Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Кудрявцев, Теорема типа Литтлвуда–Пэли и следствие из нее, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 6, 97–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/im5184>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 05:43:49

УДК 517.5

С. Н. Кудрявцев

Теорема типа Литтлвуда–Пэли и следствие из нее

Доказано утверждение, представляющее собой аналог теоремы Литтлвуда–Пэли для ортопроекторов на взаимно ортогональные подпространства кусочно полиномиальных функций на кубе I^d . При использовании этого утверждения установлена оценка сверху нормы функций в $L_p(I^d)$ через соответствующие нормы проекций на подпространства кусочно полиномиальных функций нескольких переменных. С помощью этих соотношений получены оценки сверху колмогоровских поперечников классов Бесова (непериодических) функций, удовлетворяющих смешанному условию Гёльдера.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: ортопроектор, взаимно ортогональные подпространства, кусочно полиномиальные функции, теорема Литтлвуда–Пэли, поперечник.

Введение

Как известно (см., например, [1], [2]), важное значение для вывода порядковых оценок точности приближения в L_p основанными на применении кратных тригонометрических рядов способами классов периодических функций нескольких переменных с условиями, налагаемыми на смешанные производные (разности), имеют теорема Литтлвуда–Пэли для кратных рядов Фурье и следствия из нее (см., например, работы [3, п. 1.5.2], [4] и цитируемую в них литературу). Для получения соответствующих оценок точности приближения классов (непериодических) функций, заданных на кубе I^d и подчиненных условиям на смешанные разности, полезно иметь аналоги этих результатов для средств приближения таких классов непериодических функций. С этой целью в настоящей работе доказан аналог теоремы Литтлвуда–Пэли для семейств ортопроекторов $\{\mathcal{E}_\kappa^{d,1}, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$, $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_+^d$ (см. п. 2.2), на взаимно ортогональные подпространства кусочно полиномиальных функций на кубе I^d , построенных в [5] (см. также ниже п. 1.4), а именно показано, что при $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_+^d$, $1 < p < \infty$ для любой функции $f \in L_p(I^d)$ выполняются неравенства

$$c_1 \|f\|_{L_p(I^d)} \leq \left(\int_{I^d} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,1} f)(\mathbf{x}))^2 \right)^{p/2} d\mathbf{x} \right)^{1/p} \leq c_2 \|f\|_{L_p(I^d)} \quad (0.1)$$

с некоторыми константами $c_1, c_2 > 0$, зависящими от $d, \mathbf{l}, p$.

© С. Н. Кудрявцев, 2013

Согласно (0.1) установлена оценка сверху нормы функции f в $L_p(I^d)$ через соответствующие нормы проекций $\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, на подпространства кусочно полиномиальных функций:

$$\|f\|_{L_p(I^d)} \leq c_3 \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f\|_{L_p(I^d)}^{p^*} \right)^{1/p^*} \quad (0.2)$$

(ср. с аналогом для операторов взятия частных сумм ряда Фурье в [2]), где $p^* = \min(2, p)$. В качестве иллюстрации применения (0.2) получена оценка сверху колмогоровского n -поперечника в $L_q(I^d)$ множества $\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ – единичного шара относительно полунормы, определяющей пространство Бесова функций на кубе I^d , удовлетворяющих смешанным условиям Гёльдера (см. далее п. 3.1). Эта оценка при некоторых условиях для $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ имеет вид

$$d_n(\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d), L_q(I^d)) \leq c_4 n^{-m(\alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ \epsilon)} (\log n)^{(m(\alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ \epsilon) + (1/q - 1/\theta)_+)(c-1)}, \quad (0.3)$$

где $m(\mathbf{x}) = \min_{j=1,\dots,d} x_j$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $c = \text{card}\{j = 1, \dots, d: \alpha_j = m(\alpha)\}$, $\epsilon = (1, \dots, 1)$, $q = \min(2, \max(p, q))$. Порядковая оценка (0.3) при $q \geq 2$ точна (см. (3.27)). Для сравнения (0.3) с соответствующим неравенством в случае периодических функций см. [2].

Настоящая работа состоит из введения и трех параграфов. В § 1 приведены предварительные сведения об ортопроекторах на подпространства кусочно полиномиальных функций и кратных рядах, рассматриваемых в работе. В § 2, п. 2.2, на основании сведений из § 1 и п. 2.1 устанавливается справедливость (0.1) и выводится (0.2). В § 3 с применением (0.2) доказывается оценка (0.3) (см. п. 3.3). Отметим, что некоторые малозначимые или объемные фрагменты доказательств подверглись сокращению, но при необходимости их можно восстановить, обратившись к предварительной версии статьи (см. [6]). Чтобы избежать недоразумений в дальнейшем, отметим также, что для обозначения констант, как правило, будет использоваться буква c с некоторым номером. Причем нумерация констант будет производиться внутри каждого пункта статьи отдельно, т. е. не зависимо от других пунктов. Теперь перейдем к точным формулировкам и доказательствам.

§ 1. Операторы проектирования на подпространства кусочно полиномиальных функций

1.1. Здесь введем обозначения, используемые далее в настоящей работе.

Для $d \in \mathbb{N}$ через $\mathbb{Z}_+^d$ обозначим множество

$$\mathbb{Z}_+^d = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{Z}^d: \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, d\}.$$

Обозначим также при $d \in \mathbb{N}$ для $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_+^d$ через $\mathbb{Z}_+^d(\mathbf{l})$ множество

$$\mathbb{Z}_+^d(\mathbf{l}) = \{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d: \lambda_j \leq l_j, j = 1, \dots, d\}.$$

Для $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_+^d$ через $\mathcal{P}^{d,1}$ обозначим пространство вещественных полиномов, состоящее из всех функций $f: \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ вида

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{l})} a_\lambda \mathbf{x}^\lambda, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

где $a_\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_d^{\lambda_d}$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{l})$.

При $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_+^d$ для области $D \subset \mathbb{R}^d$ через $\mathcal{P}^{d,1}(D)$ обозначим пространство функций f , определенных в D , для каждой из которых существует полином $g \in \mathcal{P}^{d,1}$ такой, что сужение $g|_D$ равно f .

При $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ через l_p^n обозначим пространство $\mathbb{R}^n$ с фиксированной в нем нормой

$$\|\mathbf{x}\|_{l_p^n} = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} & \text{при } p < \infty, \\ \max_{j=1, \dots, n} |x_j| & \text{при } p = \infty, \end{cases} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Для измеримого по Лебегу множества $D \subset \mathbb{R}^d$ при $1 \leq p \leq \infty$ через $L_p(D)$, как обычно, обозначается пространство всех вещественных измеримых на D функций f , для которых определена норма

$$\|f\|_{L_p(D)} = \begin{cases} \left(\int_D |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{\mathbf{x} \in D} |f(\mathbf{x})|, & p = \infty. \end{cases}$$

Введем, кроме того, следующие обозначения.

Для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ положим $\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1 y_1, \dots, x_d y_d)$, а для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ и $A \subset \mathbb{R}^d$ определим

$$\mathbf{x}A = \mathbf{x} \cdot A = \{\mathbf{x}\mathbf{y} : \mathbf{y} \in A\}.$$

Для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ таких, что $x_j \neq 0$ при $j = 1, \dots, d$, положим $\mathbf{x}^{-1} = (x_1^{-1}, \dots, x_d^{-1})$.

При $d \in \mathbb{N}$ для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ будем обозначать

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^d x_j y_j.$$

Обозначим через $\mathbb{R}_+^d$ множество тех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, для которых $x_j > 0$ при $j = 1, \dots, d$, и для $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ положим $\mathbf{a}^{\mathbf{x}} = a_1^{x_1} \cdots a_d^{x_d}$.

При $d \in \mathbb{N}$ определим множества

$$\begin{aligned} I^d &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d: 0 < x_j < 1, j = 1, \dots, d\}, \\ \bar{I}^d &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d: 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, d\}, \\ B^d &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d: -1 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, d\}. \end{aligned}$$

Через $\mathbf{e}$ обозначим вектор в $\mathbb{R}^d$, задаваемый равенством $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)$.

Далее, напомним, что для области $D \subset \mathbb{R}^d$ и вектора $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ через $D_{\mathbf{h}}$ обозначается множество

$$D_{\mathbf{h}} = \{\mathbf{x} \in D : \mathbf{x} + t\mathbf{h} \in D \forall t \in \bar{I}\}.$$

Для функции f , заданной в области $D \subset \mathbb{R}^d$, и вектора $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ определим в $D_{\mathbf{h}}$ ее разность $\Delta_{\mathbf{h}}f$ с шагом $\mathbf{h}$, полагая

$$(\Delta_{\mathbf{h}}f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D_{\mathbf{h}},$$

а для $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$, в $D_{l\mathbf{h}}$ определим l -ю разность $\Delta_{\mathbf{h}}^l f$ функции f с шагом $\mathbf{h}$ равенством

$$(\Delta_{\mathbf{h}}^l f)(\mathbf{x}) = (\Delta_{\mathbf{h}}(\Delta_{\mathbf{h}}^{l-1} f))(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D_{l\mathbf{h}},$$

положим также $\Delta_{\mathbf{h}}^0 f = f$.

При $d \in \mathbb{N}$ для $j = 1, \dots, d$ через $\mathbf{e}_j$ будем обозначать вектор $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 0, 1_j, 0, \dots, 0)$. При $d \in \mathbb{N}$ для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ через $s(\mathbf{x})$ обозначим множество $s(\mathbf{x}) = \{j = 1, \dots, d : x_j \neq 0\}$, а для множества $J \subset \{1, \dots, d\}$ через χ_J обозначим вектор из $\mathbb{R}^d$ с компонентами

$$(\chi_J)_j = \begin{cases} 1 & \text{для } j \in J, \\ 0 & \text{для } j \in (\{1, \dots, d\} \setminus J). \end{cases}$$

При $d \in \mathbb{N}$ для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ и $J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \mathbb{N}$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq d$, через $\mathbf{x}^J$ обозначим вектор $\mathbf{x}^J = (x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) \in \mathbb{R}^k$, а для множества $A \subset \mathbb{R}^d$ положим $A^J = \{\mathbf{x}^J : \mathbf{x} \in A\}$.

В заключение этого пункта введем еще несколько обозначений.

Для банахова пространства X (над $\mathbb{R}$) обозначим $B(X) = \{\mathbf{x} \in X : \|\mathbf{x}\|_X \leq 1\}$. Для банаховых пространств X, Y через $\mathcal{B}(X, Y)$ обозначим банахово пространство, состоящее из непрерывных линейных операторов $T : X \mapsto Y$ с нормой

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \sup_{\mathbf{x} \in B(X)} \|T\mathbf{x}\|_Y.$$

Отметим, что если $X = Y$, то $\mathcal{B}(X, Y)$ является банаховой алгеброй, а при $Y = \mathbb{R}$ пространство $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ обозначается, кроме того, через X^* .

