\gamma dx \\ &= \delta^\gamma \left(r_{j-1}^{-n} \int_{G_{r_{j-1}}} (u - a_{j-1})^\gamma dx \right)^{-1} \int_{G_{r_j}^{a_{j-1}}} (u - a_{j-1})^\gamma dx \\ &= \delta^\gamma r_{j-1}^n = \delta^\gamma 2^n r_j^n = 2^n (a_{j+1} - a_j)^{-\gamma} \int_{G_{r_{j+1}}^{a_j}} (u - a_j)^\gamma dx. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Постоянную $\delta > 0$ подчиним ограничению $\delta^\gamma \leq 2^{-n-1} r_j^{-n} |B_{r_j}^{x_0}|$, влекущему двойное неравенство

$$|G_{r_j}^{a_j}| \leq \delta^\gamma 2^n r_j^n \leq \frac{1}{2} |B_{r_j}^{x_0}|. \quad (8.29)$$

Из соотношений (8.28) и (8.26) следует, что условие (8.9) выполнено с постоянной

$$d_j = 2^{-(n+1)/\gamma} (a_{j+1} - a_j) \geq r_j, \quad (8.30)$$

и в силу оценки (8.10) имеем

$$\begin{aligned} &\left(d_j^{-\gamma} r_j^{-n} \int_{G_{r_{j+1}}^{a_j}} (u - a_j)^\gamma dx \right)^{p_0/q} \\ &\leq C(n, \gamma, p) \left(d_j^{-\gamma} r_j^{-n} \int_{G_{r_j}^{a_j}} (u - a_j)^\gamma dx + d_j^{1-p_0} r_j^{p_0-n} \mu(B_{r_j}^{x_0}) \right). \end{aligned} \quad (8.31)$$

Далее, так как

$$\begin{aligned} d_j^{-\gamma} r_j^{-n} \int_{G_{r_j}^{a_j}} (u - a_j)^\gamma dx &\leq d_j^{-\gamma} r_j^{-n} \int_{G_{r_j}^{a_{j-1}}} (u - a_{j-1})^\gamma dx \\ &= d_j^{-\gamma} \delta^\gamma (a_j - a_{j-1})^\gamma = C(n) \left(\frac{d_{j-1}}{d_j} \right)^\gamma, \\ \delta^{p_0 \gamma / q} &= C(n, \gamma) \left(d_j^{-\gamma} r_j^{-n} \int_{G_{r_{j+1}}^{a_j}} (u - a_j)^\gamma dx \right)^{p_0 / q}, \end{aligned}$$

то с учетом (8.31) получим

$$\begin{aligned} \delta^{p_0 \gamma / q} &\leq C(n, \gamma, p) \left(d_j^{-\gamma} r_j^{-n} \int_{G_{r_j}^{a_j}} (u - a_j)^\gamma dx + d_j^{1-p_0} r_j^{p_0-n} \mu(B_{r_j}^{x_0}) \right) \\ &\leq C(n, \gamma, p) \delta^\gamma \left(\frac{a_j - a_{j-1}}{a_{j+1} - a_j} \right)^\gamma + C(n, \gamma, p) (a_{j+1} - a_j)^{1-p_0} \frac{\mu(B_{r_j}^{x_0})}{r_j^{n-p_0}}, \end{aligned}$$

что и доказывает (8.27).

