Общероссийский математический портал

О. И. Богоявленский, Общие алгебраические тождества для тензоров Нийенхейса и Хаантжеса, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 6, 71–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/im511>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 18:16:47

УДК 514.7+514.8

О. И. Богоявленский

Общие алгебраические тождества для тензоров Нийенхейса и Хаантжеса

Получены общие алгебраические тождества для тензоров Нийенхейса и Хаантжеса на произвольном многообразии M^n . Для $n = 3$ выведены специальные алгебраические тождества, связанные с формой Картана–Киллинга $(u, v)_H$.

Библиография: 22 наименования.

§ 1. Введение

1.1. В известных работах [1], [2] А. Нийенхейс сформулировал задачу о взаимоотношениях между тензорами $N_{B(A)}(u, v)$ и $N_A(u, v)$, где $(1,1)$ -тензор $B(A)$ является произвольным многочленом от $(1,1)$ -тензора A на некотором n -мерном многообразии M^n . В настоящей работе дается полное решение задачи Нийенхейса и решение более общей задачи о взаимоотношениях между тензорами Нийенхейса $N_{B,C}(u, v)$ и $N_A(u, v)$, где B и C – произвольные многочлены от A . В § 3 представлены явные формулы, связывающие тензоры $N_{B(A)}(u, v)$, $N_{B,C}(u, v)$ и $N_A(u, v)$. Для вывода этих формул мы вводим в § 2 представление коммутативного кольца $R[z, \lambda, \mu]$ многочленов от трех независимых переменных в пространстве $(1,2)$ -тензоров на многообразии M^n .

Мы выводим явные формулы, связывающие тензоры Хаантжеса $H_{B(A)}(u, v)$ и $H_A(u, v)$. Одно из этих тождеств доказывает, что тензор Хаантжеса $H_A(u, v)$ [3] является калибровочным инвариантом по отношению к калибровочным преобразованиям $(1,1)$ -тензора $A_j^i(x)$, в отличие от тензора Нийенхейса $N_A(u, v)$.

В § 4 доказано некоторое общее алгебраическое тождество для тензора Нийенхейса, которое связано с характеристическим многочленом $(1,1)$ -тензора $A_j^i(x)$. Получено общее алгебраическое тождество для тензора Хаантжеса $H_A(u, v)$.

Альтернированный $(1,2)$ -тензор Нийенхейса $N_A(u, v)$ и тензор Хаантжеса $H_A(u, v)$ определяют деформацию структур неассоциативных и альтернированных алгебр в касательном расслоении $T(M^n)$. В работах [4]–[6] мы ввели $(1,3)$ -тензоры B_{Njkl}^i и B_{Hjkl}^i , которые характеризуют отклонение этих алгебраических структур от алгебр Ли. Общая теория деформаций алгебр Ли развита в работах [7], [8].

В § 5 показано, что произвольный $(1,1)$ -тензор $A_j^i(x)$ на трехмерном многообразии M^3 является симметрическим по отношению к билинейной форме $(u, v)_H$, связанной с тензором Хаантжеса $H_A(u, v)$. Доказано, что тензор Хаантжеса $H_A(u, v)$ определяет деформацию структур алгебр Ли в касательном расслоении $T(M^3)$, и выведены алгебраические тождества с использованием формы Картана–Киллинга $(u, v)_H$.

1.2. Тензор Нийенхейса определяется формулой [1]

$$N_A(u, v) = A^2[\tilde{u}, \tilde{v}] + [A\tilde{u}, A\tilde{v}] - A([A\tilde{u}, \tilde{v}] + [\tilde{u}, A\tilde{v}]), \quad (1.1)$$

где u, v – касательные векторы в точке $x \in M^n$ и $\tilde{u}, \tilde{v}$ – произвольные векторные поля, продолжающие векторы u, v (выражение (1.1) не зависит от продолжений $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$).

Тензор Нийенхейса используется во многих задачах дифференциальной геометрии и математической физики; однако до настоящего времени основные применения тензоров Нийенхейса и Хаантжеса [3] были связаны с условиями их тривиальности: $N_A(u, v) = 0$ или $H_A(u, v) = 0$. Теорема Ньюландера–Ниренберга [9] утверждает, что почти комплексная структура $A(x)$, $A^2(x) = -1$, является комплексной тогда и только тогда, когда тензор Нийенхейса $N_A(u, v)$ тривиален. Из теоремы Нийенхейса–Хаантжеса [1], [3] следует, что для $(1,1)$ -тензора $A_j^i(x)$ с действительными и неравными собственными значениями на гладком многообразии M^n линейные комбинации любых $n - 1$ собственных векторов порождают интегрируемое распределение, если и только если тензор Хаантжеса $H_A(u, v)$ тривиален.

Условие $N_A(u, v) = 0$ используется в работах [10], [11] в качестве достаточного условия для существования специальных структур алгебр Ли в пространстве векторных полей на многообразии M^n . Оно применяется в [12] как условие интегрируемости G -структур на M^n . Теорема Гельфанда–Дорфман–Магри–Мороси [13], [14] утверждает, что две пуассоновы структуры P_1 и P_2 являются совместимыми в смысле Магри [15] тогда и только тогда, когда $N_A(u, v) = 0$, где $A = P_1 P_2^{-1}$.