1.2. Здесь содержатся сведения о кратных рядах, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Для $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\mathbf{m}(\mathbf{y}) = \min_{j=1, \dots, d} y_j.$$

Для банахова пространства X , вектора $\mathbf{x} \in X$ и семейства $\{\mathbf{x}_{\kappa} \in X, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ будем записывать $\mathbf{x} = \lim_{\mathbf{m}(\kappa) \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{\kappa}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, для которого $\mathbf{m}(\kappa) > n_0$, справедливо неравенство $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\kappa}\|_X < \varepsilon$.

Пусть X – банахово пространство (над $\mathbb{R}$), $d \in \mathbb{N}$ и $\{\mathbf{x}_\kappa \in X, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ – семейство векторов. Тогда под суммой ряда $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \mathbf{x}_\kappa$ будем понимать вектор $\mathbf{x} \in X$, для которого выполняется равенство $\mathbf{x} = \lim_{\mathbf{m}(\mathbf{k}) \rightarrow \infty} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \mathbf{x}_\kappa$.

При $d \in \mathbb{N}$ через Υ^d обозначим множество

$$\Upsilon^d = \{\varepsilon \in \mathbb{Z}^d: \varepsilon_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, d\}.$$

Имеет место

ЛЕММА 1.1. Пусть X – банахово пространство, а вектор $\mathbf{x} \in X$ и семейство $\{\mathbf{x}_\kappa \in X: \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ таковы, что $\mathbf{x} = \lim_{\mathbf{m}(\kappa) \rightarrow \infty} \mathbf{x}_\kappa$. Тогда для семейства $\{\mathcal{X}_\kappa \in X: \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$, определяемого равенством

$$\mathcal{X}_\kappa = \sum_{\varepsilon \in \Upsilon^d: s(\varepsilon) \subset s(\kappa)} (-\varepsilon)^\varepsilon \mathbf{x}_{\kappa - \varepsilon}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}_+^d,$$

справедливо равенство

$$\mathbf{x} = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \mathcal{X}_\kappa.$$

Лемма 1.1 является следствием того, что при $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$ выполняется равенство (см. [5])

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \mathcal{X}_\kappa = \mathbf{x}_\mathbf{k}. \quad (1.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Для любого семейства чисел $\{x_\kappa \in \mathbb{R}: x_\kappa \geq 0, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ если ряд $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} x_\kappa$ сходится, т. е. существует предел $\lim_{\mathbf{m}(\mathbf{k}) \rightarrow \infty} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} x_\kappa$, то для любой последовательности подмножеств $\{Z_n \subset \mathbb{Z}_+^d, n \in \mathbb{Z}_+\}$ таких, что $\text{card } Z_n < \infty$, $Z_n \subset Z_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} Z_n = \mathbb{Z}_+^d$, справедливо равенство $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} x_\kappa = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa \in Z_n} x_\kappa$. Отсюда несложно понять, что если для семейства векторов $\{\mathbf{x}_\kappa \in X, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ банахова пространства X ряд $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathbf{x}_\kappa\|_X$ сходится, то для любой последовательности подмножеств $\{Z_n \subset \mathbb{Z}_+^d, n \in \mathbb{Z}_+\}$ таких, что $\text{card } Z_n < \infty$, $Z_n \subset Z_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} Z_n = \mathbb{Z}_+^d$, в X соблюдается равенство $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \mathbf{x}_\kappa = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa \in Z_n} \mathbf{x}_\kappa$.

При $d \in \mathbb{N}$ для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ обозначим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\mathbf{x}) &= \max_{j=1, \dots, d} x_j, \\ \mathfrak{C}(\mathbf{x}) &= \text{card}\{j \in \{1, \dots, d\}: x_j = \mathfrak{M}(\mathbf{x})\}, \\ \mathfrak{c}(\mathbf{x}) &= \text{card}\{j \in \{1, \dots, d\}: x_j = \mathfrak{m}(\mathbf{x})\}. \end{aligned}$$

Следующие три леммы используются в § 3 при оценке точности приближений на основе рассмотренных в том же параграфе кратных рядов.

ЛЕММА 1.3. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}_+^d$, $\alpha \in \mathbb{R}^d$ и $\mathfrak{M}(\beta^{-1}\alpha) > 0$. Тогда существуют константы $c_1(d, \alpha, \beta) > 0$ и $c_2(d, \alpha, \beta) > 0$ такие, что для $r \in \mathbb{N}$

выполнено

$$c_1 2^{\mathfrak{M}(\beta^{-1}\alpha)r} r^{\mathfrak{C}(\beta^{-1}\alpha)-1} \leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) \leq r} 2^{(\kappa, \alpha)} \leq c_2 2^{\mathfrak{M}(\beta^{-1}\alpha)r} r^{\mathfrak{C}(\beta^{-1}\alpha)-1}. \quad (1.2)$$

ЛЕММА 1.4. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^d$. Тогда существуют константы $c_3(d, \alpha, \beta) > 0$ и $c_4(d, \alpha, \beta) > 0$ такие, что при $r \in \mathbb{N}$ справедливо двойное неравенство

$$c_3 2^{-\mathfrak{m}(\beta^{-1}\alpha)r} r^{\mathfrak{C}(\beta^{-1}\alpha)-1} \leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} 2^{-(\kappa, \alpha)} \leq c_4 2^{-\mathfrak{m}(\beta^{-1}\alpha)r} r^{\mathfrak{C}(\beta^{-1}\alpha)-1}. \quad (1.3)$$

Доказательства лемм 1.3, 1.4 приведены в [7].

ЛЕММА 1.5. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}_+^d$, $\varepsilon > 0$, $\tau \geq 0$, и пусть $J \subset \{1, \dots, d\}$ – непустое подмножество, $J' = \{1, \dots, d\} \setminus J$ и $\mathfrak{c} = \text{card } J$. Тогда существует константа $c_5(d, \beta, \varepsilon, \tau, J) > 0$ такая, что для любого $s \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: s-1 < (\kappa, \beta) \leq s} 2^{-\varepsilon(\kappa^{J'}, \beta^{J'})} (1 + (\kappa^{J'}, \beta^{J'}))^{\tau} \leq c_5 s^{\mathfrak{c}-1}. \quad (1.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость леммы несложно проверить, используя неравенство (см. [6])

$$\text{card}\{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r-1 \leq (\kappa, \alpha) \leq r+1\} \leq c_6(d, \alpha)(r+1)^{d-1},$$

$$\alpha \in \mathbb{R}_+^d, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad d \in \mathbb{N}.$$

1.3. В этом пункте приведем некоторые вспомогательные утверждения, которые используются в следующем пункте и далее.

Как показано в [8], [9], справедлива

ЛЕММА 1.6. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Тогда:

1) при $j = 1, \dots, d$ для любого непрерывного линейного оператора $T: L_p(I) \mapsto L_p(I)$ существует единственный непрерывный линейный оператор $\mathcal{T}^j: L_p(I^d) \mapsto L_p(I^d)$, для которого при любой функции $f \in L_p(I^d)$ почти при всех $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d) \in I^{d-1}$ в $L_p(I)$ выполняется равенство

$$(\mathcal{T}^j f)(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d) = (T(f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d))) (\cdot); \quad (1.5)$$

2) для каждого $j = 1, \dots, d$ отображение $V_j^{L_p}$, которое каждому оператору $T \in \mathcal{B}(L_p(I), L_p(I))$ ставит в соответствие оператор $V_j^{L_p}(T) = \mathcal{T}^j \in \mathcal{B}(L_p(I^d), L_p(I^d))$, удовлетворяющий (1.5), является непрерывным гомоморфизмом банаховой алгебры $\mathcal{B}(L_p(I), L_p(I))$ в банахову алгебру $\mathcal{B}(L_p(I^d), L_p(I^d))$;

3) для любых операторов $S, T \in \mathcal{B}(L_p(I), L_p(I))$ при любых $i, j = 1, \dots, d$, $i \neq j$, соблюдается равенство

$$(V_i^{L_p}(S)V_j^{L_p}(T))f = (V_j^{L_p}(T)V_i^{L_p}(S))f, \quad f \in L_p(I^d). \quad (1.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. Если при $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq q < \infty$ оператор T принадлежит $\mathcal{B}(L_p(I), L_p(I)) \cap \mathcal{B}(L_q(I), L_q(I))$, то при $j = 1, \dots, d$ для $f \in L_q(I^d)$ справедливо равенство $(V_j^{L_p} T)f = (V_j^{L_q} T)f$. Поэтому индексы L_p, L_q в записи V_j можно не выписывать.

1.4. Здесь будут построены семейства операторов проектирования на подпространства кусочно полиномиальных функций и описаны их свойства, которые используются в п. 2.2 при доказательстве основных результатов работы и п. 3.3 при применении этих результатов.

Отметим, что справедливость всех утверждений, приведенных в настоящем пункте без доказательства, установлена в [5].

Для $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ будем записывать $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ ($\mathbf{x} < \mathbf{y}$), если для каждого $j = 1, \dots, d$ выполняется неравенство $x_j \leq y_j$ ($x_j < y_j$).

Для $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$, обозначим

$$\mathcal{N}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}^d = \{\nu \in \mathbb{Z}^d: \mathbf{m} \leq \nu \leq \mathbf{n}\} = \prod_{j=1}^d \mathcal{N}_{m_j, n_j}^1.$$

При $d \in \mathbb{N}$ для $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ через $2^{\mathbf{t}}$ обозначим вектор $2^{\mathbf{t}} = (2^{t_1}, \dots, 2^{t_d})$.

Для $d \in \mathbb{N}$, $\kappa \in \mathbb{Z}^d$, $\nu \in \mathbb{Z}^d$ обозначим через $\chi_{\kappa, \nu}^d$ характеристическую функцию множества $Q_{\kappa, \nu}^d = 2^{-\kappa}\nu + 2^{-\kappa}I^d$. Понятно, что при $d \in \mathbb{N}$, $\kappa \in \mathbb{Z}^d$, $\nu \in \mathbb{Z}^d$ имеют место равенства

$$Q_{\kappa, \nu}^d = \prod_{j=1}^d Q_{\kappa_j, \nu_j}^1, \quad \chi_{\kappa, \nu}^d(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d \chi_{\kappa_j, \nu_j}^1(x_j), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Введем в рассмотрение пространства кусочно полиномиальных функций. Для $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_+^d$ и $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ через $\mathcal{P}_{\kappa}^{d, \mathbf{l}}$ обозначим линейное подпространство в $L_{\infty}(I^d)$, состоящее из функций $f \in L_{\infty}(I^d)$, для каждой из которых существует набор полиномов $\{f_{\nu} \in \mathcal{P}^{d, \mathbf{l}}, \nu \in \mathcal{N}_{\mathbf{0}, 2^{\kappa} - \epsilon}^d\}$ такой, что

$$f = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{\mathbf{0}, 2^{\kappa} - \epsilon}^d} f_{\nu} \chi_{\kappa, \nu}^d. \quad (1.7)$$

