Общероссийский математический портал

О. Г. Смолянов, С. А. Шкарин, Комплексная дифференцируемость по Гато и непрерывность, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 6, 157–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/im517>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:51:42

УДК 517.98

О. Г. Смолянов, С. А. Шкарин

Комплексная дифференцируемость по Гато и непрерывность

Известно, что на вещественных локально выпуклых пространствах $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ финитных бесконечно дифференцируемых функций и $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ обобщенных функций существуют всюду разрывные бесконечно дифференцируемые по Фреше функции. В работе рассматривается связь комплексной дифференцируемости функции на комплексном локально выпуклом пространстве с ее непрерывностью. Описан класс комплексных локально выпуклых пространств, включающий комплексное пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, такой, что всякая комплексно дифференцируемая по Гато функция на пространстве этого класса непрерывна. Описан другой класс локально выпуклых пространств, включающий комплексное пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, такой, что на каждом пространстве из этого класса существует всюду разрывная комплексно бесконечно дифференцируемая по Фреше функция, производные которой непрерывны.

Библиография: 21 наименование.

§ 1. Введение

Следующие две теоремы доказаны в работе [6].

ТЕОРЕМА I. Пусть E – вещественное топологическое векторное пространство. Тогда следующие два условия эквивалентны:

- (i) любая дифференцируемая по Фреше в точке $x_0 \in E$ функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 ;
- (ii) E является пространством Фреше–Урысона¹.

Через $\mathcal{DFS}$ будем обозначать класс всех локально выпуклых пространств (ЛВП), являющихся сильными сопряженными к пространствам Фреше–Шварца [7], [8]. По-другому $\mathcal{DFS}$ можно описать как класс индуктивных пределов последовательностей банаховых пространств с компактными вложениями [7], [8]. Отметим, что бесконечномерные пространства из класса $\mathcal{DFS}$ не бывают пространствами Фреше–Урысона.

ТЕОРЕМА II. Пусть $E \in \mathcal{DFS}$, $U \subseteq E$ – открытое множество и функция $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ всюду дифференцируема по Фреше. Тогда f непрерывна.

В то же время в работе [3] доказана следующая теорема.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-01-01074).

¹Топологическое пространство X называется *пространством Фреше–Урысона* [9], если любая точка из замыкания множества $A \subset X$ является пределом последовательности элементов A .

ТЕОРЕМА III. Пусть E – сепарабельное бесконечномерное вещественное хаусдорфово локально выпуклое пространство. Тогда существует всюду разрывная и всюду дифференцируемая по Гато функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$.

В работе [1] высказывается предположение, что на вещественном ЛВП $\mathcal{D}$ бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем существует вещественная функция, бесконечно дифференцируемая по Фреше и всюду разрывная. В статье [5] строится такая функция. В работе [4] строится функция на пространстве $\mathcal{D}'$ обобщенных функций на $\mathbb{R}$ с теми же свойствами.

В настоящей работе решен вопрос о существовании аналогичных примеров в классе комплексно дифференцируемых функций на комплексных ЛВП $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$. Более того, описан класс комплексных локально выпуклых пространств, включающий комплексное пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, такой, что всякая комплексно дифференцируемая по Гато функция на пространстве этого класса непрерывна. Описан другой класс локально выпуклых пространств, включающий комплексное пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, такой, что на каждом пространстве из этого класса существует всюду разрывная комплексно бесконечно дифференцируемая по Фреше функция, производные которой начиная с первой непрерывны.

§ 2. Обозначения и терминология

Всюду ниже $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Пусть E и F – ЛВП над полем $\mathbb{K}$. Обозначим через $L(E, F)$ пространство линейных непрерывных отображений из E в F , наделенное топологией равномерной сходимости [7], [8] на ограниченных подмножествах E . Вместо $L(E, \mathbb{K})$ мы пишем E' .

