Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Мельников, П. В. Парамонов, C^1 -продолжение субгармонических функций с замкнутых жордановых областей в $\mathbb{R}^2$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 6, 105–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/im514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:32:45

УДК 517.5

М. С. Мельников, П. В. Парамонов

C^1 -продолжение субгармонических функций с замкнутых жордановых областей в $\mathbb{R}^2$

Для жордановых областей D типа Дини–Ляпунова в $\mathbb{R}^2$ доказывается возможность продолжения всякой субгармонической в D функции класса $C^1(\overline{D})$ до функции, субгармонической и класса C^1 на всем $\mathbb{R}^2$ с равномерной оценкой ее градиента. Найден большой класс жордановых областей (в том числе и с C^1 -гладкими границами), для которых указанное свойство продолжения не выполняется. Получена локализационная теорема о C^1 -субгармоническом продолжении с произвольных замкнутых областей Жордана.

Библиография: 7 наименований.

§ 1. Введение

В теореме 5.1 работы [1] установлено, что всякая функция f , субгармоническая в единичном шаре $B \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $f \in C^1(\overline{B})$, может быть продолжена до функции $F \in C^1(\mathbb{R}^N)$, субгармонической на всем пространстве $\mathbb{R}^N$, с условием

$$\|\nabla F\|_{\mathbb{R}^N} \leq c \|\nabla f\|_{\overline{B}},$$

где $c \in (0, +\infty)$ зависит только от N .

Здесь и далее $\|g\|_E$ означает равномерную норму $\sup_{x \in E} |g(x)|$ (комплекснозначной) функции g на множестве E .

В настоящей работе доказывается (теорема 2.2), что при $N = 2$ сформулированный выше результат остается верным, если вместо шара (круга) B взять произвольную область D типа Дини–Ляпунова (при этом c зависит от D). При $N \geq 3$ аналогичную теорему установить не удалось. Отметим, что в работе [2] получены результаты о C^1 -продолжении субгармонических функций с областей Ляпунова–Дини в $\mathbb{R}^N$ для всех $N \geq 2$, но при определенных дополнительных ограничениях на продолжаемые функции f .

Для открытого множества Ω в $\mathbb{R}^N$, $N = 2, 3, \dots$, и $m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ через $BC^m(\Omega)$ обозначается класс всех (комплекснозначных) функций f , имеющих непрерывные и ограниченные частные производные в Ω до порядка m включительно. Норма в $BC^m(\Omega)$ задается следующим образом:

$$\|f\|_{m,\Omega} = \max_{|\beta| \leq m} \|\partial^\beta f\|_{\Omega},$$

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке грантами BFM 2000-0361 и 2001-SGR-00431. Работа второго автора выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 04-01-00720), программой Ведущие научные школы РФ (грант НШ-2040.2003.1) и фондом SAB (проект 98-0049, Испания).

где указанный максимум берется по всем N -индексам $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ с условием $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_N \leq m$, причем

$$\partial^\beta f(x) = \frac{\partial^{|\beta|} f(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}}.$$

Пусть теперь X – компакт в $\mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Через $C^m(X)$ обозначим класс функций f на X , которые допускают продолжения до функций класса $BC^m(\mathbb{R}^N)$. При этом

$$\|f\|_{m,X} = \inf \|F\|_{m,\mathbb{R}^N},$$

где инфимум берется по всем возможным продолжениям $F \in BC^m(\mathbb{R}^N)$, $F|_X = f$.

Отметим, что если внутренность X° компакта X плотна в X (т.е. $\overline{X^\circ} = X$, где $\overline{E}$ – замыкание множества E в $\mathbb{R}^N$), то для всякой функции $f \in C^m(X)$ однозначно определены функции $\partial^\beta f(x)$ на X , $|\beta| \leq [m]$. В частности, при $m \geq 1$ корректно определен вектор-градиент $\nabla f(x) = \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_N} \right\}$ на X с модулем

$$|\nabla f(x)| = \max_{1 \leq n \leq N} \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right|;$$

при $m \geq 2$ матрица вторых частных производных

$$\nabla^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_{n'}} \right)_{n,n'=1}^N$$

корректно определена на X , причем

$$|\nabla^2 f(x)| = \max_{1 \leq n \leq n' \leq N} \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_{n'}} \right|.$$

Если E открыто и $f \in BC^m(E)$ или E компактно, $\overline{E^\circ} = E$ и $f \in C^m(E)$, то положим

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|_E &= \max_{1 \leq n \leq N} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\|_E \quad \text{при } m \geq 1, \\ \|\nabla^2 f\|_E &= \max_{1 \leq n \leq n' \leq N} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_{n'}} \right\|_E \quad \text{при } m \geq 2. \end{aligned}$$

Наконец, для $m \in \mathbb{Z}_+$ и произвольного открытого множества Ω через $C^m(\Omega)$ обозначается класс всех функций f в Ω таких, что $f \in BC^m(D)$ для любого ограниченного открытого множества D с условием $\overline{D} \subset \Omega$.

Обозначим через $SH(\Omega)$ совокупность всех (вещественнозначных) субгармонических функций на открытом множестве Ω в $\mathbb{R}^N$. Интересующая нас задача состоит в следующем.

ЗАДАЧА 1.1. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^N$, причем $\overline{X^\circ} = X$. Каковы условия на X , необходимые и достаточные для того, чтобы выполнялось равенство

$$C^1(X) \cap SH(X^\circ) = (C^1(\mathbb{R}^N) \cap SH(\mathbb{R}^N))|_X? \quad (1.1)$$

В §2 формулируется и доказывается основной результат этой работы – упомянутая выше теорема 2.2. В качестве следствия мы получаем локализационную теорему (теорему 2.6) о C^1 -субгармоническом продолжении (для индивидуальных функций) с произвольных замкнутых областей Жордана. В §3 приводится большой класс жордановых областей D (в том числе и с C^1 -гладкими границами), для которых равенство (1.1) при $X = \overline{D}$ не имеет места.

§2. Основной результат и его доказательство

Пусть $B(a, r)$ – открытый круг в $\mathbb{C}$ радиуса $r > 0$ с центром в точке a . Через c будут обозначаться положительные константы, которые могут быть разными в разных соотношениях.