При определении операторов проектирования на подпространства $\mathcal{P}_{\kappa}^{d, \mathbf{l}}$ используются операторы из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_+^d$. Тогда при любых $\delta \in \mathbb{R}_+^d$ и $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^d$ для $Q = \mathbf{x}^0 + \delta I^d$ существует единственный линейный оператор $P_{\delta, \mathbf{x}^0}^{d, \mathbf{l}}: L_1(Q) \mapsto \mathcal{P}^{d, \mathbf{l}}$, обладающий следующими свойствами:

1) для $f \in \mathcal{P}^{d, \mathbf{l}}$ имеет место равенство

$$P_{\delta, \mathbf{x}^0}^{d, \mathbf{l}}(f|_Q) = f;$$

2) имеет место равенство

$$\ker P_{\delta, \mathbf{x}^0}^{d, \mathbf{l}} = \left\{ f \in L_1(Q): \int_Q f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad \forall g \in \mathcal{P}^{d, \mathbf{l}} \right\};$$

причем существуют константы $c_1(d, \mathbf{l}) > 0$ и $c_2(d, \mathbf{l}) > 0$ такие, что:

3) при $1 \leq p \leq \infty$ для $f \in L_p(Q)$ справедливо неравенство

$$\|P_{\delta, \mathbf{x}^0}^{d, \mathbf{l}} f\|_{L_p(Q)} \leq c_1 \|f\|_{L_p(Q)};$$

4) при $1 \leq p < \infty$ для $f \in L_p(Q)$ выполняется неравенство

$$\|f - P_{\delta, \mathbf{x}^0}^{d, \mathbf{l}} f\|_{L_p(Q)} \leq c_2 \sum_{j=1}^d \delta_j^{-1/p} \left(\int_{\delta_j B^1} \int_{Q_{(l_j+1)\xi \mathbf{e}_j}} |\Delta_{\xi \mathbf{e}_j}^{l_j+1} f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} d\xi \right)^{1/p}.$$

Для $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{l}, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{0, 2^\kappa - \epsilon}^d$ определим непрерывный линейный оператор $S_{\kappa, \nu}^{d, \mathbf{l}}: L_1(I^d) \mapsto \mathcal{P}^{d, \mathbf{l}}(I^d) \cap L_\infty(I^d)$, полагая для $f \in L_1(I^d)$ значение

$$S_{\kappa, \nu}^{d, \mathbf{l}} f = P_{\delta, \mathbf{x}^0}^{d, \mathbf{l}} (f|_{(\mathbf{x}^0 + \delta I^d)})$$

при $\delta = 2^{-\kappa}$, $\mathbf{x}^0 = 2^{-\kappa} \nu$ (см. предложение 1.8).

Определим при $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{l}, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ линейный непрерывный оператор $E_{\kappa}^{d, \mathbf{l}}: L_1(I^d) \mapsto \mathcal{P}_{\kappa}^{d, \mathbf{l}} \cap L_\infty(I^d)$ равенством

$$E_{\kappa}^{d, \mathbf{l}} f = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0, 2^\kappa - \epsilon}^d} (S_{\kappa, \nu}^{d, \mathbf{l}} f) \chi_{\kappa, \nu}^d, \quad f \in L_1(I^d).$$

Следующая лемма будет полезна как в этом пункте, так и в п. 2.2.

ЛЕММА 1.9. Пусть $d \in \mathbb{N}$ и $\kappa, \kappa', \nu, \nu' \in \mathbb{Z}^d$ таковы, что $\kappa' \leq \kappa$, а $Q_{\kappa, \nu}^d \cap Q_{\kappa', \nu'}^d \neq \emptyset$. Тогда имеет место включение

$$Q_{\kappa, \nu}^d \subset Q_{\kappa', \nu'}^d. \quad (1.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях леммы, выбирая $\mathbf{x} \in Q_{\kappa, \nu}^d \cap Q_{\kappa', \nu'}^d$, имеем

$$2^{-\kappa} \nu < \mathbf{x} < 2^{-\kappa'} \nu' + 2^{-\kappa'}, \quad 2^{-\kappa'} \nu' < \mathbf{x} < 2^{-\kappa} \nu + 2^{-\kappa},$$

откуда получаем

$$2^{\kappa - \kappa'} \nu' \leq \nu \leq 2^{\kappa - \kappa'} \nu' + 2^{\kappa - \kappa'} - \epsilon.$$

Поэтому для $\mathbf{x} \in Q_{\kappa, \nu}^d$ выполняются соотношения

$$2^{-\kappa} 2^{\kappa - \kappa'} \nu' \leq 2^{-\kappa} \nu < \mathbf{x} < 2^{-\kappa} \nu + 2^{-\kappa} \leq 2^{-\kappa} (2^{\kappa - \kappa'} \nu' + 2^{\kappa - \kappa'} - \epsilon) + 2^{-\kappa},$$

или

$$2^{-\kappa'} \nu' < \mathbf{x} < 2^{-\kappa'} \nu' + 2^{-\kappa'},$$

т. е. $\mathbf{x} \in Q_{\kappa', \nu'}^d$. Лемма доказана.

Из (1.8) следует, что при $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_+^d$ для $\kappa, \kappa' \in \mathbb{Z}_+^d$, $\kappa' \leq \kappa$, справедливо включение

$$\mathcal{P}_{\kappa'}^{d, \mathbf{l}} \subset \mathcal{P}_{\kappa}^{d, \mathbf{l}}. \quad (1.9)$$

Заметим, что ввиду (1.9) при $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{1}, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ для $\varepsilon \in \Upsilon^d$ такого, что $s(\varepsilon) \subset s(\kappa)$, справедливо включение $\mathcal{P}_{\kappa-\varepsilon}^{d,1} \subset \mathcal{P}_\kappa^{d,1}$. Учитывая это обстоятельство, при $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{1}, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ определим линейный непрерывный оператор $\mathcal{E}_\kappa^{d,1}: L_1(I^d) \mapsto \mathcal{P}_\kappa^{d,1} \cap L_\infty(I^d)$, полагая

$$\mathcal{E}_\kappa^{d,1} = \sum_{\varepsilon \in \Upsilon^d: s(\varepsilon) \subset s(\kappa)} (-\mathfrak{e})^\varepsilon E_{\kappa-\varepsilon}^{d,1}.$$

ЛЕММА 1.10. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{1}, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{E}_\kappa^{d,1} = \prod_{j=1}^d V_j(\mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j}). \quad (1.10)$$

ЛЕММА 1.11. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{1} \in \mathbb{Z}_+^d$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ для $f \in \mathcal{P}_\kappa^{d,1}$ соблюдается равенство

$$E_\kappa^{d,1} f = f; \quad (1.11)$$

2) при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ ядро описывается равенством

$$\ker E_\kappa^{d,1} = \left\{ f \in L_1(I^d): \int_{I^d} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \ \forall g \in \mathcal{P}_\kappa^{d,1} \right\}.$$

ЛЕММА 1.12. При $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{1} \in \mathbb{Z}_+^d$ для $\kappa, \kappa' \in \mathbb{Z}_+^d$ соблюдаются равенства

$$\mathcal{E}_\kappa^{d,1} \mathcal{E}_{\kappa'}^{d,1} = \begin{cases} \mathcal{E}_\kappa^{d,1} & \text{при } \kappa = \kappa', \\ 0 & \text{при } \kappa \neq \kappa'. \end{cases} \quad (1.12)$$

При $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{1}, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ положим

$$\mathfrak{P}_\kappa^{d,1} = \mathcal{E}_\kappa^{d,1}(\mathcal{P}_\kappa^{d,1}) \subset \mathcal{P}_\kappa^{d,1}.$$

ЛЕММА 1.13. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{1}, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$. Тогда:

1) справедливо соотношение

$$\operatorname{Im} \mathcal{E}_\kappa^{d,1} = \mathfrak{P}_\kappa^{d,1}; \quad (1.13)$$

2) для любых $f, g \in L_1(I^d)$ выполняется равенство

$$\int_{I^d} (\mathcal{E}_\kappa^{d,1} f) \cdot g d\mathbf{x} = \int_{I^d} f \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,1} g) d\mathbf{x}; \quad (1.14)$$

3) имеет место равенство

$$\ker \mathcal{E}_\kappa^{d,1} = \left\{ f \in L_1(I^d): \int_{I^d} f g d\mathbf{x} = 0 \ \forall g \in \mathfrak{P}_\kappa^{d,1} \right\};$$

4) для $\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d$, $\kappa' \neq \kappa$, и $f, g \in L_1(I^d)$ верно равенство

$$\int_{I^d} (\mathcal{E}_\kappa^{d,1} f)(\mathcal{E}_{\kappa'}^{d,1} g) d\mathbf{x} = 0. \quad (1.15)$$

Отметим некоторые особенности подпространств $\mathfrak{P}_\kappa^{d,1}$, $d \in \mathbb{N}$, $1, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$.

При $d \in \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{Z}_+^d$ для $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $J = s(\kappa)$, $\rho \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa-\chi_J}-\epsilon}^d$ обозначим через $H_{\kappa,\rho}^{d,1}$ подпространство в $L_\infty(Q_{\kappa-\chi_J,\rho}^d)$, состоящее из функций h , для каждой из которых существует функция $g \in \mathfrak{P}_\kappa^{d,1}$ такая, что $h = g|_{Q_{\kappa-\chi_J,\rho}^d}$, а через $U_{\kappa,\rho}^{d,1}: \mathfrak{P}_\kappa^{d,1} \mapsto H_{\kappa,\rho}^{d,1}$ обозначим линейное отображение, которое каждому $g \in \mathfrak{P}_\kappa^{d,1}$ ставит в соответствие $h = U_{\kappa,\rho}^{d,1}g = g|_{Q_{\kappa-\chi_J,\rho}^d}$. Обозначим через $H_\kappa^{d,1}$ прямое произведение $H_\kappa^{d,1} = \prod_{\rho \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa-\chi_J}-\epsilon}^d} H_{\kappa,\rho}^{d,1}$ пространств $H_{\kappa,\rho}^{d,1}$, а также через $U_\kappa^{d,1}: \mathfrak{P}_\kappa^{d,1} \mapsto H_\kappa^{d,1}$ отображение, которое каждому $g \in \mathfrak{P}_\kappa^{d,1}$ сопоставляет $h = \{h_\rho, \rho \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa-\chi_J}-\epsilon}^d\}$ с компонентами $h_\rho = U_{\kappa,\rho}^{d,1}g$, $\rho \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa-\chi_J}-\epsilon}^d$.

Справедлива

ЛЕММА 1.14. *При $d \in \mathbb{N}$, $1, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ отображение $U_\kappa^{d,1}$ является изоморфизмом $\mathfrak{P}_\kappa^{d,1}$ на $H_\kappa^{d,1}$.*

Далее, при $d \in \mathbb{N}$ для $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ и $\nu \in \mathbb{Z}^d$ обозначим через $A_{\kappa,\nu}^d$ отображение, которое каждой функции f , заданной на некотором множестве $S \subset \mathbb{R}^d$, ставит в соответствие функцию $A_{\kappa,\nu}^d f$, определяемую на множестве $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d: 2^{-\kappa}\nu + 2^{-\kappa}\mathbf{x} \in S\}$ равенством $(A_{\kappa,\nu}^d f)(\mathbf{x}) = f(2^{-\kappa}\nu + 2^{-\kappa}\mathbf{x})$. Поскольку для $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathbb{Z}^d$ отображение $\mathbb{R}^d \ni \mathbf{x} \mapsto 2^{-\kappa}\nu + 2^{-\kappa}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ взаимно однозначно, отображение $A_{\kappa,\nu}^d$ является биекцией на себя множества всех функций с областью определения в $\mathbb{R}^d$.