Пусть X и Y – векторные пространства над полем $\mathbb{K}$. Через $\mathcal{B}^n(X, Y)$ будем обозначать пространство всех полилинейных отображений $\varphi: X^n \rightarrow Y$. Пространство всех симметричных полилинейных отображений из $\mathcal{B}^n(X, Y)$ обозначим $\mathcal{B}_s^n(X, Y)$. Для полунорм p и q на пространствах X и Y соответственно и отображения $\varphi \in \mathcal{B}^n(X, Y)$ положим

$$\widehat{\varphi}(x) = \varphi(\underbrace{x, \dots, x}_{n \text{ раз}}), \quad p_q^*(\varphi) = \sup\{q(\varphi(x_1, \dots, x_n)) : x_j \in X, p(x_j) \leq 1\}. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1], [6]. Пусть E и F – хаусдорфовы локально выпуклые пространства над полем $\mathbb{K}$, $U \subset E$ – открытое множество и $x_0 \in U$. Отображение $f: U \rightarrow F$ называется *дифференцируемым в точке x_0 по направлению $h \in E$* , если существует предел

$$D_h f(x_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{K}}} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \in F. \quad (2)$$

Отображение f называется *дифференцируемым по Гато в точке x_0* , если оно дифференцируемо в точке x_0 по направлению h для всякого $h \in E$ и отображение $f'(x_0): h \mapsto D_h f(x_0)$ является непрерывным линейным оператором.

Отображение f называется *дифференцируемым по Фреше в точке x_0* , если f дифференцируемо по Гато в x_0 и предел (2) равномерен по $h \in B$ для всякого ограниченного множества $B \subset E$.

Если f дифференцируемо по Гато во всех точках U , то отображение $f': U \rightarrow L(E, F)$ корректно определено и можно рассматривать вопрос о дифференцируемости f' . Мы считаем, что производные порядков не меньше двух определены таким образом.

Нам понадобятся еще два обозначения. Через $\mathcal{X}$ обозначим класс бочечных хаусдорфовых ЛВП таких, что существуют последовательности $\{f_n\}, \{g_n\} \subset X'$, удовлетворяющие условиям:

(i) для любой последовательности $\{c_n\}$ положительных чисел существует элемент $x \in X$, для которого $g_n(x) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_n(x)|}{c_n} = +\infty; \quad (3)$$

(ii) для всякого ограниченного множества $B \subset E$ существует натуральное число $n = n(B)$, для которого $g_k(x) = 0$ при $k > n$ и $x \in B$;

(iii) существуют элементы $x_m \in X$ такие, что $g_n(x_m) = \delta_{n,m}$ при всех $m, n \in \mathbb{N}$.

Через $\mathcal{Y}_0$ обозначим класс таких ЛВП X , что для всякой сходящейся к нулю последовательности $\{x_n\} \subset X$ существует банахов диск² B такой, что $p(x_n) \rightarrow 0$, где p – функционал Минковского множества B .

Через $\mathcal{Y}$ обозначим класс таких бочечных ЛВП X , что:

(а) существует банахов диск $D \subset X$ с плотной линейной оболочкой;

(б) X является строгим проективным пределом³ последовательности секвенциальных⁴ ЛВП $X_n \in \mathcal{Y}_0$.

§3. Разрывные комплексно дифференцируемые функции

Пусть $X \in \mathcal{X}$. Тогда существуют последовательности $\{f_n\}, \{g_n\} \subset X'$, удовлетворяющие условиям (i)–(iii) из определения класса $\mathcal{X}$. Рассмотрим отображение $P: X \rightarrow \mathbb{K}$,

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)g_n(x). \quad (4)$$

В силу условия (ii) в ряде из формулы (4) для каждого x лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.

ТЕОРЕМА 1. *Функция P , определяемая равенством (4), всюду разрывна, всюду дифференцируема по Фреше, и производная $P': X \rightarrow X'$ является непрерывным линейным оператором.*

²Множество D называется *банаховым диском*, если оно ограничено, замкнуто, выпукло, уравновешено, причем его линейная оболочка X_D является банаховым пространством при наделении ее нормой p_D , где p_D – функционал Минковского множества D .

³То есть существуют непрерывные открытые линейные операторы $\pi_n: X \rightarrow X_n$, $\rho_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$ такие, что $\pi_n = \rho_n \pi_{n+1}$ при всех n и топология пространства X является слабейшей, относительно которой все π_n непрерывны.