Условие $N_A(u, v) = 0$ используется в качестве определения структур Пуассона–Нийенхейса (см. [14], [16], [17]) и как определение G -многообразий Нийенхейса (см. [18]), а также применяется в [19], [20] как достаточное условие существования законов сохранения для систем уравнений в частных производных

$$u_t^i = \sum_{j=1}^n A_j^i(u^1, \dots, u^n) u_y^j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

В работах [4]–[6] были применены ненулевые тензоры Нийенхейса и Хаантжеса при изучении необходимых условий существования гамильтоновых и бигамильтоновых структур [21] для систем (1.2). В статье [22] использованы ненулевые тензоры Нийенхейса и Хаантжеса при исследовании необходимых условий существования законов сохранения для систем (1.2).

§ 2. Представление кольца многочленов $R[z, \lambda, \mu]$ в пространстве $(1,2)$ -тензоров

2.1. Рассмотрим коммутативное кольцо $R_3 = R[z, \lambda, \mu]$ многочленов от трех независимых переменных z, λ, μ с коэффициентами, зависящими от точки x многообразия M^n . Элементами кольца R_3 являются многочлены

$$S(z, \lambda, \mu) = \sum_{i,j,k=1}^N a_{ijk}(x) z^i \lambda^j \mu^k, \quad x \in M^n, \quad (2.1)$$

где коэффициенты $a_{ijk}(x)$ являются произвольными гладкими функциями на M^n .

Определим представление T кольца R_3 в линейном пространстве $(1,2)$ -тензоров $V(u, v)$. Это представление зависит от произвольного $(1,1)$ -тензора $A(x)$ и определено для произвольного многочлена $S(z, \lambda, \mu)$ (см. (2.1)) формулой

$$(T_S V)(u, v) = \sum_{i,j,k=1}^N a_{ijk}(x) A^i V(A^j u, A^k v). \quad (2.2)$$

Представление (2.2) обладает стандартными свойствами:

$$T_{S_1+S_2} = T_{S_1} + T_{S_2}, \quad T_{S_1 \cdot S_2} = T_{S_2 \cdot S_1} = T_{S_1} \cdot T_{S_2}. \quad (2.3)$$

Первое тождество в (2.3) очевидно. Для доказательства второго тождества в (2.3) предположим сначала, что оператор $A(x)$ имеет неравные собственные значения $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ и базис собственных векторов $e_1(x), \dots, e_n(x)$. Очевидно, мы имеем

$$T_S V(e_i, e_j) = S(A, \lambda_i, \lambda_j) V(e_i, e_j). \quad (2.4)$$

Отсюда для произвольных многочленов S_1 и S_2 следует равенство

$$T_{S_1 \cdot S_2} V(e_i, e_j) = T_{S_1} (T_{S_2} V(e_i, e_j)) = T_{S_2 \cdot S_1} V(e_i, e_j). \quad (2.5)$$

Равенство (2.3) следует из (2.5) в силу билинейности тензоров $V(u, v)$. Для оператора $A(x_1)$, имеющего совпадающие собственные значения, мы рассмотрим некоторое его непрерывное возмущение $\tilde{A}(x)$, которое имеет различные собственные значения вне точки x_1 . Тогда тождество (2.3) для оператора $A(x_1)$ следует по непрерывности из невырожденного случая, рассмотренного выше.

2.2. Для любых коммутирующих $(1,1)$ -тензоров $B_j^i(x)$ и $C_\ell^k(x)$ Нийенхейс определил в работе [1] $(1,2)$ -тензор

$$N_{B,C}(u, v) = BC[\tilde{u}, \tilde{v}] + [B\tilde{u}, C\tilde{v}] - B[\tilde{u}, C\tilde{v}] - C[B\tilde{u}, \tilde{v}]. \quad (2.6)$$

Тензор Нийенхейса (1.1) является специальным случаем тензора (2.6) для $B = C = A$. Тензор $N_{B,C}$ (2.6) имеет следующие компоненты:

$$(N_{B,C})_{jk}^i = B_j^\alpha C_{k,\alpha}^i - C_k^\alpha B_{j,\alpha}^i + C_\alpha^i B_{j,k}^\alpha - B_\alpha^i C_{k,j}^\alpha,$$

где $B_{j,\alpha}^i = \partial B_j^i(x) / \partial x^\alpha$, и т. д.

Тензор Хаантжеса [3] определяется формулой

$$H_A(u, v) = A^2 N_A(u, v) + N_A(Au, Av) - A(N_A(Au, v) + N_A(u, Av)). \quad (2.7)$$

В терминах представления T_S (см. (2.2)) формула (2.7) принимает вид

$$H_A(u, v) = T_D N_A(u, v), \quad (2.8)$$

где D является многочленом:

$$D(z, \lambda, \mu) = (z - \lambda)(z - \mu). \quad (2.9)$$

Очевидно, что любой $(1,2)$ -тензор $W(u, v)$ вида

$$W(u, v) = \sum_{m=0}^N (u(g_m) A^m v + v(h_m) A^m u)$$

принадлежит ядру оператора T_D :

$$T_D W(u, v) = 0. \quad (2.10)$$

2.3. Пусть $B(z)$ – некоторый многочлен, $B(z) = \sum_{m=0}^k b_m(x)z^m$. Будем многократно использовать известное тождество Безу

$$B(z) - B(\lambda) = (z - \lambda)Q_B(z, \lambda), \quad (2.11)$$

где

$$Q_B(z, \lambda) = \sum_{m=1}^k b_m(x) \sum_{p+q=m-1} z^p \lambda^q, \quad (2.12)$$

