Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Бирационально сверхжесткие циклические тройные пространства,
Изв. РАН. Сер. матем., 2004, том 68, выпуск 6, 169–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/im516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 17:26:16

УДК 512.76

И. А. Чельцов

Бирационально сверхжесткие циклические тройные пространства

Доказана бирациональная сверхжесткость и нерациональность циклического тройного накрытия проективного пространства $\mathbb{P}^{2n}$ с ветвлением в нодальной гиперповерхности степени $3n$ при $n \geq 2$. Полученный результат полностью решает задачу о бирациональной сверхжесткости неособых циклических тройных пространств. Рассмотрены некоторые релевантные вопросы.

Библиография: 205 наименований.

§ 1. Введение

Проблема рациональности алгебраических многообразий¹ является одной из наиболее глубоких и интересных проблем алгебраической геометрии. Глобальные голоморфные дифференциальные формы являются естественными бирациональными инвариантами гладкого многообразия, что полностью решает задачу рациональности алгебраических кривых и поверхностей (см. [205] и [14]). Однако уже в трехмерном случае существуют нерациональные многообразия, которые во многом очень близки к рациональным, и имеющих дискретных инвариантов уже не хватает для определения рациональности. Например, в [17] и [93] были построены трехмерные нерациональные, но унирациональные многообразия, что дало отрицательный ответ на проблему Люрота для многообразий размерности три. Простых способов доказательства нерациональности в нетривиальной ситуации не существует (см. [15] и [146]), например в классе многомерных рационально связных многообразий (см. [144]).

В настоящий момент известно лишь четыре способа доказательства нерациональности рационально связных многообразий. В работе [17] была доказана конечность группы бирациональных автоморфизмов гладкой трехмерной квартики, откуда сразу следовала её нерациональность. Нерациональность гладкой трехмерной кубики была доказана в [93] посредством изучения её промежуточного якобиана. Бирациональная инвариантность подгруппы кручения группы $H^3(\mathbb{Z})$ была использована в работе [68] для доказательства нерациональности некоторых унирациональных многообразий, расслоенных на коники. Нерациональность широкого класса рационально связных многообразий была доказана в работе [143] путем редукции в положительную характеристику (см. [61], [144] и [147]).

Каждый из имеющихся методов доказательства нерациональности имеет свои плюсы и минусы. Так, метод промежуточного якобиана применим только к трехмерным многообразиям и, за редким исключением (см. [36], [37], [199], [38],

¹Все многообразия считаются проективными, нормальными и определенными над полем $\mathbb{C}$.

[39], [92]), только в случае существования на трехмерном многообразии структуры расслоения на коники (см. [42], [43], [72], [44]). С другой стороны, метод промежуточного якобиана в трехмерном случае часто применим в ситуациях, когда никакой другой метод нельзя использовать, а вариации метода вырождения (см. [72], [44], [90], [69], [59], [87]) показывают, что в определенных ситуациях компонента Гриффитса промежуточного якобиана является наиболее эффективным из имеющихся трехмерных бирациональных инвариантов, хотя и существуют такие нерациональные многообразия, у которых группа $H^3(\mathbb{Z})$ тривиальна (см. [34]). Например, важные частные случаи критерия рациональности для расслоений на коники (см. [132], [133], [12], [13]) доказаны в работе [62] именно с помощью метода промежуточного якобиана. Во многих интересных случаях, например для неособых полных пересечений, группа $H^3(\mathbb{Z})$ не имеет кручений и, следовательно, подход к доказательству нерациональности, использованный в работе [68], не применим (см. [94], [169]). Метод работы [143] можно применить для любой размерности, но его непосредственное использование доказывает нерациональность лишь очень общего многообразия в заданном семействе. Техника работы [17] также может быть использована для всех размерностей (см. [174]), но многообразия, к которым она применима, в определенном смысле отстоят от рациональных слишком далеко. Например, трудно предположить, что с помощью метода работы [17] можно построить гладкую деформацию нерационального многообразия в рациональное (см. [44]), существование которой предполагается для размерности не менее 4 (см. [40], [41], [125], [126]).

Следующее понятие неявно было введено в работе [17], а исторически восходит к работам [163], [113], [114], однако его современный вид в математическом фольклоре сформировался сравнительно недавно (см. [99], [178]). Напомним, что класс терминальных особенностей является многомерным обобщением неособых точек алгебраических поверхностей, замкнутый относительно правильных бирациональных перестроек (см. [142]), а $\mathbb{Q}$ -факториальность просто означает, что некоторая кратность любого дивизора Вейля на данном многообразии есть дивизор Картье. В частности, любое гладкое многообразие имеет терминальные и $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Многообразие Фано V с терминальными и $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями и группой Пикара $\mathbb{Z}$ называется *бирационально сверхжестким*, если выполнены следующие три условия:

- 1) многообразие V не может быть бирационально перестроено в расслоение², общий слой которого имеет размерность Кодаиры, равную $-\infty$;
- 2) многообразие V не может быть бирационально перестроено в терминальное и $\mathbb{Q}$ -факториальное многообразие Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$, отличное от V ;
- 3) выполнено равенство групп $\mathrm{Bir}(V) = \mathrm{Aut}(V)$.

Как стало очевидно позднее (см. [98]), в работе [17] была неявно доказана бирациональная сверхжесткость гладкой трехмерной квартики в $\mathbb{P}^4$. Некоторые многообразия Фано с нетривиальной группой бирациональных автоморфизмов также

²Под расслоением везде будет подразумеваться небирациональное стягивание: для любого расслоения $\tau: Y \rightarrow Z$ будет предполагаться, что $\dim(Y) > \dim(Z) \neq 0$ и $\tau_*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Z$.

были рассмотрены в рамках бирациональной сверхжесткости (см. [11]). Последнее привело к следующей ослабленной версии бирациональной сверхжесткости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Многообразие Фано V с терминальными и $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями и группой Пикара $\mathbb{Z}$ называется *бирационально жестким*, если для многообразия V выполнены только первые два условия определения 1.

Бирационально жесткие многообразия нерациональны. В частности, бирационально жестких поверхностей дель Пеццо над алгебраически замкнутым полем не существует. Однако существуют бирационально жесткие поверхности дель Пеццо над алгебраически незамкнутым полем (см. [14]). А именно, в [20] и [21] была явно доказана бирациональная сверхжесткость гладких поверхностей дель Пеццо степени 1 и бирациональная жесткость гладких поверхностей дель Пеццо степени 2 и 3, которые определены над произвольным алгебраически незамкнутым совершенным полем и имеют группу Пикара $\mathbb{Z}$. В частности, две минимальные гладкие кубические поверхности в $\mathbb{P}^3$ бирационально эквивалентны тогда и только тогда, когда они проективно эквивалентны (см. [22]).

Бирациональную жесткость и сверхжесткость можно определить аналогичным образом и для расслоений на многообразия Фано (см. [99] и [178]), а точнее, для расслоений Мори (см. [98]). В настоящее время бирациональная жесткость доказана для многих гладких трехмерных многообразий (см. [11], [33], [26], [99]), для многих гладких многообразий размерности 4 и выше (см. [34], [170], [23], [172], [49], [27]–[29], [175], [35], [30]–[32], [116], [54], [177]), а также для ряда многообразий с простейшими особенностями (см. [24], [171], [101], [99], [158], [176], [89], [88]). Также оказалось, что некоторые многообразия, хотя и не являются бирационально жесткими, тем не менее, обладают многими свойствами, присущими бирационально жестким многообразиям. Для последних иногда может быть решена задача, аналогичная доказательству бирациональной жесткости, а именно задача нахождения всех расслоений Мори, бирационально изоморфных данному многообразию (см. [5], [100], [7], [8]). Однако, несмотря на очевидный прогресс в данном направлении алгебраической геометрии, такие релевантные задачи, как нахождение образующих группы $\text{Bir}(\mathbb{P}^3)$ или нахождение образующих группы бирациональных автоморфизмов неособой трехмерной кубики, до сих пор остаются вне области применения каких-либо существующих методов. Заметим, что решение последней задачи, к сожалению, ошибочное, было анонсировано еще в работе [114]. С трудом верится, что ситуация в этих двух случаях когда-либо изменится к лучшему.

В настоящей работе будет доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^{2n}$ – циклическое тройное накрытие³ с ветвлением в гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^{2n}$ степени $3n$ такое, что $n \geq 2$ и S имеет только обыкновенные двойные точки. Тогда X – многообразие Фано с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями, $\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$, многообразие X бирационально сверхжестко, группа $\text{Bir}(X)$ конечна и для общего выбора гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^{2n}$ она совпадает с группой $\mathbb{Z}_3$. В частности, многообразие X нерационально.

³Конечный морфизм степени 3, индуцирующий циклическое расширение полей рациональных функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В условиях и обозначениях теоремы 3 многообразие X реализуется как гиперповерхность в $\mathbb{P}(1^{2n+1}, n)$ степени $3n$, заданная уравнением

$$y^3 = f_{3n}(x_0, \dots, x_{2n}) \subset \mathbb{P}(1^{2n+1}, n) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{2n}, y]),$$

где f_{3n} – однородный многочлен степени $3n$ (см. [160], [118], [188], [189], [191]), а циклическое тройное накрытие $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^{2n}$ является ограничением естественной проекции $\mathbb{P}(1^{2n+1}, n) \dashrightarrow \mathbb{P}^{2n}$, которая индуцируется вложением градуированных алгебр $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{2n}] \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_{2n}, y]$. При этом гиперповерхность ветвления $S \subset \mathbb{P}^{2n}$ задается уравнением $f_{3n}(x_0, \dots, x_{2n}) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Рассмотрим тройное циклическое накрытие $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^k$ с ветвлением в нодальной гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^k$ степени $3n$ при $k \geq 3$. Легко видеть, что при $k < 2n$ многообразие X не бирационально сверхжестко, поскольку оно обладает пучками многообразий размерности Кодaira $-\infty$. С другой стороны, при $k > 2n$ многообразие X имеет неотрицательную размерность Кодaira и даже не является унилинейчатым. Таким образом, теорема 3 описывает все бирационально сверхжесткие неособые циклические тройные накрытия проективных пространств.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $f(x_0, \dots, x_{2n})$ – однородный многочлен степени $3n$, задающий нодальную гиперповерхность $S \subset \mathbb{P}^{2n}$. Тогда поле

$$\mathbb{C}(\nu_1, \dots, \nu_{2n}) \sqrt[3]{f(1, \nu_1, \dots, \nu_{2n})}$$

является чисто трансцендентным расширением поля $\mathbb{C}$ только при $n = 1$.

ПРИМЕР 7. Пусть X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1^{2n+1}, n)$ степени $3n$, заданная уравнением

$$y^3 = \sum_{i=0}^{2n} x_i^{3n} \subset \mathbb{P}(1^{2n+1}, n) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{2n}, y]),$$

и $n \geq 2$. Тогда проекция $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^{2n} \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{2n}])$ является циклическим тройным накрытием, разветвленным в гладкой гиперповерхности $\sum_{i=0}^{2n} x_i^{3n} = 0$, многообразие X бирационально сверхжестко по теореме 3 и

$$\text{Bir}(X) = \text{Aut}(X) \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \text{Aut}\left(\sum_{i=0}^{2n} x_i^{3n} = 0\right) \cong \mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_{3n}^{2n} \rtimes S_{2n+1}),$$

где S_{2n+1} – симметрическая группа (см. [198], [183], [184], [152]). В частности, многообразие X нерационально, и поле $\mathbb{C}(\nu_1, \dots, \nu_{2n}) \sqrt[3]{1 + \sum_{i=1}^{2n} \nu_i^{3n}}$ не является чисто трансцендентным расширением поля комплексных чисел $\mathbb{C}$.

ПРИМЕР 8. Пусть X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1^{2n+1}, n)$ степени $3n$, заданная уравнением

$$y^3 = \sum_{i=1}^n a_i(x_0, \dots, x_{2n})x_i \subset \mathbb{P}(1^{2n+1}, n) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{2n}, y]),$$

где a_i – достаточно общий однородный многочлен степени $3n - 1$. Тогда естественная проекция $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^{2n}$ является циклическим тройным накрытием, разветвленным в нодальной гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^{2n}$ степени $3n$, которая задается уравнением

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \subset \mathbb{P}^{2n} \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{2n}])$$

и имеет $(3n - 1)^n$ обыкновенные двойные точки. Многообразие X бирационально сверхжестко и нерационально при $n \geq 2$ по теореме 3, а группа $\text{Bir}(X)$ конечна.

ПРИМЕР 9. Пусть X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1^{2n+1}, n)$ степени $3n$, заданная уравнением

$$y^3 = \sum_{i=1}^n a_i(x_0, \dots, x_{2n}) b_i(x_0, \dots, x_{2n}) \subset \mathbb{P}(1^{2n+1}, n) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{2n}, y]),$$

где a_i – общий однородный многочлены степени $2n$, а b_i – общий однородный многочлен степени n . Тогда естественная проекция $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^{2n}$ является циклическим тройным накрытием, разветвленным в нодальной гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^{2n}$ степени $3n$, которая имеет $2^n n^{2n}$ обыкновенных двойных точек, X бирационально сверхжестко и нерационально при $n \geq 2$ по теореме 3, а группа $\text{Bir}(X)$ конечна.

Бирациональная сверхжесткость многообразия Фано X в теореме 3 обусловлена тем, что антиканоническая степень $(-K_X)^{\dim(X)} = 3$ очень мала, а также тем, что особенности многообразия X сравнительно невелики. Интуитивно понятно, что многообразия Фано должны становиться *более рациональными* при увеличении антиканонической степени и при ухудшении особенностей, хотя, конечно, такое утверждение нестрогое и в предельном случае неверно (см. [47]). Например, из классификации неособых трехмерных многообразий Фано следует, что неособое трехмерное многообразие Фано рационально, если его степень больше, чем 24 (см. [134]). Особые трехмерные многообразия Фано пока не классифицированы даже в случае, когда антиканонический дивизор является дивизором Картье (см. [48], [167], [137]), но множество разнообразных примеров подтверждает интуицию для особых трехмерных многообразий Фано (см. [101], [100], [84], [56], [87] и [89]). С этой точки зрения утверждение о нерациональности многообразия X в теореме 3 естественно.

Бирациональную сверхжесткость и жесткость имеет смысл рассматривать только для расслоений Мори (см. [98]). В частности, в случае многообразий Фано для доказательства бирациональной жесткости необходимо требовать от многообразия выполнения глобального условия $\mathbb{Q}$ -факториальности особенностей, а также минимальности ранга группы Пикара. Как видно из множества примеров, бирациональная жесткость может выполняться только для многообразий Фано с относительно небольшой степенью, особенности которых в определенном смысле не очень велики. Также интуитивно ясно (см. [100], [158]), что количественные характеристики особенностей (количество изолированных особых точек или антиканоническая степень соответствующих подмногообразий особенностей) важны только

для выполнения условия $\mathbb{Q}$ -факториальности (см. [89], [87], [88]). С другой стороны, качественные характеристики особенностей (кратность и аналитический локальный тип) могут влиять на бирациональную геометрию многообразия Фано критическим образом (см. [99], [100]).

Все имеющиеся доказательства бирациональной жесткости и сверхжесткости существенно используют проективную геометрию многообразия, связанную с антиканоническим отображением. Естественно предположить, что некоторые утверждения о бирациональной жесткости могут быть доказаны и в общем случае без явного использования свойств антиканонического кольца. Например, естественно высказать следующее предположение (ср. [30], [116]).

ГИПОТЕЗА 10. Пусть X – неособое многообразие Фано размерности k такое, что $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$ и $(-K_X)^k \leq 2(k-1)$. Тогда X бирационально жестко.

Отметим, что гипотеза 10 доказана только для многообразий размерности 3 при использовании классификации неособых трехмерных многообразий Фано (см. [134]). Возможно доказательство гипотезы 10 окажется сложным. Тем не менее, можно предположить, что комбинирование методов, использованных в работе [99], с техническими приемами, примененными в работах [106] и [141], позволит в ближайшем будущем доказать следующую очень ослабленную версию гипотезы 10.

ГИПОТЕЗА 11. Пусть X – неособое многообразие Фано размерности k такое, что $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$ и $(-K_X)^k = 1$. Тогда X бирационально супержестко.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Хорошо известно, что все утверждения, связанные с бирациональной жесткостью, остаются верными над любым полем определения рассматриваемых многообразий с одним только исключением, а именно характеристика поля определения должна быть равна нулю для выполнения теоремы Каваматы–Фивега об обращении в нуль (см. [140], [195]). В случае алгебраических поверхностей поле определения достаточно считать совершенным (см. [20], [21]). Более того, верны также и эквивариантные аналоги всех утверждений о бирациональной жесткости для многообразий с действием конечной группы (см. [9], [4], [14]). Последнее может быть применено к классификации несопряженных конечных подгрупп в соответствующих группах бирациональных автоморфизмов (см. [16]).

Следует отметить, что нерациональность и нелинейчатость циклического тройного накрытия $\mathbb{P}^{2n}$, разветвленного в очень общей⁴ неособой гиперповерхности степени $3n$, при $n \geq 2$ следует из [144, теорема 5.13], где доказана

ТЕОРЕМА 13. Пусть $\xi: V \rightarrow \mathbb{P}^k$ – циклическое накрытие простой степени $p \geq 2$, разветвленное над очень общей гиперповерхностью $F \subset \mathbb{P}^k$ степени pd , и выполнены неравенства $k \geq 3$ и $d > \frac{k+1}{p}$. Тогда V нелинейчато и, в частности, нерационально.

При выполнении условий и использовании обозначений теоремы 3 естественно задать вопрос о возможном количестве особых точек многообразия X . Особые

⁴В смысле дополнения к счетному объединению замкнутых по Зарискому множеств.

точки многообразия X взаимно однозначно соответствуют обыкновенным двойным точкам гиперповерхности ветвления $S \subset \mathbb{P}^{2n}$ степени $3n$. В последнем случае наилучшая известная оценка следует из работы [2]: количество особых точек многообразия X не превосходит числа Арнольда $A_{2n}(3n)$, где $A_{2n}(3n)$ – число точек $(a_1, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{Z}^{2n}$ таких, что

$$3n^2 - 3n + 2 \leq \sum_{i=1}^{2n} a_i \leq 3n^2$$

и $a_i \in (0, 3n)$. Таким образом, количество особых точек многообразия X не превосходит 320, 115788 и 85578174, когда $n = 2, 3$ и 4 соответственно. Однако при $n \gg 0$ эта оценка, по-видимому, не очень точна (см. [74], [185], [81], [187], [70], [136], [196]).

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Хорошо известно, что многообразие X , рассмотренное в теореме 3, является рационально связным (см. [149]–[151], [144]): через две достаточно общие точки многообразия X проходит неприводимая рациональная кривая.

Утверждение теоремы 3 имеет ту же геометрическую природу, что и утверждение теоремы Нётера о порождении группы бирациональных автоморфизмов плоскости проективными автоморфизмами и инволюцией Кремоны (см. [163], [11], [98]). С теоремой Нётера связано множество интересных задач, одна из которых – бирациональная классификация эллиптических пучков на плоскости. Первоначально этот вопрос был рассмотрен в работе [73]. Позднее идеи работы [73] были строго обоснованы в [3], где было доказано, что любой эллиптический пучок на плоскости может быть бирационально перестроен в эллиптический пучок специального вида, так называемый пучок Альфана (см. [102, § 5.6]), который изучался в [122]. Аналогичная проблема может быть рассмотрена и для многообразия X из теоремы 3. А именно, в настоящей работе будет доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 15. *При выполнении условий и использовании обозначений теоремы 3 многообразие X не может быть бирационально перестроено в расслоение на эллиптические кривые.*

Бирациональные перестройки в эллиптические расслоения были использованы в работах [76], [77] и [123] для доказательства потенциальной плотности⁵ рациональных точек на трехмерных многообразиях Фано. В этих работах был получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 16. *Рациональные точки потенциально плотны на всех гладких трехмерных многообразиях Фано, кроме, быть может, двойного накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в гладкой секстике.*

Возможное исключение в теореме 16 возникло из-за того, что двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в гладкой секстике не удалось бирационально перестроить в эллиптическое расслоение. В то же время в работе [85] было показано, что

⁵Рациональные точки многообразия V , определенного над некоторым числовым полем $\mathbb{F}$, потенциально плотны, если существует конечное расширение $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ полей такое, что множество $\mathbb{K}$ -точек многообразия V плотно по Зарискому в нём.

гладкое двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в секстике и сильно вырожденные расслоения на коники невозможно бирационально перестроить ни в какое эллиптическое расслоение. Из классификации неособых трехмерных многообразий Фано (см. [134]) легко следует, что гладкое двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в секстике является единственным неособым трехмерным многообразием Фано, которое бирационально неизоморфно эллиптическому расслоению. Отметим, что двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в секстике, которая имеет одну обыкновенную двойную точку, можно бирационально перестроить в эллиптическое расслоение, причем единственным способом (см. [51]), и рациональные точки на таком особом многообразии Фано, если оно определено над числовым полем, конечно, будут потенциально плотны (см. [89]).

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^4$ – циклическое тройное накрытие с ветвлением в гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^4$ степени 6 такое, что $n \geq 2$ и гиперповерхность S имеет одну обыкновенную особую точку $O \in S$ кратности 3. Тогда проекция $\gamma: \mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ из точки O индуцирует рациональное отображение $\gamma \circ \pi$, а нормализация общего слоя отображения $\gamma \circ \pi$ является эллиптической кривой. В этом случае X не удовлетворяет условиям теоремы 3. А именно, гиперповерхность S не нодальна.