Пусть $\omega_E(g, \delta) = \sup\{|g(x) - g(y)| \mid x \in E, y \in E, |x - y| \leq \delta\}$ – модуль непрерывности (скалярной или векторнозначной) функции g на множестве E , $\delta \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Жорданова область D в $\mathbb{C}$ называется областью типа Дини–Ляпунова, если (некоторое, а значит, любое) конформное отображение k области D на единичный круг $B = B(0, 1)$ удовлетворяет следующим условиям:

- (а) функция k продолжается до C^1 -диффеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{B}$; в частности, $k' = dk/dz \in C(\overline{D})$ и $k'_0 = \min_{z \in \overline{D}} |k'(z)| > 0$;
- (б) функция $\varkappa(t) = \omega_{\overline{D}}(k', t)$, $t \geq 0$, удовлетворяет условию Дини:

$$\int_0^1 \frac{\varkappa(t)}{t} dt < +\infty.$$

Так, всякая плоская область, ограниченная гладкой кривой Ляпунова (см. [3, гл. 1, §2]), является областью типа Дини–Ляпунова [4, теорема 3.5].

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть D – область типа Дини–Ляпунова. Тогда найдется константа $c = c(D) > 0$ такая, что для любой функции $f \in C^1(\overline{D}) \cap SH(D)$ существует $F \in C^1(\mathbb{C}) \cap SH(\mathbb{C})$ с условиями $F|_{\overline{D}} = f$ и

$$\|\nabla F\|_{\mathbb{C}} \leq c \|\nabla f\|_{\overline{D}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возникающие далее положительные константы $c_1, c_2, \dots$ являются абсолютными (по умолчанию) или определяются (в конечном итоге) только областью D (в последнем случае мы пишем, например, $c_1 = c_1(D)$). Эти константы фиксируются до конца доказательства.

Пусть D, k и $\varkappa$ удовлетворяют условиям определения 2.1. Тогда D имеет гладкую границу ∂D , а $\varkappa(\cdot)$ удовлетворяет условию “удвоения” ($c_1 = c_1(D)$):

$$\varkappa(2t) \leq c_1 \varkappa(t), \quad t > 0. \quad (2.1)$$

Во-первых, продолжим функцию k по методу Уитни в некоторую окрестность множества $\overline{D}$ следующим образом. Пусть $\{Q_j^*, \varphi_j^*\}_{j \in J}$ – специальное (типа Уитни) разбиение единицы на множестве $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, построенное в [5, гл. 6, § 1] (в [5] использовался индекс k вместо j и множество F вместо $\overline{D}$), и пусть p_j – какая-либо точка из ∂D , ближайшая к кубу Q_j^* . При $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ положим

$$k(z) = \sum_{j \in J} (k(p_j) + k'(p_j)(z - p_j)) \varphi_j^*(z).$$

Используя стандартные выкладки (см. [5, гл. 6, § 2.3]), получим, что найдутся жорданова область Ω_0 , содержащая $\overline{D}$, и круг $U_0 = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < r_0\}$, $r_0 \in (1, 2)$, со следующими условиями:

1) $k \in C^1(\Omega_0) \cap C^2(\Omega_0 \setminus \overline{D})$, причем

$$\left| \frac{\partial k(z)}{\partial z} - k'(z') \right| + \left| \frac{\partial k(z)}{\partial \bar{z}} \right| \leq c_2 \kappa(d),$$

$$|\nabla^2 k(z)| \leq \frac{c_2 \kappa(d)}{d},$$

где $z \in \Omega_0 \setminus \overline{D}$, а z' – (какая-либо) точка на ∂D , ближайшая к точке z , $d = |z - z'|$;

2) функция k билипшицево отображает Ω_0 на U_0 , т. е.

$$c_3^{-1} |z_1 - z_2| \leq |k(z_1) - k(z_2)| \leq c_3 |z_1 - z_2|$$

при всех $z_1, z_2 \in \Omega_0$; здесь $\Omega_0, U_0, k, c_2 \in (1, +\infty)$, $c_3 \in (1, +\infty)$ зависят только от D .

Пусть $g_0 \in C^1(U_0) \cap C^2(U_0 \setminus \overline{B})$ – вещественная функция, $f_0(z) = g_0(k(z))$. Найдем соотношение между $\Delta f_0(z)$ и $\Delta g_0(w)$, $w = k(z)$, $z \in \Omega_0 \setminus \overline{D}$. Положим $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$, $\partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Нетрудно показать, что при $z \in \Omega_0 \setminus \overline{D}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \Delta f_0(z) &= \partial_z \partial_{\bar{z}} f_0(z) = \partial_w \partial_{\bar{w}} g_0(w) \Big|_{k(z)} (\partial_z k \partial_{\bar{z}} \bar{k} + \partial_{\bar{z}} k \partial_z \bar{k}) + \partial_w^2 g_0(w) \Big|_{k(z)} \partial_z k \partial_z k \\ &\quad + \partial_{\bar{w}}^2 g_0(w) \Big|_{k(z)} \partial_{\bar{z}} \bar{k} \partial_{\bar{z}} \bar{k} + \partial_w g_0(w) \Big|_{k(z)} \partial_z \partial_{\bar{z}} k + \partial_{\bar{w}} g_0(w) \Big|_{k(z)} \partial_z \partial_{\bar{z}} \bar{k}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что g_0 вещественна, $\partial_{\bar{z}} \bar{k} = \overline{\partial_z k}$, $\partial_z \bar{k} = \overline{\partial_{\bar{z}} k}$ и справедливы свойства 1) для k , находим

$$\Delta f_0(z) = \Delta g_0(k(z)) |k'(z')|^2 + |\nabla^2 g_0(k(z))| O_1(\kappa(d)) + \frac{|\nabla g_0(k(z))| O_2(\kappa(d))}{d}, \quad (2.2)$$

где $|O_l(\kappa(d))| \leq c_4 \kappa(d)$, $l = 1, 2$, $c_4 = c_4(D)$.

Основная идея доказательства теоремы состоит в следующем. Положим $g(w) = f(k^{-1}(w))$, $|w| \leq 1$, так что $g \in C^1(\overline{B}) \cap SH(B)$. Пользуясь [1, теорема 5.1], продолжим g до функции $g_1 \in C^1(\mathbb{C}) \cap SH(\mathbb{C})$, удовлетворяющей условиям (см. [1, доказательство теоремы 5.1]):

$$\| \nabla g_1 \|_{\mathbb{C}} \leq c_5 \| \nabla g \|_{\overline{B}}, \quad \omega(t) := \omega_{\mathbb{C}}(\nabla g_1, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0; \quad (2.3)$$

в частности, $\omega(t) \leq 2c_5 \| \nabla g \|_{\overline{B}}$, $t \geq 0$.

