Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, О нижних оценках максимума модуля дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 6, 99–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/im513>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 10:21:32

УДК 511

А. А. Карацуба

О нижних оценках максимума модуля дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой

Получена нижняя оценка максимума модуля дзета-функции Римана на отрезках критической прямой, длина которых не превосходит двойного логарифма расстояния от центра отрезка до начала координат.

Библиография: 9 наименований.

§ 1. Постановка задачи. Формулировка теоремы

Определим функции $F(T; H)$ и $G(T; H)$ равенствами

$$F(T; H) = \max_{|T-t| \leq H} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|,$$

$$G(T; H) = \max_{|s-s_1| \leq H} |\zeta(s)|, \quad s_1 = \frac{1}{2} + iT.$$

Здесь $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, $s = \sigma + it$, $i^2 = -1$, $\sigma = \operatorname{Re} s$, $t = \operatorname{Im} s$, $T \geq T_1 > 0$, $H > 0$.

Кроме того, в статье применяются общепринятые обозначения: $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера; $\operatorname{ch} s$, $\operatorname{sh} s$ – косинус и синус гиперболические, $\operatorname{ch} s = \frac{1}{2}(e^s + e^{-s})$, $\operatorname{sh} s = \frac{1}{2}(e^s - e^{-s})$; A и c – абсолютные положительные постоянные, в разных утверждениях, вообще говоря, разные; постоянные в знаках O – абсолютные.

В работах [1], [2] автор доказал следующие неравенства:

$$F(T; \Delta) \geq e^{A \ln \Delta \ln T}, \quad \text{если } 0 < \Delta \leq (\ln T)^{-1}, \quad (1)$$

$$G(T; \Delta) \geq e^{6 \ln \Delta \ln T}, \quad \text{если } 0 < \Delta \leq \frac{1}{3}.$$

Там же сформулированы гипотезы о нижних оценках $F(T; \Delta)$ и $G(T; \Delta)$.

В статье [3] М. З. Гараев доказал неравенство (1) при $0 < \Delta \leq \frac{1}{3}$, установил связь между нижними оценками $G(T; \Delta)$ и $F(T; \Delta)$ при $\Delta = (\ln T)^{-1}$ и доказал, в предположении справедливости гипотезы Римана, основную гипотезу из [1]:

$$F(T; \Delta) \geq T^{-A}, \quad \Delta = (\ln T)^{-1}$$

(см. также [10]).

При больших значениях Δ , именно при $\Delta > \frac{1}{2}$, задача о нижней оценке $G(T; \Delta)$ становится тривиальной. При очень больших значениях H , именно при $c \ln \ln T \leq H \leq 0.1T$, нижняя оценка $F(T; H)$ получена Р. Баласубраманияном в [4] (см. также [5, с. 46] или [6, с. 209]) и выглядит следующим образом:

$$F(T; H) \geq \exp \left(\frac{3}{4} \sqrt{\frac{\ln H}{\ln \ln H}} \right).$$

Докажем теорему о нижней оценке $F(T; H)$ при $2 \leq H \leq \ln \ln T - c$.

ТЕОРЕМА. *Существуют абсолютные постоянные $c > 0$ и $T_1 > 0$ такие, что при $T \geq T_1$, $2 \leq H \leq \ln \ln T - c$ выполняется оценка*

$$F(T; H) \geq \frac{1}{8} T^{-\frac{1}{2(\operatorname{ch} H - 1)}}. \quad (2)$$

§ 2. ЛЕММЫ

Для доказательства теоремы потребуются следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. *Пусть $z > 0$, ν – комплексное число, $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$, $K_\nu(z)$ – интеграл Бессе,*

$$K_\nu(z) = \int_0^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{ch}(\nu t) dt.$$

Тогда справедлива следующая формула:

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})(2z)^\nu}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t dt}{(t^2 + z^2)^{\nu + \frac{1}{2}}}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [7, с. 191] или в [8, с. 254].