Условие нодальности в теоремах 3 и 15 вполне естественно, поскольку обыкновенные двойные точки суть простейшие особенности алгебраических многообразий, а геометрия нодальных многообразий связана со многими очень интересными задачами (см. [192], [91], [117], [200], [138], [78], [166], [103], [108], [104]). С другой стороны, можно рассмотреть и более широкий класс особенностей. Например, метод доказательства теорем 3 и 15 вместе с неравенством для логканонических порогов логпар на гладких гиперповерхностях (см. [52], [60], [107]) позволяет доказать следующее несложное обобщение теорем 3 и 15.

ТЕОРЕМА 18. Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^{2n}$ – циклическое тройное накрытие с ветвлением в гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^{2n}$ степени $3n$ такое, что $n \geq 2$ и S имеет только обыкновенные двойные и тройные точки, а именно кратность любой особой точки гиперповерхности S не превосходит 3 и проективизация касательного конуса к S в этой точке неособа. Тогда X – многообразие Фано с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями, $\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$, многообразие X бирационально сверхжестко, группа бирациональных автоморфизмов $\text{Bir}(X)$ конечна. Более того, если X бирационально изоморфно расслоению на эллиптические кривые, то $n = 2$, гиперповерхность S содержит тройную точку, а само эллиптическое расслоение может быть получено с помощью конструкции из замечания 17.

Таким образом, из теоремы 18 следует, что методы работ [76], [77] и [123] нельзя применить для доказательства потенциальной плотности рациональных точек на многообразии X , рассмотренном в этой теореме, когда X определено над числовым полем, кроме случая циклического тройного накрытия $\mathbb{P}^4$, разветвленного над гиперповерхностью степени 6, обладающей по крайней мере одной тройной точкой. Конечно, это еще не означает, что рациональные точки не потенциально плотны на X в оставшихся случаях. Отметим, что из геометрической

унирациональности алгебраического многообразия, определенного над числовым полем, автоматически следует, что рациональные точки на нём потенциально плотны. Таким образом, если бы рациональные точки не были потенциально плотны на каком-либо из рассматриваемых циклических тройных накрытий, это означало бы существование неунирационального, но рационально связного многообразия. Такой пример дал бы положительный ответ на очень важную гипотезу 4.1.6 из [146]. Естественно предположить, что методы, использованные в работах [76], [77] и [123], позволят легко доказать потенциальную плотность рациональных точек на определенном над числовым полем циклическом тройном накрытии $\mathbb{P}^4$, которое разветвлено над гиперповерхностью степени 6, обладающей хотя бы одной точкой кратности 3. Это действительно так, по крайней мере, в общем случае.

В настоящей работе будет получен следующий результат, доказательство которого проиллюстрирует методы и приемы работ [76], [77] и [123].

ТЕОРЕМА 19. Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^4$ – циклическое тройное накрытие с ветвлением в достаточно общей⁶ гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^4$ степени 6 такой, что S определена над числовым полем и имеет обыкновенную тройную точку. Тогда рациональные точки на многообразии X потенциально плотны.

Используемые методы позволяют также доказать следующий результат. Напомним, что канонические особенности суть многомерный аналог особенностей длю Валя алгебраических поверхностей (см. [142]).

ТЕОРЕМА 20. В условиях и обозначениях теоремы 3 или теоремы 18 предположим существование бирационального отображения $\rho: X \dashrightarrow V$ такого, что V – многообразие Фано с каноническими особенностями. Тогда ρ – изоморфизм.

Конечно, утверждение теоремы 20 является обобщением одного из трех утверждений теоремы 3, однако все же теорема 20 имеет право на существование. Например, аналогичное утверждение для неособых минимальных кубических поверхностей (см. [85]) обобщает классическую бирациональную классификацию из [22], которая уже упоминалась ранее, следующим образом: неособая минимальная кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ бирационально эквивалентна какой-либо кубической поверхности в $\mathbb{P}^3$ с особенностями длю Валя тогда и только тогда, когда они проективно эквивалентны. Более того, из усиленного варианта последнего утверждения (см. [85]), в свою очередь, несложно следует описание всех конечных подгрупп группы бирациональных автоморфизмов неособой минимальной кубической поверхности (см. [57]). Последняя задача возникла как вопрос 1.10 из [22] и была решена в [18] методами теории групп с использованием определяющих соотношений для образующих группы бирациональных автоморфизмов неособой минимальной кубической поверхности, полученных в [21] и [22].

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Утверждения, аналогичные теоремам 15 и 20, доказаны для многих многообразий (см. [85], [49]–[51], [180], [53]–[55], [58], [86], [89]).

⁶Здесь общность понимается в смысле топологии Зариского.

Отметим, что тройные накрытия проективных пространств суть многомерные обобщения тригональных кривых так же, как двойные накрытия проективных пространств суть многомерные обобщения гиперэллиптических кривых. Однако, в отличие от двойных накрытий, тройные накрытия уже не обязательно являются накрытиями Галуа. Дискретные инварианты циклических накрытий $\mathbb{P}^2$ изучались ещё в работах [97], [202], [203]. Позднее эти исследования были продолжены в [135], [156], [182], [194], [82] и [19]. Некоторые вопросы, связанные с тройными накрытиями алгебраических поверхностей, рассмотрены в работах [193], [188], [189]. Отдельные важные результаты топологического характера о накрытиях проективных пространств содержатся в [155] и [119]. Структурные теоремы о тройных накрытиях были доказаны в работах [160], [118], [164], [83], [190], [191] и [109]. Частные результаты спорадического характера о циклических накрытиях получены в [197], [165], [157]. В контексте бирациональной геометрии тройные накрытия проективных пространств изучались в работах [153] и [154]. Нерациональность общих циклических накрытий проективных пространств изучалась в [144] (см. теорему 13 настоящей работы).

§ 2. Свойства подвижных логпар

В настоящем параграфе будут рассмотрены свойства подвижных логпар, которые были введены в работе [64], но неявно использовались ещё в [163], [113], [114] и [17].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. *Подвижной логпарой* (X, M_X) называется многообразие X вместе с подвижной границей M_X , где $M_X = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{M}_i$ – формальная конечная линейная комбинация линейных систем без неподвижных компонент $\mathcal{M}_i$ на многообразии X такая, что $a_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Очевидно, что каждая подвижная логпара всегда может быть рассмотрена как обычная логпара с эффективной границей, не содержащей компонент с кратностью больше 1, при использовании замены каждой линейной системы на взвешенную сумму её общих элементов. В частности, для данной подвижной логпары (X, M_X) её подвижная граница M_X может быть рассмотрена как эффективный дивизор, и численное пересечение границы M_X с кривыми на X корректно определено в случае $\mathbb{Q}$ -факториального многообразия X . Таким образом, формальную сумму $K_X + M_X$ можно считать логканоническим дивизором подвижной логпары (X, M_X) . В оставшейся части этого параграфа логканонические дивизоры всех рассматриваемых логпар будут считаться дивизорами $\mathbb{Q}$ -карты.

ЗАМЕЧАНИЕ 23. Для подвижной логпары (X, M_X) самопересечение M_X^2 может быть рассмотрено как корректно определенный эффективный цикл коразмерности два на многообразии X , если многообразие X имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности.

В отличие от обычных логпар, прямой образ подвижной границы при бирациональном отображении естественно и корректно определен ввиду того, что у компонент подвижной границы базисное множество не содержит дивизоров.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Подвижные логпары (X, M_X) и (Y, M_Y) называются *бирационально эквивалентными*, если существует бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow Y$ такое, что $M_Y = \rho(M_X)$.

Такие стандартные понятия, как дискрепантности, терминальность, каноничность, логтерминальность и логканоничность, могут быть определены для подвижных логпар аналогично тому, как они определяются для обычных логпар (см. [142]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Подвижная логпара (X, M_X) имеет канонические (соответственно, терминальные) особенности, если для каждого бирационального морфизма $f: W \rightarrow X$ дискрепантности $a(X, M_X, E_i) \in \mathbb{Q}$ в эквивалентности

$$K_W + f^{-1}(M_X) \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + M_X) + \sum_{i=1}^k a(X, M_X, E_i) E_i,$$

где E_i — f -исключительный дивизор, неотрицательны (соответственно, положительны).

ПРИМЕР 26. Пусть $\mathcal{M}$ — линейная система без неподвижных компонент на некотором трехмерном многообразии X , которое имеет терминальные и $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности. Тогда особенности логпары $(X, \mathcal{M})$ терминальны, если и только если все базисные точки линейной системы $\mathcal{M}$ изолированы, неособы на общем дивизоре из линейной системы $\mathcal{M}$ и неособы на многообразии X .

ЗАМЕЧАНИЕ 27. Применение логпрограммы минимальных моделей (см. [142]) к каноничным и терминальным подвижным логпарам сохраняет их каноничность и терминальность соответственно.

Особенности подвижной логпары совпадают с особенностями многообразия вне объединения базисных множества компонент подвижной границы. Следовательно, из существования разрешения особенностей (см. [129]) следует, что каждая подвижная логпара бирационально эквивалентна подвижной логпаре с терминальными особенностями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. Собственное неприводимое подмногообразие $Y \subset X$ называется *центром канонических особенностей* подвижной логпары (X, M_X) в том случае, если существуют такие бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ и f -исключительный дивизор $E_1 \subset W$, что выполнено соотношение

$$K_W + f^{-1}(M_X) \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + M_X) + \sum_{i=1}^k a(X, M_X, E_i) E_i,$$

где $a(X, M_X, E_i) \in \mathbb{Q}$, а дивизор E_i является f -исключительным, выполнено неравенство $a(X, M_X, E_1) \leq 0$ и $f(E_1) = Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. Определим $\mathbb{CS}(X, M_X)$ как множество, состоящее из всех центров канонических особенностей подвижной логпары (X, M_X) . Также определим подмножество $CS(X, M_X) \subset X$ как объединение всех центров канонических особенностей подвижной логпары (X, M_X) в теоретико-множественном смысле.

Из данного определения следует, что подвижная логпара (X, M_X) имеет терминальные особенности, если и только если $\mathbb{CS}(X, M_X) = \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ 30. Если особенности подвижной логпары (X, M_X) терминальны, то для достаточно малого $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>1}$ особенности логпары $(X, \varepsilon M_X)$ также терминальны.

ЗАМЕЧАНИЕ 31. Рассмотрим подвижную логпару (X, M_X) и собственное неприводимое подмножество $Z \subset X$ такое, что многообразие X неособо в общей точке подмногообразия Z . Из условия $Z \in \mathbb{CS}(X, M_X)$ легко следует, что $\text{mult}_Z(M_X) \geq 1$, а в случае, когда $\text{codim}(Z \subset X) = 2$, верна и обратная импликация.

ЗАМЕЧАНИЕ 32. Пусть (X, M_X) – подвижная логпара, H – достаточно общее гиперплоское сечение многообразия X , а $Z \subset X$ – собственное неприводимое подмногообразие такое, что $\dim(Z) \geq 1$ и $Z \in \mathbb{CS}(X, M_X)$. Тогда

$$Z \cap H \in \mathbb{CS}(H, M_X|_H).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33. Для подвижной логпары (X, M_X) рассмотрим любую бирационально эквивалентную ей подвижную логпару (W, M_W) , имеющую канонические особенности. Пусть m – такое натуральное число, что $m(K_W + M_W)$ является дивизором Картье. Назовем *размерностью Кодаиры* $\kappa(X, M_X)$ логпары (X, M_X) максимальную размерность образа $\dim(\varphi_{|nm(K_W + M_W)|}(W))$ при $n \gg 0$, если хотя бы одна из полных линейных систем $|nm(K_W + M_W)|$ не пуста, в противном случае положим просто $\kappa(X, M_X) = -\infty$.

ЛЕММА 34. *Размерность Кодаиры подвижной логпары корректно определена, т. е. она не зависит от выбора бирационально эквивалентной подвижной логпары с каноническими особенностями из определения 33.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что две подвижные логпары (X, M_X) и (Y, M_Y) имеют канонические особенности и $M_X = \rho(M_Y)$ для некоторого бирационального отображения $\rho: Y \dashrightarrow X$. Рассмотрим натуральное число m такое, что оба дивизора $m(K_X + M_X)$ и $m(K_Y + M_Y)$ являются дивизорами Картье. Для доказательства необходимого утверждения достаточно показать, что либо обе линейные системы $|nm(K_X + M_X)|$ и $|nm(K_Y + M_Y)|$ пусты для всех натуральных n , либо

$$\varphi_{|nm(K_X + M_X)|}(X) = \varphi_{|nm(K_Y + M_Y)|}(Y)$$

для достаточно больших натуральных чисел n . Рассмотрим бирациональные морфизмы $g: W \rightarrow X$ и $f: W \rightarrow Y$ такие, что W неособо и $\rho = g \circ f^{-1}$. Тогда

$$K_W + M_W \sim_{\mathbb{Q}} g^*(K_X + M_X) + \Sigma_X \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_Y + M_Y) + \Sigma_Y,$$

где $M_W = g^{-1}(M_X)$, а Σ_X и Σ_Y – исключительные дивизоры бирациональных морфизмов g и f соответственно. Каноничность логпар (X, M_X) и (Y, M_Y) влечет эффе́ктивность дивизоров Σ_X и Σ_Y . Для достаточно большого и делимого натурального числа k из эффе́ктивности дивизоров Σ_X и Σ_Y следует, что размерность

линейных систем $|k(K_W + M_W)|$, $|g^*(k(K_X + M_X))|$ и $|f^*(k(K_Y + M_Y))|$ одинакова и

$$\varphi|k(K_W + M_W)| = \varphi|g^*(k(K_X + M_X))| = \varphi|f^*(k(K_Y + M_Y))|$$

в случае, когда они не пусты, откуда следует требуемое утверждение.

Очевидно, что размерность Кодaira подвижной логпары является бирациональным инвариантом и неубывающей функцией от коэффициентов подвижной границы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35. Подвижная логпара (V, M_V) называется *канонической моделью* подвижной логпары (X, M_X) , если существует отображение $\psi: X \dashrightarrow V$ такое, что ψ бирационально, $M_V = \psi(M_X)$, логканонический дивизор $K_V + M_V$ обилён, а особенности логпары (V, M_V) каноничны.

Данное определение канонической модели подвижной логпары совпадает с классическим определением канонической модели в случае, когда подвижная граница пуста (см. [142]). Отметим, что из существования канонической модели подвижной логпары следует, что её размерность Кодaira равна размерности многообразия.

ЛЕММА 36. *Каноническая модель единственна, если существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что подвижные логпары (X, M_X) и (V, M_V) являются каноническими моделями и $M_X = \rho(M_V)$ для некоторого бирационального отображения $\rho: V \dashrightarrow X$. Пусть $g: W \rightarrow X$ и $f: W \rightarrow V$ – бирациональные отображения такие, что $\rho = g \circ f^{-1}$. Тогда выполнено соотношение

$$K_W + M_W \sim_{\mathbb{Q}} g^*(K_X + M_X) + \Sigma_X \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_V + M_V) + \Sigma_V,$$

где $M_W = g^{-1}(M_X) = f^{-1}(M_V)$ и дивизоры Σ_X и Σ_V являются исключительными дивизорами бирациональных морфизмов g и f соответственно. Из каноничности особенностей логпар (X, M_X) и (V, M_V) следует, что оба дивизора Σ_X и Σ_V эффективны. Рассмотрим достаточно большое и делимое натуральное число n такое, что все три дивизора $n(K_W + M_W)$, $n(K_X + M_X)$ и $n(K_V + M_V)$ одновременно являются дивизорами Картье. Из эффективности дивизоров Σ_X и Σ_V следует, что

$$\varphi|n(K_W + M_W)| = \varphi|g^*(n(K_X + M_X))| = \varphi|f^*(n(K_V + M_V))|$$

и ρ является изоморфизмом, поскольку дивизоры $K_X + M_X$ и $K_V + M_V$ обильны.

В случае пустой подвижной границы утверждение леммы 36 о единственности канонической модели алгебраического многообразия хорошо известно. Из последнего, например, сразу следует, что все бирациональные автоморфизмы канонической модели бирегулярны. Именно это свойство является классическим атрибутом бирационально сверхжесткого многообразия (см. определение 1). Как будет показано далее, именно лемма 36 объясняет геометрическую природу этого феномена в обоих случаях, а для бирационально сверхжестких многообразий лемма 36 есть не что иное, как завуалированное неравенство Нётера–Фано–Исковских (см. [174]).

§ 3. Предварительные результаты

В силу естественных причин подвижные логпары (см. определение 22) хорошо отражают бирациональную геометрию данного многообразия (см. лемму 36). Понятно также, что канонические и терминальные особенности для таких логпар – наиболее естественный класс особенностей (см. замечание 27). Как будет видно далее, многие интересные вопросы бирациональной геометрии могут быть естественным образом сформулированы в терминах подвижных логпар. Подвижные логпары всегда могут рассматриваться как обычные логпары, а подвижные границы – как эффективные дивизоры. С другой стороны, можно рассматривать и логпары, имеющие как подвижные, так и неподвижные компоненты, по аналогии с тем, что существуют линейные системы с подвижной и неподвижной частью. Более того, в принципе, можно рассматривать и логпары с отрицательными коэффициентами при компонентах границы. Не хотелось бы акцентировать на этом слишком много внимания, но следует отметить, что такие допущения делать не только можно, но и нужно, и для этого существуют две причины. Во-первых, даже при элементарных раздутиях наиболее точно отражает свойство подвижной логпары на раздутом многообразии не её естественно определённый бирациональный образ, а её логпрообраз (см. определение 37), который может иметь как неподвижные компоненты, так и отрицательные коэффициенты компонент границ. Во-вторых, канонические особенности и центры канонических особенностей (см. определение 28) не обладают хорошими функториальными и геометрическими свойствами, когда рассматриваются вне бирационального контекста на самом многообразии, в отличие от логканонических особенностей и центров логканонических особенностей (см. определение 38), роль которых в современной алгебраической геометрии огромна (см. [142], [148], [145], [63], [161], [162], [30], [116]). Логканонические и канонические особенности связаны между собой посредством логприсоединения (см. [99] и далее теорему 49), а также и через другие, ещё не до конца осознанные пути (см. [30]). Поэтому в настоящем параграфе не будут налагаться никакие ограничения на коэффициенты границ, хотя это часто и не очень удобно, а порой излишне. В частности, границы могут не быть эффективными, если это не оговорено особо. Однако будет подразумеваться, что все логканонические дивизоры являются $\mathbb{Q}$ -картье дивизорами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37. Для произвольной логпары (X, B_X) и бирационального морфизма $f: V \rightarrow X$ логпара (V, B^V) называется *логподнятием* логпары (X, B_X) , если выполнены соотношения

$$B^V = f^{-1}(B_X) - \sum_{i=1}^n a(X, B_X, E_i) E_i, \quad K_V + B^V \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X),$$

где $a(X, B_X, E_i) \in \mathbb{Q}$ и дивизор E_i является f -исключительным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38. Собственное неприводимое подмногообразие $Y \subset X$ называется *центром* логканонических особенностей логпары (X, B_X) , если существуют бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ и дивизор $E \subset W$ такие, что дивизор E содержится в носителе эффективной части дивизора $[B^W]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 39. Обозначим $\mathbb{LCS}(X, B_X)$ множество всех центров логканонических особенностей логпары (X, B_X) . Пусть $LCS(X, B_X) \subset X$ – объединение всех центров логканонических особенностей логпары (X, B_X) , рассматриваемое как собственное подмножество в X и называемое *множеством логканонических особенностей*.

ЗАМЕЧАНИЕ 40. Пусть (X, B_X) – логпара, H – достаточно общее гиперплоское сечение многообразия X , а $Z \subset X$ – собственное неприводимое подмногообразие такое, что $\dim(Z) \geq 1$ и $Z \in \mathbb{LCS}(X, B_X)$. Тогда $Z \cap H \in \mathbb{LCS}(H, B_X|_H)$.

Рассмотрим логпару (X, B_X) , где $B_X = \sum_{i=1}^k a_i B_i$, дивизор B_i эффективен и неприводим и $a_i \in \mathbb{Q}$. Пусть $f: Y \rightarrow X$ – бирациональный морфизм такой, что Y гладкое, а объединение всех дивизоров $f^{-1}(B_i)$ и всех f -исключительных дивизоров образуют дивизор с простыми нормальными пересечениями. Морфизм f называется *логразрешением логпары* (X, B_X) , и выполнено соотношение

$$K_Y + B^Y \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X)$$

для логподнятия (Y, B^Y) логпары (X, B_X) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 41. *Подсхемой логканонических особенностей* произвольной логпары (X, B_X) называется подсхема, ассоциированная с пучком идеалов $\mathcal{I}(X, B_X) = f_*([-B^Y])$, которая будет обозначаться $\mathcal{L}(X, B_X)$.

Отметим, что $\text{Supp}(\mathcal{L}(X, B_X)) = LCS(X, B_X) \subset X$. Следующий результат является теоремой Шокурова об обращении в нуль (см. [63] и [65]).

ТЕОРЕМА 42. Пусть (X, B_X) – логпара, граница B_X эффективна, а H – численно эффективный и объемный дивизор на X такой, что $D = K_X + B_X + H$ является дивизором Картье. Тогда $H^i(X, \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D) = 0$ для всех $i > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По относительной теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль имеем

$$R^i f_*(f^*(K_X + B_X + H) + [-B^W]) = 0$$

для всех $i > 0$ (см. [140], [195], [142]). Из вырождения соответствующей спектральной последовательности и равенства пучков

$$R^0 f_*(f^*(K_X + B_X + H) + [-B^W]) = \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D$$

следует, что для всех $i \geq 0$ имеет место равенство групп когомологий

$$H^i(X, \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D) = H^i(W, f^*(K_X + B_X + H) + [-B^W]),$$

но для $i > 0$ группы когомологий

$$H^i(W, f^*(K_X + B_X + H) + [-B^W])$$

тривиальны по теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль.