С помощью следующих двух лемм мы модифицируем функцию g_1 вне $\overline{B}$ и найдем функцию $g_0 \in C^1(\mathbb{C}) \cap C^2(\mathbb{C} \setminus \overline{B}) \cap SH(\mathbb{C})$, $g_0 = g$ на $\overline{B}$, и круг $U = \{|w| < r\}$, $r = r(D) \in (1, r_0)$, такие, что свойства 1) и 2) функции k , равенство (2.2) и надлежащие оценки функции g_0 и ее частных производных до второго порядка включительно гарантируют, что $f_0(z) = g_0(k(z))$ удовлетворяет нужным условиям продолжения функции f , но пока только в окрестность $\Omega = k^{-1}(U)$ множества $\overline{D}$ (отметим, что Ω будет зависеть только от D). Искомое продолжение F строится с помощью функции f_0 , уже значительно проще.

Переходим к реализации указанной идеи.

ЛЕММА 2.3. Пусть g_1 и $\omega(\cdot)$ – введенные выше функции (см. (2.3)). Найдется $g_2 \in C^1(\mathbb{C}) \cap C^2(\mathbb{C} \setminus \overline{B}) \cap SH(\mathbb{C})$, $g_2 = g_1$ на $\overline{B}$, с условиями:

$$\|\nabla g_2\|_{\mathbb{C}} \leq c_6 \|\nabla g\|_{\overline{B}}, \quad (2.4)$$

$$|\nabla^2 g_2(w)| \leq \frac{c_6 \omega(|w| - 1)}{|w| - 1}, \quad |w| > 1. \quad (2.5)$$

ЛЕММА 2.4. Пусть $\sigma(t)$, $t \geq 0$, – непрерывная неубывающая функция на интервале $[0, +\infty)$ с условиями $\sigma(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma(t)}{t} > 0$ и условием Дини

$$\int_0^1 \frac{\sigma(t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда найдутся $r_1 = r_1(\sigma) \in (1, 2)$, $c_7 = c_7(\sigma) > 1$ и функция $g_3 \in C^1(\mathbb{C}) \cap C^2(\mathbb{C} \setminus \overline{B}) \cap SH(\mathbb{C})$ с условиями

$$g_3(w) = 0 \quad \text{при} \quad |w| \leq 1, \quad \Delta g_3(w) = \frac{\sigma(|w| - 1)}{|w| - 1} \quad \text{при} \quad |w| > 1, \quad (2.6)$$

$$|\nabla g_3(w)| \leq \int_1^{|w|} \frac{\sigma(t - 1)}{t - 1} dt, \quad |w| > 1, \quad (2.7)$$

$$|\nabla^2 g_3(w)| \leq c_7 \frac{\sigma(|w| - 1)}{|w| - 1}, \quad |w| \in (1, r_1). \quad (2.8)$$

Отметим заранее, что g_0 будет равно $g_2 + g_3$, а функция σ в последней лемме будет прямо пропорциональна $\varkappa(t) + t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.3. Построим сначала специальное разбиение единицы (типа Уитни) на $\mathbb{C} \setminus \overline{B}$ следующим образом. Фиксируем $\psi \in C_0^\infty(B)$ с условиями: $0 \leq \psi(w) \leq 1$, $\psi = 1$ на $B(0, 3/4)$, $\psi(w) = \psi(|w|)$ – радиальна, $\iint \psi(w) du dv = 1$ ($w = u + iv$). При $\delta > 0$ положим $\psi^\delta(w) = \frac{1}{\delta^2} \psi(\frac{w}{\delta})$. При $s \in \mathbb{Z}$ пусть $\{w_j^s \mid j \in J_s\}$ – вершины некоторого правильного многоугольника с центром в нуле, со сторонами длины $\delta_s \in [2^{-s-2}, 2^{-s-1})$ и радиусом описанного круга, равным $|w_j^s| = 1 + 2^{-s}$, $j \in J_s$. Пусть $\rho_s = \frac{3}{4} 2^{-s}$, $B_j^s = B(w_j^s, \rho_s)$, $j \in J_s$. Легко видеть, что

$$\bigcup_{s \in \mathbb{Z}} \bigcup_{j \in J_s} B\left(w_j^s, \frac{3\rho_s}{4}\right) = \mathbb{C} \setminus \overline{B}.$$

Следовательно, определив

$$\psi_j^s(w) = \frac{\psi((w - w_j^s)/\rho_s)}{\sum_{s' \in \mathbb{Z}} \sum_{j' \in J_s} \psi((w - w_{j'}^{s'})/\rho_{s'})},$$

мы находим, что $\{B_j^s, \psi_j^s\}_{s \in \mathbb{Z}, j \in J_s}$ – разбиение единицы на $\mathbb{C} \setminus \overline{B}$ с условиями

$$\|\nabla^l \psi_j^s\| \leq c \rho_s^{-l}, \quad l = 1, 2, \quad (2.9)$$

так как для любого $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}$ число пар индексов (s, j) с условием $\psi_j^s(w) \neq 0$ не превышает некоторой положительной абсолютной константы.

Обозначим через $\Phi(z)$ фундаментальное решение для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^2$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \ln |z|.$$

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$. Оператор Витушкина [3, гл 2, § 3], ассоциированный с оператором Лапласа Δ и функцией φ , определяется следующим образом:

$$V_\varphi(h) := \Phi * (\varphi \Delta h), \quad V_\varphi: (C_0^\infty(\mathbb{C}))' \rightarrow (C_0^\infty(\mathbb{C}))',$$

где $*$ обозначает операцию свертки. Ясно, что $\Delta V_\varphi(h) = \varphi \Delta h$ (в обобщенном смысле).