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $\nu = i\mu$, $\mu > 0$, то выполняется следующее неравенство:*

$$|K_{i\mu}(z)| \leq \frac{2|\Gamma(i\mu + \frac{1}{2})|}{\sqrt{\pi} z} \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{4}}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (3) получаем

$$|K_{i\mu}(z)| \leq \frac{|\Gamma(i\mu + \frac{1}{2})|}{\sqrt{\pi}} \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos t dt}{(t^2 + z^2)^{i\mu + \frac{1}{2}}} \right|. \quad (5)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \frac{d \sin t}{(t^2 + z^2)^{i\mu + \frac{1}{2}}} \right| &= \left| \left(i\mu + \frac{1}{2} \right) \int_0^{+\infty} \frac{2t \sin t dt}{(t^2 + z^2)^{i\mu + \frac{3}{2}}} \right| \\ &\leq \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{4}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{z} \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (5) следует (4).

ЛЕММА 2. *Пусть $z \geq 1$ и*

$$j(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} dt;$$

тогда

$$j(z) \geq \frac{4}{\sqrt{3}} z^{-\frac{1}{2}} e^{-z-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательно получаем

$$\begin{aligned} j(z) &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} dt = 2 \int_1^{+\infty} e^{-zu} \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = 2e^{-z} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-zw} dw}{\sqrt{w(w+2)}} \\ &\geq 2e^{-z} \int_0^{z^{-1}} \frac{e^{-zw} dw}{\sqrt{w(w+2)}} \geq 2e^{-z-1} \int_0^{z^{-1}} \frac{dw}{\sqrt{w(w+2)}} \\ &\geq \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-z-1} \int_0^{z^{-1}} \frac{dw}{\sqrt{w}} = \frac{4}{\sqrt{3}} z^{-\frac{1}{2}} e^{-z-1}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. При $-10 \leq \sigma \leq 10$, $t \geq t_1 > 0$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\Gamma(\sigma + it) = t^{\sigma - \frac{1}{2} + it} e^{-\frac{\pi}{2} t - it + i\frac{\pi}{2}(\sigma - \frac{1}{2})} \sqrt{2\pi} (1 + O(t^{-1})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [9, с. 331].

ЛЕММА 4. При $\pi x \geq t \geq 2\pi$, $0,1 \leq \sigma \leq 2$, $s = \sigma + it$ справедлива следующая формула:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-\sigma}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [9, с. 80].

§ 3. Доказательство теоремы

1. Пусть $T \geq T_1 > 0$, $\frac{1}{2}T \leq t \leq T$. Возьмем в лемме 4 $x = T$, $\sigma = \frac{1}{2}$; получаем

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{n \leq T} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{-it} + O(T^{-\frac{1}{2}}).$$

Пусть, далее, $1 \leq X \leq \sqrt{T}$, $s = \frac{1}{2} + it$,

$$M_X(s) = \sum_{n \leq X} \mu(n) n^{-s}.$$

Тогда, оценивая сверху модуль суммы суммой модулей слагаемых, находим

$$|M_X(s)| \leq \sum_{n \leq X} \frac{1}{\sqrt{n}} = O(\sqrt{X}).$$

Следовательно, произведение $\zeta(s)M_X(s)$ можно представить в следующем виде:

$$\zeta(s)M_X(s) = \sum_{n \leq XT} a(n) n^{-s} + O(\sqrt{XT^{-1}}), \quad (6)$$

где коэффициенты $a(n)$ определяются равенствами

$$a(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \leq X, n \leq dT}} \mu(d).$$

Если $n = 1$, то $a(n) = 1$; если $1 < n \leq X$, то

$$a(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = 0.$$

Кроме того, всегда $|a(n)| \leq \tau(n)$. Тем самым, соотношение (6) можно записать следующим образом:

$$\zeta(s)M_X(s) = 1 + \sum_{X < n \leq XT} a(n)n^{-s} + O(T^{-\frac{1}{4}}). \quad (7)$$

2. Рассмотрим интеграл

$$j = \int_{-H}^{+H} e^{-z \operatorname{ch} t} \zeta\left(\frac{1}{2} + i(T+t)\right) M_X\left(\frac{1}{2} + i(T+t)\right) dt, \quad (8)$$

