Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Зайцев, О равномерной приближаемости функций полиномиальными решениями эллиптических уравнений второго порядка на плоских компактах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 6, 85–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/im512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:11:22

УДК 517.5

А. Б. Зайцев

**О равномерной приближаемости функций
полиномиальными решениями эллиптических
уравнений второго порядка на плоских компактах**

Исследуются условия равномерной приближаемости функций полиномиальными решениями эллиптических уравнений второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами на компактах в $\mathbb{R}^2$. Получены новые результаты редукционного характера, гарантирующие, что компакт является компактом аппроксимации, если таковыми являются некоторые специальные его подмножества, имеющие более простую топологическую структуру.

Библиография: 12 наименований.

§ 1. Введение

Пусть

$$L = c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2c_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (1)$$

– эллиптический оператор в $\mathbb{R}^2$ с постоянными комплексными коэффициентами c_{11}, c_{12} и c_{22} ($c_{11} \neq 0$). Эллиптичность оператора (1) означает, что корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения

$$c_{11}\lambda^2 + 2c_{12}\lambda + c_{22} = 0 \quad (2)$$

невещественны. Если, кроме того, мнимые части корней уравнения (2) имеют противоположные знаки, то оператор (1) называется *сильно эллиптическим*.

В настоящей работе изучаются необходимые и достаточные условия равномерной приближаемости функций *L-полиномами*, т. е. полиномиальными (по x_1, x_2) решениями уравнения

$$Lu = 0 \quad (3)$$

на плоских компактах.

Для более конкретного изложения введем необходимые нам в дальнейшем функциональные пространства.

Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^2$, $C(X)$ – пространство всех комплекснозначных непрерывных на X функций с равномерной нормой $\|f\|_X = \max_{x \in X} |f(x)|$.

Положим $A_L(X) = \{f \in C(X) : Lf = 0 \text{ на внутренней части } X^\circ \text{ компакта } X\}$. Через $A(X)$ обозначим пространство функций, непрерывных на X и голоморфных

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04-01-00720) и программы “Ведущие научные школы Российской Федерации” (проект № НШ-2040.2003.1).

на X° . Через $\mathcal{P}_L$ и $\mathcal{P}$ обозначим соответственно классы L -полиномов и полиномов комплексной переменной, а через $P_L(X)$ и $P(X)$ – замыкания в $C(X)$ пространств $\{p|_X: p \in \mathcal{P}_L\}$ и $\{p|_X: p \in \mathcal{P}\}$ соответственно. Пусть $R(X)$ – замыкание в $C(X)$ сужения на X множества рациональных функций с полюсами вне X . При $n \geq 2$ пусть $P_n(X)$ означает замыкание в $C(X)$ сужения на X пространства полиномиальных решений уравнения $\bar{\partial}^n u = 0$ (здесь и далее $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2})$ – оператор Коши–Римана), а $A_n(X) = \{f \in C(X): \bar{\partial}^n f = 0 \text{ на } X^\circ\}$. Если Y – компактное подмножество в X , то через $R_L(Y, X)$ (соответственно, через $R(Y, X)$ или $R_n(Y, X)$ при $n \geq 2$) обозначим замыкание в $C(Y)$ пространства функций, определенных и удовлетворяющих уравнению (3) (соответственно, голоморфных или удовлетворяющих уравнению $\bar{\partial}^n u = 0$) в некоторой (своей для каждой функции) окрестности компакта X .

Мы ограничимся рассмотрением следующей задачи.

ЗАДАЧА. *Каковы условия, налагаемые на компактное множество X , являющиеся необходимыми и достаточными для совпадения пространств $P_L(X)$ и $A_L(X)$?*

Для случая гармонических аппроксимаций ($L = \Delta$ – лапласиан) решение данной задачи дает следующая теорема Уолша–Лебега (см. [1, с. 503], [2, с. 56]), которую мы приведем в том виде, в котором она сформулирована в [3, с. 107]: $P_\Delta(X) = A_\Delta(X)$ тогда и только тогда, когда $\partial X = \partial \hat{X}$, где ∂X – граница компакта X , а $\hat{X}$ – объединение X и всех ограниченных компонент множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$.

Компакт с условием $\partial X = \partial \hat{X}$ называется *компактом Каратеодори*. Используя линейную невырожденную замену переменных в $\mathbb{R}^2$, утверждение теоремы Уолша–Лебега можно дословно обобщить для оператора L с условием $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$.

П. В. Парамонов и К. Ю. Федоровский [4, теорема 1.1, (2)] доказали, что если $\mathbb{R}^2 \setminus X$ связно (т. е. $X = \hat{X}$), то $P_L(X) = A_L(X)$ для всех эллиптических операторов L вида (1).

В работе [5, теорема 2.2, (2)] доказано, что если X – компакт Каратеодори в $\mathbb{R}^2$ с несвязным дополнением, то $P_n(X) = A_n(X)$ тогда и только тогда, когда $R_n(\partial G, \bar{G}) = C(\partial G)$ для любой ограниченной связной компоненты G множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$. В этой же работе было доказано [5, теорема 4.3, (1)], что если D – жорданова область со спрямляемой границей, удовлетворяющей определенному условию аналитического характера, K – компакт, лежащий в D , $P_n(K) = A_n(K)$, то $P_n(K \cup \partial D) = A_n(K \cup \partial D)$.

А. Буаве, П. Готье и П. В. Парамонов доказали [6, теорема 3], что если X – компакт в $\mathbb{R}^2$ с несвязным дополнением, то для выполнения равенства $P_n(X) = A_n(X)$ необходимо и достаточно, чтобы для любой связной компоненты G множества $\hat{X}^\circ$, содержащей точки множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$, выполнялось равенство

$$R_n(\bar{G} \cap X, \bar{G}) = A_n(\bar{G} \cap X).$$

Пусть D – область Каратеодори (т. е. $\partial D = \partial \hat{D}$), ω – некоторое конформное отображение B на D , функция f голоморфна в D . Скажем, что $f \in AC(D)$, если $f(\omega(w))$ продолжается до функции, непрерывной на $\bar{B}$ и абсолютно непрерывной на ∂B .