Известно (см. [1, лемма 3.4]), что если $h \in C^1(B(a, \delta))$ и $\varphi \in C_0^\infty(B(a, \delta))$, то $V_\varphi(h) \in C^1(\mathbb{C})$ и

$$\|\nabla(V_\varphi(h))\|_{\mathbb{C}} \leq c \operatorname{osc}(\nabla h, B(a, \delta)) \|\nabla \varphi\|_{\mathbb{C}} \delta, \quad (2.10)$$

где $\operatorname{osc}(e, E) = \sup\{|e(z) - e(w)| \mid z \in E, w \in E\}$, а e – ограниченная функция на E .

Пусть теперь $h_j^s = V_{\psi_j^s}(g_1)$, $\tilde{h}_j^s = \psi^{\rho_s/8} * h_j^s$, $j \in J_s$. Искомая функция g_2 имеет вид

$$g_2 = g_1 + \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in J_s} (\tilde{h}_j^s - h_j^s).$$

Действительно, согласно (2.10), полагая $h = g_1$, $\varphi = \psi_j^s$, $\delta = \rho_s$ и учитывая (2.9) при $l = 1$, имеем

$$\|\nabla h_j^s\|_{\mathbb{C}} \leq c \omega(\rho_s), \quad \|\nabla \tilde{h}_j^s\|_{\mathbb{C}} \leq c \omega(\rho_s). \quad (2.11)$$

Поскольку h_j^s гармонична вне B_j^s (так как $\Delta h_j^s = \psi_j^s \Delta g_1$), а функция $\psi^{\rho_s/8}$ радиальна, из теоремы о среднем для гармонических функций легко вытекает, что $h_j^s(w) = \tilde{h}_j^s(w)$ при $w \notin B(w_j^s, \frac{7}{8}2^{-s})$, поэтому функция $\tilde{h}_j^s(w)$ гармонична вне круга $\tilde{B}_j^s = B(w_j^s, \frac{7}{8}2^{-s})$. В частности, $g_1 = g_2$ на $\overline{B}$, и при $w \notin \overline{B}$ имеем

$$g_2(w) - g_1(w) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in J_s} (\tilde{h}_j^s(w) - h_j^s(w)) = \sum_{(s,j) \in SJ(w)} (\tilde{h}_j^s(w) - h_j^s(w)), \quad (2.12)$$

где $SJ(w) = \{(s, j) \mid s \in \mathbb{Z}, j \in J_s, w \in \tilde{B}_j^s\}$. Ясно, что число элементов в $SJ(w)$ не превышает некоторой абсолютной константы, и что при $(s, j) \in SJ(w)$ имеем

$$c^{-1}(|w| - 1) \leq \rho_s \leq c(|w| - 1), \quad (2.13)$$

где $c > 1$ – абсолютная константа. Из последних замечаний и из (2.11) получаем

$$|\nabla g_2(w) - \nabla g_1(w)| \leq c\omega(|w| - 1) \leq c_6 \|\nabla g\|_{\overline{B}}, \quad |w| > 1,$$

и условие (2.4) доказано.

Поскольку $\Delta h_j^s = \psi_j^s \Delta g_1$, то при $|w| > 1$ имеем

$$\Delta g_2(w) = \sum_{(s,j) \in SJ(w)} \Delta \tilde{h}_j^s(w),$$

откуда $g_2 \in C^1(\mathbb{C}) \cap C^\infty(\mathbb{C} \setminus \overline{B}) \cap SH(\mathbb{C})$, так как $\tilde{h}_j^s \in C^\infty(\mathbb{C})$. Кроме того, ввиду (2.11) и оценки $\|\nabla \psi^{\rho_s/8}\|_{\mathbb{C}} \leq c/\rho_s^3$, получаем

$$|\nabla^2 \tilde{h}_j^s(w)| = |\nabla \psi^{\rho_s/8} * \nabla h_j^s(w)| \leq c \frac{1}{\rho_s} \omega(\rho_s). \quad (2.14)$$

Фиксируем w_0 , $|w_0| > 1$, и установим (2.5) при $w = w_0$. Пусть $\delta = (|w_0| - 1)/3$. Положим

$$SJ_0(w_0) = \{(s, j) \mid s \in \mathbb{Z}, j \in J_s, \tilde{B}_j^s \cap B(w_0, \delta) \neq \emptyset\},$$

тогда число элементов в $SJ_0(w_0)$ также не превосходит абсолютной константы. Пусть

$$\tilde{h}_2(w) = \sum_{(s,j) \in SJ_0(w_0)} \tilde{h}_j^s(w).$$

Из (2.14) и (2.13) следует, что

$$|\nabla^2 \tilde{h}_2(w_0)| \leq c \frac{\omega(\delta)}{\delta}.$$

Положим $h_2 = g_2 - \tilde{h}_2$. Нам остается показать, что

$$|\nabla^2 h_2(w_0)| \leq c \frac{\omega(\delta)}{\delta}. \quad (2.15)$$

Ввиду (2.11) (см. также (2.3)), (2.12) и гармоничности функций $\tilde{h}_j^s$ вне $\tilde{B}_j^s$ находим, что h_2 гармонична в $\overline{B(w_0, \delta)}$ и справедлива оценка $\text{osc}(\nabla h_2, \overline{B(w_0, \delta)}) \leq c\omega(\delta)$. Нужная оценка (2.15) непосредственно следует из указанных свойств функции h_2 и интегральной формулы Коши в круге $B(w_0, \delta)$ для производной от голоморфной функции $\partial_w h_2$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.4. Будем искать $g_3(w)$ в виде радиально-симметричной функции $g_3(w) = h(\rho)$, $\rho = |w|$. Пользуясь полярными координатами (ρ, θ) в $\mathbb{R}^2$ и элементарными формулами

$$\begin{aligned} |\nabla g_3(w)| &= |h'(\rho)|, & |\nabla^2 g_3(w)| &\leq |h''(\rho)| + \frac{1}{\rho} |h'(\rho)|, \\ \Delta g_3(w) &= h''(\rho) + \frac{1}{\rho} h'(\rho), & |w| = \rho &> 1, \end{aligned}$$

нетрудно показать, что условия (2.6)–(2.8) в терминах h имеют вид

$$h''(\rho) + \frac{1}{\rho} h'(\rho) = \frac{\sigma(\rho-1)}{\rho-1}, \quad \rho > 1, \quad (2.16)$$

$$|h'(\rho)| \leq \int_1^\rho \frac{\sigma(t-1)}{t-1} dt, \quad (2.17)$$

$$|h''(\rho)| + \frac{1}{\rho} |h'(\rho)| \leq \frac{c_7 \sigma(\rho-1)}{\rho-1}. \quad (2.18)$$