ЛЕММА 1.15. *При $d \in \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{Z}_+^d$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $J = s(\kappa)$, $\rho \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa-\chi_J}-\epsilon}^d$ отображение $A_{\kappa-\chi_J,\rho}^d|_{H_{\kappa,\rho}^{d,1}}$ является изоморфизмом $H_{\kappa,\rho}^{d,1}$ на $H_{\chi_J}^{d,1}$.*

При $d \in \mathbb{N}$, $1, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ положим

$$\mathfrak{R}_\kappa^{d,1} = \dim \mathfrak{P}_\kappa^{d,1}.$$

ЛЕММА 1.16. *Пусть $d \in \mathbb{N}$, $1, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $J = s(\kappa)$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда имеет место равенство*

$$\mathfrak{R}_\kappa^{d,1} = \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,1} 2^{(\kappa-\chi_J, \epsilon)} \quad (1.16)$$

и можно построить линейный изоморфизм $\mathcal{I}_\kappa^{d,1}$ подпространства $\mathfrak{P}_\kappa^{d,1}$ на пространство $\mathbb{R}^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,1}}$, обладающий тем свойством, что для $g \in \mathfrak{P}_\kappa^{d,1}$ выполняются неравенства

$$c_3 \|g\|_{L_p(I^d)} \leq 2^{-(\kappa-\chi_J, \epsilon)/p} \|\mathcal{I}_\kappa^{d,1} g\|_{l_p^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,1}}} \leq c_4 \|g\|_{L_p(I^d)} \quad (1.17)$$

с некоторыми константами $c_3 > 0$, $c_4 > 0$, зависящими только от $d, 1, p$.

ЛЕММА 1.17. *Пусть $d \in \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{Z}_+^d$, $J \subset \{1, \dots, d\}$, $J \neq \emptyset$, и система функций $\varphi_i^{d,1,J} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$, $i = 1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,1}$, такова, что $\varphi_i^{d,1,J}(\mathbf{x}) = 0$ при $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus I^d$, $i = 1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,1}$, а система функций*

$$\{\varphi_i^{d,1,J}|_{I^d} \in \mathfrak{P}_{\chi_J}^{d,1}, i = 1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,1}\}$$

является ортонормированным базисом в $\mathfrak{P}_{\chi_J}^{d,1} \cap L_2(I^d)$. Тогда для любого $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ такого, что $s(\kappa) = J$, система функций

$$\{2^{(\kappa-\chi_J, \epsilon)/2} \varphi_i^{d,1,J}(2^{\kappa-\chi_J} \mathbf{x} - \rho), \quad i = 1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,1}, \quad \rho \in \mathcal{N}_{\mathbf{0}, 2^{\kappa-\chi_J} - \epsilon}^d\} \quad (1.18)$$

образует ортонормированный базис в $\mathfrak{P}_{\kappa}^{d,1} \cap L_2(I^d)$, а для $f \in L_1(I^d)$ и почти для всех $\mathbf{x} \in I^d$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_{\kappa}^{d,1} f)(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,1}, \rho \in \mathcal{N}_{\mathbf{0}, 2^{\kappa-\chi_J} - \epsilon}^d} 2^{(\kappa-\chi_J, \epsilon)} \\ &\quad \times \left(\int_{I^d} \varphi_i^{d,1,J}(2^{\kappa-\chi_J} \mathbf{y} - \rho) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \varphi_i^{d,1,J}(2^{\kappa-\chi_J} \mathbf{x} - \rho) \\ &= \sum_{i=1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,1}, \rho \in \mathcal{N}_{\mathbf{0}, 2^{\kappa-\chi_J} - \epsilon}^d} 2^{(\kappa-\chi_J, \epsilon)} \\ &\quad \times \left(\int_{Q_{\kappa-\chi_J, \rho}^d} \varphi_i^{d,1,J}(2^{\kappa-\chi_J} \mathbf{y} - \rho) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \varphi_i^{d,1,J}(2^{\kappa-\chi_J} \mathbf{x} - \rho). \end{aligned} \quad (1.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что система функций (1.18) образует ортонормированный базис в $\mathfrak{P}_{\kappa}^{d,1} \cap L_2(I^d)$, легко установить, используя лемму 1.14 и лемму 1.15, а также соотношения

$$\varphi_i^{d,1,J}(2^{\kappa-\chi_J} \mathbf{x} - \rho) = \begin{cases} ((A_{\kappa-\chi_J, \rho})^{-1} \varphi_i^{d,1,J})(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus Q_{\kappa-\chi_J, \rho}^d, \end{cases}$$

где $i = 1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,1}$, $\rho \in \mathcal{N}_{\mathbf{0}, 2^{\kappa-\chi_J} - \epsilon}^d$, и равенство (1.16).

Равенство (1.19) вытекает из (1.12)–(1.14) и разложения вектора в ортонормированном базисе. Лемма доказана.

Отметим, что в условиях леммы 1.17 в силу включения $\mathfrak{P}_{\chi_J}^{d,1} \subset \mathcal{P}_{\chi_J}^{d,1}$ и с учетом (1.7) имеют место соотношения

$$(\varphi_i^{d,1,J})|_{Q_{\chi_J, \nu}^d} \in \mathcal{P}^{d,1}(Q_{\chi_J, \nu}^d), \quad \nu \in \mathcal{N}_{\mathbf{0}, 2^{\chi_J} - \epsilon}^d, \quad i = 1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,1}. \quad (1.20)$$

1.5. В этом пункте содержатся утверждения, касающиеся аппроксимационных свойств операторов проектирования, построенных в п. 1.4, которые понадобятся в следующих параграфах.

Из [8], [9] можно извлечь следующую лемму.

ЛЕММА 1.18. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{l} \in \mathbb{N}^d$, $1 \leq p < \infty$. Тогда существуют константы $c_1(d, \mathbf{l}) > 0$, $c_2(d) > 0$, $c_3(d, \mathbf{l}) > 0$ и $c_4(d, \mathbf{l}) > 0$ такие, что для любой функции $f \in L_p(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|f - E_{\kappa}^{d,1-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} &\leq c_1 \sum_{j=1}^d 2^{\kappa_j/p} \left(\int_{c_2 2^{-\kappa_j} B^1} \int_{(I^d)_{l_j \xi \mathbf{e}_j}} |\Delta_{\xi \mathbf{e}_j}^{l_j} f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} d\xi \right)^{1/p} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

при $m(\kappa) \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \|E_\kappa^{d,1-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} &\leq c_3 \|f\|_{L_p(I^d)}, \\ \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} &\leq c_4 \|f\|_{L_p(I^d)}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Из (1.21) и леммы 1.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.19. В условиях леммы 1.18 для $f \in L_p(I^d)$ в пространстве $L_p(I^d)$ имеет место равенство

$$f = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f. \quad (1.23)$$

В [5] установлена

ТЕОРЕМА 1.20. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{N}^d$. Тогда для любой функции $f \in L_2(I^d)$ справедливо равенство

$$\|f\|_{L_2(I^d)} = \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f\|_{L_2(I^d)}^2 \right)^{1/2}. \quad (1.24)$$

§ 2. Теорема типа Литтлвуда–Пэли и оценка сверху нормы функции $\|f\|_{L_p(I^d)}$ через нормы проекций $\|\mathcal{E}_\kappa^{d,1} f\|_{L_p(I^d)}$

2.1. Здесь приведены вспомогательные утверждения, на которые опирается доказательство занимающей центральное место в работе следующей леммы. Все эти утверждения можно извлечь из [10, гл. I].

Будем обозначать $|\mathbf{x}| = \|\mathbf{x}\|_{l_2^d}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

Для замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^d$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, F) = \min_{\mathbf{y} \in F} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

ЛЕММА 2.1 [10, гл. I, § 2]. Пусть $d \in \mathbb{N}$. Тогда существует положительная константа $c_1(d)$ такая, что для любого замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^d$, для которого $\text{mes}(\mathbb{R}^d \setminus F) < \infty$, функция $M(\mathbf{x})$, определяемая для $\mathbf{x} \in F$ равенством

$$M(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(\mathbf{u}) |\mathbf{x} - \mathbf{u}|^{-(d+1)} d\mathbf{u},$$

суммируема на f и соблюдается неравенство

$$\int_F M(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq c_1 \text{mes}(\mathbb{R}^d \setminus F). \quad (2.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $d \in \mathbb{N}$. Тогда существуют константы $c_2(d) > 0$, $c_3(d) > 0$, $c_4(d) > 0$, $c_5(d) > 0$ такие, что для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}_+$ можно построить замкнутое множество $F \subset \mathbb{R}^d$ и семейство кубов $\{Q_r, r \in \mathbb{N}\}$ со следующими свойствами:

1) почти для всех $\mathbf{x} \in F$ выполняется неравенство

$$|f(\mathbf{x})| \leq \alpha; \quad (2.2)$$

2) для $W = \mathbb{R}^d \setminus F$ справедливо неравенство

$$\text{mes } W \leq \frac{c_2}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f| d\mathbf{x}; \quad (2.3)$$

3) для каждого $r \in \mathbb{N}$ куб Q_r имеет вид

$$Q_r = 2^{-k^r} \nu^r + 2^{-k^r} I^d, \quad (2.4)$$

где $k^r \in \mathbb{Z}$, $\nu^r \in \mathbb{Z}^d$;

4) верно соотношение

$$Q_r \cap Q_s = \emptyset \quad \text{для} \quad r, s \in \mathbb{N}, \quad r \neq s; \quad (2.5)$$

5) имеет место равенство

$$W = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \overline{Q}_r, \quad (2.6)$$

где $\overline{Q}_r = 2^{-k^r} \nu^r + 2^{-k^r} \bar{I}^d$, $r \in \mathbb{N}$;

6) при $r \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$c_3 \text{diam } Q_r < \inf_{\mathbf{x} \in Q_r} \rho(\mathbf{x}, F) \leq c_4 \text{diam } Q_r, \quad (2.7)$$

где $\text{diam } Q = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, $Q \subset \mathbb{R}^d$;

7) при $r \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$\frac{1}{\text{mes } Q_r} \int_{Q_r} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq c_5 \alpha. \quad (2.8)$$

Отметим, что предложение 2.2 не встречается в [10], однако его справедливость легко установить (см. [6]), используя построения и способы доказательства, применяемые при выводе близких к нему утверждений из [10, гл. I, § 3].