Из свойств конформного отображения следует, что каждая функция f класса $AC(D)$ имеет в каждой достижимой граничной точке z_0 области D пределы, и при том равные по всем путям, лежащим в D и оканчивающимся в этой точке, которые мы обозначим через $f(z_0)$.

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и

$$T_{(1)}: z \rightarrow x_1 + \frac{1}{\lambda_1} x_2, \quad T_{(2)}: z \rightarrow x_1 + \frac{1}{\lambda_2} x_2$$

– линейные невырожденные отображения плоскости $\mathbb{R}^2$. Пусть D – область Каратеодори. Скажем, что D является L -специальной, если существуют непостоянные функции $F_1 \in AC(T_{(1)}(D))$ и $F_2 \in AC(T_{(2)}(D))$ такие, что в каждой достижимой граничной точке ζ области D имеет место равенство $F_1(T_{(1)}\zeta) = F_2(T_{(2)}\zeta)$.

В работе [7] было доказано, что если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, X – компакт в $\mathbb{R}^2$, то $P_L(\partial\hat{X}) = C(\partial\hat{X})$ тогда и только тогда, когда каждая связная компонента множества $\hat{X}^\circ$ не является L -специальной областью (см. [7, теорема 1 и предложение 1]). В частности (см. [7, следствие 1]), если L – сильно эллиптический оператор, то L -специальных областей не существует, следовательно, $P_L(\partial\hat{X}) = C(\partial\hat{X})$ для любого компакта X в $\mathbb{R}^2$. Последний результат следует также из теоремы О’Фаррелла [8, теорема 1]. Если X – компакт Каратеодори в $\mathbb{R}^2$ с несвязным дополнением, $P_L(\partial G) = C(\partial G)$ для любой связной ограниченной компоненты G множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$, то $P_L(X) = A_L(X)$ [7, теорема 2]. В частности, если L – сильно эллиптический оператор, X – компакт Каратеодори, то $P_L(X) = A_L(X)$ [7, следствие 2]. В этой же работе показано [7, примеры 1 и 2], что если L – эллиптический, но не сильно эллиптический оператор с условием $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то существуют как L -специальные области, так и области, не являющиеся L -специальными.

П. В. Парамонов и К. Ю. Федоровский сформулировали следующую гипотезу (см. [4, гипотеза 4.1, (2)]): если L – сильно эллиптический оператор, то для выполнения равенства $P_L(X) = A_L(X)$ необходимо и достаточно, чтобы X являлся компактом Каратеодори. Необходимые условия данной гипотезы не доказаны.

В работе [9] результат из [7, теорема 2] был обобщен на случай произвольного компакта X с несвязным дополнением. Было доказано [9, теорема 1], что если $A_L(X) = R_L(X, X)$ и для любой связной компоненты G множества $\hat{X}^\circ$, содержащей точки множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$, имеет место равенство $P_L(\overline{G} \cap X) = A_L(\overline{G} \cap X)$, то $P_L(X) = A_L(X)$. В этой же работе было доказано, что для каждого эллиптического, но не сильно эллиптического оператора L с условием $\lambda_1 \neq \lambda_2$ существуют компакты X (без внутренних точек) с условиями $\partial X \neq \partial\hat{X}$ и $P_L(X) = C(X)$ [9, предложение 2].

§ 2. Основные результаты

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^2$ с несвязным дополнением. Тогда для выполнения равенства $P_L(X) = A_L(X)$ необходимо и достаточно, чтобы для любой связной компоненты G множества $\hat{X}^\circ$, содержащей точки множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$, выполнялось равенство $R_L(\overline{G} \cap X, \overline{G}) = A_L(\overline{G} \cap X)$.

При $\lambda_1 = \lambda_2$ теорема 1 следует из [6, теорема 3].

Если X – компакт Каратеодори, то указанная в теореме 1 область G является ограниченной связной компонентой множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$. Таким образом, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$ – компакт Каратеодори с несвязным дополнением. Тогда для того, чтобы выполнялось равенство $P_L(X) = A_L(X)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $R_L(\partial G, \overline{G}) = C(\partial G)$ для любой связной ограниченной компоненты G множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то последнее условие эквивалентно тому, что G не является L -специальной областью.

При $\lambda_1 = \lambda_2$ следствие 1 следует из [5, теорема 2.2, (2)].

Пусть L – эллиптический оператор вида (1). Найдется невырожденное линейное преобразование T_L плоскости $\mathbb{R}^2$, приводящее оператор L к виду

$$\tilde{L} = c\bar{\partial}\partial_\beta, \quad (4)$$

где $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, $\beta \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, а

$$\partial_\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \beta i \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

в частности, для оператора (4) имеем $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = -\beta i$.

При $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ положим $z_\beta = x_1 + \frac{1}{\beta} i x_2$; тогда $T_\beta: z \rightarrow z_\beta$ – $\mathbb{R}$ -линейное невырожденное преобразование плоскости $\mathbb{R}^2$.

В настоящей работе также найдены новые достаточные условия приближаемости непрерывных функций L -полиномами на жордановых контурах (т.е. на замкнутых жордановых кривых) в $\mathbb{R}^2$ для случая, когда L – оператор вида (4) при $\beta > 1$ (т.е. L не является сильно эллиптическим), и, таким образом, найдены новые свойства жордановых L -специальных областей.

Пусть γ – жорданова аналитическая кривая. Тогда найдется функция $\varphi(z)$, называемая *функцией Шварца*, голоморфная в окрестности γ и удовлетворяющая условию $\bar{z} = \varphi(z)$ на γ (см. [10, лемма 1]). При $\beta > 1$ определим β -аналог функции Шварца. Пусть

$$\varphi_\beta(z) = \frac{1+\beta}{2\beta} z + \frac{\beta-1}{2\beta} \varphi(z).$$

Поскольку $z_\beta = \frac{1+\beta}{2\beta} z + \frac{\beta-1}{2\beta} \bar{z}$, то $z_\beta = \varphi_\beta(z)$ при всех $z \in \gamma$.

Имеет место следующая

ЛЕММА 1. Пусть D – жорданова область с аналитической границей Γ , $\beta > 1$, $\varphi_\beta(z)$ – голоморфная в окрестности Γ функция такая, что $z_\beta = \varphi_\beta(z)$ на Γ . Тогда существует область $D_* \subset D$ такая, что $\Gamma \subset \partial D_*$, $\overline{\partial D_*} \setminus \Gamma \subset D$, φ_β голоморфна в D_* , $\varphi_\beta(D_*) \subset T_\beta(D)$ и отображение $\varphi_\beta: D_* \rightarrow \varphi_\beta(D_*)$ взаимно однозначно.