Рассмотрим два следующих элементарных применения теоремы 42, которые являются частными случаями более общего утверждения из [52] (см. также [60] и [107]).

ЛЕММА 43. Пусть V – гладкая двумерная квадрика $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а B_V – эффективная граница на V бистепени (a, b) , где a и $b \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Тогда $\mathbb{LCS}(V, B_V) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_V = \sum_{i=1}^k a_i B_i$ для положительных рациональных чисел a_i и неприводимых приведенных кривых $B_i \subset V$. Пересекая границу B_V со слоями двух проекций квадрики V на $\mathbb{P}^1$, получаем $a_i < 1$. В частности, множество $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ не содержит кривых.

Допустим, что множество $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ содержит точку $O \in V$. Рассмотрим любой дивизор $H \in \text{Pic}(V) \otimes \mathbb{Q}$ бистепени $(1 - a, 1 - b)$. Дивизор H обилен, и из его выбора следует, что на V существует дивизор Картье D такой, что

$$D \sim_{\mathbb{Q}} K_V + B_V + H$$

и $H^0(\mathcal{O}_V(D)) = 0$. Однако из теоремы 42 следует сюръективность отображения

$$H^0(\mathcal{O}_V(D)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}(D)) \rightarrow 0,$$

что является противоречием, поскольку $H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}(D)) = H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)})$.

ЛЕММА 44. Пусть $V \subset \mathbb{P}^n$ – гладкая гиперповерхность степени $k < n$, а B_V – эффективная граница на V такая, что $B_V \equiv rH$ для $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, где H – гиперплоское сечение гиперповерхности V . Тогда $\mathbb{LCS}(V, B_V) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что множество $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ содержит некоторое подмногообразие $Z \subset V$. Тогда из [25, теорема 2] (см. также [54, лемма 3.18]) следует, что выполнено равенство $\dim(Z) = 0$. Значит, множество $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ содержит только замкнутые точки многообразия V . В частности, носитель схемы логканонических особенностей $\mathcal{L}(V, B_V)$ нульмерен и $H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}) \neq 0$.

Заметим, что $K_V + B_V + (1 - r)H \equiv (k - n)H$ и $H^0(\mathcal{O}_V((k - n)H)) = 0$, поскольку выполнено неравенство $k < n$. Однако из теоремы 42 следует сюръективность

$$H^0(\mathcal{O}_V((k - n)H)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}((k - n)H)) \rightarrow 0,$$

что является противоречием, так как $H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}((k - n)H)) = H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)})$.

ПРИМЕР 45. Пусть $V \subset \mathbb{P}^n$ – гладкая гиперповерхность, заданная уравнением

$$x_0^k = \sum_{i=1}^n x_i^k \subset \mathbb{P}^n \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]),$$

а $B_V = \frac{n-1}{k} H$, где H – гиперплоское сечение гиперповерхности V , заданное уравнением $x_0 = x_1$. Тогда гиперповерхность V неособа, а множество $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ состоит из одной точки $(1 : 1 : 0 : \dots : 0) \in V \subset \mathbb{P}^n$.

Идея доказательств лемм 43 и 44 может быть применена для получения более общего результата. А именно, для произвольного дивизора Картье D на многообразии X рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{L}(X, B_X)}(D) \rightarrow 0$$

и соответствующую точную последовательность групп когомологий. Теперь, применяя теорему 42, получим следующие две теоремы о связности (см. [63]).

ТЕОРЕМА 46. Пусть (X, B_X) – произвольная логпара, граница B_X эффективна, дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объемен. Тогда множество $LCS(X, B_X)$ связно.

ТЕОРЕМА 47. Пусть (X, B_X) – произвольная логпара, граница B_X эффективна, дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объемен относительно некоторого морфизма $g: X \rightarrow Z$ со связными слоями. Тогда множество $LCS(X, B_X)$ связно в окрестности каждого слоя морфизма g .

Используя аргументы доказательства теоремы 42, можно также получить следующий важный результат, который является теоремой 17.4 работы [148].

ТЕОРЕМА 48. Рассмотрим некоторый морфизм $g: X \rightarrow Z$ и дивизор $D_X = \sum_{i \in I} d_i D_i$ на многообразии X . Разрешим особенности $h: V \rightarrow X$ многообразия X таким образом, что объединение всех дивизоров $h^{-1}(D_i)$ и всех h -исключительных дивизоров образует дивизор с простыми нормальными пересечениями. Предположим дополнительно, что $g_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Z$, дивизор $-(K_X + D_X)$ численно эффективен и объемен относительно морфизма g , а ко-размерность подмногообразия $g(D_i) \subset Z$ не меньше двух в случае $d_i < 0$. Определим $a_E \in \mathbb{Q}$ посредством эквивалентности

$$K_V \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + D_X) + \sum_{E \subset V} a_E E,$$

где E – не обязательно h -исключительный дивизор на многообразии V . Тогда множество $\bigcup_{a_E \leq -1} E$ связно в окрестности каждого слоя морфизма $g \circ h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f = g \circ h$, $A = \sum_{a_E > -1} E$ и $B = \sum_{a_E \leq -1} E$. Тогда

$$[A] - [B] \sim_{\mathbb{Q}} K_V - h^*(K_X + D_X) + \{-A\} + \{B\}$$

и $R^1 f_* \mathcal{O}_V([A] - [B]) = 0$ по относительной теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль (см. [142]). Итак, отображение $f_* \mathcal{O}_V([A]) \rightarrow f_* \mathcal{O}_{[B]}([A])$ сюръективно, но каждая неприводимая компонента дивизора $[A]$ либо h -исключительна, либо является собственным прообразом некоторого дивизора D_j , для которого $d_j < 0$. Значит, дивизор $h_*([A])$ является g -исключительным, и $f_* \mathcal{O}_V([A]) = \mathcal{O}_Z$. Следовательно, отображение

$$\mathcal{O}_Z \rightarrow f_* \mathcal{O}_{[B]}([A])$$

сюръективно, откуда следует связность $[B]$ в окрестности слоев морфизма f , поскольку $[A]$ эффективен и не имеет общих компонент с $[B]$.

Ранее были определены центр канонических особенностей и множество центров канонических особенностей подвижной логпары (см. определения 28 и 29). При этом подвижность границы нигде реально не использовалась. Излишнее предположение подвижности оправдано тем, что введенные понятия используются в основном для подвижных логпар и возникают в естественных конструкциях, связанных с подвижными логпарами. Тем не менее, оба этих понятия можно корректно использовать и для обыкновенных логпар. Последнее требуется, как правило, для индуктивной связи центров канонических особенностей с их логаналогами. Например, как в следующем результате (см. [99]).

ТЕОРЕМА 49. Пусть (X, B_X) – логпара, B_X – эффективная граница, $Z \in \mathbb{CS}(X, B_X)$, а H – эффективный и неприводимый дивизор Картье на многообразии X . Предположим, что $Z \subset H$, а дивизор H не является компонентой границы B_X и неособ в общей точке подмногообразия $Z \subset X$. Тогда $\mathbb{LCS}(H, B_X|_H) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: W \rightarrow X$ – логразрешение логпары $(X, B_X + H)$, и положим $\hat{H} = f^{-1}(H)$. Тогда выполнено соотношение

$$K_W + \hat{H} \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X + H) + \sum_{E \neq \hat{H}} a(X, B_X + H, E)E$$

и по предположению $\{Z, H\} \subset \mathbb{LCS}(X, B_X + H)$. Из применения теоремы 48 к логподнятию логпары $(X, B_X + H)$ на W следует, что $\hat{H} \cap E \neq \emptyset$ для некоторого f -исключительного дивизора E на W такого, что $f(E) = Z$ и выполнено неравенство $a(X, B_X, E) \leq -1$. Из эквивалентности

$$K_{\hat{H}} \sim (K_W + \hat{H})|_{\hat{H}} \sim_{\mathbb{Q}} f|_{\hat{H}}^*(K_H + B_X|_H) + \sum_{E \neq \hat{H}} a(X, B_X + H, E)E|_{\hat{H}}$$

следует необходимое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 50. Пусть (X, M_X) – подвижная логпара, $\dim(X) \geq 3$, M_X – эффективная граница, а $O \in \mathbb{CS}(X, M_X)$ – гладкая точка на X . Рассмотрим $k \leq \dim(X) - 2$ общих гиперплоских сечений $H_1, \dots, H_k$, содержащих O , многообразия X , поверхность $S = \bigcap_{i=1}^k H_i$ и подвижную границу $M_S = M_X|_S$. Тогда $O \in \mathbb{LCS}(S, M_S)$.

Отметим, что теорема 49 является частным случаем общей концепции, широко известной как логприсоединение (см. [148]). В частности, слегка измененное доказательство теоремы 49 влечет следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 51. Пусть (X, M_X) – подвижная логпара, $\dim(X) \geq 3$, M_X – эффективная граница, а $O \in X$ – изолированная гиперповерхностная особая точка такая, что $O \in \mathbb{CS}(X, M_X)$. Рассмотрим $k \leq \dim(X) - 2$ достаточно общих гиперплоских сечений $H_1, \dots, H_k$ многообразия X , проходящих через особую точку O , поверхность $S = \bigcap_{i=1}^k H_i$ и подвижную границу $M_S = M_X|_S$. Тогда $O \in \mathbb{LCS}(S, M_S)$.

Следующий результат является теоремой 3.1 из [99], которая позволяет доказать основной результат работы [17] самым коротким способом (см. [99]) при использовании теоремы 49.

ТЕОРЕМА 52. Пусть H – поверхность, O – гладкая точка на H , M_H – эффективная подвижная граница на поверхности H , a_1 и a_2 – неотрицательные рациональные числа, Δ_1 и Δ_2 – неприводимые и приведенные кривые на H , которые пересекаются нормально в точке O , и $O \in \mathbb{LCS}(H, (1 - a_1)\Delta_1 + (1 - a_2)\Delta_2 + M_H)$. Тогда

$$\text{mult}_O(M_H^2) \geq \begin{cases} 4a_1a_2 & \text{в случае } a_1 \leq 1 \text{ или } a_2 \leq 1, \\ 4(a_1 + a_2 - 1) & \text{в случае } a_1 > 1 \text{ и } a_2 > 1. \end{cases}$$

Почти во всех применениях теоремы 52 рассматриваемая граница не содержит неподвижных компонент. Более того, теорема 52 была доказана именно для соответствующих применений к подвижным логпарам с использованием теоремы 49. Однако в настоящем виде доказательство теоремы 3.1 из [99] индуктивно по количеству требуемых раздутий, необходимых для реализации соответствующей дискрепантности. В определенном смысле, было труднее найти правильную формулировку теоремы 52, чем затем доказать её. С другой стороны, теорема 52 в общем виде имеет очень интересные многомерные применения (см. [49] и [54]). Более общий подход к доказательству теоремы 52 был получен в [116], где аналог теоремы 52 использовался для доказательства обобщения основного неравенства работы [30]. Отметим, что теорема 2.1 из [116] обобщает теорему 52 в случае, когда неподвижная компонента границы состоит из одной кривой, а не из двух. Однако в некоторых случаях использование такой ослабленной версии может оказаться недостаточным для доказательства некоторых результатов (см. [49]).

В основных применениях теоремы 52 используется следующий её частный случай, который также является частным случаем теоремы 0.1 из [115].

СЛЕДСТВИЕ 53. Пусть H – поверхность, O – гладкая точка на H , M_H – эффективная подвижная граница на H и $O \in \text{LCS}(H, M_H)$. Тогда выполнено неравенство $\text{mult}_O(M_H^2) \geq 4$ и равенство $\text{mult}_O(M_H^2) = 4$ влечет $\text{mult}(M_H) = 2$.

Следующий результат получен в работе [174].

ТЕОРЕМА 54. Пусть (X, M_X) – подвижная логпара с эффективной границей M_X , а O – гладкая точка на X , $\dim(X) \geq 3$ и $O \in \text{CS}(X, M_X)$. Тогда $\text{mult}_O(M_X^2) \geq 4$ и выполнение равенства $\text{mult}_O(M_X^2) = 4$ влечет $\text{mult}_O(M_X) = 2$ и $\dim(X) = 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы получено путем применения следствий 50 и 53.

Следует отметить, что работа [174] содержит элементарное, но очень техническое доказательство теоремы 54, которое верно и для многообразий, определенных над полями положительной характеристики. Тем не менее, и доказательство в [174], и приведенное доказательство из [99] не раскрывают полностью геометрический смысл теоремы 54. Геометрический смысл утверждения теоремы 54 отмечен в работе [98]. Для этого рассмотрим следующий хорошо известный результат (см. [148]).

ЛЕММА 55. Пусть O – гладкая точка на трехмерном многообразии X , являющаяся центром канонических особенностей логпары (X, M_X) , где M_X – эффективная подвижная граница на X , а особенности логпары (X, M_X) каноничны. Тогда существует бирациональный морфизм $f: V \rightarrow X$ такой, что V имеет лишь терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, морфизм f стягивает ровно один исключительный дивизор E в точку O и $K_V + M_V \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + M_X)$, где $M_V = f^{-1}(M_X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Количество различных дивизориальных нормирований ν поля рациональных функций многообразия X таких, что центр ν на многообразии X является точкой O и дискрепанта $a(X, M_X, \nu)$ неположительна, конечно ввиду каноничности подвижной логпары (X, M_X) . Таким образом, можно рассмотреть бирациональный морфизм $g: W \rightarrow X$ такой, что трехмерное многообразие W неособо, морфизм g стягивает k исключительных дивизоров, выполнено соотношение

$$K_W + M_W \sim_{\mathbb{Q}} g^*(K_X + M_X) + \sum_{i=1}^k a_i E_i,$$

логпара (W, M_W) имеет канонические особенности, а множество $\mathbb{CS}(W, M_W)$ не содержит подмногообразий, лежащих в $\bigcup_{i=1}^k E_i$, где $M_W = g^{-1}(M_X)$, $g(E_i) = O$ и числа a_i рациональны. Применяя логпрограмму минимальных моделей (см. [142]) к подвижной логпаре (W, M_W) над X , можно считать, что многообразие W имеет лишь терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности и $K_W + M_W \sim_{\mathbb{Q}} g^*(K_X + M_X)$, поскольку логпара (X, M_X) канонична. Применение программы минимальных моделей к многообразию W над X доказывает требуемое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 56. Несложно видеть, что верно в некотором смысле обратное утверждение к лемме 55. А именно, для гладкой точки O на многообразии X и бирационального морфизма $f: V \rightarrow X$ такого, что V имеет терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, а морфизм f стягивает ровно один исключительный дивизор E в O , существует подвижная каноническая логпара (X, M_X) с эффективной границей M_X такая, что $K_V + M_V \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + M_X)$ и $O \in \mathbb{CS}(X, M_X)$, где $M_V = f^{-1}(M_X)$.

Следующий результат был сформулирован как гипотеза в [98], а доказан в [139].

ТЕОРЕМА 57. Пусть $f: V \rightarrow X$ – бирациональный морфизм такой, что X – гладкое трехмерное многообразие, V имеет терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, а f стягивает ровно один исключительный дивизор E в точку O . Тогда f является взвешенным раздутием точки O с весами $(1, K, N)$ в подходящих локальных координатах на X , где натуральные числа K и N взаимно просты.

Отметим, что теорема 54 была доказана в [98] в предположении выполнения утверждения теоремы 57 следующим способом, который и проясняет геометрическую природу неравенства в утверждении теоремы 54.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 58. Пусть X – гладкое трехмерное многообразие, M_X – эффективная подвижная граница на X , O – точка на многообразии X такая, что она является центром канонических особенностей логпары (X, M_X) , и $K_V + M_V \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + M_X)$, где $f: V \rightarrow X$ – взвешенное раздутие точки O с весами $(1, K, N)$ в соответствующих локальных координатах X , $M_V = f^{-1}(M_X)$, а L и N – натуральные взаимно простые числа. Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\text{mult}_O(M_X^2) \geq \frac{(K+N)^2}{KN} = 4 + \frac{(K-N)^2}{KN} \geq 4,$$

причем $K = N$ означает, что f – обыкновенное раздутие точки O и верно равенство $\text{mult}_O(M_X) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для f -исключительного дивизора E выполнены соотношения

$$K_V \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X) + (N + K)E,$$

$$M_V \sim_{\mathbb{Q}} f^*(M_X) + mE, \quad m \in \mathbb{Q}_{>0}.$$

Таким образом, $m = K + N$. Пересекая эффективный цикл M_X^2 с общим гиперплоским сечением многообразия X , проходящим через точку O , получаем неравенство

$$\text{mult}_O(M_X^2) \geq m^2 E^3 = \frac{(K + N)^2}{KN}.$$

Ещё одно применение теоремы 49 можно сформулировать в виде следующего результата, который является теоремой 3.10 в [99].

ТЕОРЕМА 59. Пусть X – многообразие, O – обыкновенная двойная точка на многообразии X , B_X – эффективная граница на X , являющаяся $\mathbb{Q}$ -картье дивизором, такая, что $O \in \mathbb{CS}(X, B_X)$. Предположим, что $\dim(X) \geq 3$. Тогда выполнено неравенство $\text{mult}_O(B_X) \geq 1$ и равенство $\text{mult}_O(B_X) = 1$ влечет $\dim(X) = 3$, где $\text{mult}_O(B_X)$ определяется стандартным способом относительно обыкновенного раздутия O .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду следствия 51 можно считать, что размерность многообразия X равна трем. Пусть $f: W \rightarrow X$ – раздутие точки O . Тогда

$$K_W + B_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X) + (1 - \text{mult}_O(B_X))E,$$

где $B_W = f^{-1}(B_X)$ и E – f -исключительный дивизор. Допустим, что выполнено строгое неравенство $\text{mult}_O(B_X) < 1$. Тогда $Z \subset E$ для некоторого $Z \in \mathbb{CS}(W, B_W)$ и

$$\mathbb{LCS}(E, B_W|_E) \neq \emptyset$$

по теореме 49, что противоречит лемме 43, так как $E \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 60. Пусть X – многообразие, B_X – эффективная граница на X , являющаяся $\mathbb{Q}$ -картье дивизором, $\dim(X) \geq 4$, O – изолированная двойная особая точка на многообразии X такая, что X может быть локально задано в её окрестности уравнением $y^3 = \sum_{i=1}^{\dim(X)} x_i^2$ и $O \in \mathbb{CS}(X, B_X)$. Тогда выполнено неравенство $\text{mult}_O(B_X) > 1$, где кратность $\text{mult}_O(B_X)$ определяется стандартным образом относительно обыкновенного раздутия точки O .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя следствие 51 и теорему 59, получим требуемое утверждение.

ТЕОРЕМА 61. Пусть X – многообразие размерности $n \geq 4$, B_X – эффективная граница на X , являющаяся $\mathbb{Q}$ -картье дивизором, и $O \in X$ – обыкновенная тройная точка, т. е. O является гиперповерхностной особенностью на X такой, что проективизация касательного конуса к X в точке O является неособой гиперповерхностью в $\mathbb{P}^{n-1}$ степени 3. Пусть $O \in \text{CS}(X, B_X)$. Тогда $\text{mult}_O(B_X) \geq 1$ и равенство $\text{mult}_O(B_X) = 1$ влечет, что $n = 4$, где кратность $\text{mult}_O(B_X)$ определяется стандартным образом при помощи обыкновенного раздутия точки O .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: W \rightarrow X$ – раздутие точки O . Тогда

$$K_W + B_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X) + (n - 3 - \text{mult}_O(B_X))E,$$

где $B_W = f^{-1}(B_X)$ и E – исключительный дивизор раздутия f . Допустим, что выполнено строгое неравенство $\text{mult}_O(B_X) < n - 3$. Тогда $Z \subset E$ для некоторого

$$Z \in \text{CS}(W, B_W - (n - 3 - \text{mult}_O(B_X))E) \subset \text{CS}(W, B_W),$$

а при $n > 4$ и $\text{mult}_O(B_X) \leq 1$ также

$$\text{CS}(W, B_W - (n - 3 - \text{mult}_O(B_X))E) \subset \text{CS}(W, \lambda B_W)$$

для некоторого положительного рационального $\lambda < 1$. В частности, из теоремы 49 следует, что $\mathbb{L}\text{CS}(E, B_W|_E) \neq \emptyset$ в случае $\text{mult}_O(B_X) < 1$ и $\mathbb{L}\text{CS}(E, \lambda B_W|_E) \neq \emptyset$ при выполнении неравенств $\text{mult}_O(B_X) \leq 1$ и $n > 4$. Таким образом, в обоих случаях мы получаем противоречие с утверждением леммы 44.

Легко видеть, что теоремы 59 и 61 являются частными случаями следующего более общего результата, который будет оставлен без доказательства, поскольку оно аналогично доказательству теоремы 61.

ТЕОРЕМА 62. Пусть X – многообразие, $\dim(X) = n$, B_X – эффективная граница на многообразии X , являющаяся $\mathbb{Q}$ -картье дивизором, и $O \in X$ – обыкновенная особая точка такая, что $\text{mult}_O(X) = k$, т. е. гиперповерхностная особенность на X такая, что проективизация касательного конуса к X в точке O является неособой гиперповерхностью в $\mathbb{P}^{n-1}$ степени k . Предположим, что $O \in \text{CS}(X, B_X)$ и выполнено неравенство $n > k$. Тогда $\text{mult}_O(B_X) \geq 1$ и равенство $\text{mult}_O(B_X) = 1$ влечет, что $n = k + 1$, где $\text{mult}_O(B_X)$ определяется стандартным образом при помощи обыкновенного раздутия точки $O \in X$.