Пусть $\mu(t) = 0$ при $t \in (0, 1]$, $\mu(t) = \sigma(t-1)/(t-1)$ при $t > 1$, так что $\mu \in L^1_{\text{loc}}(0, +\infty)$. Решая уравнение $h''(\rho) + \frac{1}{\rho} h'(\rho) = \mu(\rho)$ на $(0, +\infty)$ методом вариации постоянных, находим

$$h'(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho t \mu(t) dt \geq 0,$$

причем функция $h'(\rho)$ непрерывна на $(0, +\infty)$ и

$$|h'(\rho)| \leq \int_0^\rho \mu(t) dt,$$

что дает (2.16) и (2.17) (а значит, (2.6) и (2.7)). Функция

$$g_3(w) = h(\rho) = \int_0^\rho \frac{1}{t} \int_0^t \tau \mu(\tau) d\tau dt$$

является субгармонической, так как $\Delta g_3(w) = \mu(|w|)$ в обобщенном смысле. Наконец, при $\rho > 1$ имеем

$$h''(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} \int_1^\rho t \mu(t) dt + \mu(\rho).$$

Поскольку первое слагаемое в правой части последнего равенства стремится к нулю при $\rho \rightarrow 1$, $\rho > 1$, а $\lim_{\rho \rightarrow 1+} \mu(\rho) > 0$, найдется $r_1 = r_1(\sigma) \in (1, 2)$ такое, что $h''(\rho) > 0$ на $(1, r_1)$. Но тогда при $\rho \in (1, r_1)$ неравенство (2.18) (и, следовательно, (2.8)) непосредственно вытекает из (2.16). Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2.2. Исключим из дальнейшего рассмотрения тривиальный случай $f \equiv \text{const}$ в $\overline{D}$. По данной функции f построим функции g , g_1 , g_2 и g_3 , как в леммах 2.3 и 2.4 (где функция $\sigma(t)$ будет выбрана чуть

позже). Положим $g_0 = g_2 + g_3$, так что $g_0 = g$ на $\overline{B}$. Пусть $g_0(k(z)) = f_0(z)$ в Ω_0 , и пусть $\Omega_1 = k^{-1}\{|w| < \min\{r_0, r_1\}\}$. Согласно (2.2) и свойствам (2.4)–(2.8), при $z \in \Omega_1 \setminus \overline{D}$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta G(z) \geq & \frac{\sigma(|k(z)| - 1)}{|k(z)| - 1} (k'_0)^2 - c_4 \varkappa(d) \left(c_6 \frac{\omega(|k(z)| - 1)}{|k(z)| - 1} + c_7 \frac{\sigma(|k(z)| - 1)}{|k(z)| - 1} \right) \\ & - c_4 \frac{\varkappa(d)}{d} \left(c_6 \|\nabla g_0\|_{\overline{B}} + \int_1^{|k(z)|} \frac{\sigma(t - 1)}{t - 1} dt \right). \end{aligned}$$

Заметим, что ввиду соотношений (2.1) и свойства 2) найдется $c_1^* = c_1^*(D)$ такая, что

$$\varkappa(d) = \varkappa(|z - z'|) \leq c_1^* \varkappa(|k(z)| - 1), \quad z \in \Omega_1.$$

Поскольку $\varkappa(\cdot)$ удовлетворяет условию Дини, этому условию удовлетворяет и функция $\sigma(t) = c_8 \|\nabla g\|_{\overline{B}}(\varkappa(t) + t)$, где $c_8 > 0$, $c_8 = c_8(\overline{D})$, будет найдена позже. Отметим, что σ удовлетворяет условиям леммы 2.4, и при определении r_1 вместо условий на σ возникают соответствующие условия на $\varkappa$, откуда $r_1 = r_1(\varkappa) = r_1(D)$. Таким образом, ввиду условий 2) для отображения k и оценки $\omega(t) \leq 2c_5 \|\nabla g\|_{\overline{B}}$ получаем

$$\begin{aligned} \Delta f_0(z) \geq & \frac{\sigma(|k(z)| - 1)}{|k(z)| - 1} \left(\frac{(k'_0)^2}{2} - c_1^* c_4 c_7 \varkappa(|k(z)| - 1) \right) + \frac{\|\nabla g_0\|_{\overline{B}} \varkappa(|k(z)| - 1)}{|k(z)| - 1} \\ & \times \left(\frac{c_8 (k'_0)^2}{2} - (2c_5 + 1) c_4 c_6 c_1^* c_3 - c_8 c_1^* c_3 c_4 \int_1^{|k(z)|} \left(\frac{\varkappa(t - 1)}{t - 1} + 1 \right) dt \right). \end{aligned}$$

Ясно, что мы можем выбрать $r_2 = r_2(D) \in (1, 2)$ со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \varkappa(r_2 - 1) & \leq \frac{(k'_0)^2}{2c_1^* c_4 c_7}, \\ \int_1^{r_2} \left(\frac{\varkappa(t - 1)}{t - 1} + 1 \right) dt & \leq \frac{(k'_0)^2}{4c_1^* c_3 c_4}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $c_8 = 4(2c_5 + 1)c_1^* c_3 c_4 c_6 (k'_0)^{-2}$ функция $f_0(z)$ является субгармонической в области $\Omega = k^{-1}(U)$, где $U = \{w \mid |w| < \min(r_0, r_1, r_2)\}$. Действительно, субгармоничность f_0 в D очевидна, а в $\Omega \setminus \overline{D}$ — вытекает из последних оценок. Но тогда субгармоничность f_0 на (окрестности) ∂D следует из C^1 -гладкости ∂D и условия $f_0 \in C^1(\Omega)$. Для полноты изложения приведем здесь идею доказательства последнего факта.

Пользуясь формулой Гаусса–Остроградского, нетрудно показать, что для любого замкнутого круга K в Ω имеет место неравенство

$$\int_{\partial K} \frac{\partial f_0}{\partial \nu} d\ell \geq 0.$$

Здесь ν — единичная внешняя нормаль к ∂K , а $d\ell$ — дифференциал длины на ∂K . Сглаживание $\psi^\delta * f_0$ функции f_0 с функцией ψ^δ (см. выше) сохраняет указанное выше интегральное свойство функции f_0 в области $\Omega_\delta = \{z \in \Omega \mid \text{dist}(z, \partial\Omega) > \delta\}$,

откуда уже просто доказывается субгармоничность функции $\psi^\delta * f_0$ в Ω_δ . Остается перейти к пределу при $\delta \rightarrow 0+$.