и его следствие

$$Q_B(z, \lambda) - Q_B(z, \mu) = (\lambda - \mu)R_B(z, \lambda, \mu), \quad (2.13)$$

где

$$R_B(z, \lambda, \mu) = \sum_{m=2}^k b_m(x) \sum_{p+q+r=m-2} z^p \lambda^q \mu^r. \quad (2.14)$$

Тождество (2.13) имеет эквивалентный симметрический вид:

$$\begin{aligned} & (\lambda - \mu)B(z) + (\mu - z)B(\lambda) + (z - \lambda)B(\mu) \\ & = (\lambda - \mu)(z - \lambda)(z - \mu)R_B(z, \lambda, \mu). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Очевидно, что многочлены $Q_B(z, \lambda)$ и $R_B(z, \lambda, \mu)$ являются симметрическими по отношению к их аргументам.

2.4. Введем следующие (1,2)-тензоры:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_B(u, v) &= \sum_{m=1}^k b_m(x) \sum_{p+q=m-1} A^p H_A(A^q u, v), \\ \tilde{Y}_B(u, v) &= \sum_{m=1}^k b_m(x) \sum_{p+q=m-1} H_A(A^p u, A^q v), \\ \tilde{Z}_B(u, v) &= \sum_{m=2}^k b_m(x) \sum_{p+q+r=m-2} A^p H_A(A^q u, A^r v). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Формулы (2.2), (2.12) и (2.14) приводят к выражениям

$$\tilde{X}_B = T_{Q_B(z, \lambda)} H_A, \quad \tilde{Y}_B = T_{Q_B(\lambda, \mu)} H_A, \quad \tilde{Z}_B = T_{R_B(z, \lambda, \mu)} H_A. \quad (2.17)$$

Из тождества (2.13) имеем

$$T_{Q_B(z, \lambda)} H_A - T_{Q_B(z, \mu)} H_A = T_{\lambda - \mu} T_{R_B(z, \lambda, \mu)} H_A,$$

что вследствие (2.17) означает

$$\tilde{X}_B(u, v) + \tilde{X}_B(v, u) = \tilde{Z}_B(Au, v) - \tilde{Z}_B(u, Av). \quad (2.18)$$

Алгебраическое тождество

$$Q_B(\lambda, z) - Q_B(\lambda, \mu) = (z - \mu)R_B(z, \lambda, \mu)$$

аналогично приводит к тензорному тождеству

$$\tilde{X}_B(u, v) - \tilde{Y}_B(u, v) = A\tilde{Z}_B(u, v) - \tilde{Z}_B(u, Av). \quad (2.19)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Если оператор $A(x_1)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$B(A, x_1) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^k b_m(x_1) A^m(x_1) = 0, \quad (2.20)$$

то в точке x_1 справедливы следующие тензорные уравнения:

$$\tilde{X}_B(u, v) = 0, \quad (2.21)$$

$$\tilde{Y}_B(Au, v) = \tilde{Y}_B(u, Av), \quad (2.22)$$

$$\tilde{Z}_B(Au, v) = \tilde{Z}_B(u, Av). \quad (2.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (2.17), (2.8), (2.9) и тождество Безу (2.11) влекут

$$\tilde{X}_B = T_{Q_B(z, \lambda)} T_D N_A = T_{z-\mu} T_{B(z)-B(\lambda)} N_A.$$

Отсюда мы получаем

$$\tilde{X}_B(u, v) = T_{z-\mu} (B(A) N_A(u, v) - N_A(B(A)u, v)) = 0$$

вследствие уравнения (2.20). Уравнение (2.23) следует из (2.18) и (2.21). Уравнение (2.22) вытекает из (2.19), (2.21) и (2.23).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Пусть некоторый (k, l) -тензор $U(A)$ аналитически зависит от компонент тензора $A_j^i(x)$ и их частных производных до конечного порядка N . Если тензор $U(A)$ равен нулю для всех $(1, 1)$ -тензоров $A_j^i(x)$ с неравными (комплексными) собственными значениями, то $U(A) \equiv 0$ для любого $(1, 1)$ -тензора $A_j^i(x)$. Это очевидно следует по непрерывности из невырожденного случая $A_j^i(x)$ с неравными собственными значениями.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Все рассматриваемые в настоящей работе тензоры $U(A)$ имеют вид

$$U\left(A_j^i, \frac{\partial^k A_j^i(x)}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_k}}\right) \quad (2.24)$$

и являются многочленами по отношению к их аргументам. Поэтому тензоры $U(A)$ могут быть продолжены на комплексификацию касательного расслоения $T(M^n)$ и кокасательного расслоения $T^*(M^n)$. Мы будем иметь в виду это продолжение, когда $(1, 1)$ -тензор $A_j^i(x)$ имеет комплексные собственные значения и собственные векторы.

§ 3. Алгебраические соотношения между тензорами Нийенхейса

В этом параграфе мы выводим формулу, связывающую тензор Нийенхейса $N_{B,C}$ (2.6) с тензором Нийенхейса N_A (1.1). Эта формула дает полное решение задачи о взаимосвязи между тензорами $N_{B(A)}(u, v)$ и $N_A(u, v)$, поставленной Нийенхейсом в работах [1], [2].