ТЕОРЕМА 2. Пусть D – жорданова область с границей Γ , содержащей дугу аналитического контура $\Gamma_0 \subset \overline{D}$. Пусть L – оператор вида (4) при $\beta > 1$, $P_L(\Gamma_0) = C(\Gamma_0)$. Тогда область D не является L -специальной, т.е. $P_L(\Gamma) = C(\Gamma)$.

Спрямым жорданов контур Γ называется *неванлинновским* (см. [10, определение 3]), если существуют функции $f(z)$ и $g(z)$, $g \neq 0$, ограниченные и голоморфные в области D , ограниченной контуром Γ , такие, что почти всюду на Γ имеет место равенство $\bar{\zeta} = \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)}$ в смысле угловых граничных значений.

Аналитический жорданов контур Γ является неванлинновским тогда и только тогда, когда функция Шварца $\varphi(z)$ (и, очевидно, функция $\varphi_\beta(z)$ при всех $\beta > 1$) продолжается до функции, мероморфной внутри Γ [10, предложение 1].

ТЕОРЕМА 3. Пусть D – жорданова область с аналитической неванлинновской границей Γ , L – оператор вида (4) при $\beta > 1$. Тогда область D не является L -специальной, т. е. $P_L(\Gamma) = C(\Gamma)$.

Из теорем 2 и 3 непосредственно получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть D – жорданова область с границей Γ , содержащей дугу аналитического неванлинновского контура $\Gamma_0 \subset \overline{D}$. Пусть L – оператор вида (4) при $\beta > 1$. Тогда область D не является L -специальной, т. е. $P_L(\Gamma) = C(\Gamma)$.

Пусть σ – конечная борелевская мера с компактным носителем в $\mathbb{R}^2$. Тогда через $\text{supp}(\sigma)$ обозначим носитель σ , через $|\sigma|$ – соответствующую вариационную меру, а через $\hat{\sigma}$ – преобразование Коши меры σ , т. е.

$$\hat{\sigma}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\sigma(z)}{z - t}.$$

Обозначим через Φ специальное фундаментальное решение уравнения (3). В частности, если L – оператор вида (4) при $\beta > 1$, то $\Phi(z) = c_0 \ln \frac{z}{z_\beta}$ при $z \neq 0$, где c_0 – некоторая ненулевая комплексная константа. При $t \in \mathbb{R}^2 \setminus \text{supp}(\sigma)$ положим

$$(\sigma * \Phi)(t) = \int \Phi(z - t) d\sigma(z).$$

Следующая теорема является аналогом теоремы 4.3, (1) работы [5] для случая $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (т. е. $\beta \neq 1$).

ТЕОРЕМА 4. Пусть L – оператор вида (4) при $\beta > 1$, D – жорданова область со спрямляемой границей Γ , K – компакт, лежащий в D и удовлетворяющий условию $P_L(K) = A_L(K)$. Предположим, что не существует функций F , F_β и меры σ со следующими свойствами:

- 1) $F \in AC(\overline{D})$, $F_\beta \in AC(T_\beta(\overline{D}))$, $\text{supp}(\sigma) \subseteq K$;
- 2) при всех $z \in \Gamma$, но не при всех $z \in D \setminus \hat{K}$

$$(\sigma * \Phi)(z) = F(z) - F_\beta(z_\beta). \quad (5)$$

Тогда $P_L(\Gamma \cup K) = A_L(\Gamma \cup K)$.

Приведем примеры использования теоремы 4.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть L – оператор вида (4) при $\beta > 1$, D – не являющаяся L -специальной жорданова область с аналитической границей Γ , φ_β – голоморфная в окрестности Γ функция такая, что $z_\beta = \varphi_\beta(z)$ на Γ , $D_* \subset D$ – область, определенная в лемме 1. Пусть K – компакт со следующими свойствами:

- 1) $\widehat{K} \subset D_*, T_\beta(\widehat{K}) \subset \varphi_\beta(D_*)$;
 - 2) $\varphi_\beta(\widehat{K}) \cap T_\beta(\widehat{K}) = \emptyset$;
 - 3) $P_L(K) = A_L(K)$.
- Тогда $P_L(\Gamma \cup K) = A_L(\Gamma \cup K)$.

Пусть $x_2 = \tilde{k}x_1$ — прямая в $\mathbb{R}^2$. Тогда уравнение данной прямой может быть представлено в виде

$$z_\beta = ke^{i\theta}z, \quad (6)$$

где

$$k = \left| \frac{1 + \frac{\tilde{k}}{\beta}i}{1 + \tilde{k}i} \right|, \quad \theta = \arg \frac{1 + \frac{\tilde{k}}{\beta}i}{1 + \tilde{k}i}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Для прямой $x_1 = 0$ имеем $k = \frac{1}{\beta}$, $\theta = 0$. Обратно, множеством решений уравнения (6) является либо точка 0, либо некоторая прямая. Найдем условия, при которых множество решений уравнения (6) является прямой.

Уравнение (6) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} x_1 &= (k \cos \theta)x_1 - (k \sin \theta)x_2, \\ \frac{x_2}{\beta} &= (k \cos \theta)x_2 + (k \sin \theta)x_1. \end{aligned}$$

Множество решений данной системы является прямой тогда и только тогда, когда $k^2 - k\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \cos \theta + \frac{1}{\beta} = 0$.

Таким образом, при фиксированном θ_0 существует не более двух прямых, уравнение которых имеет вид (6) при $k > 0$, $\theta = \theta_0$. Если две прямые задаются уравнениями $z_\beta = ke^{i\theta_1}z$ и $z_\beta = ke^{i\theta_2}z$, где $k > 0$, то эти прямые либо совпадают (тогда $\theta_1 = \theta_2$), либо являются взаимно сопряженными, т.е. задаются уравнениями $x_2 = \tilde{k}x_1$ и $x_2 = -\tilde{k}x_1$, $\tilde{k} \neq 0$ (в этом случае $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$).