⁴Топологическое пространство называется *секвенциальным*, если в нем любое секвенциально замкнутое множество замкнуто.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из теоремы 1 вытекает, что функция P бесконечно дифференцируема по Фреше, отображение $P'': X \rightarrow L(X, X')$ постоянно и $P^{(k)} \equiv 0$ при $k \geq 3$. В частности, $P^{(k)}$ непрерывны при всех $k \geq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. На всяком (вещественном или комплексном) ЛВП $X \in \mathcal{X}$ существует всюду разрывная бесконечно дифференцируемая по Фреше функция, производные которой непрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Вычисляя предел (2) для отображения (4), получаем

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{K}}} \frac{P(x+th) - P(x)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x)g_n(h) + f_n(h)g_n(x)) \quad (5)$$

для всех $x, h \in X$. Для любого $x \in X$ отображение

$$Tx(h) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x)g_n(h) + f_n(h)g_n(x)) \quad (6)$$

является линейным функционалом на X . Непрерывность функционала Tx вытекает из бочечности X и того, что Tx является поточечным пределом последовательности непрерывных линейных функционалов

$$T_n x(h) = \sum_{k=1}^n (f_k(x)g_k(h) + f_k(h)g_k(x)). \quad (7)$$

Следовательно, формула (6) определяет линейный оператор $T: X \rightarrow X'$. В силу условия (ii) последовательность $T_n x$ сходится к Tx в сильной топологии пространства X' для всякого $x \in X$. Стало быть, оператор T непрерывен, так как X бочечно и T является поточечным пределом последовательности непрерывных линейных операторов T_n . Таким образом, функция P дифференцируема по Гато, и отображение $P': X \rightarrow X'$ является непрерывным линейным оператором.

Покажем теперь, что P всюду дифференцируемо по Фреше. Пусть $x \in X$ и $B \subset X$ – ограниченное множество. В силу условия (ii) существует $n = n(B, x) \in \mathbb{N}$, для которого $g_k(h) = 0$ при всех $h \in B \cup \{x\}$. Тогда для всякого $h \in B$ левая часть равенства (5) совпадает с величиной

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_n(x+th) - P_n(x)}{t}, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)g_k(x). \quad (8)$$

Предел в формуле (8), очевидно, равномерен по $h \in B$; поэтому функция P дифференцируема по Фреше.

Пусть $x \in X$. Легко видеть, что $P(x+h) = P(h) + P(x) + Tx(h)$. Поскольку линейный функционал Tx непрерывен, имеем, что непрерывность (разрывность) P в точке x эквивалентна непрерывности (разрывности) P в нуле. Остается проверить разрывность P в нуле. Пусть U – окрестность нуля в X . В силу условия (iii) для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно выбрать элемент $x_n \in U/2$ такой, что $g_m(x_n) = 0$ при

$m \neq n$ и $g_n(x_n) \neq 0$. Согласно условию (3) при $c_n = \max\{|f_n(x)|, 1/|g_n(x_n)|\}$ существуют $y \in X$, для которого $g_n(y) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и бесконечное множество $A \subset \mathbb{N}$ такие, что

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in A}} |f_n(y)g_n(x_n)| = +\infty, \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in A}} \frac{f_n(x_n)}{f_n(y)} = 0. \quad (9)$$

Выберем $c > 0$ такое, что $2cy \in U$. Тогда $h_n = cy + x_n \in (U + U)/2 = U$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Стало быть, при $n > k$ мы имеем

$$P(h_n) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(cy + x_n)g_m(cy + x_n) = (cf_n(y) + f_n(x_n))g_n(x_n).$$

Из формулы (9) следует, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |P_n(h_n)| = \infty$, и, значит, функция P неограничена на любой окрестности нуля. Следовательно, P разрывна в нуле, а значит, и всюду.

Покажем, что класс $\mathcal{X}$ содержит один из известных классов ЛВП.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть X – строгий индуктивный предел строго возрастающей последовательности $\{X_n\}$ ненормируемых пространств Фреше. Тогда $X \in \mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\dim X_{n+1}/X_n \geq n$ для всякого $n \in \mathbb{N}$ (если это не так, то надо от X_n перейти к подходящей подпоследовательности). Построим по индукции последовательности $\{x_n\} \subset X$ и $\{g_n\} \subset X'$ такие, что

$$x_n \in X_{n+1} \setminus X_n, \quad g_n|_{X_n} \equiv 0. \quad (10)$$

Пусть $x_1 \in X_2 \setminus X_1$. Согласно теореме Хана–Банаха существует $g_1 \in X'$ такой, что $g_1(x_1) = 1$ и $g_1|_{X_1} \equiv 0$. Основание индукции построено. Пусть теперь $n \geq 2$ и x_j, g_j , удовлетворяющие условию (10), уже построены. Поскольку $\dim X_{n+1}/X_n \geq n$, мы имеем, что существует $x_n \in X_{n+1} \setminus X_n$ такой, что $g_1(x_n) = \dots = g_{n-1}(x_n) = 0$. По теореме Хана–Банаха существует $g_n \in X'$ такой, что $g_n(x_n) = 1$ и $g_n|_{X_n} \equiv 0$. Шаг индукции описан и тем самым последовательности $\{x_n\} \subset X$ и $\{g_n\} \subset X'$, удовлетворяющие условию (10), построены.