При $d \in \mathbb{N}$ через $L(\mathbb{R}^d)$ обозначим пространство вещественных измеримых по Лебегу функций в $\mathbb{R}^d$. Как обычно, при $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$ под суммой $L_{p_1}(\mathbb{R}^d) + L_{p_2}(\mathbb{R}^d)$ понимается подпространство в $L(\mathbb{R}^d)$, состоящее из всех функций $f \in L(\mathbb{R}^d)$, для которых существуют функции $f_1 \in L_{p_1}(\mathbb{R}^d)$ и $f_2 \in L_{p_2}(\mathbb{R}^d)$ такие, что $f = f_1 + f_2$.

Напомним (см., например, [10]), что при $1 \leq p_1 \leq p \leq p_2 < \infty$ справедливо включение $L_p(\mathbb{R}^d) \subset L_{p_1}(\mathbb{R}^d) + L_{p_2}(\mathbb{R}^d)$.

ТЕОРЕМА 2.3 [10, гл. I, § 4]. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $1 < q < \infty$, $C_0 \in \mathbb{R}_+$, $C_1 \in \mathbb{R}_+$ и $T: L_1(\mathbb{R}^d) + L_q(\mathbb{R}^d) \mapsto L(\mathbb{R}^d)$ – отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

1) для любых $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d) + L_q(\mathbb{R}^d)$ почти для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ выполняется неравенство

$$|(T(f+g))(\mathbf{x})| \leq |(Tf)(\mathbf{x})| + |(Tg)(\mathbf{x})|; \quad (2.9)$$

2) для $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ при $\alpha > 0$ соблюдается неравенство

$$\text{mes}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d: |(Tf)(\mathbf{x})| > \alpha\} \leq \frac{C_0}{\alpha} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}; \quad (2.10)$$

3) для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ при $\alpha > 0$ выполняется неравенство

$$\text{mes}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d: |(Tf)(\mathbf{x})| > \alpha\} \leq \left(\frac{C_1}{\alpha} \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \right)^q. \quad (2.11)$$

Тогда при $1 < p < q$ существует константа $c_6(p, q, C_0, C_1) > 0$ такая, что для любого отображения $T: L_1(\mathbb{R}^d) + L_q(\mathbb{R}^d) \mapsto L(\mathbb{R}^d)$, подчиненного условиям (2.9)–(2.11), для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ имеет место неравенство

$$\|Tf\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leq c_6 \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}. \quad (2.12)$$

2.2. В этом пункте устанавливается аналог теоремы Литтлвуда–Пэли для операторов $\{\mathcal{E}_\kappa^{d,l}, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$, $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_+^d$ (см. теорему 2.9), а из него выводится утверждение, содержащее оценку, объявленную в названии параграфа (см. следствие 2.10). При этом при доказательстве теоремы 2.9 будем придерживаться того же подхода, что и в [3, п. 1.5.2] в случае теоремы Литтлвуда–Пэли для кратных рядов Фурье. Убедимся в том, что имеет место

ЛЕММА 2.4. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$, $1 < p < \infty$. Тогда существует константа $c_1(l, p) > 0$ такая, что при любом $k \in \mathbb{N}$ для любого набора чисел $\sigma = \{\sigma_\kappa \in \{-1, 1\}, \kappa = 1, \dots, k\}$ и $f \in L_p(I)$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{1,l} f) \right\|_{L_p(I)} \leq c_1 \|f\|_{L_p(I)}. \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что доказательство леммы проводится по схеме, использованной в [10] при доказательстве теоремы 1 из гл. II.

Сначала установим справедливость (2.13) при $1 < p \leq 2$. Принимая во внимание, что для $f \in L_1(\mathbb{R}) + L_2(\mathbb{R})$ имеет место включение $f|_I \in L_1(I)$, определим при $k \in \mathbb{N}$ отображение $T = T_{k,\sigma}: L_1(\mathbb{R}) + L_2(\mathbb{R}) \mapsto L(\mathbb{R})$, полагая для $f \in L_1(\mathbb{R}) + L_2(\mathbb{R})$ значение

$$(Tf)(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus I, \\ \sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{1,l}(f|_I))(x) & \text{при } x \in I. \end{cases}$$

При $k \in \mathbb{N}$, $\sigma = \{\sigma_\kappa \in \{-1, 1\}, \kappa = 1, \dots, k\}$ для $f, g \in L_1(\mathbb{R}) + L_2(\mathbb{R})$ из определения отображения T , используя линейность операторов $\mathcal{E}_\kappa^{1,l}$, $\kappa = 1, \dots, k$, и полуаддитивность функции $|t|$, $t \in \mathbb{R}$, имеем

$$|(T(f+g))(x)| \leq |(Tf)(x)| + |(Tg)(x)| \quad \text{почти для всех } x \in \mathbb{R}, \quad (2.14)$$

т. е. выполняется (2.9).

Далее, покажем, что при $k \in \mathbb{N}$, $\sigma = \{\sigma_\kappa \in \{-1, 1\}, \kappa = 1, \dots, k\}$ для $f \in L_2(\mathbb{R})$ и $\alpha > 0$ соблюдается неравенство

$$\text{mes}\{x \in \mathbb{R}: |(Tf)(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{1}{\alpha} \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}\right)^2. \quad (2.15)$$

В самом деле, при $k \in \mathbb{N}$, $\sigma = \{\sigma_\kappa \in \{-1, 1\}, \kappa = 1, \dots, k\}$ для $f \in L_2(\mathbb{R})$ и $\alpha > 0$ ввиду (1.15), (1.24) выводим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |(Tf)(x)|^2 dx &= \int_I \left(\sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{1,l}(f|_I))(x) \right)^2 dx \\ &= \sum_{\kappa=1}^k \|\mathcal{E}_\kappa^{1,l} f|_I\|_{L_2(I)}^2 \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

откуда, как обычно, получаем

$$\alpha^2 \text{mes}\{x \in \mathbb{R}: |(Tf)(x)| > \alpha\} \leq \int_{\{x \in \mathbb{R}: |(Tf)(x)| > \alpha\}} |(Tf)(x)|^2 dx \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2,$$

и, значит, верно (2.15).

Теперь установим, что существует константа $C_0(l) > 0$ такая, что при $k \in \mathbb{N}$, $\sigma = \{\sigma_\kappa \in \{-1, 1\}, \kappa = 1, \dots, k\}$ для $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $\alpha > 0$ соблюдается неравенство

$$\text{mes}\{x \in \mathbb{R}: |(Tf)(x)| > \alpha\} \leq \frac{C_0}{\alpha} \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}. \quad (2.16)$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\sigma = \{\sigma_\kappa \in \{-1, 1\}, \kappa = 1, \dots, k\}$, $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $\alpha > 0$. Для функции f и числа α построим замкнутое множество F , множество $W = \mathbb{R} \setminus F$ и семейство интервалов $\{Q_r, r \in \mathbb{N}\}$, для которых соблюдаются условия (2.2)–(2.8) при $d = 1$. Обозначая через χ_A характеристическую функцию множества $A \subset \mathbb{R}$, определим функции $g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ и $h \in L_1(\mathbb{R})$, полагая

$$g(x) = f(x)\chi_F(x) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\text{mes } Q_r} \left(\int_{Q_r} f(y) dy \right) \chi_{Q_r}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

и $h = f - g$.

Из (2.5), (2.6) с учетом того, что $\text{mes}(W \setminus (\bigcup_{r \in \mathbb{N}} Q_r)) = 0$ (ибо $(W \setminus (\bigcup_{r \in \mathbb{N}} Q_r)) \subset \bigcup_{r \in \mathbb{N}} (\bar{Q}_r \setminus Q_r)$), вытекает, что почти для всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $\chi_W(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \chi_{Q_r}(x)$. Поэтому почти для всех $x \in \mathbb{R}$ получаем

$$h(x) = \sum_{r=1}^{\infty} h_r(x),$$

где $h_r(x) = (f(x) - (1/\text{mes } Q_r) \int_{Q_r} f(y) dy) \chi_{Q_r}(x)$.

Учитывая (2.5), (2.6), на основании (2.2) и (2.8) заключаем, что почти для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|g(x)| \leq c_2\alpha$, из которого вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|g\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &\leq c_2\alpha \int_{\mathbb{R}} \left| f(x)\chi_F(x) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\text{mes } Q_r} \left(\int_{Q_r} f(y) dy \right) \chi_{Q_r}(x) \right| dx \\ &\leq c_2\alpha \left(\int_F |f(x)| dx + \sum_{r=1}^{\infty} \int_{Q_r} |f(x)| dx \right) = c_2\alpha \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для получения (2.16), фиксируя множество $A \subset \mathbb{R}$, $\text{mes } A = 0$, и для $x \in \mathbb{R} \setminus A$ ввиду (2.14) имеем неравенство

$$|(Tf)(x)| = |(T(g+h))(x)| \leq |(Tg)(x)| + |(Th)(x)|,$$

откуда видим, что

$$\begin{aligned} (\{x \in \mathbb{R} : |(Tf)(x)| > \alpha\} \setminus A) &\subset \{x \in \mathbb{R} : |(Tg)(x)| + |(Th)(x)| > \alpha\} \\ &\subset \left\{ x \in \mathbb{R} : |(Tg)(x)| > \frac{\alpha}{2} \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} : |(Th)(x)| > \frac{\alpha}{2} \right\}, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \text{mes}\{x \in \mathbb{R} : |(Tf)(x)| > \alpha\} &= \text{mes}(\{x \in \mathbb{R} : |(Tf)(x)| > \alpha\} \setminus A) \\ &\leq \text{mes}\left\{x \in \mathbb{R} : |(Tg)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\} + \text{mes}\left\{x \in \mathbb{R} : |(Th)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из (2.15) и (2.17) выводим

$$\text{mes}\left\{x \in \mathbb{R} : |(Tg)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\} \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 \|g\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{c_3}{\alpha} \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}. \quad (2.19)$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (2.18) имеем

$$\begin{aligned} \text{mes}\left\{x \in \mathbb{R} : |(Th)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\} \\ = \text{mes}\left\{x \in F : |(Th)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\} + \text{mes}\left\{x \in W : |(Th)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Второе слагаемое в правой части (2.20) в силу (2.3) удовлетворяет неравенству

$$\text{mes}\left\{x \in W : |(Th)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\} \leq \text{mes } W \leq \frac{c_4}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} |f| dx. \quad (2.21)$$

Учитывая, что $(Th)(x) = 0$ для $x \in \mathbb{R} \setminus I$, находим, что

$$\left\{x \in F : |(Th)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\} = \left\{x \in F \cap I : |(Th)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\},$$

а значит,

$$\begin{aligned} \text{mes}\left\{x \in F : |(Th)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\} \\ = \text{mes}\left\{x \in F \cap I : |(Th)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\} \leq \frac{2}{\alpha} \|Th\|_{L_1(F \cap I)}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Для проведения оценки правой части (2.22) определим при $m \in \mathbb{N}$ функцию h'_m равенством

$$h'_m = h - \sum_{r=1}^m h_r$$

и заметим, что вследствие (2.14) при $m \in \mathbb{N}$ почти для всех $x \in F \cap I$ справедливо неравенство

$$|(Th)(x)| = \left| T \left(\sum_{r=1}^m h_r + h'_m \right) (x) \right| \leq \sum_{r=1}^m |(Th_r)(x)| + |(Th'_m)(x)|,$$

которое влечет оценку

$$\begin{aligned} \|Th\|_{L_1(F \cap I)} &= \int_{F \cap I} |(Th)(x)| dx \leq \int_{F \cap I} \left(\sum_{r=1}^m |(Th_r)(x)| + |(Th'_m)(x)| \right) dx \\ &= \sum_{r=1}^m \int_{F \cap I} |(Th_r)(x)| dx + \int_{F \cap I} |(Th'_m)(x)| dx. \end{aligned} \quad (2.23)$$

При $r \in \mathbb{N}$ оценим сверху значения $|(Th_r)(x)|$ для $x \in F \cap I$.