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть L — оператор вида (4) при $\beta > 1$, D — жорданова область с границей Γ , содержащей отрезок l_1 прямой $z_\beta = k_1e^{i\theta_1}z$ и отрезок l_2 прямой $z_\beta = k_2e^{i\theta_2}z$, где $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, причем либо $k_1 \neq k_2$, либо $k_1 = k_2$, $\theta_1 = 2\pi - \theta_2$, $\frac{\theta_1}{\pi}$ иррационально. Пусть $K \subset D$ — компакт такой, что $P_L(K) = A_L(K)$, точка 0 принадлежит $D \setminus \widehat{K}$, отрезок l_1 — границе компоненты множества $k_1^{-1}e^{-i\theta_1}T_\beta(D \setminus \widehat{K}) \cap (D \setminus \widehat{K})$, содержащей точку 0, отрезок l_2 — границе компоненты множества $k_2^{-1}e^{-i\theta_2}T_\beta(D \setminus \widehat{K}) \cap (D \setminus \widehat{K})$, содержащей точку 0. Тогда $P_L(\Gamma \cup K) = A_L(\Gamma \cup K)$.

Из следствия 4 непосредственно получаем

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть L — оператор вида (4) при $\beta > 1$, D — жорданова область такая, как в следствии 4. Предположим, что $0 \in D$, отрезок l_1 принадлежит границе компоненты множества $k_1^{-1}e^{-i\theta_1}T_\beta(D) \cap D$, содержащей точку 0, отрезок l_2 — границе компоненты множества $k_2^{-1}e^{-i\theta_2}T_\beta(D) \cap D$, содержащей точку 0. Тогда $P_L(\Gamma) = C(\Gamma)$.

§ 3. Доказательства

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть T_L – линейное невырожденное преобразование плоскости $\mathbb{R}^2$, приводящее оператор L к виду (4).

Нетрудно показать, что $u \in A_L(X)$ тогда и только тогда, когда $u \circ T_L^{-1} \in A_{\tilde{L}}(T_L(X))$. В частности, $p \in \mathcal{P}_L$ тогда и только тогда, когда $p \circ T_L^{-1} \in \mathcal{P}_{\tilde{L}}$. Таким образом, $u \in P_L(X)$ тогда и только тогда, когда $u \circ T_L^{-1} \in P_{\tilde{L}}(T_L(X))$. Отсюда следует, что $P_L(X) = A_L(X)$ тогда и только тогда, когда $P_{\tilde{L}}(T_L(X)) = A_{\tilde{L}}(T_L(X))$. Кроме того, линейное невырожденное преобразование плоскости сохраняет топологические свойства компактов, а также свойство аналитичности кривых. Поэтому ввиду сказанного выше, не ограничивая общности, будем доказывать теорему для операторов L вида (4).

В случае $\lambda_1 = \lambda_2$ теорема следует из [6, теорема 3], поэтому рассмотрим случай $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Докажем сначала достаточность условий теоремы. Каждая функция класса $A_L(X)$ может быть равномерно на X приближена функциями класса $C(\mathbb{R}^2)$, которые удовлетворяют уравнению (3) на X° и в некоторой (каждая в своей) окрестности множества $\partial \hat{X}$ (см. [4, доказательство теоремы 3.1] и [4, лемма 3.1]). Таким образом, достаточно доказать принадлежность классу $P_L(X)$ любой функции класса $A_L(X)$, продолжающейся до функции, удовлетворяющей уравнению (3) всюду в $\mathbb{R}^2$, за исключением некоторого компакта, полностью лежащего в некоторой (своей для каждой функции) связной компоненте множества $\hat{X}^\circ$. Следовательно, достаточно рассмотреть случай компакта X такого, что множество $\hat{X} \setminus X$ полностью содержится внутри одной связной компоненты G множества $\hat{X}^\circ$.

Пусть τ – некоторая борелевская комплекснозначная мера, $\mathcal{F}$ – некоторое подпространство пространства функций $C(X)$. Будем записывать $\tau \perp \mathcal{F}$, если $\int f d\tau = 0$ для всех $f \in \mathcal{F}$.

В силу теоремы Рисса–Маркова [11, теорема IV.17] достаточно доказать, что любая борелевская комплекснозначная мера μ на X с условием $\mu \perp P_L(X)$ удовлетворяет условию $\mu \perp A_L(X)$.

Итак, пусть $\mu \perp P_L(X)$. Из доказательства теоремы 1 работы [9] следует, что имеет место разложение $\mu = \mu_a + \mu_s$, где

$$\begin{aligned} \text{supp}(\mu_a) &\subseteq (X \cap \overline{G}), \\ \hat{\mu}_a(z) &= 0, \quad \int \frac{d\mu_a(\zeta)}{T_\beta(\zeta - z)} = 0 \end{aligned}$$

при всех $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$,

$$\text{supp}(\mu_s) \subseteq (X \setminus G), \quad \mu_s \perp A_L(X).$$

Вновь применяя доказательство теоремы 1 работы [9], получаем, что $\mu_a \perp R_L(X \cap \overline{G}, \overline{G})$. Из условия теоремы следует, что $\mu_a \perp A_L(X \cap \overline{G})$, следовательно, $\mu_a \perp A_L(X)$. Таким образом, $\mu \perp A_L(X)$. Достаточность условий теоремы доказана.

Докажем теперь необходимость условий теоремы. Пусть $P_L(X) = A_L(X)$, G – некоторая компонента множества $\hat{X}^\circ$, содержащая точки множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$. Каждая функция класса $A_L(X \cap \overline{G})$ может быть равномерно на $X \cap \overline{G}$ приближена

функциями класса $C(\mathbb{R}^2)$, которые удовлетворяют уравнению (3) в $X^\circ \cap G$ и в некоторой (каждая в своей) окрестности множества ∂G . Каждая такая функция, в свою очередь, представляется в виде суммы функций класса $A_L(X)|_{X \cap \overline{G}}$ и класса $R_L(X \cap \overline{G}, \overline{G})$ (см. [4, доказательство теорема 3.1]). Поскольку

$$P_L(X)|_{X \cap \overline{G}} \subseteq P_L(X \cap \overline{G}) \subseteq R_L(X \cap \overline{G}, \overline{G}), \quad P_L(X) = A_L(X),$$

то

$$A_L(X)|_{X \cap \overline{G}} \subseteq R_L(X \cap \overline{G}, \overline{G}).$$

Таким образом, $R_L(X \cap \overline{G}, \overline{G}) = A_L(X \cap \overline{G})$. Теорема доказана.