Поскольку X_1 является ненормируемым пространством Фреше, существуют [20], [21] $\varphi_n \in X'_1$ такие, что для любой последовательности $\{c_n\} \in \mathbb{K}$ существует $x \in X$, для которого $\varphi_n(x) = c_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. По теореме Хана–Банаха существуют $f_n \in X'$ такие, что $f_n|_{X_1} = \varphi_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ удовлетворяют условиям (i)–(iii). Пусть $c_n > 0$. Выберем $x \in X_1$, для которого $f_n(x) = \varphi_n(x) = nc_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Значит, $|f_n(x)|/c_n = n \rightarrow \infty$. Поскольку $g_k|_{X_1} \equiv 0$, имеем $g_k(x) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, что доказывает (i). Пусть B – ограниченное множество X . Тогда существует $n \in \mathbb{N}$, для которого $B \subset X_n$ [7], [8]. В силу (10) $g_m|_B \equiv 0$ при $m \geq n$ и условие (ii) проверено. Условие (iii) для определенной выше последовательности $\{x_n\}$ также вытекает из (10).

СЛЕДСТВИЕ 2. Поскольку $\mathcal{D} \in \mathcal{X}$, то на $\mathcal{D}$ существует бесконечно $\mathbb{K}$ -дифференцируемая всюду разрывная функция.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для $X = \mathcal{D}$ функционалы f_n и g_n , удовлетворяющие условиям (i)–(iii), можно указать в явном виде. Например, $f_n(x) = x^{(n)}(0)$ и $g_n(x) = x(n)$.

§ 4. Поточечная сходимость степенных рядов

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть (X, p) – банахово пространство, а (Y, q) – нормированное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\varepsilon > 0$, $a_0 \in Y$, $x_0 \in X$, $\varphi_n \in \mathcal{B}_s^n(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$, все φ_n непрерывны и ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_n(x - x_0) \quad (11)$$

(см. (1)) сходится для каждого $x \in X$ такого, что $p(x - x_0) < \varepsilon$. Тогда существует $\delta > 0$, для которого $p_q^*(\varphi_n) = O(\delta^n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если пространство X конечномерно, то существует оценка сверху для δ из предложения 2, которая зависит лишь от ε и размерности X . К сожалению, эта оценка стремится к бесконечности с ростом размерности. Тем самым предложение 2 нельзя вывести из его конечномерного аналога.

Для доказательства предложения 2 нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть X и Y – векторные пространства над полем $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{B}_s^n(X, Y)$, p и q – полунормы на X и Y соответственно такие, что $p_q^*(\varphi) < +\infty$. Тогда существует $y \in X$, для которого $p(y) = 1$ и $q(\widehat{\varphi}(y)) \geq p_q^*(\varphi)6^{-n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $x_1, \dots, x_n \in X$ такие, что

$$p(x_j) \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad q(\varphi(x_1, \dots, x_n)) \geq 0.9p_q^*(\varphi). \quad (12)$$

Положим $N_n = \{1, \dots, n\}$ и $\Sigma(x, A) = \sum_{j \in A} x_j$ для $A \subseteq N_n$. Через $|A|$ будем обозначать число элементов множества A . Нетрудно проверить, что

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{A \subseteq N_n} (-1)^{|A|+n} \widehat{\varphi}(\Sigma(x, A)). \quad (13)$$

В силу (12) и (13) существует $A \subseteq N_n$ такое, что

$$q(\widehat{\varphi}(\Sigma(x, A))) \geq 0.9n! p_q^*(\varphi) 2^{-n}.$$

Поскольку $p(\Sigma(x, A)) \leq |A| \leq n$ при $y = \Sigma(x, A)/p(\Sigma(x, A))$, мы имеем

$$q(\widehat{\varphi}(y)) \geq \frac{9n! p_q^*(\varphi)}{10 \cdot (2n)^n} \geq \frac{9(n/e)^n p_q^*(\varphi)}{10 \cdot (2n)^n} = \frac{9p_q^*(\varphi)}{10 \cdot (2e)^n} \geq \frac{p_q^*(\varphi)}{6^n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$, $a_0 = 0$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и $\varepsilon = 1$. Предположим, что искомое δ не существует. Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (p_q^*(\varphi_n))^{1/n} = +\infty. \quad (14)$$