Пусть $B(A, x)$ и $C(A, x)$ – произвольные многочлены с переменными коэффициентами:

$$B(A, x) = \sum_{m=0}^k b_m(x) A^m(x), \quad C(A, x) = \sum_{m=0}^k c_m(x) A^m(x). \quad (3.1)$$

Пусть $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ – собственные значения оператора $A(x)$, соответствующие собственным векторам $e_1(x), \dots, e_n(x)$. Операторы $B(A, x)$ и $C(A, x)$ имеют те же собственные векторы с собственными значениями $B(\lambda_i(x), x)$ и $C(\lambda_i(x), x)$.

ЛЕММА 3.1. Для (1,2)-тензора $N_{B,C}(u, v)$ (2.6) имеет место формула

$$\begin{aligned} N_{B,C}(e_i, e_j) &= (B(A) - B(\lambda_i))(C(A) - C(\lambda_j))[e_i, e_j] \\ &+ (B(\lambda_i) - B(\lambda_j))e_i(C(\lambda_j))e_j + (C(\lambda_i) - C(\lambda_j))e_j(B(\lambda_i))e_i. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Действительно, формула (3.2) следует из определения (2.6) прямым вычислением.

ТЕОРЕМА 3.1. Тензор $N_{B,C}(u, v)$ выражается через тензор Нийенхейса $N_A(u, v)$ с помощью формулы

$$\begin{aligned} N_{B,C}(u, v) &= \sum_{m,l=1}^k b_m c_l \sum_{p < m, q < l} A^{m+l-p-q-2} N_A(A^p u, A^q v) \\ &+ \sum_{m=0}^k [B(A)u(c_m)A^m v - C(A)v(b_m)A^m u \\ &- u(c_m)B(A)A^m v + v(b_m)C(A)A^m u]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что оператор $A(x)$ имеет неравные собственные значения $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$. Используя тождества Безу

$$B(z) - B(\lambda) = (z - \lambda)Q_B(z, \lambda), \quad C(z) - C(\lambda) = (z - \lambda)Q_C(z, \lambda), \quad (3.4)$$

мы получаем

$$\begin{aligned} Q_B(\lambda, \lambda) &= \frac{\partial B(\lambda)}{\partial \lambda}, \quad Q_C(\lambda, \lambda) = \frac{\partial C(\lambda)}{\partial \lambda}, \\ e(B(\lambda)) &= \sum_{m=0}^k (b_m e(\lambda^m) + e(b_m) \lambda^m) = Q_B(\lambda, \lambda) e(\lambda) + \sum_{m=0}^k e(b_m) \lambda^m, \\ e(C(\lambda)) &= \sum_{m=0}^k (c_m e(\lambda^m) + e(c_m) \lambda^m) = Q_C(\lambda, \lambda) e(\lambda) + \sum_{m=0}^k e(c_m) \lambda^m, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где e – произвольный касательный вектор, $e \in T_x(M^n)$. Вследствие тождеств (3.4) и (3.5) формула (3.2) принимает вид

$$\begin{aligned} N_{B,C}(e_i, e_j) &= Q_B(A, \lambda_i)Q_C(A, \lambda_j)(A - \lambda_i)(A - \lambda_j)[e_i, e_j] \\ &\quad + Q_B(\lambda_i, \lambda_j)Q_C(\lambda_j, \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j)e_i(\lambda_j)e_j \\ &\quad + Q_B(\lambda_i, \lambda_i)Q_C(\lambda_i, \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j)e_j(\lambda_i)e_i \\ &\quad + \sum_{m=0}^k [(B(\lambda_i) - B(\lambda_j))e_i(c_m)\lambda_j^m e_j \\ &\quad + (C(\lambda_i) - C(\lambda_j))e_j(b_m)\lambda_i^m e_i]. \end{aligned}$$

Это выражение эквивалентно равенству

$$\begin{aligned} N_{B,C}(e_i, e_j) &= Q_B(A, \lambda_i)Q_C(A, \lambda_j)N_A(e_i, e_j) + \sum_{m=0}^k [B(A)e_i(c_m)A^m e_j \\ &\quad - C(A)e_j(b_m)A^m e_i - e_i(c_m)B(A)A^m e_j + e_j(b_m)C(A)A^m e_i], \end{aligned} \quad (3.6)$$

где мы используем соотношение Нийенхейса [1]

$$N_A(e_i, e_j) = (A - \lambda_i)(A - \lambda_j)[e_i, e_j] + (\lambda_i - \lambda_j)(e_i(\lambda_j)e_j + e_j(\lambda_i)e_i).$$

Вследствие (2.4) первый член в (3.6) имеет вид

$$Q_B(A, \lambda_i)Q_C(A, \lambda_j)N_A(e_i, e_j) = T_{Q_B(z, \lambda)Q_C(z, \mu)}N_A(e_i, e_j).$$