СЛЕДСТВИЕ 63. Пусть $f: V \rightarrow X$ – бирациональный морфизм такой, что оба многообразия X и V имеют терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, а f стягивает ровно один исключительный дивизор E в точку $O \in X$. Предположим дополнительно, что $O \in X$ – обыкновенная особая точка, т. е. гиперповерхностная особенность такая, что проективизация касательного конуса к многообразию X в точке O является неособой гиперповерхностью в $\mathbb{P}^{\dim(X)-1}$ степени $\text{mult}_O(X)$. Допустим, что $\text{mult}_O(X) = \dim(X) - 1$. Тогда бирациональный морфизм f является стандартным раздутием точки $O \in X$.

§ 4. Неравенства Нётера–Фано–Исковских

В настоящем параграфе будет рассмотрено неравенство Нётера–Фано–Исковских и даны два его обобщения. Рассмотрим произвольное многообразие Фано X такое, что оно имеет терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности и $\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$. Например, под X везде можно подразумевать многообразие из теоремы 3 или 18 (см. далее лемму 68 и замечание 87). Все подвижные границы будут предполагаться эффективными. Следующая теорема доказана в работе [98], хотя её частные случаи содержатся в таких классических работах, как [163], [113], [114], [20], [21], [17]. Мы приведем доказательство из [98] для сохранения целостности геометрической картины изложения.

ТЕОРЕМА 64. *Предположим, что каждая подвижная логпара (X, M_X) , для которой выполнено соотношение $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$, имеет канонические особенности. Тогда многообразие X бирационально сверхжестко.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ρ – бирациональная перестройка многообразия X в многообразие Y такое, что либо Y обладает структурой расслоения $\tau: Y \rightarrow Z$ на многообразии с размерностью Кодайры $-\infty$, либо Y является $\mathbb{Q}$ -факториальным терминальным многообразием Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$. Требуется показать, что первый случай невозможен, а во втором случае $Y \cong X$ и отображение ρ бирегулярно.

Предположим, что существует расслоение $\tau: Y \rightarrow Z$ на многообразии с размерностью Кодайры $-\infty$. Выберем достаточно общий очень обильный дивизор H на многообразии Z и рассмотрим подвижную границу $M_Y = \mu|\tau^*(H)|$ для произвольного положительного рационального μ . По построению размерность Кодайры $\kappa(Y, M_Y)$ логпары (Y, M_Y) равна $-\infty$. Рассмотрим подвижную логпару (X, M_X) , бирационально эквивалентную логпаре (Y, M_Y) . Тогда

$$\kappa(X, M_X) = \kappa(Y, M_Y) = -\infty$$

по определению размерности Кодайры (см. лемму 34). Теперь выберем такое рациональное μ , что выполнено соотношение $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Последнее всегда можно сделать ввиду условия $\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ -факториальности особенностей многообразия X . По предположению теоремы особенности подвижной логпары (X, M_X) каноничны. В частности, $\kappa(X, M_X) = 0$ по определению размерности Кодайры, что является противоречием. Значит, этот случай не реализуется.

Предположим, что многообразие Y является терминальным $\mathbb{Q}$ -факториальным многообразием Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$. Рассмотрим натуральное число $n \gg 0$, положительное рациональное число μ и две бирационально эквивалентные подвижные границы $M_Y = \frac{\mu}{n}| - nK_Y |$ и $M_X = \rho^{-1}(M_Y)$. Выберем μ так, что $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Тогда особенности логпары (X, M_X) каноничны по предположению теоремы. В частности, выполнены равенства $\kappa(X, M_X) = \kappa(Y, M_Y) = 0$, откуда следует $\mu = 1$.

Рассмотрим бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ такой, что $g = \rho \circ f$ регулярен, а многообразие W гладкое (см. [129]). Тогда выполнено соотношение

$$\sum_{j=1}^k a(X, M_X, F_j) F_j \sim_{\mathbb{Q}} \sum_{i=1}^l a(Y, M_Y, G_i) G_i,$$

где G_i — g -исключительный дивизор, а F_j — f -исключительный дивизор. Особенности логпар (X, M_X) и (Y, M_Y) каноничны. Более того, особенности логпары (Y, M_Y) терминальны по построению. В частности, все числа $a(X, M_X, F_j)$ неотрицательны, а все числа $a(Y, M_Y, G_i)$ строго положительны. Отрицательность исключительного множества (см. [67] и [148, лемма 2.19]) влечет равенство $a(X, M_X, E) = a(Y, M_Y, E)$ для каждого дивизора E на W . В частности, выполнено равенство

$$\sum_{j=1}^k a(X, M_X, F_j) F_j = \sum_{i=1}^l a(Y, M_Y, G_i) G_i$$

такое, что носитель дивизора из правой части этого равенства содержит все g -исключительные дивизоры. С другой стороны, $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ влечет $\text{Pic}(W) = \mathbb{Z}^{1+k}$, а $\mathbb{Q}$ -факториальность многообразия Y и равенство $\text{Pic}(Y) = \mathbb{Z}$ влекут $\text{Pic}(W) = \mathbb{Z}^{1+l}$. Значит, $k = l$, и все неотрицательные числа $a(X, M_X, F_j)$ строго положительны. В частности, особенности подвижной логпары (X, M_X) терминальны.

Рассмотрим такое положительное рациональное число $\zeta > 1$, что особенности логпар $(X, \zeta M_X)$ и $(Y, \zeta M_Y)$ терминальны (см. замечание 30). Дивизоры $K_X + \zeta M_X$ и $K_Y + \zeta M_Y$ обильны, и логпары $(X, \zeta M_X)$ и $(Y, \zeta M_Y)$ являются каноническими моделями. Значит, рациональное отображение ρ бигулярно по лемме 36.

Исторически утверждение теоремы 64 восходит к работам [163], [113] и [114]. В случае алгебраических поверхностей над алгебраически незамкнутым полем аналог теоремы 64 был доказан в работах [20]–[22]. В трехмерном случае аналог теоремы 64, удовлетворяющий современным требованиям строгости, впервые был получен в [17], а затем был развит в [11]. В настоящем виде теорема 64 появилась в [98], хотя, в основном, своим появлением она обязана работам [17], [11], [33] и [34].

СЛЕДСТВИЕ 65. Пусть X не бирационально сверхжестко. Тогда существует подвижная логпара (X, M_X) такая, что дивизор $-(K_X + M_X)$ обилён и $\text{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$.

Следующие два обобщения теоремы 64 были получены в [85].

ТЕОРЕМА 66. Пусть $\rho: V \dashrightarrow X$ — бирациональное отображение, а V обладает структурой эллиптического расслоения $\tau: V \rightarrow Z$. Рассмотрим очень обильный дивизор D на Z и линейную систему $\mathcal{D} = |\tau^*(D)|$. Положим $\mathcal{M} = \rho(\mathcal{D})$ и $M_X = \gamma \mathcal{M}$ для такого $\gamma \in \mathbb{Q}_{>0}$, что $K_X + \gamma M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Тогда $\text{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{CS}(X, M_X) = \emptyset$. Тогда логпара (X, M_X) терминальна. Значит, для некоторого рационального числа $\varepsilon > \gamma$ логпара $(X, \varepsilon \mathcal{M})$ будет канонической моделью (см. замечание 30). В частности, $\kappa(X, \varepsilon \mathcal{M}) = \dim(X)$, но логпара $(X, \varepsilon \mathcal{M})$ бирационально эквивалентна логпаре $(V, \varepsilon \mathcal{D})$. В частности, их размерности Кодайры совпадают, но по построению

$$\kappa(V, \varepsilon \mathcal{D}) \leq \dim(Z) = \dim(X) - 1.$$

Противоречие.

ТЕОРЕМА 67. Пусть $\rho: V \dashrightarrow X$ – небирегулярное бирациональное отображение, а V – многообразие Фано с каноническими особенностями. Рассмотрим линейную систему $\mathcal{D} = |-nK_V|$ для $n \gg 0$. Положим $\mathcal{M} = \rho(\mathcal{D})$ и $M_X = \gamma\mathcal{M}$, где γ – такое положительное рациональное число, что $K_X + \gamma M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Тогда $\text{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{CS}(X, M_X) = \emptyset$. Тогда логпара (X, M_X) терминальна. В частности, $\kappa(X, M_X) = 0$, откуда сразу следует, что $\gamma = \frac{1}{n}$. Значит, для некоторого рационального $\varepsilon > \gamma$ логпара $(X, \varepsilon\mathcal{M})$ – каноническая модель. С другой стороны, логпара $\kappa(X, \varepsilon\mathcal{M})$ бирационально эквивалентна логпаре $(V, \varepsilon\mathcal{D})$, которая также является канонической моделью. Следовательно, ρ бигулярно по лемме 36.

§ 5. Бирациональная сверхжесткость

В настоящем параграфе будет доказана теорема 3. Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^{2n}$ – циклическое тройное накрытие с ветвлением в гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^{2n}$ степени $3n$ такое, что гиперповерхность S имеет только обыкновенные двойные точки, и $n \geq 2$. Легко проверяется, что X – многообразие Фано с терминальными горенштейновыми особенностями и выполнено соотношение $K_X \sim \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n}}(-1))$.

Многообразие X может быть задано как гиперповерхность:

$$y^3 = f_{3n}(x_0, \dots, x_{2n}) \subset \mathbb{P}(1^{2n+1}, n) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{2n}, y]),$$

где f_{3n} – однородный многочлен степени $3n$. Тройное накрытие $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^{2n}$ является ограничением естественной проекции $\mathbb{P}(1^{2n+1}, n) \dashrightarrow \mathbb{P}^{2n}$, которая индуцируется вложением градуированных алгебр $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{2n}] \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_{2n}, y]$. При этом гиперповерхность ветвления $S \subset \mathbb{P}^{2n}$ задается уравнением $f_{3n}(x_0, \dots, x_{2n}) = 0$.

Тот факт, что X является $\mathbb{Q}$ -факториальным, вытекает из следующего более сильного результата, который будет доказан с использованием одного технического приема из работ [45] и [46]. Конечно, $\mathbb{Q}$ -факториальность X должна следовать также и из теоремы Лефшеца (см. [79], [66], [121]), поскольку особенности X изолированы.

ЛЕММА 68. Группы $\text{Cl}(X)$ и $\text{Pic}(X)$ порождаются дивизором K_X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим дивизор Вейля D на многообразии X . Для доказательства леммы достаточно показать, что $D \sim rK_X$ для некоторого $r \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим общий дивизор H в $|-kK_X|$ для $k \gg 0$. Тогда H – гладкое взвешенное полное пересечение (см. [130]) в $\mathbb{P}(1^{2n+1}, n)$ и $\dim(X) \geq 3$. Группа $\text{Pic}(H)$ порождена дивизором $K_X|_H$ [121, гл. XI, теорема 3.13] (см. [105, лемма 3.2.2], [101, лемма 3.5] или [80]). Следовательно, существует $r \in \mathbb{Z}$ такое, что $D|_H \sim rK_X|_H$.

Пусть $\Delta = D - rK_X$. Последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(\Delta) \otimes \mathcal{O}_X(-H) \rightarrow \mathcal{O}_X(\Delta) \rightarrow \mathcal{O}_H \rightarrow 0$$

точна, поскольку пучок $\mathcal{O}_X(\Delta)$ локально свободен в окрестности H . Таким образом, последовательность групп когомологий

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(\Delta)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_H) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(\Delta) \otimes \mathcal{O}_X(-H))$$

точна. С другой стороны, пучок $\mathcal{O}_X(\Delta)$ рефлексивен (см. [124]). Следовательно, существует точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(\Delta) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{E}$ – локально свободный пучок, а пучок $\mathcal{F}$ свободен от кручения. Значит, последовательность групп когомологий

$$H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-H)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(\Delta - H)) \rightarrow H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-H))$$

точна. Однако группа $H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-H))$ тривиальна, поскольку пучок $\mathcal{F}$ свободен от кручения, а группа $H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-H))$ тривиальна по лемме Энриквеса–Севери–Зариского (см. [204]), так как многообразие X нормально. Таким образом,

$$H^1(\mathcal{O}_X(\Delta) \otimes \mathcal{O}_X(-H)) = 0$$

и $H^0(\mathcal{O}_X(\Delta)) = \mathbb{C}$. Аналогично получаем, что $H^0(\mathcal{O}_X(-\Delta)) = \mathbb{C}$. Таким образом, дивизор Δ рационально эквивалентен нулю, т. е. $D \sim rK_X$.

Предположим, что многообразие X не бирационально жестко. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Из следствия 65 вытекает существование некоторой подвижной логпары (X, M_X) такой, что $\mathbb{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$, дивизор $-(K_X + M_X)$ обилиен и граница M_X эффективна. Последнее условие просто означает, что $M_X \sim_{\mathbb{Q}} -rK_X$ для положительного рационального $r < 1$, т. е. численно граница M_X в определенном смысле не очень велика. Пусть $Z \subset X$ – элемент множества $\mathbb{CS}(X, M_X)$.

ЛЕММА 69. *Подмногообразие $Z \subset X$ не является гладкой точкой на X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z – гладкая точка многообразия X . Тогда по теореме 54 выполнено неравенство $\text{mult}_Z(M_X^2) > 4$. Рассмотрим $2n-2$ общих дивизоров $H_1, \dots, H_{2n-2}$ в $|\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n}}(1))|$, которые проходят через точку Z . Тогда выполнены неравенства

$$3 > M_X^2 \cdot H_1 \cdot \dots \cdot H_{2n-2} \geq \text{mult}_Z(M_X^2) \text{mult}_Z(H_1) \dots \text{mult}_Z(H_{2n-2}) > 4,$$

что невозможно.

ЛЕММА 70. *Подмногообразие $Z \subset X$ не является особой точкой многообразия X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z \subset X$ – особая точка на X . Тогда $\pi(Z)$ – обыкновенная особая точка на гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^{2n}$. Пусть $\alpha: V \rightarrow X$ – обыкновенное раздутие точки Z , а $G \subset V$ – α -исключительный дивизор. Тогда V неособо, а G – квадрика размерности $2n - 1$ с одной особой точкой $O \in G$. Поэтому вернее будет сказать, что многообразие G – квадратичный конус с вершиной O .

Пусть $M_V = \alpha^{-1}(M_X)$ и $\text{mult}_Z(M_X)$ – положительное рациональное число такое, что $M_V \sim_{\mathbb{Q}} \alpha^*(M_X) - \text{mult}_Z(M_X)G$. Тогда из предложения 60 следует, что выполнено неравенство $\text{mult}_Z(M_X) > 1$. Однако это еще не приводит к противоречию.

Пусть $H = \alpha^*(-K_X)$. Рассмотрим линейную систему $|H - G|$. По построению рациональное отображение $\varphi_{|H-G|}$, заданное линейной системой $|H - G|$, совпадает с отображением $\gamma \circ \pi \circ \alpha$, где $\gamma: \mathbb{P}^{2n} \dashrightarrow \mathbb{P}^{2n-1}$ – проекция из точки $\pi(Z)$. Линейная система $|H - G|$ не свободна: её базисное множество состоит в точности из вершины O квадратичного конуса G . Более того, раздутие точки O разрешает неопределенности отображения $\varphi_{|H-G|}$, при этом собственный прообраз квадратичного конуса G стягивается на неособую квадрику размерности $2n - 2$. В принципе, вместо раздутия точки Z с последующим раздутием точки O неопределенности рационального отображения $\gamma \circ \pi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{2n-1}$ можно разрешить одним взвешенным раздутием $\beta: U \rightarrow X$ точки $Z \in X \subset \mathbb{P}(1^{2n+1}, n)$ с весами $(2, 3^{2n})$ в соответствующих локальных координатах. Отметим, что β может быть представлено в виде композиции трех рациональных отображений: раздутия α , раздутия точки O , последующего стягивания собственного прообраза квадратичного конуса G . При этом исключительный дивизор взвешенного раздутия β , изоморфный $\mathbb{P}^{2n-1}$, будет сечением расслоения $\gamma \circ \pi \circ \beta: U \rightarrow \mathbb{P}^{2n-1}$, однако многообразие U особо, а именно многообразие U имеет логтерминальные особенности типа $\frac{1}{3}(1, 1)$ (см. [179]) вдоль образа квадратичного конуса G на U .

Пусть C – достаточно общая кривая, содержащаяся в слоях рационального отображения $\varphi_{|H-G|}$. Тогда C неприводима и приведена, а $\pi \circ \alpha(C)$ – прямая, проходящая через точку $\pi(Z)$. Более того, $C \cdot G = 2$, $C \cdot (H - G) = 1$ и $O \in C$. Пересекая подвижную границу M_V с кривой C , получаем неравенства

$$1 > 3 - 2 \text{mult}_Z(M_X) > M_V \cdot C \geq \text{mult}_O(M_V),$$

откуда следует, что $\text{mult}_Z(M_X) \leq \frac{3}{2}$ и $\text{mult}_O(M_V) < 1$. Из эквивалентности

$$K_V + M_V \sim_{\mathbb{Q}} \alpha^*(K_X + M_X) + (2n - 2 - \text{mult}_Z(M_X))G$$

и неравенства $\text{mult}_Z(M_X) \leq \frac{3}{2}$ следует, что существует собственное подмногообразие $Y \subset G$ такое, что $Y \in \mathbb{CS}(V, M_V - (2n - 2 - \text{mult}_Z(M_X))G)$. В частности, размерность Y не превышает $2n - 2$, выполнено неравенство $\text{mult}_Y(M_V) > 1$ и $Y \in \mathbb{CS}(V, M_V)$.

Пусть $\dim(Y) = 2n - 2$. Если $O \in Y$, то

$$1 > \text{mult}_O(M_V) \geq \text{mult}_Y(M_V) > 1,$$

что невозможно. Значит, $O \notin Y$. Пусть L – общая образующая конуса G . Тогда

$$\frac{3}{2} \geq \text{mult}_Z(M_X) = M_V \cdot L \geq \text{mult}_Y(M_V)L \cdot Y,$$

где $L \cdot Y$ понимается как пересечение на G . Значит, $L \cdot Y = 1$ и Y – гиперплоское сечение квадратичного конуса G при естественном вложении $G \subset \mathbb{P}^{2n}$. Отметим, что

$$Y \in \text{LCS}(V, M_V - (2n - 3 - \text{mult}_Z(M_X))G)$$

и к логпаре $(V, M_V - (2n - 3 - \text{mult}_Z(M_X))G)$ и подмногообразию $Y \subset V$ коразмерности 2 можно применить теорему 52, откуда следует неравенство

$$\text{mult}_Y(M_V^2) \geq 4(2n - 2 - \text{mult}_Z(M_X)) \geq 2,$$

поскольку $\text{mult}_Z(M_X) \leq \frac{3}{2}$ и $n \geq 2$. Рассмотрим $2n - 2$ общих дивизора $H_1, \dots, H_{2n-2}$ в линейной системе $|H - G|$. Тогда

$$\begin{aligned} 1 &> 3 - 2 \text{mult}_Z^2(M_X) > H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_{2n-2} \cdot M_V^2 \\ &\geq \text{mult}_Y(M_V^2)(H - G)^{2n-2} \cdot Y \geq 2, \end{aligned}$$

что невозможно.

Таким образом, $\dim(Y) < 2n - 2$. Из неравенства $\text{mult}_O(M_V) < 1$ сразу следует, что точка O не содержится в многообразии Y , а из теоремы 54 следует, что для достаточно общей точки $P \in Y$ выполнено неравенство $\text{mult}_P(M_V^2) > 4$.

Рассмотрим линейную подсистему $\mathcal{D} \subset |H - G|$, состоящую из дивизоров, проходящих через точку P . Базисное множество линейной системы $\mathcal{D}$ состоит из двух кривых. Первая – образующая L_P квадратичного конуса G , проходящая через P , а вторая, возможно, приводимая кривая C_P такая, что $\pi \circ \alpha(C_P) \subset \mathbb{P}^{2n}$ – прямая, проходящая через точку $\pi(Z)$, которая и задает именно ту точку в проективизации касательного конуса к гиперповерхности S в точке $\pi(Z)$, которая соответствует образу точки P при проекции конуса G на его основание, канонически изоморфное проективизации касательного конуса к гиперповерхности S в точке $\pi(Z)$.

Рассмотрим $2n - 2$ общих дивизора $D_1, \dots, D_{2n-2}$ в линейной системе $\mathcal{D}$ и эффективный одномерный цикл $T = H_1 \cdot \dots \cdot H_{2n-3} \cdot M_V^2$. Тогда $\text{mult}_P(T) > 4$. К сожалению, просто пересечь цикл T с оставшимся дивизором H_{2n-2} и получить противоречие с численными свойствами цикла T нельзя, поскольку дивизор H_{2n-2} может содержать компоненты одномерного цикла T . Последнее возможно, только если кривая L_P или одна из компонент кривой C_P содержится в $\text{Supp}(T)$.