Пусть $n_0 = 0$ и $x_0 = 0$. Построим по индукции последовательности $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ и $\{x_k\} \subset X$ такие, что

$$n_k > n_{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

$$p(x_k) < 1/2 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (16)$$

$$p(x_k - x_{k-1}) < 2^{-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

$$q(\widehat{\varphi}_{n_j}(x_k)) > 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (18)$$

В силу леммы 1 и формулы (14) существуют $x_1 \in X$ и $n_1 \in \mathbb{N}$ такие, что $p(x_1) < 1/2$ и $q(\widehat{\varphi}_{n_1}(x_1)) > 1$. Основание индукции построено. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, и n_k, x_k при $k < m$, удовлетворяющие условиям (15)–(18), уже построены. Поскольку отображение $\widehat{\varphi}_l$ непрерывно, существует $\nu \in (0, 2^{-m})$ такое, что

$$\begin{aligned} p(x) < \frac{1}{2}, \quad q(\widehat{\varphi}_{n_j}(x)) > 1, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \\ x \in X, \quad p(x - x_{m-1}) < \nu. \end{aligned} \quad (19)$$

В силу леммы 1 и формулы (14) существуют $y \in X$ и $n_m \in \mathbb{N}$ такие, что $n_m > n_{m-1}$, $p(y) < \nu$ и $q(\widehat{\varphi}_{n_m}(y)) > 2^{n_m}$. По теореме Хана–Банаха существует $\psi \in Y'$, для которого

$$\|\psi\| = \sup\{|\psi(y)| : q(y) \leq 1\} = \frac{1}{q(\widehat{\varphi}_{n_m}(y))}, \quad \psi(\widehat{\varphi}_{n_m}(y)) = 1.$$

Пусть $\mathcal{P}$ – множество всех полиномов вида

$$h(s) = s^{n_m} + \sum_{l=0}^{n_m-1} \alpha_l s^l, \quad \alpha_l \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, полином $r(s) = \psi(\widehat{\varphi}_{n_m}(x_{m-1} + sy))$ принадлежит $\mathcal{P}$. Значит,

$$\sup_{s \in [-1, 1]} |r(s)| \geq \inf_{h \in \mathcal{P}} \sup_{s \in [-1, 1]} |h(s)|. \quad (20)$$

Величина $\sup_{s \in [-1, 1]} |h(s)|$ в формуле (20) минимальна (и при этом равна 2^{1-n_m}) для полинома $q = 2^{1-n_m} T_{n_m}(s)$, где $T_k(t) = \cos(k \arccos t)$ – полиномы Чебышева [13]. Значит, в силу (20) существует $s \in [-1, 1]$, для которого выполнено неравенство $\psi(\widehat{\varphi}_{n_m}(x_{m-1} + sy)) \geq 2^{1-n_m}$. Пусть $x_m = x_{m-1} + sy$. Тогда

$$q(\widehat{\varphi}_{n_m}(x_m)) \geq \frac{2^{1-n_m}}{\|\psi\|} = 2^{1-n_m} q(\widehat{\varphi}_{n_m}(y)) > 1.$$

Выполнение всех прочих условий из (15)–(18) для x_m вытекает из (19) и неравенств $p(y) < \nu < 2^{-m}$. Последовательности $\{x_m\}$ и $\{n_m\}$ построены.

В силу соотношения (17) $\{x_k\}$ является последовательностью Коши в X . Следовательно, предел $w = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in X$ существует. Переходя к пределу в (18), получаем, что $q(\hat{\varphi}_{n_j}(w)) \geq 1$ для всякого $j \in \mathbb{N}$. Значит, ряд (11) расходится для $x = w$. С другой стороны, условие (16) влечет неравенство $p(w) \leq 1/2$. Поскольку $\varepsilon = 1$, ряд (11) сходится при $x = w$. Полученное противоречие завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из предложения 2 следует, что степенной ряд со значениями в нормированном пространстве, поточечно сходящийся в некотором шаре банахова пространства, сходится равномерно в меньшем шаре. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что функция со значениями в нормированном пространстве, определенная степенным рядом, поточечно сходящимся в некотором шаре банахова пространства, аналитична в этом шаре в обычном смысле [11], [12].