где $z \geq 1$. Из определения интеграла $j(z)$, введенного в лемме 2, находим для $|j|$ верхнюю оценку:

$$|j| \leq 2F(T; H)j(z)\sqrt{X}. \quad (9)$$

С другой стороны, распространяя интегрирование в (8) на всю вещественную прямую и вычитая получившиеся лишние интегралы, представим интеграл j следующим образом:

$$j = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} \zeta\left(\frac{1}{2} + i(T+t)\right) M_X\left(\frac{1}{2} + i(T+t)\right) dt + R, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} |R| \leq & \int_H^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + i(T+t)\right) M_X\left(\frac{1}{2} + i(T+t)\right) \right| dt \\ & + \int_H^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + i(T-t)\right) M_X\left(\frac{1}{2} + i(T-t)\right) \right| dt. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\int_H^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} dt = \int_{\operatorname{ch} H}^{+\infty} \frac{e^{-zx} dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \leq \frac{1}{\operatorname{sh} H} \int_{\operatorname{ch} H}^{+\infty} e^{-zy} dy = \frac{e^{-z \operatorname{ch} H}}{z \operatorname{sh} H}.$$

Поэтому, оценивая тривиально $|\zeta(s)|$ и $|M_X(s)|$, получаем

$$R = O\left(\int_H^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} (T+t) dt\right) = O\left(T \frac{e^{-z \operatorname{ch} H}}{z \operatorname{sh} H}\right).$$

Пользуясь соотношениями (10) и (7), для интеграла j находим следующую асимптотическую формулу:

$$\begin{aligned} j = j(z) + & \sum_{X < n \leq XT} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} e^{-it \ln n} dt \\ & + O(j(z)T^{-\frac{1}{4}}) + O(Te^{-z \operatorname{ch} H} (z \operatorname{sh} H)^{-1}). \end{aligned} \quad (11)$$

3. Оценим сверху модуль суммы по n в (11). Применяя леммы 1 и 3, последовательно получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} e^{-it \ln n} dt \right| &= 2 \left| \int_0^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} \cos t \ln n dt \right| \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{\pi} z} \left| \Gamma\left(i \ln n + \frac{1}{2}\right) \right| \sqrt{\ln^2 n + \frac{1}{4}}, \\ \left| \Gamma\left(i \ln n + \frac{1}{2}\right) \right| &= O(n^{-\frac{\pi}{2}}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{X < n \leq XT} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} e^{-it \ln n} dt \right| &= O\left(\frac{1}{z} \sum_{X < n} \frac{\tau(n) \ln n}{n^{\frac{\pi+1}{2}}}\right) \\ &= O(z^{-1} X^{-\frac{\pi-1}{2}} \ln^2 X). \end{aligned} \quad (12)$$

Из (11) и (12) находим

$$j = j(z) + O(z^{-1} X^{-\frac{\pi-1}{2}} \ln^2 X) + O(j(z) T^{-\frac{1}{4}}) + O(T e^{-z \operatorname{ch} H} (z \operatorname{sh} H)^{-1}). \quad (13)$$

4. Из неравенства (9), формулы (13) и леммы 2 получаем

$$\begin{aligned} 2\sqrt{X} F(T; H) &\geq 1 - O(z^{-\frac{1}{2}} e^z X^{-\frac{\pi-1}{2}} \ln^2 X) \\ &\quad - O(T^{-\frac{1}{4}}) - O(T z^{-\frac{1}{2}} e^{-z(\operatorname{ch} H - 1)} (\operatorname{sh} H)^{-1}). \end{aligned} \quad (14)$$

Возьмем в этом соотношении

$$z = \frac{\ln T}{\operatorname{ch} H - 1}, \quad X = e^z.$$

Легко находим

$$z^{-\frac{1}{2}} e^z X^{-\frac{\pi-1}{2}} \ln^2 X = z^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi-3}{2} z}.$$