Предположим, что кривая C_P неприводима. Пусть

$$T = \mu L_P + \lambda C_P + \Gamma,$$

где μ и λ – неотрицательные рациональные числа, а Γ – эффективный одномерный цикл, носитель которого не содержит кривых L_P и C_P . Тогда

$$\text{mult}_P(\Gamma) > 4 - \text{mult}_P(L_P)\mu - \text{mult}_P(C_P)\lambda = 4 - \mu - \text{mult}_P(C_P)\lambda \geq 4 - \mu - 3\lambda,$$

поскольку $\text{mult}_P(C_P) \leq 3$, так как C_P – тройное накрытие прямой, раздутье один раз в возможно особой точке. А вот цикл Γ уже можно пересекать с дивизором H_{2n-2} . Следовательно, выполнены неравенства

$$3 - 2 \text{mult}_Z^2(M_X) - \mu > \Gamma \cdot H_{2n-2} \geq \text{mult}_P(\Gamma) > 4 - \mu - 3\lambda,$$

поскольку $C_P \cdot H_{2n-2} = 0$. Откуда следует, что $\lambda > 1$. Пересекая цикл T с общим дивизором H из свободной линейной системы $|\alpha^*(-K_X)|$, сразу получаем противоречие, поскольку $H \cdot C_P = 3$ и $H \cdot T < 3$.

Пусть теперь кривая C_P приводима. Тогда $C_P = C_1 + C_2 + C_3$, где C_i – неособая рациональная кривая такая, что $\pi \circ \alpha(C_P)$ – прямая, отображение $\pi \circ \alpha|_{C_i}$ является изоморфизмом, $-K_X \cdot \alpha(C_i) = 1$ и $C_i \neq C_j$ при $i \neq j$. Все последние утверждения следуют из цикличности тройного накрытия π . Положим

$$T = \mu L_P + \sum_{i=1}^3 \lambda_i C_i + \Gamma,$$

где μ и λ_i – неотрицательные рациональные числа, а Γ – эффективный одномерный цикл, носитель которого не содержит кривые L_P и C_i . Так же, как и в случае неприводимой кривой C_P , из пересечения одномерного цикла Γ с дивизором H_{2n-2} сразу следует неравенство $\sum_{i=1}^3 \lambda_i > 1$. Теперь, пересекая цикл T с достаточно общим дивизором H из свободной линейной системы $|\alpha^*(-K_X)|$, получаем противоречие, поскольку $H \cdot C_i = 1$ и $H \cdot T < 3$.

ЛЕММА 71. *Неравенство $\text{codim}(Z \subset X) > 2$ невозможно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\text{codim}(Z \subset X) > 2$. Тогда $\dim(Z) \neq 0$ по леммам 69 и 70. Таким образом, $\text{mult}_Z(M_X^2) \geq 4$ по теореме 54. Рассмотрим достаточно общую точку O на Z и $2n-2$ достаточно общих дивизора $H_1, \dots, H_{n-2}$ в свободной линейной системе $|-K_X|$, которые проходят через точку O . Тогда

$$3 > M_X^2 \cdot H_1 \cdot \dots \cdot H_{n-2} \geq \text{mult}_Z(M_X^2) \geq 4,$$

что невозможно.

Таким образом, доказано, что $\text{codim}(Z \subset X) = 2$.

ЛЕММА 72. *Выполнено неравенство $K_X^{2n-2} \cdot Z \leq 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимое утверждение вытекает из равенства $K_X^{2n} = 3$, обильности дивизора $-(K_X + M_X)$ и неравенства $\text{mult}_Z(M_X) \geq 1$.

ЛЕММА 73. *Выполнено равенство $n = 2$, т. е. $\dim(X) = 4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы аналогично утверждению теоремы Лефшеца. Пусть $n > 2$. Покажем, что это приводит к противоречию. Рассмотрим достаточно общий дивизор V в свободной линейной системе $|-K_X|$. Тогда V – неособая гиперповерхность степени $3n$ во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(1^{2n}, n)$ размерности $2n - 1 \geq 5$. В работе [186] доказано, что группа гомологий $H_{4n-6}(V, \mathbb{C})$ одномерна (см. [130, теорема 7.2] и [105, § 4]).

Покажем, что подмногообразие $Y = Z \cap V \subset V$ размерности $2n - 3$ не может порождать группу гомологий $H_{4n-6}(V, \mathbb{C})$. Пусть $Y \equiv \lambda D^2$ в $H_{4n-6}(V, \mathbb{C})$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$, где $D = -K_X|_V$. Заметим, что $\pi(Z) \not\subset S$ по теореме Лефшеца, примененной к неособому гиперплоскому сечению гиперповерхности S . Таким образом, многообразие $\pi(Z) \subset \mathbb{P}^{2n}$ является либо линейным подпространством размерности $2n - 2$, либо квадрикой размерности $2n - 2$ по лемме 72. При этом $\pi^{-1}(\pi(Z))$ распадается на три неприводимых подмногообразия, сопряженных относительно действия $\mathbb{Z}_3$ на многообразии X , которое переставляет слои тройного накрытия π . Из последнего сразу следует, что $\lambda = \frac{\alpha}{3}$, где $\alpha = K_X^{2n-2} \cdot Z = 1, 2$ по лемме 72. Однако

$$\alpha = Y \cdot D^{2n-3} = \lambda^{2-n} D \cdot Y^{n-2},$$

откуда следует, что на многообразии V пересечение $D \cdot Y^{n-2}$ равно $\frac{\alpha^{n-1}}{3} \notin \mathbb{Z}$, что невозможно, поскольку V неособо. Требуемое противоречие можно также получить применением предложения 5 из [30] в форме предложения 4.4 из работы [116] к гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^{2n}$ и циклу $S \cap \pi(Z)$.

Итак, везде далее можно считать, что $n = 2$.

ЛЕММА 74. *Поверхность $\pi(Z)$ не содержится в гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, хотя это и не будет использоваться далее, что утверждение леммы тривиально в гладком случае, поскольку оно следует из теоремы Лефшеца. Пусть $V \subset X$ – общий дивизор из линейной системы $|-K_X|$. Тогда индуцированное отображение $\tau = \pi|_V: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ является циклическим накрытием с ветвлением в неособой гиперповерхности $F = S \cap \pi(V) \subset \mathbb{P}^3$ степени 6. Положим теперь $M_V = M_X|_V$ и $C = Z \cap V$. Из доказанных ранее утверждений следует, что граница M_V подвижна, кривая C неособа и рациональна, $\tau(C)$ – прямая или коника, а ограничение $\tau|_C$ – изоморфизм. Выполнены неравенство $\text{mult}_C(M_V) \geq 1$ и эквивалентность $M_V \sim_{\mathbb{Q}} rH$, где $H \sim \tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ и $r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$.

Пусть $\tau(C) \subset F$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию, откуда будет следовать требуемое утверждение. Рассмотрим точку O на C и положим $P = \tau(O) \in \tau(C)$. Пусть $T \subset \mathbb{P}^3$ – гиперплоскость, которая касается гиперповерхности F в точке P . Кривая $Y = T \cap F$ особа в точке P . В случае, когда кратность кривой Y в точке P равна 2, пусть L – прямая в T , проходящая через точку P в направлении, которое соответствует точке в проективизации касательного конуса к кривой T в точке P . В случае, когда кратность кривой Y в P больше, чем 2, пусть L – любая прямая в T , проходящая через P . По построению прямая L касается гиперповерхности F с кратностью не меньше трех.

Пусть $\tilde{L} = \tau^{-1}(L)$. Тогда $\text{mult}_O(\tilde{L}) = 3$. Пересекая $\tilde{L}$ с подвижной границей M_V , получаем, что одна из неприводимых компонент кривой $\tilde{L}$ содержится в базисном множестве одной из компонент границы M_V . Последнее невозможно в случае, если прямые L заматают хотя бы дивизор в $\mathbb{P}^3$ при варьировании точки O на C .

Заметим, что гиперплоскость T касается гиперповерхности F в не более чем конечном числе точек. Последнее сразу следует из теоремы Зака о конечности отображения Гаусса (см. [119], [131], [201]) и из [25, теорема 2] (см. [54, лемма 3.18]).

Пусть $\tau(C)$ – прямая. Тогда $\tau(C) \subset Y \subset T$, а гиперплоскость T является общим элементом пучка гиперплоскостей в $\mathbb{P}^3$, проходящих через прямую $\tau(C)$, при условии, что исходная точка O выбрана достаточно общей на кривой C . Положим $Y = \tau(C) \cup R$. По теореме Бертини кривая R неособа и пересекает прямую $\tau(C)$ трансверсально при общем выборе точки O . В частности, прямую L всегда можно выбрать отличной от прямой $\tau(C)$ и, следовательно, при двух различных общих выборах точки O соответствующие прямые L будут различными. Из последнего следует, что эти прямые заматают дивизор в $\mathbb{P}^3$.

Пусть $\tau(C)$ – коника. Тогда $\tau(C) \not\subset Y$ при общем выборе точки O . С другой стороны, гиперплоскость T касается коники $\tau(C)$ в точке P . Значит, T пересекает $\tau(C)$ только в P при общем выборе точки O , но L проходит через P и содержится в гиперплоскости T . Значит, при двух различных общих выборах точки O соответствующие прямые L будут различными, откуда следует, что эти прямые заматают дивизор в $\mathbb{P}^3$.

ЛЕММА 75. *Поверхность $\pi(Z)$ не является плоскостью в $\mathbb{P}^4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что поверхность $\pi(Z)$ является двумерной плоскостью в $\mathbb{P}^4$. Как и в доказательстве леммы 74, воспользуемся редукцией к неособому трехмерному случаю для получения противоречия. Пусть $V \subset X$ – общий дивизор в линейной системе $| -K_X |$, $\tau = \pi|_V: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ – индуцированное циклическое накрытие с ветвлением в неособой гиперповерхности $F = S \cap \pi(V) \subset \mathbb{P}^3$ степени 6. Рассмотрим ограничения $M_V = M_X|_V$ и $C = Z \cap V$. Из доказанных ранее утверждений следует, что M_V – подвижная граница, $\tau(C)$ – прямая, $\tau|_C$ – изоморфизм, кривая $\tau(C)$ не содержится в гиперповерхности F , выполнены неравенство $\text{mult}_C(M_V) \geq 1$ и соотношение $M_V \sim_{\mathbb{Q}} rH$, где $H \sim \tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$, а r – положительное рациональное число такое, что $r < 1$. Заметим, что V – многообразие Калаби–Яо, т. е. $K_V \sim 0$.

Рассмотрим пучок $\mathcal{D} \subset |\tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))|$, состоящий из поверхностей, проходящих через кривую C . Базисное множество пучка $\mathcal{D}$ состоит из кривой C и ещё двух различных кривых $\tilde{C}$ и $\hat{C}$ таких, что $\tau(C) = \tau(\tilde{C}) = \tau(\hat{C})$. Три кривые C , $\tilde{C}$ и $\hat{C}$ сопряжены относительно действия группы $\mathbb{Z}_3$ на многообразии V , которое переставляет слои циклического тройного накрытия τ .

Пусть $f: U \rightarrow V$ – раздутие кривой C , а E – f -исключительный дивизор. Положим $\mathcal{P} = f^{-1}(\mathcal{D})$. Тогда $\mathcal{P} \sim D - E$, где $D = (\tau \circ f)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$. С другой стороны, базисное множество пучка $\mathcal{P}$ состоит из собственных прообразов кривых $\tilde{C}$ и $\hat{C}$ на многообразии U . В частности, собственные прообразы кривых $\tilde{C}$ и $\hat{C}$ на U являются единственными кривыми на многообразии U , которые имеют отрицательное пересечение с дивизором $D - E$. Из последнего следует, что дивизор $2D - E$ численно эффективен на многообразии U . В частности, $(2D - E) \cdot M_U^2 \geq 0$, где M_U – собственный прообраз подвижной границы M_V на многообразии U .

Теперь подсчитаем пересечение $(2D - E) \cdot M_U^2 \geq 0$. Во-первых, очевидно, что $D^3 = 3$, $D^2 \cdot E = 0$, $D \cdot E^2 = -1$. Во-вторых, выполнены равенства (см. [10])

$$E^3 = -\deg(\mathcal{N}_{C/V}) = K_V \cdot C + 2 - 2g(C) = 2.$$

В-третьих, $M_U \sim_{\mathbb{Q}} rD - \text{mult}_C(M_V)E$. Таким образом,

$$(2D - E) \cdot M_U^2 = 6r^2 - 2\text{mult}_C^2(M_V) - 2r\text{mult}_C(M_V) - 2\text{mult}_C^2(M_V),$$

откуда следует отрицательность $(2D - E) \cdot M_U^2$ при $r < 1$ и $\text{mult}_C(M_V) \geq 1$.

ЛЕММА 76. *Поверхность $\pi(Z)$ не является квадрикой в $\mathbb{P}^4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что поверхность $\pi(Z)$ является неприводимой двумерной квадрикой в $\mathbb{P}^4$. В этом случае противоречие достигается точно так же, как и в доказательстве леммы 75. Укажем те небольшие изменения, которые необходимо внести в доказательство леммы 75, используя при этом обозначения и построения из доказательства этой леммы. Во-первых, $\tau(C)$ – коника. Во-вторых, базисное множество линейной системы $|2D - E|$ содержится в $\tilde{C} \cup \hat{C}$, поскольку линейная система $|2D - E|$ содержит собственные прообразы квадратичных конусов в $\mathbb{P}^3$ над коникой $\tau(C)$. Однако собственные прообразы кривых $\tilde{C}$ и $\hat{C}$ на U имеют тривиальное пересечение с дивизором $2D - E$. В частности, как и в доказательстве леммы 75, дивизор $2D - E$ численно эффективен и $(2D - E) \cdot M_U^2 \geq 0$. В-третьих, $D \cdot E^2 = -2$, но, как и раньше, $E^3 = 2$. В-четвертых, выполнено равенство

$$(2D - E) \cdot M_U^2 = 6r - 4 \text{mult}_C^2(M_V) - 4r \text{mult}_C(M_V) - 2 \text{mult}_C^2(M_V),$$

откуда следует, что $(2D - E) \cdot M_U^2 < 0$ при $r < 1$ и $\text{mult}_C(M_V) \geq 1$.

Таким образом, теорема 3 доказана.

§ 6. Отсутствие эллиптических структур

В настоящем параграфе будет доказана теорема 15. Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^{2n}$ – циклическое тройное накрытие с ветвлением в гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^{2n}$ степени $3n$ такое, что гиперповерхность S имеет только обыкновенные двойные точки, и $n \geq 2$. Тогда X – многообразие Фано с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями (см. лемму 68) и выполнено соотношение $K_X \sim \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n}}(-1))$. Предположим, что существует бирациональное отображение $\rho: \hat{X} \dashrightarrow X$ такое, что многообразие $\hat{X}$ обладает структурой эллиптического расслоения $\nu: \hat{X} \rightarrow W$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Рассмотрим очень обильный дивизор D на многообразии W и полную линейную систему $\mathcal{D} = |\nu^*(D)|$. Положим $\mathcal{M} = \rho(\mathcal{D})$ и $M_X = \gamma \mathcal{M}$ для такого положительного рационального числа γ , что $K_X + \gamma M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Тогда $\mathbb{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$ по теореме 66.

ЗАМЕЧАНИЕ 77. Из доказательства теоремы 3 следует, что логпара (X, M_X) имеет канонические особенности (см. теорему 64).

В определенном смысле утверждение теоремы 15 является предельным вариантом утверждения теоремы 3. Как следствие, почти все шаги доказательства теоремы 3 могут быть дословно повторены при новых, слегка ослабленных, условиях. Тем не менее, небольшие изменения всё же придется сделать, существенно используя при этом следующее свойство логпары (X, M_X) , без которого противоречия не получить.

ЗАМЕЧАНИЕ 78. Линейная система $\mathcal{M}$ не составлена из пучка.

Пусть $Z \subset X$ – элемент множества $\mathbb{CS}(X, M_X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 79. *Выполнено равенство $\text{codim}(Z \subset X) = 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является следствием доказательств лемм 69–71.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 80. *Выполнено равенство $\text{mult}_Z(M_X) = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является следствием утверждения 79 и замечаний 77 и 31.

ЛЕММА 81. *Выполнено неравенство $K_X^{2n-2} \cdot Z \leq 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из $K_X^{2n} = 3$, соотношения $M_X \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ и равенства $\text{mult}_Z(M_X) = 1$ следует, что $K_X^{2n-2} \cdot Z \leq 3$. Покажем, что случай $K_X^{2n-2} \cdot Z = 3$ невозможен.

Пусть $K_X^{2n-2} \cdot Z = 3$. Пересекая цикл M_X^2 с $2n - 2$ общими дивизорами из линейной системы $|-K_X|$, видим, что $\text{Supp}(M_X^2) = Z$. Причем последнее равенство не зависит от выбора двух различных представителей в линейной системе $\mathcal{M}$ при определении цикла M_X^2 . Рассмотрим общую точку $P \in X \setminus Z$ и линейную систему $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$, состоящую из дивизоров, проходящих через точку P . Тогда $\mathcal{D}$ не имеет неподвижных компонент, поскольку линейная система $\mathcal{M}$ не составлена из пучка. В теоретико-множественном смысле $D_1 \cap D_2 = Z$ для достаточно общих дивизоров D_1 и D_2 из линейной системы $\mathcal{D}$, поскольку дивизоры D_1 и D_2 содержатся также и в линейной системе $\mathcal{M}$. С другой стороны, по построению $P \in D_1 \cap D_2$ и $P \notin Z$.

Отметим, что в доказательстве леммы 73 использовались только два свойства подмногообразия Z , а именно $\text{codim}(Z \subset X) = 2$ и $K_X^{2n-2} \cdot Z \leq 2$.

СЛЕДСТВИЕ 82. *Выполнено равенство $n = 2$, т. е. $\dim(X) = 4$.*

Доказательства лемм 74 и 75 необходимо передоказать в новых условиях. При этом будет использоваться каноничность логпары (X, M_X) и тот факт, что $\mathcal{M}$ не составлена из пучка. Однако доказательство леммы 76 можно сохранить без изменений при выполнении лемм 74 и 75.

СЛЕДСТВИЕ 83. *Случай, когда $\pi(Z) \not\subset S$ и $K_X^2 \cdot Z = 2$, невозможен.*

Таким образом, требуется устранить три случая:

- 1) $\pi(Z) \not\subset S$ и $K_X^2 \cdot Z = 1$;
- 2) $\pi(Z) \subset S$ и $K_X^2 \cdot Z = 1$;
- 3) $\pi(Z) \subset S$ и $K_X^2 \cdot Z = 2$.

ЛЕММА 84. *Случай, когда $\pi(Z) \not\subset S$ и $K_X^2 \cdot Z = 1$, невозможен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\pi(Z) \not\subset S$ и $K_X^2 \cdot Z = 1$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Поверхность $\pi(Z)$ является двумерной плоскостью в $\mathbb{P}^4$, не содержащейся в гиперповерхности S . Из циклическости тройного накрытия π следует существование ещё двух различных поверхностей $\tilde{Z}$ и $\hat{Z}$ таких, что $\pi(Z) = \pi(\tilde{Z}) = \pi(\hat{Z})$, и все три поверхности Z , $\tilde{Z}$ и $\hat{Z}$ сопряжены относительно действия группы $\mathbb{Z}_3$ на многообразии X , которое представляет слои π .

Пусть $V \subset X$ – общий дивизор в $|-K_X|$, $\tau = \pi|_V: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ – индуцированное циклическое тройное накрытие. Тройное накрытие τ разветвлено в неособой гиперповерхности $F = S \cap \pi(V) \subset \mathbb{P}^3$ степени 6. Рассмотрим линейную систему

без неподвижных компонент $\mathcal{H} = \mathcal{M}|_V$ и подвижную границу $M_V = M_X|_V = \gamma\mathcal{H}$. Тогда

$$M_V \sim_{\mathbb{Q}} \tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$$

и $\mathcal{H}$ не составлена из пучка в силу общности выбора V . Пусть $C = Z \cap V$, $\tilde{C} = \tilde{Z} \cap V$ и $\hat{C} = \hat{Z} \cap V$. Тогда выполнено равенство $\text{mult}_C(M_V) = 1$.

Пусть $f: U \rightarrow V$ – раздутие неособой кривой C , а E – исключительный дивизор раздутия f . Положим $\mathcal{D} = f^{-1}(\mathcal{H})$ и $M_U = f^{-1}(M_V) = \gamma\mathcal{D}$. Тогда

$$M_U \sim_{\mathbb{Q}} D - E,$$

где $D = (\tau \circ f)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$. С другой стороны, базисное множество пучка $|D - E|$ состоит из собственных прообразов кривых $\tilde{C}$ и $\hat{C}$ на многообразии U . Более того,

$$(D - E) \cdot \tilde{C} = (D - E) \cdot \hat{C} = -1,$$

откуда следует, что собственные прообразы кривых $\tilde{C}$ и $\hat{C}$ на U являются единственными кривыми на многообразии U , которые имеют неположительное пересечение с дивизором $2D - E$. В частности, дивизор $2D - E$ численно эффективен и выполнено неравенство $(2D - E) \cdot M_U^2 \geq 0$. С другой стороны, пересечение $(2D - E) \cdot M_U^2$ легко вычисляется (см. лемму 75), а именно

$$(2D - E) \cdot M_U^2 = 6 - 2 \text{mult}_C(M_V) - 2 \text{mult}_C(M_V) - 2 \text{mult}_C(M_V) = 0,$$

откуда следует, что $\text{Supp}(M_U^2)$ содержится в кривых $\tilde{C}$ и $\hat{C}$. Последнее означает, что для двух различных дивизоров H_1 и H_2 в $\mathcal{D}$ пересечение $H_1 \cap H_2$ содержится в объединении $\tilde{C} \cup \hat{C}$ в теоретико-множественном смысле.

Рассмотрим достаточно общую точку $P \in U \setminus (\tilde{C} \cup \hat{C})$. Пусть $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$ – линейная подсистема, состоящая из дивизоров, проходящих через точку P . Тогда $\mathcal{P}$ не имеет неподвижных компонент, поскольку $\mathcal{D}$ не составлена из пучка. Рассмотрим два дивизора D_1 и D_2 в $\mathcal{P}$. Тогда в теоретико-множественном смысле

$$P \in D_1 \cap D_2 \subset \tilde{C} \cup \hat{C},$$

поскольку $D_i \in \mathcal{D}$. Итак, противоречие получено, и лемма доказана.