§ 5. Непрерывность комплексно дифференцируемых по Гато функций

Пусть X – комплексное ЛВП и U – открытое множество X . Согласно классической теореме об аналитичности голоморфной функции [17] для всякой комплексно дифференцируемой по Гато функции $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ и любого $x \in U$ существуют окрестность V_x точки x и последовательность $\{\varphi_n^x\} \subset \mathcal{B}_s^n(X)$ (по определению дифференцируемости по Гато линейный функционал $\varphi_1^x = f'(x)$ непрерывен, но остальные φ_n^x могут быть, вообще говоря, разрывными) такие, что ряд

$$f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}_n^x(y - x) \quad (21)$$

сходится к $f(y)$ для всякого $y \in V_x$. Отметим, что функционалы φ_n^x из (21) однозначно определяются по f и x , а в качестве V_x можно взять любое открытое множество такое, что $V_x \subset U$ и множество $V_x - x$ выпукло и уравновешено.

Если $x \in U$, $h \in X$ и $y \in V_x$, то, поскольку сходящийся ряд Тейлора функции двух комплексных переменных можно почленно дифференцировать (мы говорим здесь о сужении функции f и ряда (21) на пересечение V_x с аффинным подпространством, натянутым на векторы x , y и h), мы имеем

$$f'(y)(h) = D_h f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} n \varphi_n^x(h, y - x, \dots, y - x). \quad (22)$$

ЛЕММА 2. Пусть X – комплексное бочечное пространство, U – открытое подмножество X и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ – комплексно дифференцируемая по Гато функция. Тогда функционалы φ_n^x из формулы (21) раздельно непрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $0 \in U$, $x = 0$ и $f(0) = 0$. Очевидно, $f'(0) = \varphi_1^0$, и, значит, линейный функционал φ_1^0 непрерывен. Мы докажем раздельную непрерывность φ_n^0 для $n = 2, 3, \dots$ по индукции. Пусть $n \geq 2$ и функционалы $\varphi_1^0, \dots, \varphi_{n-1}^0$ раздельно непрерывны. Пусть $y \in U$

и $h \in X$. В силу формулы (22), предположения индукции и дифференцируемости f по Гато мы имеем, что линейное отображение

$$\psi_y(h) = f'(y)(h) - \sum_{k=1}^{n-1} k\varphi_k^0(h, y, \dots, y) = \sum_{k=n}^{\infty} k\varphi_k^0(h, y, \dots, y)$$

непрерывно по h . Поскольку поточечный предел последовательности непрерывных линейных операторов, определенных на бочечном ЛВП, является непрерывным линейным оператором, мы получаем, что функционал

$$\eta_y(h) = \varphi_n^0(y, \dots, y, h) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-n} \psi_{ty}(h)$$

непрерывен для всякого $y \in X$. Поскольку

$$\varphi_n^0(h, u_1, \dots, u_{n-1}) = \sum_{A \subseteq N_{n-1}} (-1)^{n-1-|A|} \eta_{\Sigma(u, A)}(h), \quad (23)$$

где $\Sigma(u, A) = \sum_{j \in A} u_j$, мы имеем, что функционалы $h \mapsto \varphi_n^0(u_1, \dots, u_{n-1}, h)$ также являются непрерывными. Так как полилинейный функционал φ_n^0 симметричен и непрерывен по последней переменной, мы получаем, что φ_n^0 раздельно непрерывен.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть U – открытое подмножество комплексного банахова пространства X и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ – комплексно дифференцируемая по Гато функция. Тогда функция f бесконечно дифференцируема по Фреше. В частности, f и все ее производные $f^{(n)}$ непрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in U$. По лемме 2 полилинейные функционалы φ_n^x из формулы (21) раздельно непрерывны для всякого $n \in \mathbb{N}$. По теореме Банаха–Штейнгауза [7], [8] φ_n^x непрерывны. В силу предложения 2 существует выпуклая уравновешенная окрестность нуля B в X такая, что ряд (21) равномерно сходится на множестве $x + B$. Аналогичное утверждение справедливо для рядов из n -х производных членов ряда (21). Следовательно, функция f бесконечно дифференцируема по Гато, непрерывна и имеет непрерывные производные всех порядков, что влечет её бесконечную дифференцируемость по Фреше [6].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $X \in \mathcal{Y}$, U – открытое подмножество X и функция $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ комплексно дифференцируема по Гато. Тогда f непрерывна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что f разрывна. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что f разрывна в точке $0 \in U$, множество U выпукло и уравновешено и $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$. Поскольку U выпукло и уравновешено, ряды (21) и (22) сходятся для всех $y \in U$. В силу условия (а) существует банахов диск $D \subset X$ с линейной оболочкой X_D , плотной в X . Согласно условию (б) X является строгим проективным пределом последовательности $\{X_n\}$ секвенциальных ЛВП