Теперь мы готовы продолжить f на все $\mathbb{C}$. Без ограничения общности будем считать, что $\|\nabla f\|_{\overline{D}} = 1$, $0 \in D$ и $f(0) = 0$. Фиксируем некоторые жордановы области G_1 и G_2 с условиями $\overline{D} \subset G_1 \subset \overline{G}_1 \subset G_2 \subset \overline{G}_2 \subset \Omega$, а также функцию $\varphi \in C_0^\infty(G_2)$, $\varphi = 1$ на G_1 ($\varphi = 0$ вне G_2). Мы вправе считать, что G_1 , G_2 и φ зависят только от D . Из построения функции f_0 вытекает, что $f_0 \in C^1(\overline{G}_2)$ и $\|f_0\|_{1, \overline{G}_2} \leq c$, где $c > 0$ (здесь и далее) зависит только от D . Продолжим f_0 с компакта $\overline{G}_2$ на все $\mathbb{C}$ до функции F_0 класса $BC^1(\mathbb{C})$ с условием $\|\nabla F_0\|_{\mathbb{C}} \leq c$. Положим $F_1 = V_\varphi(F_0)$. Из (2.10) получаем, что $F_1 \in C^1(\mathbb{C})$ и $\|\nabla F_1\|_{\mathbb{C}} \leq c$, а так как $\Delta F_1 = \varphi \Delta F_0 \geq 0$ (в обобщенном смысле), то $F_1 \in SH(\mathbb{C})$. Рассмотрим $F_2 = F_0 - F_1$. Поскольку $\Delta F_2 = (1 - \varphi) \Delta F_0$, функция F_2 гармонична в G_1 , причем $F_2 \in C^1(\overline{G}_1)$ и $\|F_2\|_{1, \overline{G}_1} \leq c$. Остается найти подходящее продолжение (из $\overline{D}$) функции F_2 .

Выберем жорданову область G_0 с *аналитической* границей и условиями $\overline{D} \subset G_0 \subset \overline{G}_0 \subset G_1$. Отметим, что

$$F_2 \in C^2(\overline{G}_0), \quad \|F_2\|_{2, \overline{G}_0} \leq c. \quad (2.19)$$

Фиксируем теперь открытый круг $B_R = B(0, R)$, $R > 0$, такой, что $\overline{G}_0 \subset B(0, R/2)$. Пусть f_3 – решение задачи Дирихле в области $G = B_R \setminus \overline{G}_0$ с граничными данными, равными нулю на ∂B_R и равными F_2 на ∂G_0 . Утверждается, что $f_3 \in C^1(\overline{G})$ и $\|f_3\|_{1, \overline{G}} \leq c$. Действительно, как хорошо известно, конформное отображение области G на *подходящее* кольцо может быть конформно продолжено в некоторую окрестность $\overline{G}$. Требуемое утверждение для кольца A сомнений не вызывает: важно только наличие условия (2.19). Функция f_4 , равная F_2 в $\overline{G}_0$ и f_3 в $\overline{G}$, удовлетворяет условиям $f_4 \in \text{Lip}_1(\overline{B}_R)$ и $\|\nabla f_4\|_{B_R} \leq c$ (отметим, что $\nabla f_4 \in L_\infty(B_R)$ в обобщенном смысле). Известно (это легко проверяется с помощью [6, гл. 5, § 27, п. 7]), что (обобщенный) лапласиан Δf_4 функции f_4 в B_R является конечной мерой $h\ell$, где ℓ – *длина* на ∂G_0 (т. е. *мера* ℓ положительна), а функция $h \in C(\partial G_0)$ имеет вид

$$h(z) = \frac{\partial f_4}{\partial \nu_+} \Big|_z + \frac{\partial f_4}{\partial \nu_-} \Big|_z, \quad z \in \partial G_0,$$

где ν_+ и ν_- – внешняя и внутренняя единичные нормали к ∂G_0 соответственно. Таким образом, $\|h\|_{\partial G_0} \leq c_9 = c_9(D)$. Рассмотрим функцию f_5 в $\overline{B}_R$, равную нулю в $\overline{G}_0$ и являющуюся решением задачи Дирихле в G с граничными данными, равными нулю на ∂G_0 и единице на ∂B_R . Хорошо известно, что

$$\frac{\partial f_5}{\partial \nu_+} \Big|_z = h_5(z) \geq c_{10} = c_{10}(D) > 0, \quad z \in \partial G_0$$

(можно установить этот факт, снова воспользовавшись конформным отображением G на A). Функция $f_6 = f_4 + c_9 f_5 / c_{10}$ удовлетворяет неравенству $\Delta f_6 = (h + (c_9 / c_{10}) h_5) \ell \geq 0$ в B_R , так что

$$f_6 \in \text{Lip}_1(\overline{B}_R) \cap SH(B_R), \quad \|\nabla f_6\|_{B_R} \leq c.$$

Пусть $\delta = \text{dist}(\partial D, \partial G_0)/2$. Функция $f_7 = \psi^\delta * f_6$, корректно определенная в $B(0, R - \delta)$, совпадает (по теореме о среднем) с f на $\overline{D}$, $f_7 \in C^1(\overline{B(0, R/2)}) \cap SH(B(0, R/2))$, причем $\|\nabla f_7\|_{\overline{B(0, R/2)}} \leq c$. Остается продолжить функцию f_7 с $\overline{B(0, R/2)}$ на все $\mathbb{C}$ с помощью теоремы 5.1 работы [1]. Теорема доказана.

Из теоремы 2.2 нетрудно вывести следующую локализационную теорему, которая с нашей точки зрения имеет самостоятельный интерес. Ограничимся рассмотрением C^1 -продолжения субгармонических функций с замкнутых жордановых областей.