Подставляя это выражение в (3.6), мы получаем

$$\begin{aligned} N_{B,C}(u, v) &= T_{Q_B(z, \lambda)Q_C(z, \mu)}N_A(u, v) + \sum_{m=0}^k [B(A)u(c_m)A^m v \\ &\quad - C(A)v(b_m)A^m u - u(c_m)B(A)A^m v + v(b_m)C(A)A^m u], \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $u = e_i$ и $v = e_j$. Отсюда по билинейности следует формула (3.7) для общих векторов u и v . Формула (3.3) совпадает с (3.7) в силу определений (2.2) и (2.12). Поэтому формула (3.3) доказана для любого $(1,1)$ -тензора $A_j^i(x)$ с неравными собственными числами. Применяя замечание 2.1, мы получаем, что формула (3.3) справедлива для любого $(1,1)$ -тензора $A_j^i(x)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Для произвольного многочлена $B(A, x)$ тензор Нийенхейса $N_{B,A}(u, v)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} N_{B,A}(u, v) &= \sum_{m=1}^k b_m \sum_{p+q=m-1} A^p N_A(A^q u, v) \\ &\quad + \sum_{m=0}^k [v(b_m)A^{m+1}u - Av(b_m)A^m u]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Действительно, формула (3.3) для $C(A) = A$ сводится к формуле (3.8), поскольку $c_1 = 1$ и $c_l = 0$ для $l \neq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Для любого многочлена $B(A, x)$ из (3.1) тензор Нийенхейса $N_B(u, v)$ связан с тензором Нийенхейса $N_A(u, v)$ формулой

$$\begin{aligned} N_B(u, v) = & \sum_{m, l=1}^k b_m b_l \sum_{p < m, q < l} A^{m+l-p-q-2} N_A(A^p u, A^q v) \\ & + \sum_{m=0}^k [B(A)u(b_m)A^m v - B(A)v(b_m)A^m u \\ & - u(b_m)B(A)A^m v + v(b_m)B(A)A^m u]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Действительно, по определению (1.1) тензор Нийенхейса $N_B(u, v)$ равен тензору $N_{B, B}(u, v)$ (2.6). Подставляя $C(A) = B(A)$ в (3.3), мы получаем формулу (3.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Эквивалентная форма тождества (3.9) следует из (3.7) после подстановки $C(A) = B(A)$:

$$\begin{aligned} N_B(u, v) = & T_{Q_B(z, \lambda)Q_B(z, \mu)} N_A(u, v) + \sum_{m=0}^k [B(A)u(b_m)A^m v \\ & - B(A)v(b_m)A^m u - u(b_m)B(A)A^m v + v(b_m)B(A)A^m u]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Формулы (3.9) и (3.10) дают полное решение задачи Нийенхейса [1], [2] о взаимосвязях между тензорами $N_{B(A)}(u, v)$ и $N_A(u, v)$. Для любого многочлена $B(A)$ (3.1) с постоянными коэффициентами формула (3.10) принимает простой вид

$$N_B(u, v) = T_{Q_B(z, \lambda)Q_B(z, \mu)} N_A(u, v).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Для произвольного многочлена $B(A, x)$ тензор Хаантжеса $H_B(u, v)$ связан с тензором Хаантжеса $H_A(u, v)$ посредством формулы

$$H_B(u, v) = T_{Q_B^2(z, \lambda)Q_B^2(z, \mu)} H_A(u, v). \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тензор Хаантжеса $H_B(u, v)$ связан с тензором Нийенхейса $N_B(u, v)$ соотношением

$$H_B(u, v) = B^2 N_B(u, v) + N_B(Bu, Bv) - B(N_B(Bu, v) + N_B(u, Bv)),$$

которое эквивалентно выражению

$$H_B(u, v) = T_{(B(z)-B(\lambda))(B(z)-B(\mu))} N_B(u, v).$$

Используя здесь тождество (3.4), мы получаем

$$H_B(u, v) = T_{Q_B(z, \lambda)Q_B(z, \mu)} T_D N_B(u, v), \quad (3.12)$$

где $D = (z - \lambda)(z - \mu)$. Формула (3.11) следует из (3.12) после подстановки соотношения (3.10) и использования уравнений (2.8) и (2.10).

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Справедливы следующие тождества, содержащие произвольные функции $f(x)$ и $g(x)$: для тензора Нийенхейса*

$$\begin{aligned} N_{f(x)A+g(x)}(u, v) &= f^2(x)N_A(u, v) \\ &+ f[Au(f)Av - Av(f)Au - u(f)A^2v + v(f)A^2u] \\ &+ f[Au(g)v - Av(g)u - u(g)Av + v(g)Au] \end{aligned} \quad (3.13)$$

и для тензора Хаантжеса

$$H_{f(x)A+g(x)}(u, v) = f^4(x)H_A(u, v). \quad (3.14)$$

Действительно, для оператора

$$B(A, x) = f(x)A(x) + g(x) \quad (3.15)$$

мы имеем

$$Q_B(z, \lambda) = f(x), \quad b_0(x) = g(x), \quad b_1(x) = f(x). \quad (3.16)$$

Формулы (3.13) и (3.14) следуют из (3.9) и (3.11) после подстановки соотношений (3.16).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Формула (3.14) означает, что тензор Хаантжеса $H_A(u, v)$ является калибровочным инвариантом по отношению к калибровочным преобразованиям (3.15). Из формулы (3.13) следует, что тензор Нийенхейса $N_A(u, v)$ не является калибровочным инвариантом.