Перейдем к выводу (8.25). Если $a_{j+1} - a_j \leq \frac{1}{2}(a_j - a_{j-1})$ или $d_j < r_j$ (см. (8.30)), то требуемое неравенство очевидно. Если же $a_j - a_{j-1} < 2(a_{j+1} - a_j)$ и $d_j \geq r_j$, то из (8.27) следует, что

$$\delta^{p_0 \gamma / q} \leq C(n, \gamma, p) \delta^\gamma + C(n, \gamma, p) (a_{j+1} - a_j)^{1-p_0} \frac{\mu(B_{r_j}^{x_0})}{r_j^{n-p_0}}.$$

Выбирая $\delta = \delta(n, \gamma, p)$ из условия $\delta^{p_0 \gamma / q} > 2C(n, \gamma, p) \delta^\gamma$, где C – постоянная из предыдущего соотношения, будем иметь

$$a_{j+1} - a_j \leq \left(\frac{\mu(B_{r_j}^{x_0})}{r_j^{n-p_0}} \right)^{1/(p_0-1)},$$

т. е. неравенство (8.25) выполнено и в этом случае.

Из (8.25) вытекает оценка

$$\begin{aligned} a_k - a_1 &\leq a_{k+1} - a_1 = \sum_{j=1}^k (a_{j+1} - a_j) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (a_j - a_{j-1}) + C(n, p, \gamma) \sum_{j=1}^k \left(\frac{\mu(B_{r_j}^{x_0})}{r_j^{n-p_0}} + r_j^{p_0-1} \right)^{1/(p_0-1)} \\ &= \frac{1}{2} a_k + C(n, p, \gamma) \sum_{j=1}^k \left(\frac{\mu(B_{r_j}^{x_0})}{r_j^{n-p_0}} + r_j^{p_0-1} \right)^{1/(p_0-1)}, \end{aligned}$$

в силу которой

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} a_k &\leq 2a_1 + C(n, \gamma, p) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\mu(B_{r_j}^{x_0})}{r_j^{n-p_0}} + r_j^{p_0-1} \right)^{1/(p_0-1)} \\ &\leq C(n, \gamma, p) \left(\int_{B_\rho} u^\gamma dx \right)^{1/\gamma} + C(n, \gamma, p) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\mu(B_{r_j}^{x_0})}{r_j^{n-p_0}} + r_j^{p_0-1} \right)^{1/(p_0-1)}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Согласно (8.29) $\inf_{B_{r_j}} u \leq a_j$ для $j = 1, 2, \dots$, а в силу полунепрерывности снизу емкостного потенциала имеем

$$u(x_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} \inf_{B_{r_j}} u \leq \lim_{j \rightarrow \infty} a_j. \quad (8.33)$$

Сопоставляя (8.32) и (8.33), приходим к требуемому неравенству (8.24). Теорема доказана.

Выберем в (8.18) постоянную $\gamma > p_0 - 1$, удовлетворяющую соотношению $\gamma < n(p_0 - 1)/(n - 1)$. По неравенству Харнака слабого типа для неотрицательных суперрешений (см. лемму 6.4) имеем

$$\left(\int_{B_\rho^{x_0}} u^\gamma dx \right)^{1/\gamma} \leq C(n, p) \left(\int_{B_{4\rho}^{x_0}} u^\gamma dx \right)^{1/\gamma} \leq C(n, p) \left(\inf_{B_{2\rho}^{x_0}} u(x) + \rho \right)$$

и (8.18) примет вид

$$u(x_0) \leq C(n, p) \inf_{B_{2\rho}^{x_0}} u(x) + C(n, p) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\mu(B_{r_j}^{x_0})}{r_j^{n-p_0}} + r_j^{p_0-1} \right)^{1/(p_0-1)}. \quad (8.34)$$

Следующее утверждение посвящено оценке первого слагаемого в правой части (8.34). Напомним, что $u(x)$ – емкостной потенциал компакта $E_\rho = (\mathbb{R}^n \setminus D) \cap \overline{B}_\rho^{x_0}$ относительно шара $B_{8\rho}^{x_0}$.