относительно отображений $\pi_n: X \rightarrow X_n$, $\rho_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$. Нам потребуются также сопряженные операторы $\pi'_n: X'_n \rightarrow X'$. Пусть

$$A_n = \{u \in X_D \cap U: f'(u) \in \pi'_n(X'_n)\}.$$

Поскольку $X_D \cap U = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, в силу теоремы Бэра [19] существуют непустое открытое в банаховом пространстве X_D множество $W \subset X_D \cap U$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $A_n \cap W$ плотно в W в топологии X_D . Так как топология X_D сильнее индуцированной из X , сужение $f_1 = f|_{X_D \cap U}: X_D \cap U \rightarrow \mathbb{C}$ является комплексно дифференцируемым по Гато. Положим $Y_n = \ker \pi_n$. Тогда для всех $y \in Y_n$ и $u \in A_n \cap W$ имеем $D_y f(u) = f'_1(u)(y) = 0$. По следствию 3 отображение f'_1 непрерывно. Поскольку множество $A_n \cap W$ плотно в W , то $f'_1(u)(y) = D_y f(u) = 0$ для всех $y \in Y_n$ и $u \in W$. Из обычной теоремы единственности, примененной ко всем сужениям $f'_1(\cdot)(y)$ на пересечения одномерных аффинных подпространств X_D с множеством W , вытекает, что $f'_1(u)(y) = D_y f(u) = 0$ для всех $y \in Y_n$ и $u \in U \cap X_D$. В силу (22) получаем

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \varphi_n^0(y, u, \dots, u) = 0 \quad (24)$$

для любых $y \in Y_n$ и $u \in U \cap X_D$.

Рассматривая равенство (24) для u из одномерных аффинных подпространств X_D и снова применяя теорему единственности, имеем, что $\varphi_n^0(y, u, \dots, u) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $y \in Y_n$ и $u \in X_D$. В силу формулы (23) получаем, что $\varphi_n^0(y, u_1, \dots, u_{n-1}) = 0$ для всех $n \geq 2$, $y \in Y_n$ и $u_1, \dots, u_{n-1} \in X_D$. Поскольку X бочечно, из леммы 2 вытекает раздельная непрерывность φ_n^0 . Так как X_D плотно в X , то $\varphi_n^0(y, u_1, \dots, u_{n-1}) = 0$ для всех $n \geq 2$, $y \in Y_n$ и $u_1, \dots, u_{n-1} \in X'$. В силу соотношения (22) $D_y f(u) = 0$ для всех $y \in Y_n$ и $u \in U$. Стало быть,

$$f(u) = f(u + y), \quad u, u + y \in U, \quad y \in Y_n. \quad (25)$$

Формула (25) означает, что $g \circ T = f$ для некоторого отображения $g: V \rightarrow \mathbb{C}$, где $V = \pi_n(U) \subset X_n$. Легко видеть, что g дифференцируема по Гато и разрывна в нуле (иначе f непрерывна в нуле как композиция непрерывных отображений π_n и g). Так как пространство X_n ($\in \mathcal{Y}_0$) секвенциально, существуют $x_k \in X_n$, $k \in \mathbb{N}$, для которых $x_k \rightarrow 0$ и $g(x_k) \not\rightarrow 0$. В силу определения $\mathcal{Y}_0$ существует банахов диск $B \subset X_n$ такой, то $p(x_k) \rightarrow 0$, где p – функционал Минковского множества B . Поскольку топология банахова пространства $Z = (X_n)_B$ сильнее топологии, индуцированной из X , сужение $g|_{Z \cap U}: Z \cap U \rightarrow \mathbb{C}$ комплексно дифференцируемо по Гато. В силу следствия 3 это сужение непрерывно, что противоречит соотношениям $p(x_n) \rightarrow 0$ и $g(x_n) \not\rightarrow 0$.