§ 4. Общие алгебраические тождества для тензоров Нийенхейса и Хаантжеса

4.1. Для произвольного многочлена $B(A, x)$ (см. (3.1)) мы введем следующий альтернирующий (1,2)-тензор:

$$\begin{aligned} Z_B(u, v) &= \sum_{m=2}^k b_m(x) \sum_{p+q+r=m-2} A^p N_A(A^q u, A^r v) \\ &+ \sum_{m=0}^k [v(b_m)A^m u - u(b_m)A^m v]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

ЛЕММА 4.1. *Справедливо тензорное тождество*

$$N_{B,A}(u, v) + N_{B,A}(v, u) = Z_B(Au, v) - Z_B(u, Av). \quad (4.2)$$

Действительно, это тождество проверяется прямой подстановкой в (4.2) формул (3.8) и (4.1).

ЛЕММА 4.2. *Если (1,1)-тензор $A_j^i(x)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению $B(A, x) = 0$, то справедливо тензорное равенство*

$$Z_B(Au, v) = Z_B(u, Av). \quad (4.3)$$

Действительно, уравнение $B(A, x) = 0$ влечет $N_{B,A}(u, v) = 0$. Поэтому уравнение (4.3) следует из тождества (4.2).

ТЕОРЕМА 4.1. Тензор Нийенхейса $N_A(u, v)$ удовлетворяет тензорному тождеству

$$\sum_{m=2}^n a_m(x) \sum_{p+q+r=m-2} A^p N_A(A^q u, A^r v) = \sum_{m=0}^n (u(a_m) A^m v - v(a_m) A^m u), \quad (4.4)$$

где $a_m(x)$ – коэффициенты характеристического многочлена

$$P(\lambda, x) = \det(A(x) - \lambda) = \sum_{m=0}^n a_m(x) \lambda^m. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что уравнение (4.4) имеет вид $Z_P(u, v) = 0$, где тензор $Z_P(u, v)$ определен формулой (4.1) при $B(\lambda, x) = P(\lambda, x)$. Предположим сначала, что (1,1)-тензор $A_j^i(x)$ имеет неравные собственные значения $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ с собственными векторами $e_1(x), \dots, e_n(x)$. По теореме Кэли–Гамильтона справедливо уравнение $P(A, x) = 0$. Следовательно, лемма 4.2 и уравнение (4.3) дают $(\lambda_i - \lambda_j) Z_P(e_i, e_j) = 0$. Отсюда в силу билинейности и косимметричности тензора $Z_P(u, v)$ следует $Z_P(u, v) = 0$. Используя замечание 2.1, мы получаем, что уравнение $Z_P(u, v) = 0$ и эквивалентное тождество (4.4) справедливы для любого (1,1)-тензора $A_j^i(x)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Тензор Хаантжеса $H_A(u, v)$ удовлетворяет тензорному тождеству

$$\sum_{m=2}^n a_m(x) \sum_{p+q+r=m-2} A^p H_A(A^q u, A^r v) = 0, \quad (4.6)$$

которое имеет вид

$$\tilde{Z}_P(u, v) = T_{R_P(z, \lambda, \mu)} H_A(u, v) = 0, \quad (4.7)$$

где $P = P(\lambda, x)$ – характеристический многочлен (4.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя оператор $T_{D(z, \lambda, \mu)}$, где D имеет вид (2.9), к тождеству (4.4) и используя соотношения (2.8) и (2.10), мы получаем тождество (4.6). Вследствие формул (2.16) и (2.17) это тождество имеет вид (4.7).

4.2. При $n = 2$ характеристический многочлен (4.5) имеет вид

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (\text{Tr } A)\lambda + \det A = 0,$$

поэтому из тождества (4.4) следует

$$N(u, v) = u(\det A)v - v(\det A)u - u(\text{Tr } A)Av + v(\text{Tr } A)Au.$$

Для $n = 3$ характеристический многочлен (4.5) есть

$$P(\lambda) = \lambda^3 - (\text{Tr } A)\lambda^2 + a_1\lambda - \det A = 0,$$

где $2a_1 = (\text{Tr } A)^2 - \text{Tr}(A^2)$. Поэтому тождество (4.4) влечет равенство

$$(A - \text{Tr } A)N_A(u, v) + N_A(Au, v) + N_A(u, Av) = v(\det A)u - u(\det A)v - v(a_1)Au + u(a_1)Av + v(\text{Tr } A)A^2v - u(\text{Tr } A)A^2u.$$

При $n = 3$ тождество (4.6) принимает вид

$$(A - \text{Tr } A)H_A(u, v) + H_A(Au, v) + H_A(u, Av) = 0. \quad (4.8)$$

Следствием тождества (4.8) является важное свойство, что тензор Хаантжеса определяет структуру алгебр Ли в касательных пространствах $T_x(M^3)$ (см. далее §5).