ЛЕММА 8.3. *Справедливо неравенство*

$$\inf_{B_{2\rho}^{x_0}} u(x) \leq C(p) \left(\frac{\mu(B_\rho^{x_0})}{\rho^{n-p_0}} + \rho^{p_0-1} \right)^{1/(p_0-1)}. \quad (8.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\lambda = \min_{\overline{B}_{2\rho}^{x_0}} u(x), \quad \varphi(x) = \min(u(x), \lambda)$$

и, не ограничивая общности, будем считать $\lambda > 0$. Ясно, что $\varphi \in W_0(B_{8\rho}^{x_0})$ и $\varphi(x) = \lambda$ при $x \in \overline{B}_{2\rho}^{x_0}$. Пусть $\{u_j\} \in C_0^\infty(B_{8\rho}^{x_0})$ – последовательность, состоящая из функций, равных единице в окрестности компакта E_ρ , и сходящаяся в $W_0(B_{8\rho}^{x_0})$

к емкостному потенциалу $u(x)$. Существование такой последовательности установлено в доказательстве теоремы 5.1. Отсюда и из свойств б)–г) леммы 2.5 следует существование последовательности $\{v_j\} \in C_0^\infty(B_{8\rho}^{x_0})$ такой, что $v_j(x) = \lambda$ в окрестности $B_\rho^{x_0}$ и $v_j(x) \rightarrow \varphi(x)$ в $W_0(B_{8\rho}^{x_0})$. Выбирая в интегральном тождестве (8.1) пробную функцию $\psi(x) = v_j(x)$, после перехода к пределу будем иметь

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{B_{8\rho}^{x_0}} |\nabla v_j|^{p(x)} dx = \int_{B_{8\rho}^{x_0}} |\nabla \varphi|^{p(x)} dx \leq \lambda \mu(B_{8\rho}^{x_0}). \quad (8.36)$$

С другой стороны, поскольку $0 < \lambda \leq 1$, то

$$\lambda^l C_p(\overline{B}_\rho^{x_0}, B_{8\rho}^{x_0}) \leq \int_{B_{8\rho}^{x_0}} \frac{\lambda^{p(x)}}{p(x)} \left| \frac{\nabla v_j}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq C(p) \int_{B_{8\rho}^{x_0}} |\nabla v_j|^{p(x)} dx, \quad (8.37)$$

где $l = \sup_{B_{8\rho}^{x_0}} p(x)$. Так как $C_p(\overline{B}_\rho^{x_0}, B_{8\rho}^{x_0}) \geq C(n, p) \rho^{n-p_0}$ (см. (5.5)), то требуемое неравенство (8.35) является простым следствием (8.36), (8.37) и условия (1.12). Лемма доказана.

2. Доказательство необходимого условия регулярности граничной точки. Покажем, что сходимость в нуле интеграла (1.19) влечет иррегулярность граничной точки $x_0 \in \partial D$. Для этого, основываясь на утверждении леммы 8.1, покажем существование достаточно малого ρ , для которого емкостный потенциал $u(x) = u_\rho(x)$ компакта E_ρ относительно шара $B_{8\rho}^{x_0}$ удовлетворяет условию (8.2).

Пусть $E = \mathbb{R}^n \setminus D$ и

$$\gamma_j = C_p(E \cap \overline{B}_{2^{1-j}}^{x_0}, B_{2^{-j}}^{x_0}) 2^{(1-j)(p_0-n)}.$$

Сходимость в нуле интеграла (1.19) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{j=1}^n (\gamma_j)^{\frac{1}{p_0-1}} < \infty. \quad (8.38)$$

В силу неравенств (8.34), (8.35) имеем

$$u(x_0) \leq C(n, p) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\mu(B_{r_j}^{x_0})}{r_j^{n-p_0}} + r_j^{p_0-1} \right)^{\frac{1}{p_0-1}},$$

где $r_j = 2^{1-j} \rho$, $j = 1, 2, \dots$. Выбирая здесь $\rho = 2^{-k}$ и пользуясь оценкой (5.16), согласно которой $\mu(B_j^{x_0}) \leq C(p) C_p(E \cap \overline{B}_{r_j}^{x_0}, B_{r_{j-1}}^{x_0})$, будем иметь

$$u(x_0) \leq C(n, p) \sum_{j=1}^{\infty} (\gamma_{j+k} + 2^{(1-j-k)(p_0-1)})^{\frac{1}{p_0-1}}.$$

Теперь из сходимости ряда (8.38) следует существование номера $k = k(n, p)$ такого, что $u(x_0) < 1$. Необходимость доказана.