ТЕОРЕМА 2.5. *Пусть D – жорданова область в $\mathbb{C}$ и $f \in C^1(\overline{D}) \cap SH(D)$. Предположим, что для любого $a \in \partial D$ найдутся окрестность U_a точки a в $\mathbb{C}$ и функция $F_a \in C^1(U_a) \cap SH(U_a)$ такие, что $F_a = f$ в $D \cap U_a$. Тогда найдется $F \in C^1(\mathbb{C}) \cap SH(\mathbb{C})$ с условием $F = f$ в $\overline{D}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что множество

$$E = \{e \in \partial D \mid \exists b_e \notin \overline{D} : \overline{B(b_e, |b_e - e|)} \cap \overline{D} = \{e\}\}$$

всюду плотно на ∂D . Отсюда и из компактности множества ∂D следует, что найдутся конечные подмножества $A_J = \{a_1, \dots, a_J\}$ в ∂D и $E_J = \{e_1, \dots, e_J\}$ в E , а также окрестности $U_j := U_{a_j}$ точек a_j со следующими свойствами: $\partial D \subset \bigcup_{j=1}^J U_j$; при каждом j множество U_j и соответствующая ей функция $F_j := F_{a_j}$ удовлетворяют условиям теоремы 2.5, причем $\gamma_j = \partial D \cap U_j$ – открытая жорданова дуга; точки a_j занумерованы в последовательном порядке на ∂D (полагая $a_{J+1} = a_1$, $U_{J+1} = U_1$, $F_{J+1} = F_1$), окрестности U_j (а также соответствующие дуги γ_j) пересекаются только попарно (последовательно) и $e_j \in \gamma_j \cap \gamma_{j+1}$. Круги $B^j = B(b_{e_j}, |b_{e_j} - e_j|)$, $j = 1, \dots, J$, нужны для “разделения” несогласованных в $(U_j \cap U_{j+1}) \setminus D$ функций F_j и F_{j+1} .

Таким образом, найдется жорданова окрестность Ω множества $\overline{D}$ такая, что f продолжается до функции $F_J \in C^1(\overline{\Omega_J}) \cap SH(\Omega_J)$, где $\Omega_J = \Omega \setminus (\overline{B^1} \cup \dots \cup \overline{B^J})$.

Применяя теорему 2.2 в достаточно малых областях G_j , $1 \leq j \leq J$, типа Дини–Ляпунова таких, что $G_j \subset \Omega_J$ и $G_j \cup \overline{B^j}$ содержит некоторую окрестность точки e_j , можно продолжить F_J до C^1 -субгармонической функции в некоторую окрестность множества E_J . Таким образом, в конечном счете f надлежащим образом продолжается в некоторую окрестность (типа Дини–Ляпунова) множества $\overline{D}$, и для нахождения искомой функции F остается применить теорему 2.2. Теорема доказана.

Из последней теоремы непосредственно вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Пусть D – произвольная жорданова область в $\mathbb{C}$. Предположим, что для любой точки $a \in \partial D$ существует круг $B(a, r_a)$, $r_a > 0$, такой, что для всякой функции $f \in C^1(\overline{D}) \cap SH(D)$ найдется функция $F_a \in C^1(\overline{D_a}) \cap SH(D_a)$, $D_a = D \cup B(a, r_a)$, с условием $F_a = f$ в $\overline{D}$. Тогда для любой $f \in C^1(\overline{D}) \cap SH(D)$ найдется $F \in C^1(\mathbb{C}) \cap SH(\mathbb{C})$ с условием $F = f$ в $\overline{D}$. Если, кроме того, каждая функция F_a может быть выбрана с оценкой $\|F_a\|_{1, \overline{D_a}} \leq c(D, a)\|f\|_{1, \overline{D}}$, то указанная выше функция F может быть выбрана с дополнительным условием $\|\nabla F\|_{\mathbb{C}} \leq c(D)\|f\|_{1, \overline{D}}$.*

§ 3. Пример отсутствия продолжения

В следующей теореме указывается широкий класс жордановых областей D , для которых равенство (1.1) при $X = \overline{D}$ не имеет места. Этот результат, в частности, показывает, что одного только требования C^1 -гладкости границы $\overline{D}$ (жордановой) области D в теореме 2.2 не достаточно.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $d > 0$, $h \in C([-d, d])$, $h \geq 0$ на $[-d, d]$, $h(0) = 0$ и h является липшицевой (Lip_1) неубывающей на $[0, d]$ функцией с условием

$$\int_0^d \frac{h(x)}{x^2} dx = \infty. \quad (3.1)$$

Пусть D – жорданова область в $\mathbb{C}_z$, $z = x + iy$, такая, что график $\Gamma = \{x + ih(x) \mid x \in [-d, d]\}$ функции h является подмножеством в ∂D , причем около точки 0 область D находится “снизу” от Γ . Тогда найдется функция $f \in SH(D) \cap C^1(\overline{D})$, которая не может быть продолжена из $\overline{D}$ до C^1 -субгармонической функции в какую-либо окрестность точки 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $I_n = [d/2^{n+1}, d/2^n]$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Согласно следствию 4.6 работы [7] при любом n найдется борелевская функция h_n на I_n с условиями $h_n(t) \in [0, 1]$ при $t \in I_n$, $\int_{I_n} h_n(t) dt \geq d/(2^n c)$ и

$$\left| \int_{I_n} \frac{h_n(t)}{z - t - ih(t)} dt \right| < c \quad (3.2)$$

для всех $z \notin \Gamma_n = \{t + ih(t) \mid t \in I_n\}$, где $c > 1$ зависит только от Lip_1 -константы функции h . Определим неотрицательную борелевскую меру μ_n на Γ_n по формуле $\mu_n(E) = \int_{E_x} h_n(t) dt$, где E – произвольное борелевское множество в Γ_n и E_x – его проекция на ось x . Согласно (3.2) имеем $|(1/z) * \mu_n| < c$ вне Γ_n , откуда вытекает, что

$$g_n = \Phi * \mu_n \in \text{Lip}_1(\mathbb{C}) \quad \text{и} \quad \|\nabla g_n\|_{\mathbb{C}} < c. \quad (3.3)$$

При $n \geq 1$ и $\varepsilon_n > 0$ определим функции $g_n^{\pm}(z) = g_n(z \mp i\varepsilon_n)$, для которых $\mu_n^{\pm} = \Delta g_n^{\pm}$ являются положительными мерами ($\pm i\varepsilon_n$ -сдвигами мер μ_n) с носителями на множествах $\Gamma_n^{\pm}$ (являющихся $\pm i\varepsilon_n$ -сдвигами множеств Γ_n соответственно). Выберем ε_n настолько малыми, чтобы выполнялись неравенства

$$|g_n^{\pm}(0) - g_n(0)| + |\nabla g_n^{\pm}(z) - \nabla g_n(z)| < \frac{1}{2^n} \quad (3.4)$$

при всех z с условием $\text{Re } z \notin I_{n+1} \cup I_n \cup I_{n-1}$.