ЛЕММА 85. *Случай, когда $\pi(Z) \subset S$ и $K_X^2 \cdot Z = 1$, невозможен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi(Z) \subset S$ и $K_X^2 \cdot Z = 1$. Тогда $\pi(Z)$ – двумерное линейное подпространство в $\mathbb{P}^4$, содержащееся в гиперповерхности S . Из теоремы Лефшеца сразу следует, что S особа. Воспользуемся редукцией к трехмерному неособому случаю, как в доказательстве леммы 84. Более того, воспользуемся всеми обозначениями и конструкциями из доказательства леммы 84, которые, очевидно, уместны и в данном случае. Единственное отличие состоит в следующем: поверхности Z , $\tilde{Z}$, $\hat{Z}$ в данном случае совпадают, поскольку Z инвариантна относительно действия $\mathbb{Z}_3$ на многообразии X , которое переставляет слои π . Тем не менее, легко видеть, что все аргументы доказательства леммы 84 априори верны, кроме последнего. А именно, численная эффективность дивизора $2D - E$ уже не очевидна, хотя

её можно доказать, анализируя f -исключительную поверхность $E \cong \mathbb{F}_k$ и класс дивизора $E|_E$ в группе Пикара поверхности E . Однако в данном случае будут использованы более простые геометрические аргументы.

Рассмотрим пучок $|D - E|$ на U . Его базисным множеством будет единственная кривая $\overline{C} \subset E$, которая является сечением проекции $f|_E: E \rightarrow C$. В определенном смысле кривая $\overline{C}$ – это инфинитезимальный аналог кривой $\tilde{C}$ из доказательства леммы 84, а раздув кривую $\overline{C}$, можно получить и инфинитезимальный аналог третьей кривой $\hat{C}$ из доказательства леммы 84, но это уже излишне в данной ситуации.

Возьмем достаточно общую поверхность Y в пучке $|D - E|$. Легко видеть, что поверхность Y особа. Опишем особенности поверхности Y . Образ $\tau \circ f(Y)$ является плоскостью в $\mathbb{P}^3$, проходящей через прямую $\tau(C) \subset F$, где F – поверхность ветвления тройного накрытия $\tau: V \rightarrow \mathbb{P}^3$. В частности, кривая $\tau \circ f(Y) \cap F$ приводима и состоит из двух компонент: прямой $\tau(C)$ и плоской квинтики R . Более того, по теореме Бертини квинтика R неособа, а кривые R и $\tau(C)$ пересекаются трансверсально в пяти точках. С другой стороны, отображение $\tau|_{f(Y)}$ является циклическим тройным накрытием плоскости $\tau \circ f(Y)$, разветвленным в кривой $\tau(C) \cup R$. Значит, особенности поверхности $f(Y)$ состоят из пяти особых точек типа A_2 , лежащих на кривой C , а индуцированный бирациональный морфизм $f|_Y: Y \rightarrow f(Y)$ частично разрешает особенности поверхности $f(Y)$. А именно, из локальных вычислений легко следует, что поверхность Y имеет пять особых точек типа A_1 , т.е. обыкновенных двойных точек, каждая из которых доминирует соответствующую особую точку типа A_2 на поверхности $f(Y)$.

Рассмотрим ограничение $M_Y = M_U|_Y$. Граница M_Y уже не обязательно подвижна, она может содержать некоторую кратность кривой $\overline{C}$ в качестве неподвижной компоненты. Пусть $M_Y = \alpha \overline{C} + \Gamma$, где $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$, а Γ – подвижная граница на поверхности Y . С другой стороны, $M_Y \sim_{\mathbb{Q}} 2\overline{C}$. Более того, из формулы субприсоединения (см. [148]) следует, что на поверхности Y выполнено равенство

$$\overline{C}^2 = -3 + \deg(\text{Diff}_{\overline{C}}(0)) = -3 + 5 \cdot \frac{1}{2} < 0,$$

откуда сразу следует, что $\alpha = 2$ и $\Gamma = \emptyset$. В частности, для двух достаточно общих дивизоров $D \in \mathcal{D}$ и $H \in |D - E|$ пересечение $D \cap H$ в теоретико-множественном смысле совпадает с кривой $\overline{C}$.

В предыдущих рассуждениях были использованы следующие свойства исходной подвижной границы: линейная система $\mathcal{M}$ не имеет неподвижных компонент, выполнены соотношение $M_X \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ и равенство $\text{mult}_Z(M_X) = 1$. В частности, пока нигде не использовался тот факт, что линейная система $\mathcal{M}$ не составлена из пучка. Таким образом, все предшествующие утверждения можно повторить для любой линейной подсистемы $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ без неподвижных компонент. Действительно, соотношение $\gamma \mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ и неравенство $\text{mult}_Z(\gamma \mathcal{B}) \geq 1$ очевидны, а из доказательства теоремы 3 следует каноничность логпары $(X, \gamma \mathcal{B})$ и, в частности, равенство $\text{mult}_Z(\gamma \mathcal{B}) = 1$. Итак, доказано, что для достаточно общего дивизора B в любой линейной подсистеме $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ без неподвижных компонент и общего дивизора $H \in |D - E|$ пересечение $B \cap f(H)$ совпадает с кривой C в теоретико-множественном смысле.

Рассмотрим достаточно общую точку $P \in X \setminus C$. Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ – линейная подсистема, состоящая из дивизоров, проходящих через точку P . Тогда $\mathcal{B}$ не имеет неподвижных компонент, поскольку $\mathcal{M}$ не составлена из пучка. По построению для общего дивизора $B \in \mathcal{B}$ и общего дивизора $H \in |D - E|$ пересечение $B \cap f(H)$ содержит точку $P \notin C$ и не может совпадать с кривой C в теоретико-множественном смысле, что противоречит доказанному ранее.

ЛЕММА 86. *Случай, когда $\pi(Z) \subset S$ и $K_X^2 \cdot Z = 2$, невозможен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\pi(Z) \subset S$ и $K_X^2 \cdot Z = 2$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Поверхность $\pi(Z)$ является двумерной квадрикой в $\mathbb{P}^4$, содержащейся в секстике S . Из теоремы Лефшеца следует, что гиперповерхность S особа. Заметим, что условие $\pi(Z) \subset S$ означает, что поверхность Z инвариантна относительно действия группы $\mathbb{Z}_3$ на многообразии X , которое переставляет слои циклического тройного накрытия π .

Воспользуемся редукцией к трехмерному неособому случаю. Пусть $V \subset X$ – достаточно общий дивизор в линейной системе $|-K_X|$, $\tau = \pi|_V: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ – индуцированное циклическое накрытие с ветвлением в неособой гиперповерхности $F = S \cap \pi(V) \subset \mathbb{P}^3$ степени 6. Рассмотрим подвижную границу $M_V = M_X|_V$. Тогда

$$M_V \sim_{\mathbb{Q}} \tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$$

и $\text{mult}_C(M_V) = 1$, где $C = Z \cap V$. Отметим, что $\tau(C) \subset F$ – коника.

Пусть $f: U \rightarrow V$ – раздутие неособой кривой C , а E – исключительный дивизор раздутия f . Положим $M_U = f^{-1}(M_V)$. Тогда

$$M_U \sim_{\mathbb{Q}} D - E,$$

где $D = (\tau \circ f)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$. В случае, когда дивизор $2D - E$ является численно эффективным, доказывая неравенство $(2D - E) \cdot M_U^2 \geq 0$, получим противоречие (см. завершение доказательства леммы 76). С другой стороны, базисное множество линейной системы $|2D - E|$ содержится в E , поскольку $|2D - E|$ содержит собственные прообразы квадратичных конусов в $\mathbb{P}^3$ над коникой C . Таким образом, дивизор $2D - E$ численно эффективен, если и только если он имеет неотрицательное пересечение с исключительным сечением линейчатой поверхности E .

Покажем, что $(2D - E) \cdot s_{\infty} \geq 0$, где s_{∞} – исключительное сечение линейчатой поверхности $E \cong \mathbb{F}_k$. Кривая C неособа, и $C \cong \mathbb{P}^1$, следовательно,

$$\mathcal{N}_{C/V} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$$

для целых a и b таких, что $b \geq a$. Заметим, что $k = b - a$. С другой стороны, выполнены равенства

$$a + b = \deg(\mathcal{N}_{C/V}) = 2g(C) - 2 - K_V \cdot C = -2$$

и $E^3 = -\deg(\mathcal{N}_{C/V}) = 2$. Причем неособая кривая C содержится в неособой поверхности $\bar{F} = \tau^{-1}(F)$. Значит, имеет место точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{C/\bar{F}} \rightarrow \mathcal{N}_{C/V} \rightarrow \mathcal{N}_{\bar{F}/V} \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{N}_{C/\bar{F}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-6)$, поскольку $C^2 = -6$ на поверхности $\bar{F} \cong F$ по формуле присоединения. Значит, $a \geq -6$. Пусть $l \subset E$ – слой проекции $f|_E$. Тогда выполнена эквивалентность $-E|_E \sim s_\infty + rl$ для $r = \frac{2+k}{2}$, поскольку

$$2 = E^3 = (s_\infty + rl)^2 = -k + 2r,$$

откуда сразу следует

$$\begin{aligned} (2D - E) \cdot s_\infty &= 4 - E \cdot s_\infty = 4 + \left(s_\infty + \frac{2+k}{2}l\right) \cdot s_\infty \\ &= 4 - k + \frac{2+k}{2} = \frac{10-k}{2} = 6 + a \geq 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, теорема 15 доказана.

§ 7. Доказательство теорем 18 и 20

В этом параграфе будут доказаны теоремы 18 и 20. Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^{2n}$ – циклическое тройное накрытие с ветвлением в гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^{2n}$ степени $3n$ такое, что $n \geq 2$ и гиперповерхность S имеет только обыкновенные изолированные двойные и тройные точки. А именно, $\text{mult}_P(S) \leq 3$ для любой особой точки $P \in S$, а проективизация касательного конуса к гиперповерхности S в точке P является неособой гиперповерхностью в $\mathbb{P}^{2n-1}$ степени $\text{mult}_P(S)$. Тогда X – многообразие Фано с терминальными горенштейновыми особенностями.

ЗАМЕЧАНИЕ 87. В доказательстве леммы 68 использовалась только изолированность особенностей гиперповерхности S . Таким образом, группы $\text{Pic}(X)$ и $\text{Cl}(X)$ порождены дивизором $-K_X$. В частности, X имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности.

Требуется доказать следующие три результата:

- 1) многообразие X бирационально сверхжестко;
- 2) многообразие X бирационально не изоморфно никакому многообразию Фано с каноническими особенностями, которое не изоморфно многообразию X ;
- 3) если X бирационально изоморфно расслоению на эллиптические кривые, то $n = 2$, гиперповерхность S содержит тройную точку O , а само эллиптическое расслоение индуцировано проекцией $\gamma: \mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ из точки O .

Предположим, что хотя бы одно из утверждений, которые требуется доказать, не выполнено. В этом случае из теорем 66 и 67 и доказательства теоремы 64 следует существование линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , которая удовлетворяет следующим свойствам:

- а) линейная система $\mathcal{M}$ не имеет неподвижных компонент;
- б) множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{d}\mathcal{M})$ не пусто при таком $d \in \mathbb{N}$, что $\mathcal{M} \sim -dK_X$;
- в) линейная система $\mathcal{M}$ не составлена из пучка;
- г) если $n = 2$ и $\text{mult}_O(S) = 3$ для некоторой точки $O \in S$, то $\mathcal{M}$ не лежит в слоях рационального отображения $\gamma \circ \pi$, где $\gamma: \mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ – проекция из точки O .

Покажем, что такой линейной системы $\mathcal{M}$ не существует. Пусть $Z \subset X$ – подмногообразие такое, что $Z \in \mathbb{CS}(X, \frac{1}{d}\mathcal{M})$. Тогда из доказательств теорем 3 и 15 сразу следует, что Z – особая точка на многообразии X такая, что $O = \pi(Z)$ – тройная точка гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^{2n}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 88. Точка Z является обыкновенной тройной точкой на X .

Пусть $\alpha: V \rightarrow X$ – обыкновенное раздутие точки O и E – исключительный дивизор раздутия α . Тогда E – неособая гиперповерхность степени 3 в $\mathbb{P}^{2n}$ и $E|_E \sim H$ для гиперплоского сечения H гиперповерхности $E \subset \mathbb{P}^{2n}$, а линейная система

$$|\alpha^*(-K_X) - E|$$

свободна и задает регулярное отображение $\psi: V \rightarrow \mathbb{P}^{2n-1}$ такое, что $\psi = \gamma \circ \pi \circ \alpha$ для проекции $\gamma: \mathbb{P}^{2n} \dashrightarrow \mathbb{P}^{2n-1}$ из точки O . Пусть $\text{mult}_Z(\mathcal{M})$ – такое целое число, что

$$\mathcal{D} \sim \alpha^*(-dK_X) - \text{mult}_Z(\mathcal{M})E,$$

где $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на V . Рассмотрим достаточно общую кривую $C \subset V$ в слоях расслоения ψ . Тогда

$$\mathcal{D} \cdot C = 3(d - \text{mult}_Z(\mathcal{M})) \geq 0$$

и последнее равенство выполнено, только когда линейная система $\mathcal{D}$ содержится в слоях расслоения ψ . С другой стороны, из теоремы 61 следует, что выполнены строгое неравенство $\text{mult}_Z(\mathcal{M}) > d$ при $n > 2$ и нестрогое неравенство $\text{mult}_Z(\mathcal{M}) \geq d$ при $n = 2$. Таким образом, случай $n > 2$ невозможен, а из $n = 2$ следует, что линейная система $\mathcal{M}$ лежит в слоях рационального отображения $\gamma \circ \pi$, что противоречит одному из свойств линейной системы $\mathcal{M}$. Таким образом, теоремы 18 и 20 доказаны.

§ 8. Потенциальная плотность

В этом параграфе будет доказана теорема 19. Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^4$ – циклическое тройное накрытие с ветвлением в гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^4$ степени 6 такой, что гиперповерхность S определена над некоторым числовым полем $\mathbb{F}$. Предположим, что гиперповерхность S имеет одну обыкновенную тройную точку O и неособа вне неё, т.е. $\text{mult}_O(S) = 3$ и проективизация касательного конуса к S в O является неособой кубической гиперповерхностью в $\mathbb{P}^3$. Из гладкости гиперповерхности S вне точки O следует, что O определена над полем $\mathbb{F}$.

Многообразие X может быть реализовано как гиперповерхность

$$y^3 = x_0^3 f_3(x_1, \dots, x_4) + x_0^2 f_4(x_1, \dots, x_4) + x_0 f_5(x_1, \dots, x_4) + f_6(x_1, \dots, x_4)$$

в $\mathbb{P}(1^5, 2) \cong \text{Proj}(\mathbb{F}[x_0, \dots, x_4, y])$, где f_i – однородный многочлен степени i , а тройное накрытие $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^4$ является ограничением на гиперповерхность X естественной проекции $\mathbb{P}(1^5, 2) \dashrightarrow \mathbb{P}^4$, которая индуцируется естественным вложением градуированных алгебр $\mathbb{F}[x_0, \dots, x_4] \subset \mathbb{F}[x_0, \dots, x_4, y]$. При такой реализации X гиперповерхность ветвления $S \subset \mathbb{P}^4$ задается уравнением

$$x_0^3 f_3(x_1, \dots, x_4) + x_0^2 f_4(x_1, \dots, x_4) + x_0 f_5(x_1, \dots, x_4) + f_6(x_1, \dots, x_4) = 0,$$

а однородные координаты особой точки O суть $(1 : 0 : \dots : 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 89. Уравнение $f_3(x_1, \dots, x_4) = 0$ задает в $\mathbb{P}^3 \cong \text{Proj}(\mathbb{F}[x_1, \dots, x_4])$ гладкую кубику, являющуюся проективизацией касательного конуса к S в точке O . В частности, многочлен f_3 неприводим.

Пусть X удовлетворяет следующим условиям общности:

- 1) f_4 не делится на f_3 ;
- 2) $f_5^2 - 3f_4f_6$ и $f_4^2f_5^2 - 4f_4^3f_6 - 4f_3f_5^3 + 18f_3f_4f_5f_6 - 27f_3^2f_6^2$ взаимно просты.

ЗАМЕЧАНИЕ 90. Легко видеть, что накладываемые условия выполнены при общем выборе многочленов f_i . Геометрический смысл условий общности следующий:

- 1) общая прямая L в $\mathbb{P}^4$, проходящая через точку O и лежащая в касательном конусе к гиперповерхности S в точке O , пересекает S ещё в двух, возможно, совпадающих точках, отличных от O ;
- 2) через точку $P = \pi^{-1}(O)$ на многообразии X проходит не более чем однопараметрическое семейство кривых C , для которых $-K_X \cdot C = 1$.

В настоящем параграфе с помощью методов работ [76], [123] и [77] будет доказан следующий результат, из которого, очевидно, следует теорема 19.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 91. *В принятых условиях рациональные точки на X потенциально плотны⁷, т. е. для некоторого конечного расширения $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ полей множество всех $\mathbb{K}$ -точек многообразия X плотно по Зарискому в X .*

Существует две точки зрения на потенциальную плотность. Одна из них состоит в том, что потенциальная плотность рациональных точек отражает близость данного многообразия к рациональному. Так, например, на геометрически unirationalном многообразии рациональные точки заведомо потенциально плотны. В этом контексте утверждение теоремы 19 выглядит вполне естественно. Также вполне естественным выглядит тот факт, что потенциальную плотность рациональных точек не получается доказать на данный момент для многих нерациональных рационально связных многообразий. Например, потенциальная плотность рациональных точек неизвестна для таких бирационально сверхжестких многообразий Фано, как общая неособая квинтика в $\mathbb{P}^5$ (см. [170], [49], [116]). Другая точка зрения состоит в том, что потенциальная плотность рациональных точек является намного более грубым бирациональным инвариантом. В частности, имеется следующая гипотеза (см. [123]).

ГИПОТЕЗА 92. *Пусть V – неособое многообразие, определенное над некоторым числовым полем. Предположим, что дивизор $-K_V$ численно эффективен. Тогда рациональные точки на V потенциально плотны.*

Допуская выполнение гипотезы 92, утверждение 91 можно рассматривать лишь как иллюстрацию общего принципа. В настоящий момент выполнение гипотезы 92 известно для широкого класса многообразий, например абелевых многообразий (см. [127]), неособых трехмерных многообразий Фано, кроме двойного накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в неособой секстике (см. [76] и [123]), для КЗ-поверхностей с эллиптическим пучком или бесконечной группой автоморфизмов (см. [77]), поверхностей Энриквеса (см. [75]), а также для некоторых симметрических произведений

⁷Вернее, $\mathbb{F}$ -точки потенциально плотны на X , но используемый термин общепринят.

(см. [128]). Таким образом, рациональные точки потенциально плотны на многих не рационально связных многообразиях. Однако потенциальная плотность рациональных точек неизвестна даже для общего двойного накрытия $\mathbb{P}^2$ с ветвлением в неособой секстике (см. [76]).

ПРИМЕР 93. Пусть C – неособая связная кривая, определенная над числовым полем, такая, что $g(C) \geq 2$. Тогда из теоремы Фалтингса (см. [110] и [111]) следует, что рациональные точки не потенциально плотны на многообразии $C \times \mathbb{P}^k$.

Естественно предположить, что потенциальная плотность рациональных точек отражает такие глубокие бирационально геометрические свойства многообразия, как, например, рациональную связность. Но даже в случае общего неособого расщепления на коники $\zeta: V \rightarrow \mathbb{P}^n$ с достаточно большим дискриминантом и $n \geq 2$ потенциальная плотность рациональных точек на V неизвестна, хотя известно, что она следует из выполнения гипотезы Шинзеля для $\zeta: V \rightarrow \mathbb{P}^n$ (см. [95]). Отметим, что в последнем случае многообразие V не рационально (см. [33] и [34]) и есть основания полагать, что многообразие V также и не унирационально. Возможно, что именно потенциальная плотность рациональных точек когда-нибудь будет использована для построения примера рационально связного, но не унирационального многообразия.

Из примера в [96] следует возможное обобщение гипотезы 92.

ГИПОТЕЗА 94. Пусть V – неособое многообразие, определенное над некоторым числовым полем. Предположим, что дивизор $-K_V$ численно эффективен. Тогда рациональные точки на V потенциально плотны, если не существует неразветвленного конечного морфизма $f: U \rightarrow V$ такого, что существует доминантное рациональное отображение $g: U \dashrightarrow Z$, где Z – многообразие общего типа и $\dim(Z) > 0$.

Заметим, что гипотезы 92 и 94 являются естественным логическим отрицанием следующей ослабленной гипотезы Ленга, которая доказана для кривых и для подмногообразий абелевых многообразий (см. [110]–[112]).

ГИПОТЕЗА 95. Пусть V – неособое многообразие общего типа, определенное над числовым полем. Тогда рациональные точки на V не потенциально плотны.

Отметим, что утверждение теоремы 19 должно быть верным и без каких-либо условий общности. Даже более того, как правило, в необщем случае потенциальная плотность рациональных точек обычно доказывается даже легче, чем в общем. То же самое можно сказать и про особенности многообразия X . А именно, при ухудшении особенностей доказательство потенциальной плотности рациональных точек должно упрощаться. Конечно, возможны и исключительные случаи.