Если $r \in \mathbb{N}$ таково, что $Q_r \cap I = \emptyset$, то $(Th_r)(x) = 0$ почти для всех $x \in \mathbb{R}$.

Пусть $F \cap I \neq \emptyset$ и $r \in \mathbb{N}$ такое, что $Q_r \cap I \neq \emptyset$. Тогда ввиду (2.4), (1.9) либо $Q_r \subset I$, либо $I \subset Q_r$. Второе включение невозможно, поскольку если оно верно, то $F \cap I \subset I \subset Q_r$, т. е. $F \cap Q_r \neq \emptyset$, что противоречит (2.6) и определению W . Поэтому в рассматриваемой ситуации $Q_r \subset I$. Отметим, что

$$I = \left(\bigcup_{n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1} Q_{k,n}^1 \right) \cup \{2^{-k}\nu : \nu = 1, \dots, 2^k - 1\}$$

и, значит,

$$F \cap I = \left(\bigcup_{n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset} (F \cap Q_{k,n}^1) \right) \cup (F \cap \{2^{-k}\nu : \nu = 1, \dots, 2^k - 1\}).$$

Учитывая это замечание, проведем оценку сверху $|(Th_r)(x)|$ при $r \in \mathbb{N}$ таком, что $Q_r \cap I \neq \emptyset$, и $n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1$ таким, что $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, для $x \in F \cap Q_{k,n}^1$. Фиксируя систему функций

$$\{\varphi_i = \varphi_i^{1,l,\{1\}}, i = 1, \dots, \mathfrak{A}_1^{1,l}\},$$

удовлетворяющую условиям леммы 1.17 при $d = 1$, $J = \{1\}$, согласно равенству (1.19) при $r \in \mathbb{N}$ таком, что $Q_r \cap I \neq \emptyset$, и $n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1$ таким, что $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, почти для всех $x \in F \cap Q_{k,n}^1$ имеем

$$\begin{aligned} |(Th_r)(x)| &= \left| \sum_{\kappa=0}^{k-1} \sigma_{\kappa+1} \left(\sum_{\rho_\kappa \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-1}^1 : Q_{k,\rho_\kappa}^1 \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset} \sum_{i=1, \dots, \mathfrak{A}_1^{1,l}} 2^\kappa \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(\int_{Q_{\kappa,\rho_\kappa}^1} \varphi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa) h_r(y) dy \right) \varphi_i(2^\kappa x - \rho_\kappa) \right) \right|. \end{aligned}$$

Заметим, что при $\kappa = 0, \dots, k$ множество $\{\rho_\kappa \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-1}^1: Q_{\kappa,\rho_\kappa}^1 \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset\}$ состоит из единственного элемента, который обозначим $\rho_\kappa(n)$. Непустота этого множества следует из включения $Q_{k,n}^1 \subset I \subset \bigcup_{\rho_\kappa \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-1}^1} \overline{Q}_{\kappa,\rho_\kappa}^1$, а единственность в силу (1.9) вытекает из включения $Q_{k,n}^1 \subset Q_{\kappa,\rho_\kappa}^1$ для $\rho_\kappa \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-1}^1$ такого, что $Q_{\kappa,\rho_\kappa}^1 \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$.

Теперь получаем, что при $r \in \mathbb{N}$ таком, что $Q_r \cap I \neq \emptyset$, и $n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1$ таким, что $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, почти для всех $x \in F \cap Q_{k,n}^1$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} |(Th_r)(x)| &= \left| \sum_{\kappa=0}^{k-1} \sigma_{\kappa+1} \left(\sum_{i=1, \dots, \mathfrak{N}_1^{1,l}} 2^\kappa \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left(\int_{Q_{\kappa,\rho_\kappa(n)}^1} \varphi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) h_r(y) dy \right) \varphi_i(2^\kappa x - \rho_\kappa(n)) \right) \Big| \\ &\leq \sum_{\kappa=0}^{k-1} \sum_{i=1, \dots, \mathfrak{N}_1^{1,l}} 2^\kappa \left| \int_{Q_{\kappa,\rho_\kappa(n)}^1} \varphi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) h_r(y) dy \right| \|\varphi_i\|_{L_\infty(I)} \\ &\leq c_5 \sum_{i=1, \dots, \mathfrak{N}_1^{1,l}} \sum_{\kappa=0, \dots, k-1: Q_{\kappa,\rho_\kappa(n)}^1 \cap Q_r \neq \emptyset} 2^\kappa \\ &\quad \times \left| \int_{Q_{\kappa,\rho_\kappa(n)}^1 \cap Q_r} \varphi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) h_r(y) dy \right|. \quad (2.24) \end{aligned}$$

Для оценки правой части (2.24) установим справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 2.5. Пусть $r \in \mathbb{N}$ такое, что $Q_r \cap I \neq \emptyset$, и $n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1$ такое, что $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$. Положим

$$\iota = \iota(r, n) = \max\{\kappa = 0, \dots, k-1: Q_{\kappa,\rho_\kappa(n)}^1 \cap Q_r \neq \emptyset\}.$$

Тогда для $\kappa = 0, \dots, \iota$ существует $\nu_\kappa = \nu_\kappa(r, n) \in \{0, 1\}$ такое, что справедливо вложение

$$Q_r \subset (2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + \nu_\kappa) + 2^{-(\kappa+1)}I). \quad (2.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что при $\kappa = 0, \dots, k-1$ в силу (1.9) имеем $Q_{\kappa+1,\rho_{\kappa+1}(n)}^1 \subset Q_{\kappa,\rho_\kappa(n)}^1$ и, следовательно,

$$2^{-\kappa}\rho_\kappa(n) \leq 2^{-(\kappa+1)}\rho_{\kappa+1}(n) < 2^{-(\kappa+1)}\rho_{\kappa+1}(n) + 2^{-(\kappa+1)} \leq 2^{-\kappa}\rho_\kappa(n) + 2^{-\kappa},$$

или

$$2\rho_\kappa(n) \leq \rho_{\kappa+1}(n) < 2\rho_\kappa(n) + 2,$$

то есть

$$2\rho_\kappa(n) \leq \rho_{\kappa+1}(n) \leq 2\rho_\kappa(n) + 1,$$

а значит, существует $\varepsilon_\kappa(n) \in \{0, 1\}$ такое, что соблюдается равенство

$$\rho_{\kappa+1}(n) = 2\rho_\kappa(n) + \varepsilon_\kappa(n). \quad (2.26)$$

Ввиду (2.26) при $\kappa = 0, \dots, k-1$ имеем

$$\begin{aligned} Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1 &= 2^{-\kappa} \rho_\kappa(n) + 2^{-\kappa} I = (2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + \varepsilon_\kappa(n)) + 2^{-(\kappa+1)} I) \\ &\quad \cup (2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + 1 - \varepsilon_\kappa(n)) + 2^{-(\kappa+1)} I) \cup \{2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + 1)\} \\ &= Q_{\kappa+1, \rho_{\kappa+1}(n)}^1 \cup (2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + 1 - \varepsilon_\kappa(n)) \\ &\quad + 2^{-(\kappa+1)} I) \cup \{2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + 1)\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Далее, при $r \in \mathbb{N}$, $Q_r \cap I \neq \emptyset$, и $n \in \mathcal{N}_{0, 2^k-1}^1$, $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, и $\kappa = 0, \dots, \iota$ с учетом (1.9) имеем

$$(Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1 \cap Q_r) \supset (Q_{\iota, \rho_\iota(n)}^1 \cap Q_r) \neq \emptyset,$$

следовательно (см. (2.4), (1.9)), либо

$$Q_r \subset Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1, \quad (2.28)$$

либо

$$Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1 \subset Q_r.$$

Последнее включение невозможно, ибо если оно справедливо, то

$$(F \cap Q_r) \supset (F \cap Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1) \supset (F \cap Q_{k,n}^1) \neq \emptyset,$$

т.е. $F \cap Q_r \neq \emptyset$, что неверно. Итак, при $r \in \mathbb{N}$ таком, что $Q_r \cap I \neq \emptyset$, $n \in \mathcal{N}_{0, 2^k-1}^1$ таким, что $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, и $\kappa = 0, \dots, \iota$ соблюдается (2.28).

Теперь при $r \in \mathbb{N}$ таком, что $Q_r \cap I \neq \emptyset$, $n \in \mathcal{N}_{0, 2^k-1}^1$ таким, что $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, и $\kappa = 0, \dots, \iota-1$ из (2.28) с $\kappa+1$ вместо κ и (2.26) следует (2.25).

Далее, при $r \in \mathbb{N}$, $Q_r \cap I \neq \emptyset$, $n \in \mathcal{N}_{0, 2^k-1}^1$, $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, и $\kappa = \iota < k-1$ справедливо соотношение $Q_{\kappa+1, \rho_{\kappa+1}(n)}^1 \cap Q_r = \emptyset$, что в соединении с соотношениями (2.28), (2.27) дает вложение

$$Q_r \subset (2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + 1 - \varepsilon_\kappa(n)) + 2^{-(\kappa+1)} I) \cup \{2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + 1)\}, \quad (2.29)$$

которое влечет (2.25), поскольку $(2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + 1)) \notin Q_r$, ибо если $(2^{-(\kappa+1)} \times (2\rho_\kappa(n) + 1)) \in Q_r$, то в силу открытости Q_r с учетом (2.26) будет $Q_{\kappa+1, \rho_{\kappa+1}(n)}^1 \cap Q_r \neq \emptyset$, что неверно.

Наконец, при $r \in \mathbb{N}$ таком, что $Q_r \cap I \neq \emptyset$, $n \in \mathcal{N}_{0, 2^k-1}^1$ таким, что $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, и $\kappa = \iota = k-1$ если $Q_{\kappa+1, \rho_{\kappa+1}(n)}^1 \cap Q_r = Q_{k,n}^1 \cap Q_r \neq \emptyset$, то, как и при выводе (2.28), получаем, что $Q_r \subset Q_{\kappa+1, \rho_{\kappa+1}(n)}^1$, т.е. ввиду (2.26) имеет место (2.25). Если при $r \in \mathbb{N}$, $Q_r \cap I \neq \emptyset$, $n \in \mathcal{N}_{0, 2^k-1}^1$, $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, и $\kappa = \iota = k-1$ имеем $Q_{\kappa+1, \rho_{\kappa+1}(n)}^1 \cap Q_r = \emptyset$, то из (2.28) и (2.27) вытекает соотношение (2.29), которое, как и выше, влечет (2.25). Лемма доказана.