Следующее предложение показывает, что класс $\mathcal{Y}$ также содержит один из известных классов ЛВП.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть X – строгий проективный предел последовательности X_n пространств класса $\mathcal{DFS}$. Тогда $X \in \mathcal{Y}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку всякое пространство класса $\mathcal{DFS}$ является пространством Шварца–Монтеля [15], [16] (т. е. всякое ограниченное множество является относительно компактным в некотором банаховом пространстве, порожденном компактным диском), мы имеем, что всякое пространство класса $\mathcal{DFS}$ принадлежит $\mathcal{U}_0$ и является секвенциальным, что гарантирует выполнение условия (б) для X . Бочечность X вытекает из бочечности пространств класса $\mathcal{DFS}$ и сохранения бочечности при строгих проективных пределах. В каждом X_n (как и в любом пространстве класса $\mathcal{DFS}$) можно выбрать компактный диск K_n с плотной линейной оболочкой. Нетрудно проверить, что существует последовательность положительных чисел c_n , для которой множество $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} c_n K_n$ компактно в X . Замыкание D выпуклой уравновешенной оболочки множества M будет компактным, а значит, банаховым диском [21] в X с плотной линейной оболочкой, что доказывает выполнение условия (а).

СЛЕДСТВИЕ 4. *Комплексное пространство $\mathcal{D}'$ принадлежит $\mathcal{U}$, и, значит, всякая комплексно дифференцируемая по Гато функция на $\mathcal{D}'$ непрерывна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить предложение 3 и теорему 2, поскольку $\mathcal{D}'$ является строгим проективным пределом последовательности пространств $\mathcal{D}'_n$, являющихся сильными сопряженными к ядерным пространствам Фреше [15], [18] (тем самым $\mathcal{D}'_n \in \mathcal{DFS}$).

Следует отметить, что пространства класса $\mathcal{U}$ не обязаны быть секвенциальными. Например, $\mathcal{D}'$ не является секвенциальным [2]. Отметим в заключение, что остается открытой проблема характеристики в независимых терминах класса комплексных ЛВП, на которых всякая определенная на открытом подмножестве дифференцируемая по Гато функция непрерывна.

Список литературы

1. Авербух В. И., Смолянов О. Г. Различные определения дифференцируемости в линейных топологических пространствах // УМН. 1968. Т. 23. № 4. С. 67–116.
2. Smolyanov O. G. Non-closed sequentially closed subsets of locally convex spaces and applications // Note di Math. 1992. V. 12. P. 237–244.
3. Шкарин С. А. Точки непрерывности дифференцируемых по Гато отображений // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. С. 905–913.
4. Смолянова М. О. Бесконечно дифференцируемые разрывные функции на пространстве $\mathcal{D}'$ // Вестн. МГУ. Сер. 1. 1993. № 4. С. 46–48.
5. Смолянова М. О. Непрерывно дифференцируемая разрывная функция на пространстве $\mathcal{D}$ // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 5. С. 1077–1082.
6. Смолянов О. Г. Анализ на топологических векторных пространствах и его приложения. М.: Изд-во МГУ, 1979.
7. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
8. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
9. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
10. Bonet J., Carreras P. Barrelled locally convex spaces. Amsterdam: North-Holland, 1987.
11. Mujica J. Complex analysis in Banach spaces. Amsterdam: North-Holland, 1986.
12. Dineen S. Complex analysis of infinite dimensional spaces. London: Springer, 1999.
13. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

14. *Köthe G.* Topological vector spaces. I. N. Y.: Springer, 1969.
15. *Köthe G.* Topological vector spaces. II. N. Y.: Springer, 1979.
16. *Grothendieck A.* Sur les espaces (F) et (DF) // Summa Brasil Math. 1954. V. 3. P. 57–123.
17. *Тумчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980.
18. *Vogt D.* Sequence space representations of the spaces of test functions and distributions // Lectures in pure and applied mathematics / Ed. G.I. Zapata. V. 83. N.Y.: Marcel Dekker, 1983.
19. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
20. *Eidelheit. M.* Zur Theorie der System linearer Gleichungen // Studia Math. 1936. V. 6. P. 139–148.
21. *Bonet J., Carreras P.* Barrelled locally convex spaces // North-Holland Mathematics Studies. V. 131. Amsterdam: North-Holland, 1987.

МГУ им. М.В. Ломоносова
E-mail: smolyanov@yandex.ru
sshkarin@hotmail.com

Поступило в редакцию
14.11.2003