Заметим, что метод доказательства необходимости условий теоремы 1 был ранее применен при доказательстве теоремы 1 работы [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Легко доказать, что $\varphi'_\beta(z) \neq 0$ при всех $z \in \Gamma$. Поскольку функция φ_β взаимно однозначно отображает Γ на $T_\beta(\Gamma)$, то данная функция однолистка в некоторой окрестности контура Γ . Докажем, что функция φ_β отображает внутрь области $T_\beta(D)$ все точки области D , лежащие достаточно близко к Γ .

Пусть $a \in \Gamma$, γ_0 – дуга контура Γ_0 , одним из концов которой является точка a , γ – гладкая жорданова дуга, имеющая точку a одним из своих концов, не касающаяся кривой Γ в точке a , $\gamma \setminus \{a\} \subset D$. Будем считать, что угол между γ_0 и γ в точке a лежит в интервале $(0, \pi)$. Так как $\varphi_\beta(z)$ однолистка в окрестности точки a , то угол между $\varphi_\beta(\gamma_0)$ и $\varphi_\beta(\gamma)$ в точке $\varphi_\beta(a)$ равен углу между γ_0 и γ в точке a . Отображение T_β имеет диагональную матрицу с положительными диагональными элементами. Следовательно, угол между $T_\beta(\gamma_0)$ и $T_\beta(\gamma)$ в точке $\varphi_\beta(a)$ лежит в интервале $(0, \pi)$. Поскольку $\varphi_\beta(\gamma_0) = T_\beta(\gamma_0)$, то угол между $\varphi_\beta(\gamma_0)$ и $T_\beta(\gamma)$ в точке $\varphi_\beta(a)$ лежит в интервале $(0, \pi)$. Так как $T_\beta(\gamma \setminus \{a\}) \subset T_\beta$, то $\varphi_\beta(\gamma \setminus \{a\}) \subset T_\beta(D)$, если γ имеет достаточно малую длину. Таким образом, если V – достаточно малая окрестность точки a , то $\varphi_\beta(V \cap D) \subset T_\beta(D)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть D_0 – область, ограниченная контуром Γ_0 . Из условия теоремы 2 следует, что D_0 не является L -специальной областью. Пусть $\varphi_\beta(z)$ – голоморфная в окрестности Γ_0 функция такая, что $z_\beta = \varphi_\beta(z)$ на Γ_0 . Из леммы 1 следует, что существует область $D_* \subset D_0$ такая, что

$$\Gamma_0 \subset \partial D_*, \quad \overline{\partial D_* \setminus \Gamma_0} \subset D_0,$$

φ_β голоморфна в D_* и $\varphi_\beta(D_*) \subset T_\beta(D_0)$.

Пусть D является L -специальной областью. Тогда существуют непостоянные функции $F \in AC(\overline{D})$ и $F_\beta \in AC(T_\beta(\overline{D}))$ такие, что $F(z) = F_\beta(z_\beta)$ при всех $z \in \Gamma$. Поскольку $z_\beta = \varphi_\beta(z)$ при всех $z \in \Gamma_0$, то $F(z) = F_\beta(\varphi_\beta(z))$ при всех $z \in \Gamma \cap \Gamma_0$. Отсюда и из теоремы единственности Привалова [12, гл. X, § 2, теорема 1] следует, что последнее равенство сохраняется при всех $z \in D_* \cup \Gamma_0$. Таким образом, $F(z) = F_\beta(z_\beta)$ при всех $z \in \Gamma_0$. Очевидно, что $F \in AC(\overline{D}_0)$, $F_\beta \in AC(T_\beta(\overline{D}_0))$. Таким образом, D_0 – L -специальная область, что противоречит условиям теоремы. Следовательно, D не является L -специальной областью. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $\varphi_\beta(z)$ – голоморфная в окрестности Γ и мероморфная в D функция такая, что $z_\beta = \varphi_\beta(z)$ на Γ . Из леммы 1 следует, что функция φ_β отображает внутрь области $T_\beta(D)$ все точки области D , лежащие достаточно близко к Γ . Поскольку функция φ_β имеет полюсы в области D , то множество $\varphi_\beta(D) \cap T_\beta(\Gamma)$ непусто. Пусть $Y = \{z \in D: \varphi_\beta(z) \in T_\beta(\Gamma)\}$. Из предыдущих рассуждений следует, что Y – компактное подмножество области D . Пусть $D_1 = D \setminus \hat{Y}$. Так как $\varphi_\beta(D_1) \cap T_\beta(\Gamma) = \emptyset$, а $\varphi_\beta(D_1) \cap T_\beta(D) \neq \emptyset$, то функция φ_β не имеет полюсов в области D_1 . Поскольку $\varphi_\beta(\partial D_1) = T_\beta(\Gamma)$, то $\varphi_\beta(D_1) = T_\beta(D)$. Очевидно, что D_1 – неодносвязная область, следовательно, отображение $\varphi_\beta: D_1 \rightarrow T_\beta(D)$ неоднолистно.

Пусть D является L -специальной областью. Тогда существуют непостоянные функции $F \in AC(\bar{D})$ и $F_\beta \in AC(T_\beta(\bar{D}))$ такие, что $F(z) = F_\beta(z_\beta)$ при всех $z \in \Gamma$. Так как $z_\beta = \varphi_\beta(z)$ при всех $z \in \Gamma$, то $F(z) = F_\beta(\varphi_\beta(z))$ при всех $z \in \Gamma$. Отсюда и из теоремы единственности Привалова [12, гл. X, § 2, теорема 1] следует, что последнее равенство сохраняется при всех $z \in \bar{D}_1$. Поскольку F абсолютно непрерывна на Γ , то существует число c такое, что функция $F - c$ имеет нули в D_1 , ни один из которых не является нулем функции $\varphi'_\beta(z)$, и не имеет нулей на Γ .