Отметим, что при $r \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\int_{Q_r} h_r(x) dx = \int_{Q_r} \left(f(x) - \frac{1}{\text{mes } Q_r} \int_{Q_r} f(y) dy \right) \chi_{Q_r}(x) dx = 0. \quad (2.30)$$

Возвращаясь к (2.24), в силу (2.28) при $r \in \mathbb{N}$ таком, что $Q_r \cap I \neq \emptyset$, $n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1$ таким, что $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, почти для всех $x \in F \cap Q_{k,n}^1$ получаем неравенство

$$|(Th_r)(x)| \leq c_5 \sum_{i=1, \dots, \mathfrak{R}_1^{1,l}} \sum_{\kappa=0}^l 2^\kappa \left| \int_{Q_r} \varphi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) h_r(y) dy \right|. \quad (2.31)$$

Фиксируя для каждого $r \in \mathbb{N}$ точку $y_r \in Q_r$, при $r \in \mathbb{N}$ таком, что $Q_r \cap I \neq \emptyset$, $n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1$ таким, что $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, и $\kappa = 0, \dots, l$, $i = 1, \dots, \mathfrak{R}_1^{1,l}$ с учетом равенства (2.30) выводим

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_r} \varphi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) h_r(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{Q_r} (\varphi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) - \varphi_i(2^\kappa y_r - \rho_\kappa(n))) h_r(y) dy \right| \\ &\leq \int_{Q_r} |\varphi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) - \varphi_i(2^\kappa y_r - \rho_\kappa(n))| |h_r(y)| dy. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Учитывая (2.25), (1.20), при $r \in \mathbb{N}$, $Q_r \cap I \neq \emptyset$, $n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1$, $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, и $\kappa = 0, \dots, l$, $i = 1, \dots, \mathfrak{R}_1^{1,l}$ для $y \in Q_r$ имеем

$$\begin{aligned} & |\varphi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) - \varphi_i(2^\kappa y_r - \rho_\kappa(n))| \leq |y - y_r| \sup_{z \in Q_r} \left| \frac{d}{dz} (\varphi_i(2^\kappa z - \rho_\kappa(n))) \right| \\ &\leq (\text{diam } Q_r) 2^\kappa \sup_{z \in Q_r} \left| \frac{d\varphi_i}{du} (2^\kappa z - \rho_\kappa(n)) \right| \\ &\leq 2^\kappa (\text{diam } Q_r) \sup_{z \in (2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + \nu_\kappa) + 2^{-(\kappa+1)}I)} \left| \frac{d\varphi_i}{du} (2^\kappa z - \rho_\kappa(n)) \right| \\ &= 2^\kappa (\text{diam } Q_r) \sup_{u \in (2^{-1}\nu_\kappa + 2^{-1}I)} \left| \frac{d\varphi_i}{du} (u) \right| \\ &= 2^\kappa (\text{diam } Q_r) \sup_{u \in Q_{1,\nu_\kappa}^1} \left| \frac{d\varphi_i}{du} (u) \right| \leq c_6(l) 2^\kappa (\text{diam } Q_r). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Объединяя (2.32) и (2.33), находим, что при $r \in \mathbb{N}$ таком, что $Q_r \cap I \neq \emptyset$, $n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1$ таким, что $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, и $\kappa = 0, \dots, l$, $i = 1, \dots, \mathfrak{R}_1^{1,l}$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{Q_r} \varphi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) h_r(y) dy \right| \leq c_6 2^\kappa (\text{diam } Q_r) \int_{Q_r} |h_r(y)| dy.$$

Подставляя последнюю оценку в (2.31), получаем, что при $r \in \mathbb{N}$ таком, что $Q_r \cap I \neq \emptyset$, и $n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1$ таким, что $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, почти для всех $x \in F \cap Q_{k,n}^1$

соблюдается неравенство

$$\begin{aligned} |(Th_r)(x)| &\leq c_5 \sum_{i=1, \dots, \mathfrak{N}_1^{1, \iota}} \sum_{\kappa=0}^{\iota} 2^{\kappa} c_6 2^{\kappa} (\text{diam } Q_r) \int_{Q_r} |h_r(y)| dy \\ &= c_7(l)(\text{diam } Q_r) \left(\int_{Q_r} |h_r(y)| dy \right) \sum_{\kappa=0}^{\iota} 2^{2\kappa} \leq c_8 (\text{diam } Q_r) 2^{2\iota} \int_{Q_r} |h_r(y)| dy. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Заметим, что при $r \in \mathbb{N}$ в силу (2.8) верно неравенство

$$\begin{aligned} \int_{Q_r} |h_r(y)| dy &= \int_{Q_r} \left| f(y) - \frac{1}{\text{mes } Q_r} \int_{Q_r} f(z) dz \right| dy \\ &\leq 2 \int_{Q_r} |f(y)| dy \leq c_9 \alpha \text{mes } Q_r. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Кроме того, в силу (2.7) при $r \in \mathbb{N}$ для $y \in Q_r$ справедливо неравенство

$$\text{diam } Q_r \leq c_{10} \rho(y, F), \quad (2.36)$$

а также при $r \in \mathbb{N}$, $Q_r \cap I \neq \emptyset$, и $n \in \mathcal{N}_{0, 2^k-1}^1$, $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, для $x \in F \cap Q_{k,n}^1 \subset Q_{\iota, \rho_{\iota}(n)}^1$ и $y \in Q_r \subset Q_{\iota, \rho_{\iota}(n)}^1$ (см. (2.28)) соблюдается неравенство $|x - y| \leq 2^{-\iota}$, или

$$2^{\iota} \leq |x - y|^{-1}. \quad (2.37)$$

Подставляя (2.35)–(2.37) в (2.34), заключаем, что при $r \in \mathbb{N}$, $Q_r \cap I \neq \emptyset$, и $n \in \mathcal{N}_{0, 2^k-1}^1$, $F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, почти для всех $x \in F \cap Q_{k,n}^1$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |(Th_r)(x)| &\leq c_{11} (\text{diam } Q_r) 2^{2\iota} \alpha \text{mes } Q_r = c_{11} \alpha \int_{Q_r} (\text{diam } Q_r) 2^{2\iota} dy \\ &\leq c_{12} \alpha \int_{Q_r} \rho(y, F) |x - y|^{-2} dy. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Отсюда ясно, что при $r \in \mathbb{N}$ неравенство (2.38) выполняется почти для всех $x \in F \cap I$, а следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{F \cap I} |(Th_r)(x)| dx &\leq \int_{F \cap I} c_{12} \alpha \left(\int_{Q_r} \rho(y, F) |x - y|^{-2} dy \right) dx \\ &\leq c_{12} \alpha \int_F \int_{Q_r} \rho(y, F) |x - y|^{-2} dy dx. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Подставляя (2.39) в (2.23) и с учетом (2.5), (2.6) применяя (2.1), а затем (2.3), приходим к выводу, что при $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|Th\|_{L_1(F \cap I)} &\leq c_{12} \alpha \int_F \sum_{r=1}^m \int_{Q_r} \rho(y, F) |x - y|^{-2} dy dx + \int_{F \cap I} |(Th'_m)(x)| dx \\ &\leq c_{12} \alpha \int_F \int_W \rho(y, F) |x - y|^{-2} dy dx + \int_I |(Th'_m)(x)| dx \\ &\leq c_{13} \alpha \text{mes } W + \int_I |(Th'_m)(x)| dx \leq c_{14} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx + \int_I |(Th'_m)(x)| dx. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Принимая во внимание, что при $m \in \mathbb{N}$ в силу оценок (1.22) и (2.35), условия (2.5) и включения $f \in L_1(\mathbb{R})$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \int_I |(Th'_m)(x)| dx &\leq \sum_{\kappa=1}^k \|\mathcal{E}_\kappa^{1,l}(h'_m|_I)\|_{L_1(I)} \leq c_{15}k \|h'_m\|_{L_1(I)} \leq c_{15}k \left\| \sum_{r=m+1}^{\infty} h_r \right\|_{L_1(\mathbb{R})} \\ &\leq c_{15}k \sum_{r=m+1}^{\infty} \|h_r\|_{L_1(\mathbb{R})} = c_{15}k \sum_{r=m+1}^{\infty} \int_{Q_r} |h_r(x)| dx \\ &\leq c_{15}k \sum_{r=m+1}^{\infty} 2 \int_{Q_r} |f(x)| dx \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

из (2.40) следует, что выполняется неравенство

$$\|Th\|_{L_1(F \cap I)} \leq c_{14} \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}. \quad (2.41)$$

Подставляя (2.41) в (2.22), выводим неравенство

$$\text{mes} \left\{ x \in F : |(Th)(x)| > \frac{\alpha}{2} \right\} \leq \frac{c_{16}}{\alpha} \|f\|_{L_1(\mathbb{R})},$$

которое в соединении с (2.20), (2.21) дает оценку

$$\text{mes} \left\{ x \in \mathbb{R} : |(Th)(x)| > \frac{\alpha}{2} \right\} \leq \frac{c_{17}}{\alpha} \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}. \quad (2.42)$$

Объединяя (2.18), (2.19) и (2.42), приходим к (2.16). Сопоставляя неравенства (2.14)–(2.16) с соотношениями (2.9)–(2.11), заключаем, что при $k \in \mathbb{N}$, $\sigma = \{\sigma_\kappa \in \{-1, 1\}, \kappa = 1, \dots, k\}$, $1 < p < 2$ для $f \in L_p(\mathbb{R})$ согласно (2.12) верно неравенство

$$\|Tf\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq c_1 \|f\|_{L_p(\mathbb{R})},$$

из которого следует (2.13) при $1 < p < 2$. Справедливость (2.13) при $p = 2$ установлена при выводе (2.15).

Теперь проверим соблюдение (2.13) при $2 < p < \infty$. В самом деле, при $k \in \mathbb{N}$, $\sigma = \{\sigma_\kappa \in \{-1, 1\}, \kappa = 1, \dots, k\}$, $2 < p < \infty$, $p' = p/(p-1) \in (1, 2)$ в силу равенства (1.14) оператор

$$\left(\sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa \mathcal{E}_\kappa^{1,l} \right) \Big|_{L_p(I)}$$

является сопряженным к оператору

$$\left(\sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa \mathcal{E}_\kappa^{1,l} \right) \Big|_{L_{p'}(I)},$$

а значит,

$$\left\| \left(\sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa \mathcal{E}_\kappa^{1,l} \right) \Big|_{L_p(I)} \right\|_{\mathcal{B}(L_p(I), L_p(I))} = \left\| \left(\sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa \mathcal{E}_\kappa^{1,l} \right) \Big|_{L_{p'}(I)} \right\|_{\mathcal{B}(L_{p'}(I), L_{p'}(I))}.$$

Отсюда, учитывая выполнение (2.13) при p' вместо p , заключаем, что неравенство (2.13) соблюдается при $2 < p < \infty$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. В условиях леммы 2.4 существует константа $c_{18}(l, p) > 0$ такая, что при любом $k \in \mathbb{Z}_+$ для любого набора чисел $\{\sigma_\kappa \in \{-1, 1\}, \kappa = 0, \dots, k\}$ и $f \in L_p(I)$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{\kappa=0}^k \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{1,l} f) \right\|_{L_p(I)} \leq c_{18} \|f\|_{L_p(I)}. \quad (2.43)$$

Оценка (2.43) следует из (1.22) и (2.13).