ПРИМЕР 96. Пусть $\chi: Y \rightarrow \mathbb{P}^4$ – циклическое тройное накрытие с ветвлением в гиперповерхности $G \subset \mathbb{P}^4$ степени 6 такой, что G является объединением шести различных гиперплоскостей, определенных над числовым полем $\mathbb{F}$ и проходящих через некоторую плоскость $\Pi \subset \mathbb{P}^4$. Тогда Y бирационально эквивалентна произведению $C \times \mathbb{P}^3$, где C – циклическое тройное накрытие $\mathbb{P}^1$ с ветвлением в шести

точках, определенных над полем $\mathbb{F}$. В этом случае $g(C) = 4$, и из примера 93 следует, что рациональные точки не потенциально плотны на многообразии Y .

Докажем утверждение 91. Воспользуемся следующим результатом из [159].

ТЕОРЕМА 97. *Для каждого числового поля $\mathbb{F}$ существует такое $n(\mathbb{F}) \in \mathbb{N}$, зависящее только от поля $\mathbb{F}$, что порядок любой $\mathbb{F}$ -точки кручения каждой эллиптической кривой C , определенной над полем $\mathbb{F}$, не превосходит числа $n(\mathbb{F})$.*

Пусть $P = \pi^{-1}(O)$. Тогда P – обыкновенная тройная точка на X . Рассмотрим обыкновенное раздутие $\alpha: U \rightarrow V$ точки P . Пусть E – исключительный дивизор раздутия α . Тогда $-K_U \sim \alpha^*(-K_X) - E$, линейная система $| -K_U |$ свободна и задает эллиптическое расслоение $\psi: U \rightarrow \mathbb{P}^3$ такое, что E – трисечение расслоения ψ , а также $\psi = \gamma \circ \pi$, где $\gamma: \mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ – проекция из точки O .

ЗАМЕЧАНИЕ 98. Многообразие E является неособой трехмерной кубической гиперповерхностью в $\mathbb{P}^4$. Геометрически кубика E не рациональна (см. [93]), т. е. она не рациональна над полем $\mathbb{C}$, но хорошо известно, что она унирациональна (см. [22]). В частности, рациональные точки на многообразии E потенциально плотны.

Пусть D – пересечение двух общих дивизоров в $| -K_U |$. Тогда D – гладкая эллиптическая поверхность, ограничение $\tau = \psi|_D: D \rightarrow \mathbb{P}^1$ является каноническим отображением поверхности D , т. е. $K_U \sim \tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$, кривая $Z = E \cap D$ является неособой эллиптической кривой, ограничение $\tau|_Z: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ – циклическое тройное накрытие, разветвленное в трех точках.

ЗАМЕЧАНИЕ 99. Образ каждой неприводимой компоненты любого приводимого слоя расслоения τ на многообразии V является неприводимой неособой рациональной кривой, пересечение которой с дивизором $-K_X$ равно 1. Таким образом, в силу сделанного предположения об общности многообразия X таких кривых на V не более чем одномерное семейство. С другой стороны, поверхность D была выбрана в слоях эллиптического расслоения ψ достаточно общей, и $\text{codim}(D \subset U) = 2$. Следовательно, расслоение τ приводимых слоев не имеет.

Рассмотрим три слоя F_1, F_2 и F_3 расслоения τ , проходящих через точки ветвления тройного накрытия $\tau|_Z$. Все слои F_i различны, т. е. $F_i \neq F_j$ при $i \neq j$, в силу общности выбора поверхности D и неособости трехмерной кубики E .

ЗАМЕЧАНИЕ 100. Поверхность $\pi \circ \alpha(D) = \Pi \subset \mathbb{P}^4$ является достаточно общей плоскостью, проходящей через точку O , а кривая $\pi \circ \alpha(F_i) \subset \Pi$ является одной из трех прямых, высекаемых на Π уравнением $f_3 = 0$. Заметим, что прямая $\pi \circ \alpha(F_i)$ не может быть одной из прямых, высекаемых на Π уравнением $f_4 = 0$. Действительно, плоскость Π достаточно общая, а по предположению многочлен f_4 не делится на многочлен f_3 . Геометрически последнее означает, что слой F_i неособ в точке пересечения с кривой Z .

Ограничение $\alpha|_D$ стягивает эллиптическую кривую Z в точку P . Самопересечение кривой Z на D равно -3 . Ограничение $\pi|_{\alpha(D)}$ является циклическим тройным накрытием плоскости Π , разветвленным в особой кривой $\Pi \cap S$ степени 6,

особенности которой состоят из точки O , являющейся обыкновенной тройной точкой на ней.

Рассмотрим кривую $H \subset D$, высекаемую на поверхности D общим дивизором в линейной системе $|\alpha^*(-K_X)|$. Кривая H неособа и является трисечением эллиптического расслоения τ , $g(H) = 4$, а $\pi \circ \alpha(H) \subset \Pi$ – прямая. Пусть C_b – слой эллиптического расслоения $\tau: D \rightarrow \mathbb{P}^1$ над точкой $b \in \mathbb{P}^1$. Тогда на поверхности D выполнены равенства $H^2 = 3$, $H \cdot Z = 0$, $C_b^2 = 0$, $Z^2 = -3$ и $Z \cdot C_b = H \cdot C_b = 0$.

ЛЕММА 101. *Для очень общей $\mathbb{C}$ -точки $b \in \mathbb{P}^1$ выполнено соотношение*

$$3np - nH|_{C_b} \not\sim 0$$

в $\text{Pic}(C_b)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где p – одна из точек пересечения $Z \cap C_b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим расслоенное произведение $T = Z \times_{\mathbb{P}^1} D$ и индуцированный морфизм $\chi: T \rightarrow D$. Тогда χ – тройное циклическое накрытие, разветвленное в трех кривых F_i . В частности, поверхность T особа, если и только если какой-либо из слоев F_i особ. Однако возможные особенности T легко вычисляются, если знать тип особого слоя F_i эллиптического расслоения τ (см. [71]). В частности, поверхность T нормальна, и на ней корректно определена форма пересечения дивизоров Вейля (см. [181]).

Расслоение τ индуцирует эллиптическое расслоение $\eta: T \rightarrow Z$, которое является якобиевым расслоением расслоения τ . Действительно, кривая $\chi^{-1}(Z)$ распадается на три неприводимых компоненты, которые переставляются действием группы $\mathbb{Z}_3$ на поверхности T , меняющем точки в слоях накрытия χ . Пусть $\tilde{Z}$ – одна из компонент приводимой кривой $\chi^{-1}(Z)$. Тогда $\tilde{Z}$ – сечение расслоения η , а $\chi|_{\tilde{Z}}$ – изоморфизм.

Пусть $\tilde{H} = \chi^{-1}(H)$, а L – слой расслоения η . Тогда на поверхности T выполнены равенства $\tilde{H}^2 = 9$, $\tilde{H} \cdot \tilde{Z} = L^2 = 0$, $\tilde{Z} \cdot L = 1$ и $\tilde{H} \cdot L = 3$. Заметим, что по построению кривая $\tilde{Z}$ неособа и целиком содержится в неособой части T , так как точка пересечения $F_i \cap Z$ неособа на F_i (см. замечание 100). Следовательно, самопересечение $\tilde{Z}^2$ на поверхности T можно вычислить из формулы присоединения, а именно $\tilde{Z}^2 = -9$, поскольку $K_T \equiv 9L$. Заметим, что даже если бы кривая Z проходила через особые точки поверхности T , самопересечение $\tilde{Z}^2$ все равно можно было бы вычислить из формулы субприсоединения с использованием дифференциалов (см. [148]), которую можно явно вычислить в зависимости от типа соответствующей особой точки.

Заметим, что для $n \in \mathbb{N}$

$$3np - nH|_{C_b} \sim 0 \iff (3n\tilde{Z} - n\tilde{H})|_{L_a} \sim 0 \Rightarrow 3n\tilde{Z} - n\tilde{H} \equiv \Sigma,$$

где C_b – слой расслоения τ над очень общей $\mathbb{C}$ -точкой $b \in \mathbb{P}^1$, p – одна из точек пересечения $Z \cap C_b$, L_a – слой η над очень общей $\mathbb{C}$ -точкой $a \in Z$, а Σ – такой дивизор на поверхности T , что $\text{Supp}(\Sigma)$ является объединением слоев эллиптического расслоения η . С другой стороны, все слои расслоения η неприводимы, поскольку все слои расслоения τ неприводимы. В частности, если утверждение леммы не

верно, то кривые $\tilde{Z}$, $\tilde{H}$ и L линейно зависимы в группе $\text{Div}(T) \otimes \mathbb{Q} / \equiv$. Однако детерминант матрицы пересечения

$$\begin{pmatrix} \tilde{Z}^2 & \tilde{H} \cdot \tilde{Z} & L \cdot \tilde{Z} \\ \tilde{Z} \cdot \tilde{H} & \tilde{H}^2 & L \cdot \tilde{H} \\ \tilde{Z} \cdot L & \tilde{H} \cdot L & L^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

равен $72 \neq 0$, что противоречит линейной зависимости кривых $\tilde{Z}$, $\tilde{H}$ и L .

Теперь вместо поверхности D снова рассмотрим многообразие U . В силу общности выбора поверхности D из леммы 101 следует, что для очень общей $\mathbb{C}$ -точки $p \in E$ выполнено соотношение

$$3np + \alpha^*(nK_X)|_{L_p} \not\sim 0$$

в $\text{Pic}(L_p)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где L_p – слой расслоения $\psi: U \rightarrow \mathbb{P}^3$ над точкой p .

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим подмножество $\Phi_n \subseteq E$ условием

$$p \in \Phi_n \iff 3np \sim \alpha^*(-nK_X)|_{L_p}$$

в $\text{Pic}(L_p)$, где L_p – слой эллиптического расслоения ψ над точкой $\psi(p)$, причем потребуем, чтобы слой L_p был неособым в схемном смысле. Пусть $\bar{\Phi}_n \subseteq E$ – замыкание в топологии Зариского множества Φ_n . Тогда, переформулируя в новых обозначения то, что было уже доказано, получаем $\bar{\Phi}_n \neq E$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 102. По теореме 97 подмножество $\Phi_n \subset E$ не содержит $\mathbb{F}$ -точек дивизора E для всех натуральных n , больших некоторого $n(\mathbb{F})$.

Учитывая потенциальную плотность рациональных точек на E (см. замечание 98), можно заменить поле $\mathbb{F}$ на некоторое его конечное расширение и считать, что $\mathbb{F}$ -точки дивизора E плотны по Зарискому в нём. Рассмотрим некоторую $\mathbb{F}$ -точку

$$q \in E \setminus \left(\Delta \cup \bigcup_{i=1}^{n(\mathbb{F})} \bar{\Phi}_i \right),$$

где Δ – замкнутое по Зарискому подмножество в E , состоящее из точек, содержащихся в особых слоях эллиптического расслоения ψ . Пусть, как и ранее, L_q – слой расслоения ψ над точкой $\psi(q)$. Тогда кривая L_q и точка $\psi(q)$ определены над $\mathbb{F}$, причем кривая L_q неособа.

По построению дивизор $3q + \alpha^*(K_X)|_{L_q}$ определен над полем $\mathbb{F}$ и не является кручением в группе $\text{Pic}(L_q)$. Таким образом, из теоремы Римана–Роха для эллиптической кривой L_q следует, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует единственная $\mathbb{F}$ -точка $q_n \in L_b$ такая, что выполнена эквивалентность

$$q_n + (3n - 1)q + \alpha^*(nK_X)|_{L_q} \sim 0$$

в группе $\text{Pic}(L_q)$. Легко видеть, что $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$. Значит, кривая L_q содержится в замыкании в топологии Зариского множества всех $\mathbb{F}$ -точек многообразия U для каждой $\mathbb{F}$ -точки q в плотном по Зарискому подмножестве дивизора E .

Из последнего следует плотность по Зарискому рациональных точек на U и X . Заметим, что в процессе рассуждений поле $\mathbb{F}$ могло быть заменено на конечное расширение, чтобы получить плотность $\mathbb{F}$ -точек на дивизоре E . Итак, утверждение 91 доказано.

В процессе доказательства утверждения 91 было отмечено, что используемая в доказательстве поверхность T неособа, если и только если каждый из слоев F_i эллиптического расслоения τ неособ. Естественно предположить, что при общем выборе тройного накрытия X это всегда будет так. Действительно, неособость F_i следует из того, что прямая $\pi \circ \alpha(F_i)$ пересекает гиперповерхность ветвления S в точке O и ещё в двух различных точках, отличных от O . Последнее легко выразить через дискриминант соответствующего уравнения. А именно, достаточно, чтобы многочлены f_4 и $f_5^2 - 4f_4f_6$ не делились на неприводимый многочлен f_3 . Если оба последних условия выполнены, то дивизор E является таким трисечением расслоения ψ , что через некоторые точки ветвления на E тройного накрытия $\psi|_E$ проходит неособый эллиптический слой C расслоения ψ . В терминах работ [75] и [76] такое мультисечение называется *выступающе разветвленным* (saliently ramified). Несложно видеть, что для слоя C_b расслоения ψ над очень общей точкой $b \in \mathbb{P}^3$ выполнено следующее утверждение: для двух различных точек p_1 и p_2 в пересечении $C_b \cap E$ разность $p_1 - p_2$ не является дивизором кручения на эллиптической кривой C_b . Действительно, если бы последнее не выполнялось, то при предельном переходе $C_b \rightarrow C$ предел дивизора кручения $p_1 - p_2$ был бы тривиальным дивизором, поскольку предел точек p_1 и p_2 был бы одной точкой ветвления тройного накрытия $\psi|_E$ на неособой эллиптической кривой. Эти рассуждения нетрудно алгебраизировать (см. [75]). Теперь потенциальную плотность рациональных точек на X можно вывести почти точно так же, как это было сделано в процессе доказательства утверждения 91, только $\mathbb{F}$ -точки в слоях расслоения ψ нужно порождать, не используя теорему Римана–Роха, а посредством действия соответствующего якобиева расслоения (см. [75]).

Автор признателен М. М. Гриненко, В. А. Исковских, С. А. Кудрявцеву, Дж. Парку, Ю. Г. Прохорову, А. В. Пухликову и В. В. Шокурову за плодотворные беседы.

Список литературы

1. Алексеев В. А. Условия рациональности трехмерных многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо степени 4 // Матем. заметки. 1987. Т. 41. № 5. С. 724–730.
2. Варченко А. Н. О полунепрерывности спектра и оценке сверху числа особых точек проективной гиперповерхности // ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 6. С. 1294–1297.
3. Долгачёв И. В. О рациональных поверхностях с пучком эллиптических кривых // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30. № 5. С. 1073–1100.
4. Гизатулин М. Х. Рациональные G -поверхности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 1. С. 110–144.
5. Гриненко М. М. Бирациональные автоморфизмы трехмерного двойного конуса // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 7. С. 37–52.
6. Гриненко М. М. Бирациональные свойства пучков поверхностей дель Пеццо степени 1 и 2 // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 5. С. 17–38.
7. Гриненко М. М. О двойном конусе над поверхностью Веронезе // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 5. С. 5–22.

8. *Гриненко М. М.* Структуры Мори трехмерного многообразия Фано индекса 2 и степени 1 // Тр. МИАН. 2004. Т. 246. С. 103–128.
9. *Исковских В. А.* Минимальные модели алгебраических поверхностей над произвольными полями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. №1. С. 19–43.
10. *Исковских В. А.* Антиканоические модели трехмерных алгебраических многообразий // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Т. 12. М.: ВИНТИ, 1979. С. 59–157.
11. *Исковских В. А.* Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Т. 12. М.: ВИНТИ, 1979. С. 159–236.
12. *Исковских В. А.* К проблеме рациональности расслоений на коники // Матем. сб. 1991. Т. 182. №1. С. 114–121.
13. *Исковских В. А.* О критерии рациональности для расслоений на коники // Матем. сб. 1996. Т. 187. №7. С. 75–92.
14. *Исковских В. А.* Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори // УМН. 1996. Т. 51. №4. С. 3–72.
15. *Исковских В. А.* О проблеме рациональности для трехмерных алгебраических многообразий // Тр. МИАН. 1997. Т. 218. С. 190–232.
16. *Исковских В. А.* Два несопряженных вложения группы $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ в группу Кремоны // Тр. МИАН. 2003. Т. 241. С. 105–109.
17. *Исковских В. А., Манин Ю. И.* Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86. №1. С. 140–166.
18. *Каневский Д.* Структура групп, связанных с автоморфизмами кубических поверхностей // Матем. сб. 1977. Т. 103. №2. С. 293–308.
19. *Куликов В. С.* О плоских алгебраических кривых положительной размерности Альба-незе // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. №6. С. 75–94.
20. *Манин Ю. И.* Рациональные поверхности над совершенными полями // Publ. Math. IHES. 1966. V. 30. P. 55–113.
21. *Манин Ю. И.* Рациональные поверхности над совершенными полями. II // Матем. сб. 1967. Т. 72(114). №2. С. 161–192.
22. *Манин Ю. И.* Кубические формы. М.: Наука, 1972.
23. *Пухликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы двойного пространства и двойной квадрики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. №1. С. 229–239.
24. *Пухликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы трехмерной квартики с простейшей особенностью // Матем. сб. 1988. Т. 135(177). №4. С. 472–496.
25. *Пухликов А. В.* Замечание о теореме В.А.Исковских и Ю.И.Манина о трехмерной квартире // Тр. МИАН. 1995. Т. 208. С. 278–289.
26. *Пухликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо степени // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. №1. С. 123–164.
27. *Пухликов А. В.* Бирационально жесткие двойные гиперповерхности Фано // Матем. сб. 2000. Т. 191. №6. С. 101–126.
28. *Пухликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы алгебраических многообразий с пучком двойных квадрик // Матем. заметки. 2000. Т. 67. №2. С. 241–249.
29. *Пухликов А. В.* Бирационально жесткие расслоения Фано // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. №4. С. 131–150.
30. *Пухликов А. В.* Бирационально жесткие гиперповерхности Фано // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. №6. С. 159–186.
31. *Пухликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы алгебраических многообразий с пучком двойных накрытий Фано // Функцион. анализ и его прилож. 2002. Т. 36. №1. С. 88–90.
32. *Пухликов А. В.* Бирационально жесткие гиперповерхности Фано с изолированными особенностями // Матем. сб. 2002. Т. 193. №3. С. 135–160.

33. Саркисов В. Г. Бирациональные автоморфизмы расслоений коник // Изв. РАН. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 4. С. 918–945.
34. Саркисов В. Г. О структурах расслоений на коники // Изв. РАН. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 2. С. 371–408.
35. Соболев И. В. Бирациональные автоморфизмы одного класса многообразий, расслоенных на кубические поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 1. С. 203–224.
36. Тихомиров А. С. Геометрия поверхности Фано двойного пространства $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 2. С. 415–442.
37. Тихомиров А. С. Средний якобиан двойного пространства $\mathbb{P}^3$, разветвленного в квартике // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 6. С. 1329–1377.
38. Тихомиров А. С. Особенности тэта-дивизора среднего якобиана двойного пространства $\mathbb{P}^3$ индекса два // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 5. С. 1062–1081.
39. Тихомиров А. С. Отображение Абеля–Якоби секстик рода три на двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ индекса два // ДАН СССР. 1986. Т. 286. № 4. С. 821–824.
40. Трегуб С. Л. Три конструкции рациональности четырехмерной кубики // Вестн. МГУ. Сер. I. Матем. Мех. 1984. Т. 39. № 3. С. 8–14.
41. Трегуб С. Л. Два замечания о четырехмерной кубике // УМН. 1993. Т. 48. № 2. С. 201–202.
42. Тюрин А. Н. Пять лекций о трехмерных многообразиях // УМН. 1972. Т. 27. № 5. С. 3–50.
43. Тюрин А. Н. О пересечении квадрик // УМН. 1975. Т. 30. № 6. С. 51–99.
44. Тюрин А. Н. Промежуточный якобиан трехмерных многообразий // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Т. 12. М.: ВИНТИ, 1979. С. 5–57.
45. Чельцов И. А. Особенности трехмерных многообразий, обладающих обильным эффективным дивизором – гладкой поверхностью кодаировой размерности нуль // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 4. С. 445–450.
46. Чельцов И. А. Трехмерные многообразия, обладающие дивизором с численно тривиальным каноническим классом // УМН. 1996. Т. 51. № 1. С. 140–141.
47. Чельцов И. А. Поверхности дель Пеццо с нерациональными особенностями // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 3. С. 377–389.
48. Чельцов И. А. Ограниченность трехмерных многообразий Фано целого индекса // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 3. С. 445–451.
49. Чельцов И. А. О гладкой четырехмерной квинтике // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 139–162.
50. Чельцов И. А. Логпары на гиперповерхностях степени N в $\mathbb{P}^N$ // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 1. С. 131–138.
51. Чельцов И. А. Многообразие Фано с единственной эллиптической структурой // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 5. С. 145–156.
52. Чельцов И. А. Лог-канонические пороги на гиперповерхностях // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 8. С. 155–172.
53. Чельцов И. А. Антиканоические модели трехмерных многообразий Фано степени четыре // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 4. С. 147–172.
54. Чельцов И. А. Нерациональность четырехмерного гладкого полного пересечения квадрики и квартики, не содержащего плоскости // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 11. С. 95–116.
55. Чельцов И. А. Расслоения на коники с большим дискриминантом // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. № 2. С. 215–221.
56. Чельцов И. А. Рациональность трехмерного многообразия Фано–Энриквеса рода пять // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. № 3. С. 181–194.
57. Чельцов И. А. Регуляризация бирациональных автоморфизмов // Матем. заметки. 2004. Т. 76. № 2. С. 286–299.
58. Чельцов И. А. Двойное пространство с двойной прямой // Матем. сб. 2004. Т. 195. № 10. С. 109–156.
59. Чельцов И. А. Метод вырождения и нерациональность трехмерных многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо // УМН. 2004. Т. 59. № 4. С. 203–204.