Поскольку $H \leq \ln \ln T - c$, то

$$\operatorname{ch} H \leq e^H \leq e^{-c} \ln T, \quad z = \frac{\ln T}{\operatorname{ch} H - 1} \geq \frac{\ln T}{\operatorname{ch} H} \geq e^c,$$

т.е. при большом $c > 0$ выполняется оценка

$$O(z^{-\frac{1}{2}} e^z X^{-\frac{\pi-1}{2}} \ln^2 X) = O(z^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi-3}{2} z}) \leq \frac{1}{4}. \quad (15)$$

Далее,

$$\frac{1}{\sqrt{z} \operatorname{sh} H} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch} H - 1}}{\operatorname{sh} H \sqrt{\ln T}} = \frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{H}{2} \sqrt{\ln T}} \leq \frac{1}{\sqrt{\ln T}}.$$

Поэтому при $T \geq T_1 > 0$ имеем

$$O(T^{-\frac{1}{4}}) \leq \frac{1}{4}, \quad O(T e^{-z(\operatorname{ch} H - 1)} z^{-\frac{1}{2}} (\operatorname{sh} H)^{-1}) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln T}}\right) \leq \frac{1}{4}. \quad (16)$$

Из полученных оценок O -членов (15), (16) и (14) находим

$$2\sqrt{X} F(T; H) \geq \frac{1}{4}, \quad F(T; H) \geq \frac{1}{8\sqrt{X}} = \frac{1}{8} T^{-\frac{1}{2(\text{ch } H - 1)}}.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Полагая в теореме $H = \ln \ln T - c$, получаем

$$F(T; H) \geq \frac{1}{8} e^{-2e^c}. \quad (17)$$

Таким образом, при $H \geq \ln \ln T - c$ выполняется (17).

§ 4. Замечания

1. Большой интерес представляет задача уточнения неравенства (2), в частности доказательство следующего результата:

$$F(T; 10) \geq T^{-\varepsilon(T)}, \quad (18)$$

где $\varepsilon(T) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow +\infty$.

2. Несколько более точное, чем (18), утверждение доказано в [3] М. З. Гараевым при условии, что справедлива гипотеза Римана:

$$F(T; 10) \geq F(T; \Delta) \geq T^{-\frac{A}{\ln \ln T}}, \quad \Delta = (\ln \ln T)^{-1}.$$

3. Отмечу также, что на основе принципа максимума М. Е. Чанга доказал в декабре 2003 г. ряд общих теорем об оценках снизу максимума модуля аналитической функции, следствием которых явилась связь между нижними оценками $G(T; \Delta)$ и $F(T; \Delta)$ при $0 < \Delta \leq \frac{1}{3}$, и получил неравенство для $F(T; H)$ следующего вида:

$$F(T; H) \geq T^{-e^{-0,1H}}, \quad 40 \leq H \leq \ln \ln T.$$

Статья М. Е. Чанги с изложением этих результатов в настоящее время находится в печати.

Список литературы

1. Карацуба А. А. О нижних оценках дзета-функции Римана // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 1. С. 15–16.
2. Карацуба А. А. О нижних оценках максимума модуля $\zeta(s)$ в малых областях критической полосы // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 5. С. 796–798.
3. Garaev M. Z. Concerning the Karatsuba conjectures // Taiwanese J. of Math. 2002. V. 6. № 4. P. 573–580.
4. Balasubramanian R. On the frequency of Titchmarsh's phenomenon for $\zeta(s)$ -IV // Hardy–Ramanujan J. 1986. V. 9. P. 1–10.
5. Ramachandra K. On the Mean-Value and Omega-Theorems for the Riemann Zeta-Function. N.Y.–Berlin: Springer-Verlag, 1995.
6. Titchmarsh E. C. The Theory of the Riemann Zeta-Function. Oxford: Clarendon Press, 1986.
7. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: ИЛ, 1949.
8. Тетте N. M. Special functions. N.Y.: J. Wiley & Sons, 1996.
9. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
10. Shao-Ji Feng On Karatsuba Conjecture and the Lindelöf Hypothesis // Acta Arithmetica. 2004. V. 114. № 3. P. 295–300.

Поступило в редакцию
01.06.2004