§5. Специальные алгебраические тождества для $n = 3$

Обозначим

$$N(u, v) = N_A(u, v), \quad H(u, v) = H_A(u, v), \quad M(u, v) = N(Au, v) - AN(u, v)$$

и введем линейные операторы $N_u(v) = N(u, v)$, $H_u(v) = H(u, v)$, $M_u(v) = M(u, v)$. Очевидно, мы имеем

$$M_u = N_{Au} - AN_u, \quad H_u = [M_u, A]. \quad (5.1)$$

Уравнения (5.1) влекут равенства

$$\text{Tr } H_u = 0, \quad \text{Tr}(A^k H_u) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Рассмотрим симметрическую билинейную форму $(u, v)_H = \text{Tr}(H_u H_v)$ и альтернирующий (1,3)-тензор [4]–[6]

$$B_H(u, v, w) = H(H(u, v), w) + H(H(v, w), u) + H(H(w, u), v). \quad (5.3)$$

Отсюда мы получаем для линейного оператора $B_{uv}(w) = B_H(u, v, w)$, что

$$B_{uv} = H_{H(u, v)} - [H_u, H_v]. \quad (5.4)$$

ТЕОРЕМА 5.1. *При $n = 3$ тензоры Нийенхейса и Хаантжеса имеют следующие свойства:*

- 1) *тензор Хаантжеса $H(u, v)$ определяет структуру алгебр Ли в касательных пространствах $T_x(M^3)$;*
- 2) *операторы H_w являются кососимметрическими по отношению к билинейной форме $(u, v)_H$:*

$$(H_w u, v)_H = -(u, H_w v)_H; \quad (5.5)$$

- 3) *операторы $A_j^i(x)$ являются симметрическими по отношению к форме $(u, v)_H$:*

$$(Au, v)_H = (u, Av)_H; \quad (5.6)$$

- 4) *тензор Нийенхейса $N(u, v)$ удовлетворяет следующему тождеству:*

$$\begin{aligned} & (B(A)N(u, v), w)_H + (B(A)N(v, w), u)_H + (B(A)N(w, u), v)_H \\ & = R_B(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)(H(u, v), w)_H, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $B(A, x)$ – произвольный многочлен (3.1), $R_B(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – соответствующий симметрический многочлен (2.14), $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ и $\lambda_3(x)$ – собственные значения (1,1)-тензора $A_j^i(x)$ и $u, v, w \in T_x(M^3)$ – произвольные касательные векторы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) При $n = 3$ альтернирующий тензор B_{ijk}^s имеет ненулевые компоненты только при $i \neq j \neq k$. Пусть $s = k$; тогда мы имеем

$$B_{ijk}^k = B_{ijk}^k + B_{iji}^i + B_{ijj}^j = \text{Tr}(B_{e_i e_j}).$$

Уравнения (5.2) и (5.4) дают $\text{Tr}(B_{uv}) = 0$. Следовательно, все компоненты B_{ijk}^s равны нулю или тензор $B_H(u, v, w)$ тождественно равен нулю.

2) Уравнение (5.5) следует из общей теории алгебр Ли, поскольку при $n = 3$ билинейная форма $(u, v)_H$ является формой Картана–Киллинга.

3) Предположим сначала, что оператор $A_j^i(x)$ имеет не равные (комплексные) собственные значения $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)$ и соответствующие собственные векторы $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$, $Ae_i = \lambda_i e_i$, принадлежащие комплексификации касательного расслоения $T(M^3)$.

Из формулы (2.7) имеем

$$H(e_i, e_j) = (A - \lambda_i)(A - \lambda_j)N(e_i, e_j). \quad (5.8)$$

Применяя оператор $(A - \lambda_k)$ к (5.8) и используя теорему Кэли–Гамильтона при $n = 3$, получаем

$$(A - \lambda_k)H(e_i, e_j) = P(A)N(e_i, e_j) = 0.$$

Отсюда мы находим $H(e_i, e_j) = H_{ij}^k e_k$ при $i \neq j \neq k$. Эти соотношения влекут $H_{e_i} H_{e_j} e_i = H_{ji}^k H_{ik}^j e_j$, $H_{e_i} H_{e_j} e_j = 0$, $H_{e_i} H_{e_j} e_k = 0$. Следовательно,

$$(e_i, e_j)_H = \text{Tr}(H_{e_i} H_{e_j}) = 0, \quad i \neq j. \quad (5.9)$$

Уравнение (5.6) является очевидным следствием уравнений $Ae_i = \lambda_i e_i$ и (5.9). Используя замечание 2.1, мы получаем, что тождество (5.6) справедливо для произвольного (1,1)-тензора $A_j^i(x)$.

4) Предположим сначала, что тензор $A_j^i(x)$ имеет различные собственные значения $\lambda_k(x)$. Левая часть равенства (5.7) является альтернирующей, поскольку тензор Нийенхейса является альтернирующим. Правая часть (5.7) является альтернирующей в силу тождества (5.5). Поэтому достаточно доказать тождество (5.7) только для собственных векторов $u = e_1(x), v = e_2(x), w = e_3(x)$. Применим оператор $B(A, x)$ (см. (3.1)) к равенству (5.8) и затем рассмотрим скалярное произведение $(u, v)_H$ результирующего вектора с собственным вектором e_k . Используя тождество (5.6) и уравнения $Ae_i = \lambda_i e_i$, получаем равенство

$$(B(A)N(e_i, e_j), e_k)_H = B(\lambda_k)(\lambda_k - \lambda_i)^{-1}(\lambda_k - \lambda_j)^{-1}(H(e_i, e_j), e_k)_H.$$