60. Чельцов И. А., Парк Дж. Глобальные лог-канонические пороги и обобщенные точки Эккарда // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 5. С. 149–160.
61. Чельцов И. А., Воцлав Л. Нерациональные полные пересечения // Тр. МИАН. 2004. Т. 246. С. 303–307.
62. Шокуров В. В. Многообразия Прима: теория и приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 23. № 4. С. 785–855.
63. Шокуров В. В. Трехмерные лог-перестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 1. С. 105–203.
64. Alexeev V. General elephants of $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds // Comp. Math. 1994. V. 91. P. 91–116.
65. Ambro F. Ladders on Fano varieties // J. Math. Sci. 1999. V. 94. P. 1126–1135.
66. Andreotti A., Frankel T. The Lefschetz theorem on hyperplane sections // Ann. Math. 1959. V. 69. P. 713–717.
67. Artin M. Some numerical criteria of contractability of curves on algebraic surfaces // Amer. J. Math. 1962. V. 84. P. 485–496.
68. Artin M., Mumford D. Some elementary examples of unirational varieties which are not rational // Proc. London Math. Soc. 1972. V. 25. P. 75–95.
69. Bardelli F. Polarized mixed Hodge structures: on irrationality of threefolds via degeneration // Ann. Mat. Pura et Appl. 1984. V. 137. P. 287–369.
70. Barth W. Two projective surfaces with many nodes, admitting the symmetries of the icosahedron // J. Algeb. Geom. 1996. V. 5. P. 173–186.
71. Barth W., Peters C., Van de Ven A. Compact complex surfaces // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Berlin–N.Y.: Springer-Verlan, 1984.
72. Beauville A. Varietes de Prym et jacobiniennes intermediaires // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1977. V. 10. P. 309–391.
73. Bertini E. Ricerche sulle trasformazioni univoche involutori del piano // Ann. Mat. Ser. II. 1877. V. 8. P. 224–286.
74. Beauville A. Sur le nombre maximum de points doubles d’une surface dans $\mathbb{P}^3$ ($\mu(5) = 31$) // Algeb. Geom. Angers. 1979. P. 207–215.
75. Bogomolov F., Tschinkel Yu. Density of rational points on Enriques surfaces // Math. Res. Lett. 1998. V. 5. P. 623–628.
76. Bogomolov F., Tschinkel Yu. On the density of rational points on elliptic fibrations // J. Reine Angew. Math. 1999. V. 511. P. 87–93.
77. Bogomolov F., Tschinkel Yu. Density of rational points on elliptic K3 surfaces // Asian J. Math. 2000. V. 4. P. 351–368.
78. Borcea C. Nodal quintic threefolds and nodal octic surfaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 109. P. 627–635.
79. Bott R. On a theorem of Lefschetz // Mich. Math. J. 1959. V. 6. P. 211–216.
80. Call F., Lyubeznik G. A simple proof of Grothendieck’s theorem on the parafactoriality of local rings // Contemp. Math. 1994. V. 159. P. 15–18.
81. Catanese F., Ceresa G. Constructing sextic surfaces with a given number d of nodes // J. Pure Appl. Algebra. 1982. V. 23. P. 1–12.
82. Catanese F., Ciliberto C. On the irregularity of cyclic covering of algebraic surfaces // Geometry of Complex Projective Varieties. Sem. and Conf. 1993. V. 9. P. 1935–1940.
83. Casnati G., Ekedahl T. Covers of algebraic varieties I. A general structure theorem, covers of degree 3, 4 and Enriques surfaces // J. Alg. Geom. 1996. V. 5. P. 439–460.
84. Cheltsov I. On the rationality of non-Gorenstein $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds with an integer Fano index // Cont. Math. 1997. V. 207. P. 43–50.
85. Cheltsov I. Log pairs on birationally rigid varieties // J. Math. Sci. 2000. V. 102. P. 3843–3875.
86. Cheltsov I. Birationally rigid del Pezzo fibrations // Manuscripta Math. 2005.
87. Cheltsov I. Non-rational nodal quartic threefolds. arXiv:math.AG/0405150.
88. Cheltsov I. Double spaces with isolated singularities. arXiv:math.AG/0405194.
89. Cheltsov I., Park J. Sextic double solids. arXiv:math.AG/0404452.

90. *Clemens C. H.* Degeneration techniques in the study of threefolds // Algebraic threefolds. Lect. Not. Math. 1982. V. 947. P. 93–154.
91. *Clemens C. H.* Double solids // Adv. in Math. 1983. V. 47. P. 107–230.
92. *Clemens C. H.* The quartic double solid revisited // Complex geometry and Lie theory. Proc. Sympos. Pure Math. 1991. V. 53. P. 89–101.
93. *Clemens C. H., Griffiths P. A.* The intermediate Jacobian of the cubic threefold // Ann. of Math. 1972. V. 95. P. 73–100.
94. *Colliot-Thélène J. L., Ojanguren O.* Variétés unirationnelles non rationnelles au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford // Invent. Math. 1989. V. 97. P. 141–158.
95. *Colliot-Thélène J. L., Swinnerton-Dyer P.* Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi-Brauer and similar varieties // J. Reine Angew. Math. 1994. V. 453. P. 49–112.
96. *Colliot-Thélène J. L., Skorobogatov A., Swinnerton-Dyer P.* Double fibres and double covers: Paucity of rational points // Acta Arithmetica. 1997. V. 79. P. 113–135.
97. *Comessatti A.* Sui piani tripli ciclici irregolari // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1911. V. 31. P. 293–310.
98. *Corti A.* Factorizing birational maps of threefolds after Sarkisov // J. Algebr. Geom. 1995. V. 4. P. 223–254.
99. *Corti A.* Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry // L.M.S. Lecture Note Series. 2000. V. 281. P. 259–312.
100. *Corti A., Mella M.* Birational geometry of terminal quartic 3-folds I // Amer. J. Math. 2004. V. 126. № 4. P. 739–761.
101. *Corti A., Pukhlikov A., Reid M.* Fano 3-fold hypersurfaces // L.M.S. Lecture Note Series. 2000. V. 281. P. 175–258.
102. *Cossec F., Dolgachev I.* Enriques Surfaces. I. Boston: Birkhauser, 1989.
103. *Cynk S.* Hodge numbers of nodal double octic // Comm. Algebra. 1999. V. 27. P. 4097–4102.
104. *Cynk S.* Defect of a nodal hypersurface // Manuscripta Math. 2001. V. 104. P. 325–331.
105. *Dolgachev I.* Weighted projective varieties // Lect. Not. in Math. 1982. V. 956. P. 34–71.
106. *Ein L., Lazarsfeld R.* Global generation of pluricanonical and adjoint linear series on smooth projective threefolds // J. Am. Math. Soc. 1993. V. 6. P. 875–903.
107. *Ein L., Mustata M.* The log canonical thresholds of homogeneous affine hypersurface. arXiv:math.AG/0105113.
108. *Endraß S.* On the divisor class group of double solids // Manuscripta Math. 1999. V. 99. P. 341–358.
109. *Faenzi D., Stipins J.* A small resolution for triple covers in algebraic geometry // Matematiche (Catania). 2003. V. 56. № 2. P. 257–267.
110. *Faltings G.* Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern // Invent. Math. 1983. V. 73. P. 349–366.
111. *Faltings G., Wustholz G.* Rational points. Papers from the seminar held at the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, 1983/1984 // Aspects of Mathematics. V. E6. Braunschweig: Vieweg & Sohn, 1984.
112. *Faltings G.* Diophantine approximation on abelian varieties // Ann. of Math. 1991. V. 133. № 2. P. 549–576.
113. *Fano G.* Osservazioni sopra alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli // Atti Accad. Torino. 1915. V. 50. P. 1067–1072.
114. *Fano G.* Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche // Pont. Acad. Sci. Comment. 1947. V. 11. P. 635–720.
115. *De Fernex T., Ein L., Mustata M.* Multiplicities and log-canonical thresholds. // J. Alg. Geom. 2004. V. 13. P. 603–615.
116. *De Fernex T., Ein L., Mustata M.* Bounds for log canonical thresholds with applications to birational rigidity // Math. Res. Letters. 2003. V. 10. P. 219–236.
117. *Finkelberg H.* Small resolutions of the Segre cubic // Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 1987. V. 49. P. 261–277.

118. *Fujita T.* Triple covers by smooth manifolds // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA. 1988. V. 35. № 1. P. 169–175.
119. *Fulton W., Lazarsfeld R.* Connectivity and its applications in algebraic geometry // Lect. Not. in Math. 1981. V. 862. P. 26–92.
120. *Grinenko M.* On the birational rigidity of some pencils of del Pezzo surfaces // J. Math. Sci. 2000. V. 102. P. 3933–3937.
121. *Grothendieck A. et al.* Séminaire de géométrie algébrique 1962 // Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux. IHES, 1965.
122. *Halphen G.* Sur les courbes planes du sixieme degre a neuf points doubles // Bull. Soc. Math. France. 1882. V. 10. P. 162–172.
123. *Harris J., Tschinkel Yu.* Rational points on quartics // Duke Math. J. 2000. V. 104. P. 477–500.
124. *Hartshorne R.* Stable reflexive sheaves // Math. Ann. 1980. V. 254. P. 121–176.
125. *Hassett B.* Some rational cubic fourfolds // J. Algebr. Geom. 1999. V. 8. № 1. P. 103–114.
126. *Hassett B.* Special cubic fourfolds // Compos. Math. 2000. V. 120. № 1. P. 1–23.
127. *Hassett B.* Potential density of rational points on algebraic varieties. Higher dimensional varieties and rational points // Lectures of the summer school and conference, Budapest, Hungary, September 3–21, 2001. Bolyai Soc. Math. Stud. V. 12. Berlin: Springer, 2003. P. 223–282.
128. *Hassett B., Tschinkel Yu.* Abelian fibrations and rational points on symmetric products // Int. J. Math. 2000. V. 11. № 9. P. 1163–1176.
129. *Hironaka H.* Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero // Ann. Math. 1964. V. 79. P. 109–326.
130. *Iano-Fletcher A. R.* Working with weighted complete intersections // L.M.S. Lecture Note Series. 2000. V. 281. P. 101–173.
131. *Ishii Sh.* A characterization of hyperplane cuts of a smooth complete intersection // Proc. Japan Acad. 1982. V. 58. P. 309–311.
132. *Iskovskikh V. A.* On the rationality problem for conic bundles // Duke Math. J. 1987. V. 54. P. 271–294.
133. *Iskovskikh V. A.* Towards the problem of rationality of conic bundles // Lect. Not. Math. 1991. V. 1479. P. 50–56.
134. *Iskovskikh V., Prokhorov Yu.* Fano varieties // Encyclopaedia Math. Sci. V. 47. Berlin: Springer, 1999.
135. *Iversen B.* Numerical invariants and multiple planes // Am. J. Math. 1970. V. 92. P. 968–996.
136. *Jaffe D., Ruberman D.* A sextic surface cannot have 66 nodes // J. Algebr. Geom. 1997. V. 6. P. 151–168.
137. *Jahnke P., Radloff I.* Generatedness for Gorenstein Fano threefolds with canonical singularities. arXiv:math.AG/0404156.
138. *De Jong A. J., Shepherd-Barron N., De Ven A. V.* On the Burkhardt quartic // Math. Ann. 1990. V. 286. P. 309–328.
139. *Kawakita M.* Divisorial contractions in dimension 3 which contracts divisors to smooth points // Invent. Math. 2001. V. 145. P. 105–119.
140. *Kawamata Yu.* A generalization of Kodaira–Ramanujam’s vanishing theorem // Math. Ann. 1982. V. 261. P. 43–46.
141. *Kawamata Yu.* On Fujita’s freeness conjecture for 3-folds and 4-folds // Math. Ann. 1997. V. 308. P. 491–505.
142. *Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K.* Introduction to the minimal model problem // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
143. *Kollár J.* Nonrational hypersurfaces // J. of the AMS. 1995. V. 8. P. 241–249.
144. *Kollár J.* Rational curves on algebraic varieties. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
145. *Kollár J.* Singularities of pairs. Algebraic geometry // Proc. Summer Research Institute, Santa Cruz, CA, USA. July 9–29, 1995. V. 62. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. P. 221–287.

146. *Kollár J.* Low degree polynomial equations: arithmetic, geometry and topology // *Prog. Math.* 1998. V. 168. P. 255–288.
147. *Kollár J.* Non-rational covers of $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m$ // *L.M.S. Lecture Note Series.* 2000. V. 281. P. 51–71.
148. *Kollár J. et al.* Flips and abundance for algebraic threefolds // *A summer seminar at the University of Utah, Salt Lake City, 1991.* V. 211. Astérisque, 1992.
149. *Kollár J., Miyaoka Y., Mori S.* Rational curves on Fano varieties // *Lect. Not. Math.* 1992. V. 1515. P. 100–105.
150. *Kollár J., Miyaoka Y., Mori S.* Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds // *J. of Diff. Geom.* 1992. V. 36. P. 765–779.
151. *Kollár J., Miyaoka Y., Mori S.* Rationally connected varieties // *J. Algebr. Geom.* 1992. V. 1. P. 429–448.
152. *Kontogeorgis A.* Automorphisms of Fermat-like varieties // *Manuscr. Math.* 2002. V. 107. № 2. P. 187–205.
153. *Lanteri A., Livorni E. A.* Triple solids with sectional genus three // *Forum Math.* 1990. V. 2. № 3. P. 297–306.
154. *Lanteri A., Palleschi M., Sommese A. J.* On triple covers of $\mathbb{P}^n$ as very ample divisors // *Contemp. Math.* 1994. V. 162. P. 277–292.
155. *Lazarsfeld R.* A Barth-type theorem for branched coverings of projective space // *Math. Ann.* 1980. V. 249. P. 153–162.
156. *Libgober A.* Alexander polynomials of plane algebraic curves and cyclic multiple planes // *Duke Math. J.* 1982. V. 49. P. 833–851.
157. *Manetti M.* Automorphisms of generic cyclic covers // *Rev. Mat. Univ. Complutense Madr.* 1997. V. 10. № 1. P. 149–156.
158. *Mella M.* Birational geometry of quartic 3-folds. II: the importance of being $\mathbb{Q}$ -factorial // *Math. Ann.* 2004. V. 330. № 1. P. 107–126.
159. *Merel L.* Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres // *Invent. Math.* 1996. V. 124. P. 437–449.
160. *Miranda R.* Triple covers in algebraic geometry // *Am. J. Math.* 1985. V. 107. P. 1123–1158.
161. *Mustata M.* Jet schemes of locally complete intersection canonical singularities // *Invent. Math.* 2001. V. 145. P. 397–424.
162. *Mustata M.* Singularities of pairs via jet schemes // *J. Amer. Math. Soc.* 2002. V. 15. P. 599–615.
163. *Noether M.* Über Flächen, welche Shaaren rationaler Curven besitzen // *Math. Ann.* 1871. V. 3. P. 161–227.
164. *Pardini R.* Triple covers in positive characteristic // *Ark. Mat.* 1989. V. 27. № 2. P. 319–341.
165. *Pardini R.* Abelian covers of algebraic varieties // *J. Reine Angew. Math.* 1991. V. 417. P. 191–213.
166. *Petterson K. F.* On nodal determinantal quartic hypersurfaces in $\mathbb{P}^4$ // *Thesis. University of Oslo*, 1998. <http://folk.uio.no/ranestad/kfpthesis.ps>.
167. *Prokhorov Yu. G.* On the degree of Fano threefolds with canonical Gorenstein singularities. I. *arXiv:math.AG/0312011*.
168. *Prokhorov Yu. G.* A remark on Fano threefolds with canonical Gorenstein singularities. *arXiv:math.AG/0312012*.
169. *Peyre E.* Unramified cohomology and rationality problems // *Math. Ann.* 1993. V. 296. № 2. P. 247–268.
170. *Pukhlikov A.* Birational isomorphisms of four-dimensional quintics // *Invent. Math.* 1987. V. 87. P. 303–329.
171. *Pukhlikov A.* Birational automorphisms of double spaces with singularities // *J. Math. Sci.* 1997. V. 85. P. 2128–2141.
172. *Pukhlikov A.* Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // *Invent. Math.* 1998. V. 134. P. 401–426.

173. *Pukhlikov A.* Certain examples of birationally rigid varieties with a pencil of double quadrics // J. Math. Sci. 1999. V. 94. № 1. P. 986–995.
174. *Pukhlikov A.* Essentials of the method of maximal singularities // L.M.S. Lecture Note Series. 2000. V. 281. P. 73–100.
175. *Pukhlikov A.* Birationally rigid Fano complete intersections // J. Reine Angew. Math. 2001. V. 541. P. 55–79.
176. *Pukhlikov A.* Birationally rigid singular Fano hypersurfaces // J. Math. Sci. 2003. V. 115. P. 2428–2436.
177. *Pukhlikov A.* Birationally rigid iterated Fano double covers // Izv. Math. 2003. V. 67. № 3. P. 555–596.
178. *Pukhlikov A.* Birationally rigid Fano varieties. arXiv:math.AG/0310267.
179. *Reid M.* Young person's guide to canonical singularities // Proc. Symp. Pure Math. 1987. V. 46. P. 345–414.
180. *Ryder D.* Elliptic and K3 fibrations birational to Fano 3-fold weighted hypersurfaces // Thesis. University of Warwick, 2002. <http://www.maths.warwick.ac.uk/~miles/doctors/Ryder/th.ps>.
181. *Sakai F.* Weil divisors on normal surfaces // Duke Math. J. 1984. V. 51. P. 877–887.
182. *Sakai F.* On the irregularity of cyclic coverings of the projective plane // Contemporary Mathematics. 1994. V. 162. P. 359–369.
183. *Shioda T.* Geometry of Fermat varieties // Prog. Math. 1982. V. 26. P. 45–56.
184. *Shioda T.* Arithmetic and geometry of Fermat curves // Algebraic Geometry Seminar. (Singapore, 1987). Singapore: World Sci. Publishing, 1988. P. 95–102.
185. *Stagnaro E.* Sul massimo numero di punti doppi isolati di una superficie algebrica di $\mathbb{P}^3$ // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1978. V. 59. P. 179–198.
186. *Steenbrink J. H. M.* Mixed Hodge structures and singularities: a survey // Géométrie algébrique et applications. III (La Rábida, 1984). Travaux en Cours. V. 24. Paris: Hermann, 1987. P. 99–123.
187. *Van Straten D.* A quintic hypersurface in $\mathbb{P}^4$ with 130 nodes // Topology. 1993. V. 32. P. 857–864.
188. *Tan S.* Galois triple covers of surfaces // Sci. China. Ser. A. 1991. V. 34. № 8. P. 935–942.
189. *Tan S.* Surfaces whose canonical maps are of odd degrees // Math. Ann. 1992. V. 292. № 1. P. 13–30.
190. *Tan S.* Integral closure of a cubic extension and applications // Proc. Am. Math. Soc. 2001. V. 129. № 9. P. 2553–2562.
191. *Tan S.* Triple covers on smooth algebraic varieties // AMS/IP Stud. Adv. Math. 2002. V. 29. P. 143–164.
192. *Todd J. A.* On a quartic primal with forty-five nodes, in space of four dimensions // Quart. J. Math. 1936. V. 7. P. 168–174.
193. *Tokunaga H.* Triple coverings of algebraic surfaces according to the Cardano formula // J. Math. Kyoto Univ. 1991. V. 31. № 2. P. 359–375.
194. *Tokunaga H.* Irreducible plane curves with the Albanese dimension 2 // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 127. P. 1935–1940.
195. *Viehweg V.* Vanishing theorems // J. Reine Angew. Math. 1982. V. 335. P. 1–8.
196. *Wahl J.* Nodes on sextic hypersurfaces in $\mathbb{P}^3$ // J. Diff. Geom. 1998. V. 48. P. 439–444.
197. *Van der Waerden B. L.* On varieties in multiple-projective spaces // Nederl. Akad. Wet. Proc. Ser. A. 1978. V. 81. P. 303–312.
198. *Weil A.* Collected papers. III. N.Y.–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1977.
199. *Welters G.* Abel-Jacobi isogenies for certain types of Fano threefolds // Mathematical Centre Tracts. V. 141. Amsterdam: Math. Centrum, 1981.
200. *Werner J.* Kleine Auflösungen spezieller dreidimensionaler Varietäten // Bonner Math. Schriften. V. 186. Bonn: Universität Bonn, Math. Institut, 1987.

- 201. *Zak F.* Tangents and secants of algebraic varieties // Mathematical Monographs. V. 127. Providence: Rhode Island, 1993.
- 202. *Zariski O.* On the linear connection index of the algebraic surfaces $z^n = f(x, y)$ // Proc. Nat. Acad. Sci. 1929. V. 15. P. 494–501.
- 203. *Zariski O.* On the irregularity of cyclic multiple planes // Ann. of Math. 1931. V. 32. P. 485–511.
- 204. *Zariski O.* Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques–Severi // Ann. of Math. 1952. V. 55. P. 552–552.
- 205. *Zariski O.* On Castelnuovo’s criterion of rationality $p_a = P_2 = 0$ of an algebraic surface // Illinois J. Math. 1958. V. 2. P. 303–315.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: cheltsov@yahoo.com

Поступило в редакцию
11.05.2004