Обозначим через N_c множество нулей функции $F - c$ в области D_1 . Очевидно, что N_c состоит из конечного числа точек. Так как $F(z) = F_\beta(\varphi_\beta(z))$ при $z \in D_1$, а $\varphi_\beta(D_1) = T_\beta(D)$, то множество $\varphi_\beta(N_c)$ совпадает с множеством нулей функции $F_\beta - c$ в области $T_\beta(D)$. Поскольку $\varphi_\beta(\partial D_1) = T_\beta(\Gamma)$, то отображение $\varphi_\beta: D_1 \rightarrow T_\beta(D)$ является собственным. Кроме того, так как данное отображение неоднолистно, то множество N_c содержит больше точек, чем множество $\varphi_\beta(N_c)$. Далее, если $z \in N_c$, то $\varphi'_\beta(z) \neq 0$, а значит, порядок нуля функции $F - c$ в точке z равен порядку нуля функции $F_\beta - c$ в точке $\varphi_\beta(z)$. Следовательно, число нулей функции $F - c$ в области D_1 с учетом кратности больше числа нулей функции $F_\beta - c$ в области $T_\beta(D)$. Таким образом, число нулей функции $F - c$ в области D с учетом кратности больше числа нулей функции $F_\beta - c$ в области $T_\beta(D)$. В то же время $F(z) - c = F_\beta(z_\beta) - c$ при всех $z \in \Gamma$, следовательно,

$$\Delta_\Gamma(\text{Arg}(F - c)) = \Delta_{T_\beta(\Gamma)}(\text{Arg}(F_\beta - c)),$$

что противоречит принципу аргумента. Следовательно, функции F и F_β являются константами. Таким образом, D является L -специальной областью, следовательно, $P_L(\Gamma) = C(\Gamma)$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть мера μ удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{supp}(\mu) \subseteq \Gamma \cup K, \quad \mu \perp \mathcal{P}_L.$$

Пусть $\sigma = \mu|_K$. Из работы [5, лемма 4.1] следует, что

$$d\mu = d\sigma + \hat{\sigma}(z) dz + f(z) dz,$$

где dz – дифференциал комплексной переменной z на Γ , $f \in E^1(D)$, а $f(z)$ – угловая предельная функция для f на Γ , существующая dz -п.в. на Γ .

Определим меру μ_β на $T_\beta(\Gamma \cup K)$ по формуле $\mu_\beta(S) = \mu(T_\beta^{-1}(S))$ для любого борелевского множества $S \subseteq T_\beta(\Gamma \cup K)$. Очевидно, $\mu_\beta \perp P(T_\beta(\Gamma \cup K))$. Пусть $\sigma_\beta = \mu_\beta|_{T_\beta(K)}$, $\eta = z_\beta$. Вновь применяя [5, лемма 4.1], получим

$$d\mu_\beta = d\sigma_\beta + \hat{\sigma}_\beta(\eta) d\eta + f_\beta(\eta) d\eta,$$

где $d\eta$ – дифференциал переменной η на $T_\beta\Gamma$, $f_\beta \in E^1(T_\beta(D))$, $f_\beta(\eta)$ – угловая предельная функция для f_β на $T_\beta(\Gamma)$, существующая $d\eta$ -п.в. на $T_\beta(\Gamma)$. Следовательно,

$$d\mu = d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\sigma(\zeta)}{T_\beta\zeta - z_\beta} dz_\beta + f_\beta(z_\beta) dz_\beta.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int \frac{d\sigma(\zeta)}{T_\beta\zeta - z_\beta} dz_\beta - \int \frac{d\sigma(\zeta)}{\zeta - z} dz \right) = f(z) dz - f_\beta(z_\beta) dz_\beta. \quad (7)$$

Пусть a – некоторая фиксированная точка на Γ , $\xi \in \Gamma$, $\xi \neq a$. Обозначим через $\Gamma_{a\xi}$ дугу контура Γ с концами в точках a и ξ такую, что направление от a к ξ вдоль $\Gamma_{a\xi}$ совпадает с направлением вдоль Γ против часовой стрелки. Поскольку при $t \in D$, $\xi \in \Gamma$, $\xi \neq a$, можно однозначно определить некоторые ветви логарифмов $\text{Ln}(\xi - t)$, $\text{Ln}(a - t)$, $\text{Ln } T_\beta(\xi - t)$, $\text{Ln } T_\beta(a - t)$, то имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a\xi}} \int \frac{d\sigma(\zeta)}{\zeta - z} dz = -\frac{1}{2\pi i} \int \int_{\Gamma_{a\xi}} \frac{dz}{z - \zeta} d\sigma(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int \ln \frac{\xi - \zeta}{a - \zeta} d\sigma(\zeta),$$

где $\ln \frac{\xi - \zeta}{a - \zeta}$ – соответствующая ветвь многозначного логарифма $\text{Ln} \frac{\xi - \zeta}{a - \zeta}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a\xi}} \int \frac{d\sigma(\zeta)}{T_\beta\zeta - z_\beta} dz_\beta &= -\frac{1}{2\pi i} \int \int_{\Gamma_{a\xi}} \frac{dz_\beta}{z_\beta - T_\beta\zeta} d\sigma(\zeta) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int \ln \frac{T_\beta(\xi - \zeta)}{T_\beta(a - \zeta)} d\sigma(\zeta), \end{aligned}$$

где $\ln \frac{T_\beta(\xi - \zeta)}{T_\beta(a - \zeta)}$ – соответствующая ветвь многозначного логарифма $\text{Ln} \frac{T_\beta(\xi - \zeta)}{T_\beta(a - \zeta)}$.

Пусть F и F_β – некоторые комплексные первообразные функций $2\pi i c_0 f$ и $2\pi i c_0 f_\beta$. Поскольку $f \in E^1(D)$, $f_\beta \in E^1(T_\beta(D))$, то F и F_β продолжаются до функций классов $AC(\overline{D})$ и $AC(T_\beta(\overline{D}))$ соответственно (см. [12, гл. III, § 7, с. 208]). При этом

$$\begin{aligned} F(\xi) - F(a) &= 2\pi i c_0 \int_{\Gamma_{a\xi}} f(z) dz, \\ F_\beta(T_\beta\xi) - F_\beta(T_\beta a) &= 2\pi i c_0 \int_{\Gamma_{a\xi}} f_\beta(z_\beta) dz_\beta. \end{aligned}$$

При соответствующем выборе констант $F(a)$ и $F_\beta(T_\beta a)$ из (7) следует, что при всех $z \in \Gamma$ имеет место равенство (5).