3. Геометрические условия регулярности. Пусть в окрестности граничной точки, совпадающей с началом координат, внутренность дополнения области D совпадает с областью вида (1.22). Полагая $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ и $x = (x', x_n)$, доопределим показатель суммируемости $p(x)$, считая, что $p(0, x_n) = p_0 = p(0)$ при $x_n \in [0, a/2]$, где a – постоянная из (1.22). В силу наложенных ограничений на функцию $g(t)$, с помощью которой задается область (1.22), доопределенный таким образом показатель $p(x)$ удовлетворяет на множестве $\overline{D} \cup \{(x', x_n) : x' = 0, x_n \in [0, a/2]\}$ условиям (1.2) и (1.12). Продолжим теперь $p(x)$ на все $\mathbb{R}^n$ с сохранением этих же условий. Ниже B_R означает шар с центром в начале координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Достаточность. Оценим снизу емкость компакта $E_R = (\mathbb{R}^n \setminus D) \cap \overline{B}_R$ относительно шара B_{2R} . Пусть $\varphi \in C_0^\infty(B_{2R})$ и $\varphi = 1$ в окрестности E_R . Ясно, что

$$\int_{B_{2R}} |\nabla \varphi|^{p(x)} dx \geq \int_{R/8}^{R/4} dx_n \int_{Q_{2R}} |\nabla' \varphi|^{p(x)} dx', \quad (8.39)$$

где $|\nabla' \varphi| = (\sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{x_i}^2)^{1/2}$, а Q_r – $(n-1)$ -мерный шар радиуса r с центром в начале координат. Для каждого фиксированного $R/8 \leq x_n \leq R/4$ имеем

$$\int_{Q_{2R}} |\nabla' \varphi|^{p(x)} dx' \geq C(p) C_p(\overline{Q}_r, Q_{2R}), \quad r = g(x_n).$$

Минимизируя интеграл в левой части (8.39) и пользуясь нижними оценками (5.5) емкости $(n-1)$ -мерных шаров, получим

$$C_p(E_R, B_{2R}) \geq \begin{cases} C \int_{R/8}^{R/4} (g(t))^{n-1-p_0} dt, & p_0 < n-1, \\ C \int_{R/8}^{R/4} \left(\ln \frac{2R}{g(t)} \right)^{2-n} dt, & p_0 = n-1, \\ CR^{n-p_0}, & n-1 < p_0 \leq n. \end{cases}$$

Поскольку функция $g(t)$ не убывает, то для $\gamma(R) = C_p(E_R, B_{2R}) R^{p_0-n}$ справедливы оценки

$$\gamma(R) \geq \begin{cases} C \left(\frac{g(R/8)}{R} \right)^{n-1-p_0}, & p_0 < n-1, \\ C \left(\ln \frac{2R}{g(R/8)} \right)^{2-n}, & p_0 = n-1, \\ C, & n-1 < p_0 \leq n. \end{cases}$$

Отсюда, пользуясь при $p_0 = n-1$ условием $g(t) \geq t^\alpha$, найдем, что

$$\int_r^\rho (\gamma(t))^{1/(p_0-1)} t^{-1} dt \geq \begin{cases} C \int_r^\rho \left(\frac{g(t/8)}{t} \right)^{\frac{n-1-p_0}{p_0-1}} t^{-1} dt, & p_0 < n-1, \\ C \int_r^\rho \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{-1} t^{-1} dt, & p_0 = n-1, \\ C \ln \frac{\rho}{r}, & n-1 < p_0 \leq n. \end{cases}$$

Таким образом, условие (1.19) для описанной выше области в случае $p_0 < n - 1$ выполнено, если расходится интеграл (1.23). Если же $p_0 \geq n - 1$, то, как показывает простой подсчет, граничная точка регулярна.