Вследствие (5.5) находим

$$\begin{aligned} & (B(A)N(e_i, e_j), e_k)_H + (B(A)N(e_j, e_k), e_i)_H + (B(A)N(e_k, e_i), e_j)_H \\ & = R_B(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k)(H(e_i, e_j), e_k)_H, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_B(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) &= B(\lambda_i)(\lambda_i - \lambda_k)^{-1}(\lambda_i - \lambda_j)^{-1} + B(\lambda_j)(\lambda_j - \lambda_i)^{-1}(\lambda_j - \lambda_k)^{-1} \\ &+ B(\lambda_k)(\lambda_k - \lambda_j)^{-1}(\lambda_k - \lambda_i)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Из тождества (2.15) следует, что функция (5.10) совпадает с симметрическим многочленом $R_B(z, \lambda, \mu)$ (2.14). Поэтому тождество (5.7) доказано в силу билинейности, если $\lambda_1(x) \neq \lambda_2(x) \neq \lambda_3(x)$. Применяя замечание 2.1, мы получаем, что тождество (5.7) справедливо для произвольного $(1,1)$ -тензора $A_j^i(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Для любого многочлена второй степени

$$B(A, x) = b_2(x)A^2(x) + b_1(x)A(x) + b_0(x)$$

из формулы (2.14) имеем $R_B(z, \lambda, \mu) = b_2(x)$. Поэтому тождество (5.7) при $B(A) = 1$, A, A^2 влечет равенства

$$\begin{aligned} (N(u, v), w)_H + (N(v, w), u)_H + (N(w, u), v)_H &= 0, \\ (AN(u, v), w)_H + (AN(v, w), u)_H + (AN(w, u), v)_H &= 0, \\ (A^2N(u, v), w)_H + (A^2N(v, w), u)_H + (A^2N(w, u), v)_H &= (H(u, v), w)_H. \end{aligned}$$

Эти тождества имеют обобщения (см. [5], [6]) на n -мерный случай для специальных $(1,1)$ -тензоров $A_j^i(x)$, соответствующих гамильтоновым системам (1.2).

Список литературы

1. *Nijenhuis A.* X_{n-1} -forming sets of eigenvectors // Proc. Kon. Ned. Akad. Amsterdam. 1951. V. 54. P. 200–212.
2. *Nijenhuis A.* Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields // Proc. Kon. Ned. Akad. Amsterdam. 1955. V. 58. P. 390–403.
3. *Haantjes J.* On X_m -forming sets of eigenvectors // Proc. Kon. Ned. Akad. Amsterdam. 1955. V. 58. P. 158–162.
4. *Bogoyavlenskij O. I.* Existence of Riemann invariants and Hamiltonian structures // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1993. V. 15. P. 143–148.
5. *Bogoyavlenskij O. I.* Necessary conditions for existence of non-degenerate Hamiltonian structures // Commun. Math. Phys. 1996. V. 182. P. 253–290.
6. *Bogoyavlenskij O. I.* Courant's problems and their extensions // Proceedings of VII International Conference on hyperbolic problems, International Series of Numerical Mathematics. V. 129. Basel: Birkhauser Verlag, 1999. P. 97–104.
7. *Lichnerowicz A.* Les varietes de Poisson et leurs algebres de Lie associees // J. Diff. Geom. 1977. V. 12. P. 253–300.
8. *Nijenhuis A., Richardson R. W.* Deformations of Lie algebra structures // J. Math. Mech. 1967. V. 17. P. 89–105.
9. *Newlander A., Nirenberg L.* Complex analytic coordinates in almost-complex manifolds // Ann. Math. 1957. V. 65. P. 391–404.
10. *DeBarros C. M.* Varietes presque hor-complexes // C. R. Acad. Sc. Paris. 1965. V. 260. P. 1543–1546.
11. *Lehmann-Lejeune J.* Etude des formes differentielles liee a certaines G -structures // C. R. Acad. Sc. Paris. 1965. V. 260. P. 1838–1841.
12. *Lavandier J.* Tenseur de Nijenhuis et integralite des G -structures definies par une 1-forme vectorielle, O -deformable // C. R. Acad. Sc. Paris. 1994. V. 318. P. 135–138.
13. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* Скобка Схоутена и гамильтоновы операторы // Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. №3. С. 71–74.
14. *Magri F., Morosi C.* A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of the Poisson–Nijenhuis manifolds // Quaderno S/19. Preprint / Universita di Milano, 1984.
15. *Magri F.* A simple model of an integrable Hamiltonian system // J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 1156–1162.

16. *Kosmann-Schwarzbach Y., Magri F.* Poisson–Nijenhuis structures // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1990. V. 53. P. 35–81.
17. *Magri F., Morosi C., Ragnisco O.* Reduction techniques for infinite-dimensional Hamiltonian systems: some ideas and applications // Commun. Math. Phys. 1985. V. 99. P. 115–140.
18. *Magri F., Morosi C., Tondo G.* Nijenhuis G -manifold and Lenard bicomplexes: a new approach to KP systems // Commun. Math. Phys. 1988. V. 115. P. 457–475.
19. *Stone A. P.* Generalized conservation laws // Proceed. Amer. Math. Soc. 1967. V. 18. P. 868–873.
20. *Stone A. P.* Some remarks on the Nijenhuis tensor // Can. J. Math. 1973. V. 25. P. 903–907.
21. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория // УМН. 1989. Т. 44. №6. С. 29–98.
22. *Bogoyavlenskij O. I.* Necessary conditions for the existence of conservation laws for systems of partial differential equations // Symposia Gaussiana Conf. Berlin–N.Y.: Walter de Gruyter Co., 1995. P. 359–375.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Квинский университет, Кингстон, Канада
E-mail: bogoyavl@mast.queensu.ca

Поступило в редакцию
25.05.2004