Из условия теоремы следует, что равенство (5) сохраняется при всех $z \in D \setminus \widehat{K}$.

Поскольку $\partial_\beta F_\beta(z_\beta) = 0$ при всех $z \in D$, а $\partial_\beta(\sigma * \Phi)(z) = c_1 \hat{\sigma}(z)$, где c_1 — некоторая ненулевая комплексная константа, а $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \hat{K}$, то $\partial_\beta F(z) = c_1 \hat{\sigma}(z)$ при всех $z \in D \setminus \hat{K}$. Из теоремы единственности для голоморфных функций следует, что функция $\hat{\sigma}(z)$ продолжается до функции, голоморфной всюду в $\mathbb{R}^2$. Однако $\hat{\sigma}(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Из теоремы Лиувилля для голоморфных функций следует, что $\hat{\sigma}(z) = 0$ при всех $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \hat{K}$. Но тогда $\partial_\beta F(z) = 0$ при всех $z \in D \setminus \hat{K}$, а значит, и при всех $z \in D$. Поэтому градиент функции F равен нулю в D . Следовательно, $f(z) = 0$ при всех $z \in D$. Таким образом, $\mu = \sigma$. Так как $\mu \perp P_L(\Gamma \cup K)$, то $\sigma \perp P_L(K)$. Из условия теоремы получаем, что $\sigma \perp A_L(K)$. Следовательно,

$$\mu \perp A_L(\Gamma \cup K), \quad P_L(\Gamma \cup K) = A_L(\Gamma \cup K).$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. Пусть $P_L(\Gamma \cup K) \neq A_L(\Gamma \cup K)$. Из теоремы 4 следует, что существуют функции $F \in AC(\overline{D})$, $F_\beta \in AC(T_\beta(\overline{D}))$ и мера σ на K такие, что равенство (5) выполнено всюду на Γ , но не при всех $z \in D \setminus \hat{K}$. Тогда при всех $z \in \Gamma$ выполнено равенство

$$F(z) - F_\beta(\varphi_\beta(z)) = c_0 \int \ln \frac{\zeta - z}{T_\beta \zeta - \varphi_\beta(z)} d\sigma(\zeta). \quad (8)$$

Используя теорему единственности Привалова, получим, что равенство (8) сохраняется во всех точках $z \in D$, достаточно близких к Γ . Дифференцируя обе части равенства (8) по z , получаем, что

$$F'(z) - F'_\beta(\varphi_\beta(z))\varphi'_\beta(z) = c_0 \left(\int \varphi'_\beta(z) \frac{d\sigma(\zeta)}{T_\beta \zeta - \varphi_\beta(z)} - \hat{\sigma}(z) \right) \quad (9)$$

при всех $z \in D$, достаточно близких к Γ .

Поскольку функция $\varphi_\beta(z)$ голоморфна в D_* и $\varphi_\beta(D_*) \subset T_\beta(D)$, то левая часть равенства (9) голоморфна в D_* . Так как отображение $\varphi_\beta: D_* \rightarrow \varphi_\beta(D_*)$ взаимно однозначно, а $T_\beta(\hat{K}) \subset \varphi_\beta(D_*)$, то множество $K_0 = \{z \in D_*: \varphi_\beta(z) \in T_\beta(\hat{K})\}$ является компактом со связным дополнением.

Из условия 2) следствия получаем, что $K_0 \cap \hat{K} = \emptyset$. Значит, функция $\hat{\sigma}(z)$ определена и голоморфна в окрестности компакта K_0 , а функция

$$g(z) = \int \frac{d\sigma(\zeta)}{T_\beta \zeta - \varphi_\beta(z)}$$

определена и голоморфна в окрестности компакта $\hat{K}$. Отсюда и из равенства (9) следует, что функции $\hat{\sigma}(z)$ и $g(z)$ продолжаются до функций, голоморфных в области D_* .

Поскольку функция $\hat{\sigma}(z)$ голоморфна вне компакта $\hat{K}$, то данная функция продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости. Но так как $\hat{\sigma}(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, то из теоремы Лиувилля для голоморфных функций следует, что $\hat{\sigma}(z) = 0$ при всех $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \hat{K}$.

Пусть $z \in D_*$, $w = \varphi_\beta(z)$. Поскольку функция φ_β однолистка в области D_* , то функция

$$g(\varphi_\beta^{-1}(w)) = \int \frac{d\sigma(\zeta)}{T_\beta \zeta - w}$$

продолжается до функции, голоморфной в области $\varphi_\beta(D_*)$, а значит, и на всей плоскости. Следовательно,

$$\int \frac{d\sigma(\zeta)}{T_\beta \zeta - z_\beta} = 0$$

при всех $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \widehat{K}$.

Таким образом, $(\sigma * \Phi)(z) = 0$ при всех $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \widehat{K}$. Поскольку на Γ выполняется равенство (5), то $F(z) = F_\beta(z_\beta)$ при всех $z \in \Gamma$. Так как область D не является L -специальной, то функции F и F_β являются константами. Но тогда равенство (5) выполняется всюду в области $D \setminus \widehat{K}$, что противоречит нашим предположениям. Таким образом, $P_L(\Gamma \cup K) = A_L(\Gamma \cup K)$. Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4. Пусть $P_L(\Gamma \cup K) \neq A_L(\Gamma \cup K)$. Из теоремы 4 следует, что существуют функции $F \in AC(\overline{D})$, $F_\beta \in AC(T_\beta(\overline{D}))$ и мера σ с носителем на K , удовлетворяющие равенству (5) при всех $z \in \Gamma$, но не при всех $z \in D \setminus \widehat{K}$. Из (5) следует, что

$$F(z) - F_\beta(k_1 e^{i\theta_1} z) = c_0 \int \ln \frac{\zeta - z}{T_\beta \zeta - k_1 e^{i\theta_1} z} d\sigma(\zeta) \quad (10)$$

при $z \in l_1$,

$$F(z) - F_\beta(k_2 e^{i\theta_2} z) = c_0 \int \ln \frac{\zeta - z}{T_\beta \zeta - k_2 e^{i\theta_2} z} d\sigma(\zeta) \quad (11)$$

при $z \in l_2$.