Теперь при каждом $n \geq 1$ выберем $\delta_n < \varepsilon_n$ так, чтобы $U_{\delta_n}(\Gamma_n^-) \subset \{z \in D \mid \text{Im } z > 0\}$, $U_{\delta_n}(\Gamma_n^+) \cap D = \emptyset$, где $U_{\delta}(E)$ – δ -окрестность множества E , $\delta > 0$. Пусть ψ^{δ} – функции, определенные выше, в § 2. Положим $f_n = \psi^{\delta_n} * g_n$ и $f_n^{\pm} = \psi^{\delta_n} * g_n^{\pm}$. Таким образом, $f_n \in C^1(\mathbb{C})$, $f_n^{\pm} \in C^1(\mathbb{C})$, $f_n(z) = g_n(z)$ вне $U_{\delta_n}(\Gamma_n)$ и $f_n^{\pm}(z) = g_n^{\pm}(z)$ вне $U_{\delta_n}(\Gamma_n^{\pm})$ соответственно. Более того, ввиду (3.3) имеем

$$\|\nabla f_n\|_{\mathbb{C}} < c, \quad \|\nabla f_n^{\pm}\|_{\mathbb{C}} < c \quad (3.5)$$

и согласно (3.4) получаем

$$|f_n^\pm(0) - f_n(0)| + |\nabla f_n^\pm(z) - \nabla f_n(z)| \leq \frac{1}{2^n} \quad (3.6)$$

при условии $\operatorname{Re} z \notin I_{n+1} \cup I_n \cup I_{n-1}$.

Наконец, положим $f = \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n^- - f_n^+)$. Утверждается, что f — искомая функция. Действительно, так как $\Delta f = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi^{\delta_n} * \mu_n^-$ вне D , то из (3.5) и (3.6) получаем, что $f \in C^1(\mathbb{C}) \cap SH(D)$.

Пусть, от противного, найдутся $r \in (0, d)$ и $F_0 \in SH(B_r) \cap C^1(\overline{B_r})$ (здесь $B_r = B(0, r)$) такие, что $F_0 = f$ на $\overline{D} \cap \overline{B_r}$. Без потери общности можно предполагать, что $\{z \in B_r \mid \operatorname{Im} z < 0\} \subset D$. Выберем $\varphi \in C_0^\infty(B_r)$ с условием $\varphi = 1$ на $B(0, r/2)$ и положим $F = V_\varphi F_0$ (см. § 2). Ввиду (2.10) имеем $F \in C^1(\mathbb{C}) \cap SH(\mathbb{C})$ и мера $\mu = \Delta F$ является конечной неотрицательной мерой с носителем в B_r . Выберем натуральное число N так, чтобы $d/2^N < r/2$ и $U_{\delta_n}(\Gamma_n^-) \subset B(0, r/2)$ при всех $n \geq N$. Тогда $\nu = \mu - \sum_{n=N}^\infty \psi^{\delta_n} * \mu_n^-$ также является конечной неотрицательной мерой с носителем в полукруге $\{z \in B_r \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Поскольку $F = \Phi * \mu$, при всех $\varepsilon > 0$ получаем ($z = x + iy$)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{z=-i\varepsilon} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} * \mu \Big|_{z=-i\varepsilon} = \frac{-y}{2\pi(x^2 + y^2)} * \left(\sum_{n=N}^{+\infty} \psi^{\delta_n} * \mu_n^- + \nu \right) \Big|_{z=-i\varepsilon} \\ &\geq \frac{-y}{2\pi(x^2 + y^2)} * \left(\sum_{n=N}^{+\infty} \psi^{\delta_n} * \mu_n^- \right) \Big|_{z=-i\varepsilon}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $f_n^-(z) = g_n^-(z)$ вне $U_{\delta_n}(\Gamma_n^-)$, ввиду (3.4) имеем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{z=-i\varepsilon} &\geq \frac{-y}{2\pi(x^2 + y^2)} * \left(\sum_{n=N}^{+\infty} \mu_n^- \right) \Big|_{z=-i\varepsilon} \\ &\geq \frac{-y}{2\pi(x^2 + y^2)} * \left(\sum_{n=N}^{+\infty} \mu_n \right) \Big|_{z=-i\varepsilon} - 1. \end{aligned}$$

Напомним, что $\int_{I_n} h_n(t) dt \geq d/(2^n c)$, откуда

$$\begin{aligned} 2\pi - 2\pi \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{z=-i\varepsilon} &\geq \sum_{n=N}^{+\infty} \int_{I_n} \frac{(h(t) + \varepsilon) h_n(t) dt}{t^2 + (\varepsilon + h(t))^2} \\ &\geq \frac{1}{c} \int_0^{d/2^{N+1}} \frac{h(t) dt}{t^2 + (\varepsilon + h(t))^2}. \end{aligned}$$

По условию, $h(t) \leq ct$ при всех $t \in (0, d)$, поэтому согласно (3.1) последний интеграл стремится к $+\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, что и дает нужное противоречие. Теорема доказана.

Список литературы

1. Вердера Дж., Мельников М. С., Парамонов П. В. C^1 -аппроксимация и продолжение субгармонических функций // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 4. С. 37–58.
2. Gardiner S. J., Gustafsson A. Smooth potentials with prescribed boundary behaviour // Publ. Matem. 2004. V. 48. № 1. P. 241–249.
3. Витушкин А. Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22. № 6. С. 141–199.
4. Pommerenke Ch. Boundary Behaviour of Conformal Maps. Berlin: Springer, 1992.
5. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
7. Mattila P., Paramonov P. V. On geometric properties of harmonic Lip_1 -capacity // Pacific J. Math. 1995. V. 171. № 2. P. 469–490.

Автономный университет Барселоны (Испания)

МГУ им. МВ. Ломоносова

E-mail: melnikov@mat.uab.es

petr@paramonov.msk.ru

Поступило в редакцию

11.05.2004