Необходимость. Покажем, что если $p_0 < n - 1$, то условие (1.23) необходимо для регулярности начала координат. Для этого оценим сверху емкость цилиндра $\Pi_{r,R} = \{x = (x', x_n) : |x'| \leq r, |x_n| \leq R\}$, $r \leq R$, относительно шара B_{2R} . Пусть $\varphi(x')$ – емкостный потенциал $(n - 1)$ -мерного шара $\bar{Q}_r$ с центром в начале координат относительно концентрического шара Q_{2R} . Введем еще финитную бесконечно дифференцируемую на отрезке $[-3R/2, 3R/2]$ функцию $\eta(x_n)$, удовлетворяющую условиям: $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(x_n) = 1$ при $x_n \in [-R, R]$ и $|\eta'| \leq CR^{-1}$. Как нетрудно видеть,

$$\begin{aligned} C_p(\Pi_{r,R}, B_{2R}) &\leq C(p) \int_{B_{2R}} |\nabla(\varphi\eta)|^{p(x)} dx \\ &\leq C(p) \left(\int_{B_{2R}} |\nabla\varphi|^{p(x)} \eta^{p(x)} dx + \int_{B_{2R}} |\varphi|^{p(x)} |\nabla\eta|^{p(x)} dx \right). \end{aligned}$$

Пользуясь логарифмическим условием (1.12), неравенством $0 \leq \varphi \leq 1$, верхними оценками емкости (5.4) и условием (1.12), получим

$$C_p(\Pi_{r,R}, B_{2R}) \leq C(n, p)(Rr^{n-p_0-1} + R^{1-p_0}r^{n-1}) \leq C(n, p)Rr^{n-p_0-1}.$$

Поскольку $E_R \subset \Pi_{r,R}$ при $r = g(R)$, то согласно предыдущей оценке имеем

$$\int_r^\rho (\gamma(t))^{1/(p_0-1)} t^{-1} dt \leq C(n, p) \int_r^\rho \left(\frac{g(t)}{t} \right)^{\frac{n-1-p_0}{p_0-1}} t^{-1} dt.$$

Отсюда следует, что условие (1.23) необходимо для регулярности граничной точки. Теорема доказана.

Список литературы

1. Ладженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
2. Жиков В. В. Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 5. С. 961–995.
3. Жиков В. В. О постановке краевых задач для интегралов вида $|\xi|^{\alpha(x)}$ // УМН. 1986. Т. 41. № 4. С. 187–188.
4. Жиков В. В. Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 4. С. 675–711.
5. Giaquinta M. Growth Conditions and Regularity, a Counterexample // Manuscripta Math. 1987. V. 59. P. 245–248.
6. Marcellini P. Un Esempio di Soluzione Discontinua d'un Problema Variazionale nel caso scalare. Preprint № 11 / Instituto Matematico U. Dini. Università di Firenze, 1987.
7. Růžička M. Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory // Lecture Notes in Math. 2000. V. 1748.
8. Zhikov V. V. On some variational problems // Russian J. of Math. Physics. 1996. V. 5. № 1. P. 105–116.