По теореме единственности Привалова равенства (10) и (11) сохраняются при всех $z \in D$, лежащих достаточно близко к отрезкам l_1 и l_2 соответственно. При $z \in D \setminus \widehat{K}$ обозначим

$$h(z) = F'(z) + c_0 \hat{\sigma}(z).$$

Пусть $\eta = T_\beta z$, σ_β — мера на $T_\beta(K)$, определенная по формуле $\sigma_\beta(S) = \sigma(T_\beta^{-1}(S))$. При $\eta \in T_\beta(D \setminus \widehat{K})$ обозначим

$$h_\beta(\eta) = F'_\beta(\eta) + c_0 \hat{\sigma}_\beta(\eta).$$

Дифференцируя по z левые и правые части равенств (10) и (11), получаем

$$h(z) = k_1 e^{i\theta_1} h_\beta(k_1 e^{i\theta_1} z) \quad (12)$$

при всех $z \in D$, лежащих достаточно близко к отрезку l_1 ,

$$h(z) = k_2 e^{i\theta_2} h_\beta(k_2 e^{i\theta_2} z) \quad (13)$$

при всех $z \in D$, лежащих достаточно близко к отрезку l_2 .

Из условия следствия следует, что равенства (12) и (13) выполняются в некоторой окрестности точки 0. Таким образом,

$$k_1 e^{i\theta_1} h_\beta(k_1 e^{i\theta_1} z) = k_2 e^{i\theta_2} h_\beta(k_2 e^{i\theta_2} z)$$

при всех z , достаточно близких к точке 0. Обозначим через H_β первообразную функции h_β , определенную в окрестности точки 0, такую, что $H_\beta(0) = 0$. Очевидно, что

$$H_\beta(k_1 e^{i\theta_1} z) = H_\beta(k_2 e^{i\theta_2} z) \quad (14)$$

при всех z , достаточно близких к точке 0.

Пусть функция $H_\beta(z)$ имеет нуль порядка $n > 0$ в точке 0. Тогда

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{H_\beta(k_1 e^{i\theta_1} z)}{k_1^n e^{in\theta_1} z^n} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{H_\beta(k_2 e^{i\theta_2} z)}{k_2^n e^{in\theta_2} z^n} \neq 0.$$

Отсюда и из равенства (14) следует, что $k_1^n e^{in\theta_1} = k_2^n e^{in\theta_2}$. Следовательно, $k_1 = k_2$, $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$, $e^{2in\theta_1} = 1$. Но тогда число $\frac{\theta_1}{\pi}$ является рациональным, что противоречит условию следствия. Таким образом, $H_\beta \equiv 0$. Следовательно, $h_\beta \equiv 0$. Из соотношения (12) следует, что $h \equiv 0$. Но тогда $F'(z) = -c_0 \hat{\sigma}(z)$ при всех $z \in D \setminus \hat{K}$. Таким образом, функция $\hat{\sigma}(z)$ продолжается до функции, голоморфной на всей комплексной плоскости. Поскольку

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \hat{\sigma}(z) = 0,$$

то из теоремы Лиувилля для голоморфных функций следует, что $\hat{\sigma}(z) = 0$ при всех $z \notin \hat{K}$. Следовательно, $F'(z) \equiv 0$. Таким образом, функция $F(z)$ является константой. Аналогично доказывается, что $\hat{\sigma}_\beta(\eta) = 0$ при всех $\eta \notin T_\beta(\hat{K})$, а функция F_β является константой. Следовательно,

$$\int \frac{d\sigma(\zeta)}{T_\beta(\zeta - z)} = 0$$

при всех $z \notin \hat{K}$. Таким образом, $\sigma \perp P_L(K)$. Значит, $(\sigma * \Phi)(z) = 0$ при всех $z \notin \hat{K}$. Из равенства (5) следует, что $F(z) = F_\beta(z_\beta)$ при всех $z \in \Gamma$. Поскольку функции F и F_β являются константами, то равенство (5) выполняется всюду в $D \setminus \hat{K}$, что противоречит нашим предположениям. Следовательно,

$$P_L(\Gamma \cup K) = A_L(\Gamma \cup K).$$

Следствие доказано.

Автор выражает искреннюю благодарность П.В. Парамонову за внимание к работе.

Список литературы

1. *Walsh J. L.* The approximation of harmonic functions by harmonic polynomials and by harmonic rational functions // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1929. V. 35. P. 499–544.
2. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.
3. *Парамонов П. В.* C^m -приближения гармоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^n$ // *Матем. сб.* 1993. Т. 184. № 2. С. 105–128.
4. *Парамонов П. В., Федоровский К. Ю.* О равномерной и C^1 -приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка // *Матем. сб.* 1999. Т. 190. № 2. С. 123–144.
5. *Кармона Х. Х., Парамонов П. В., Федоровский К. Ю.* О равномерной аппроксимации полианалитическими полиномами и задаче Дирихле для бианалитических функций // *Матем. сб.* 2002. Т. 193. № 10. С. 75–98.
6. *Буаве А., Готье П. М., Парамонов П. В.* О равномерной аппроксимации n -аналитическими функциями на замкнутых множествах в $\mathbb{C}$ // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2004. Т. 68. № 3. С. 15–28.
7. *Зайцев А. Б.* О равномерной приближаемости функций полиномами специальных классов на компактах в $\mathbb{R}^2$ // *Матем. заметки.* 2002. Т. 71. № 1. С. 75–87.
8. *O'Farrell A. G.* A generalized Walsh–Lebesgue Theorem // *Proc. Roy. Soc. Edinburg. Sect. A.* 1975. V. 73. № 1. P. 231–234.
9. *Зайцев А. Б.* О равномерной приближаемости функций полиномиальными решениями эллиптических уравнений второго порядка на компактах в $\mathbb{R}^2$ // *Матем. заметки.* 2003. Т. 74. № 1. С. 41–51.
10. *Федоровский К. Ю.* О равномерных приближениях функций n -аналитическими полиномами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$ // *Матем. заметки.* 1996. Т. 59. № 4. С. 604–610.
11. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
12. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики
(Технический университет)

Поступило в редакцию
31.05.2004