9. *Lavrentieff M.* Sur quelques problèmes du calcul des variations // *Ann. Mat. Pura Appl.* 1926. V. 4. P. 7–28.
10. *Zhikov V. V.* On Lavrentiev's Phenomenon // *Russian J. of Math. Physics.* 1994. V. 3. № 2. P. 249–269.
11. *Zhikov V. V.* Meyers type estimates for the solution of a nonlinear Stokes system // *Diff. Eq.* 1997. V. 33. № 1. P. 108–115.
12. *Leray J., Lions J.-L.* Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Brouder // *Bull. Soc. Math. France.* 1965. V. 93. P. 97–107.
13. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Квазилинейные эллиптические уравнения и вариационные задачи со многими независимыми переменными // *УМН.* 1961. Т. 16. № 1. С. 19–90.
14. *Marcellini P.* Regularity for Elliptic Equations with General Growth Conditions // *J. Diff. Equations.* 1993. V. 105. P. 296–333.
15. *Fan X.* A Class of De Giorgi Type and Holder Continuity of Minimizers of Variational with $m(x)$ -Growth Condition. China: Lanzhou Univ., 1995.
16. *Алхутлов Ю. А.* Неравенство Харнака и гёльдеровость решений нелинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // *Дифф. уравнения.* 1997. Т. 33. № 12. С. 1651–1660.
17. *Chiado Piat V., Coscia A.* Hölder continuity of minimizers of functionals with variable growth exponent // *Manuscripta Math.* 1997. V. 93. P. 283–299.
18. *Acerbi E., Fusco N. A.* Transmission problem in the calculus of variation // *Calc. Var.* 1994. V. 2. P. 1–16.
19. *Крашенинникова О. В.* О непрерывности в точке решений эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН.* 2002. Т. 236. С. 204–211.
20. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // *Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления.* Т. 32. М.: ВИНТИ, 1988. С. 99–215.
21. *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations. Oxford: Clarendon Press, 1993.
22. *Wiener N.* Certain notions in potential theory // *J. Math. Phys.* 1924. V. 3. P. 24–51.
23. *Littman W., Stampacchia G., Weinberger H. F.* Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.* 1963. V. 17. № 3. P. 43–77.
24. *Мазья В. Г.* О непрерывности в граничной точке решений квазилинейных эллиптических уравнений // *Вестн. ЛГУ. Сер. матем.* 1970. Т. 25. № 13. С. 42–55.
25. *Gariepy R., Ziemer W. P.* A regularity condition at the boundary for solutions of quasilinear elliptic equations // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1977. V. 67. P. 25–39.
26. *Скрыпник И. В.* Критерий регулярности граничной точки для квазилинейных эллиптических уравнений // *ДАН СССР.* 1984. Т. 274. № 5. С. 1040–1050.
27. *Kilpeläinen T., Malý J.* The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations // *Acta Math.* 1994. V. 172. P. 137–161.
28. *Lindkvist P., Martio O.* Two theorems of N. Wiener for solutions of quasilinear elliptic equations // *Acta Math.* 1985. V. 155. P. 153–171.
29. *Choquet G.* Theory of capacities // *Annales de l'Institut Fourier.* 1953–1954. V. 155. № 5. P. 131–295.
30. *Кондратьев В. А.* О разрешимости первой краевой задачи для сильно эллиптических уравнений // *Тр. ММО.* 1967. Т. 16. С. 209–292.
31. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
32. *Trudinger N. S.* On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations // *Comm. Pure Appl. Math.* 1967. V. 20. P. 721–747.
33. *Stampacchia G.* Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinuous // *Ann. Inst. Fourier.* 1965. V. 15. P. 189–258.

- 34. *Lindkvist P.* On the equation $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 109. P. 157–164.
- 35. *Gehring F. W.* The L^p -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. 1973. V. 130. P. 265–277.
- 36. *Giaquinta M., Modica G.* Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems // J. für die reine und angewandte Math. 1979. V. 311/312. P. 145–169.
- 37. *Schwartz L.* Théorie des Distributions. V. 1. Paris: Hermann, 1950.
- 38. *John G., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 415–426.
- 39. *Fabes E. B., Stroock D. W.* The L^p -integrability of Green's functions and fundamental solutions for elliptic and parabolic equations // Duke Math. J. 1984. V. 51. № 4. P. 99–1016.
- 40. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

Поступило в редакцию
25.02.2004