При помощи следствия из леммы 2.4 устанавливается

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{Z}_+^d$, $1 < p < \infty$. Тогда существует константа $c_{19}(d, 1, p) > 0$ такая, что для любого семейства чисел $\{\sigma_\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ вида $\sigma_\kappa = \prod_{j=1}^d \sigma_{\kappa_j}^j$, где $\sigma_{\kappa_j}^j \in \{-1, 1\}, \kappa_j \in \mathbb{Z}_+, j = 1, \dots, d$, для $f \in L_p(I^d)$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{d,1} f) \right\|_{L_p(I^d)} \leq c_{19} \|f\|_{L_p(I^d)}. \quad (2.44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что в условиях теоремы для любого непустого множества $J \subset \{1, \dots, d\}$ при любом $\mathbf{k}^J \in (\mathbb{Z}_+^d)^J$ и любых наборах чисел $\{\sigma_{\kappa_j}^j \in \{-1, 1\}, \kappa_j = 0, \dots, k_j\}, j \in J$, для $f \in L_p(I^d)$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{\kappa^J \in \mathbb{Z}_+^m(\mathbf{k}^J)} \left(\prod_{j \in J} (\sigma_{\kappa_j}^j V_j(\mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j})) \right) f \right\|_{L_p(I^d)} \leq \left(\prod_{j \in J} c_{18}(l_j, p) \right) \|f\|_{L_p(I^d)}, \quad (2.45)$$

где $m = \text{card } J$.

Доказательство (2.45) проведем по индукции относительно m . При $m = 1$, т.е. для $j = 1, \dots, d$, используя п. 2) леммы 1.6, теорему Фубини и соотношения (1.5), (2.43), имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\kappa_j=0}^{k_j} \sigma_{\kappa_j}^j (V_j(\mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j})) f \right\|_{L_p(I^d)}^p &= \int_{I^d} \left| \left(V_j \left(\sum_{\kappa_j=0}^{k_j} \sigma_{\kappa_j}^j \mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j} \right) \right) f \right|^p d\mathbf{x} \\ &= \int_{I^{d-1}} \int_I \left| \left(\left(V_j \left(\sum_{\kappa_j=0}^{k_j} \sigma_{\kappa_j}^j \mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j} \right) \right) f \right) (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_d) \right|^p \\ &\quad \times dx_j dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d \\ &= \int_{I^{d-1}} \left\| \left(\sum_{\kappa_j=0}^{k_j} \sigma_{\kappa_j}^j \mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j} \right) f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d) \right\|_{L_p(I)}^p \\ &\quad \times dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d \\ &\leq \int_{I^{d-1}} (c_{18}(l_j, p) \|f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d)\|_{L_p(I)})^p \\ &\quad \times dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d = (c_{18}(l_j, p))^p \int_{I^d} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

откуда

$$\left\| \sum_{\kappa_j=0}^{k_j} \sigma_{\kappa_j}^j (V_j(\mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j})) f \right\|_{L_p(I^d)} \leq c_{18}(l_j, p) \|f\|_{L_p(I^d)}, \quad (2.46)$$

что совпадает с (2.45) при $m = 1$, $J = \{j\}$.

Предположим, что при некотором m , $1 \leq m \leq d-1$, оценка (2.45) имеет место для любого множества $J \subset \{1, \dots, d\}$, $\text{card } J = m$, при любом $\mathbf{k}^J \in (\mathbb{Z}_+^d)^J$, любых наборах чисел $\{\sigma_{\kappa_j}^j \in \{-1, 1\}$, $\kappa_j = 0, \dots, k_j\}$, $j \in J$, и любой функции $f \in L_p(I^d)$. Покажем, что тогда неравенство (2.45) справедливо при $m+1$ вместо m для любого множества $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, d\}$ вместо J , у которого $\text{card } \mathcal{J} = m+1$, при любом $\mathbf{k}^{\mathcal{J}} \in (\mathbb{Z}_+^d)^{\mathcal{J}}$, любых наборах чисел $\{\sigma_{\kappa_j}^j \in \{-1, 1\}$, $\kappa_j = 0, \dots, k_j\}$, $j \in \mathcal{J}$, и любой функции $f \in L_p(I^d)$. Представляя множество $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, d\}$, $\text{card } \mathcal{J} = m+1$, в виде $\mathcal{J} = J \cup \{i\}$, $i \notin J$, с учетом (1.6) в силу (2.46) и предположения индукции получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\kappa^{\mathcal{J}} \in \mathbb{Z}_+^{m+1}(\mathbf{k}^{\mathcal{J}})} \left(\prod_{j \in \mathcal{J}} (\sigma_{\kappa_j}^j V_j(\mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j})) \right) f \right\|_{L_p(I^d)} \\ &= \left\| \sum_{\kappa_i=0}^{k_i} \sigma_{\kappa_i}^i (V_i(\mathcal{E}_{\kappa_i}^{1,l_i})) \left(\sum_{\kappa^J \in \mathbb{Z}_+^m(\mathbf{k}^J)} \left(\prod_{j \in J} (\sigma_{\kappa_j}^j V_j(\mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j})) \right) f \right) \right\|_{L_p(I^d)} \\ &\leq c_{18}(l_i, p) \left\| \sum_{\kappa^J \in \mathbb{Z}_+^m(\mathbf{k}^J)} \left(\prod_{j \in J} (\sigma_{\kappa_j}^j V_j(\mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j})) \right) f \right\|_{L_p(I^d)} \\ &\leq c_{18}(l_i, p) \left(\prod_{j \in J} c_{18}(l_j, p) \right) \|f\|_{L_p(I^d)}, \end{aligned}$$

что завершает вывод (2.45).

В частности, из (2.45) при $m = d$ ввиду (1.10) получаем, что в условиях теоремы при любом $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$ соблюдается неравенство

$$\left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \sigma_{\kappa}(\mathcal{E}_{\kappa}^{d,1} f) \right\|_{L_p(I^d)} \leq c_{19} \|f\|_{L_p(I^d)}, \quad \sigma_{\kappa} = \prod_{j=1}^d \sigma_{\kappa_j}^j, \quad (2.47)$$

где $\sigma_{\kappa_j}^j \in \{-1, 1\}$, $\kappa_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \dots, d$, $f \in L_p(I^d)$, $c_{19} = \prod_{j=1}^d c_{18}(l_j, p)$.

Теперь убедимся в справедливости (2.44). Для произвольного семейства чисел $\{\sigma_{\kappa} = \prod_{j=1}^d \sigma_{\kappa_j}^j : \sigma_{\kappa_j}^j \in \{-1, 1\}$, $j = 1, \dots, d$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ и функции $f \in L_p(I^d)$ рассмотрим последовательность

$$\left\{ \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k\mathbf{e})} \sigma_{\kappa}(\mathcal{E}_{\kappa}^{d,1} f) \right) \in L_p(I^d), \quad k \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

и, учитывая (2.47), а также секвенциальную компактность шара $B(L_p(I^d))$ относительно $*$ -слабой топологии в пространстве $L_p(I^d) = (L_{p'}(I^d))^*$, выберем подпоследовательность

$$\left\{ \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k_n \mathbf{e})} \sigma_{\kappa}(\mathcal{E}_{\kappa}^{d,1} f) : k_n < k_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

и функцию $F \in L_p(I^d)$, обладающие тем свойством, что для любой функции $g \in L_{p'}(I^d)$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I^d} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k_n \epsilon)} \sigma_\kappa(\mathcal{E}_\kappa^{d,1} f) \right) g \, d\mathbf{x} = \int_{I^d} F g \, d\mathbf{x}. \quad (2.48)$$

Заметим, что при любом $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, согласно (1.14), (2.48), (1.12) для $g \in L_{p'}(I^d)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_{I^d} (\mathcal{E}_\kappa^{d,1} F) g \, d\mathbf{x} &= \int_{I^d} F (\mathcal{E}_\kappa^{d,1} g) \, d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I^d} \left(\sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(k_n \epsilon)} \sigma_{\kappa'}(\mathcal{E}_{\kappa'}^{d,1} f) \right) (\mathcal{E}_\kappa^{d,1} g) \, d\mathbf{x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I^d} \mathcal{E}_\kappa^{d,1} \left(\sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(k_n \epsilon)} \sigma_{\kappa'}(\mathcal{E}_{\kappa'}^{d,1} f) \right) g \, d\mathbf{x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I^d} \left(\sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(k_n \epsilon)} \sigma_{\kappa'} \mathcal{E}_\kappa^{d,1} (\mathcal{E}_{\kappa'}^{d,1} f) \right) g \, d\mathbf{x} = \int_{I^d} \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{d,1} f) g \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\mathcal{E}_\kappa^{d,1} F = \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{d,1} f). \quad (2.49)$$

Учитывая (2.49), (1.1), (1.21), заключаем, что

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{d,1} f) = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} (\mathcal{E}_\kappa^{d,1} F) = E_{\mathbf{k}}^{d,1} F$$

сходится к F в $L_p(I^d)$ при $\mathbf{m}(\mathbf{k}) \rightarrow \infty$. Поэтому, переходя к пределу при $\mathbf{m}(\mathbf{k}) \rightarrow \infty$ в неравенстве (2.47), приходим к (2.44). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. В условиях теоремы 2.7 для любого семейства чисел $\{\sigma_\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ вида $\sigma_\kappa = \prod_{j=1}^d \sigma_{\kappa_j}^j$, где $\sigma_{\kappa_j}^j \in \{-1, 1\}$, $\kappa_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \dots, d$, и любой функции $f \in L_p(I^d)$ соблюдается неравенство

$$\|f\|_{L_p(I^d)} \leq c_{19} \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{d,1} f) \right\|_{L_p(I^d)}. \quad (2.50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что при любом $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$, любом наборе чисел $\{\sigma_\kappa = \prod_{j=1}^d \sigma_{\kappa_j}^j : \sigma_{\kappa_j}^j \in \{-1, 1\}, j = 1, \dots, d, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})\}$ для $f \in L_p(I^d)$ справедливо неравенство

$$\|E_{\mathbf{k}}^{d,1} f\|_{L_p(I^d)} \leq c_{19} \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{d,1} f) \right\|_{L_p(I^d)}. \quad (2.51)$$

В самом деле, ввиду (1.12), (1.1) имеем

$$\left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \sigma_\kappa \mathcal{E}_\kappa^{d,1} \right)^2 f = \left(\sum_{\kappa, \kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \sigma_\kappa \sigma_{\kappa'} \mathcal{E}_\kappa^{d,1} \mathcal{E}_{\kappa'}^{d,1} \right) f = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \mathcal{E}_\kappa^{d,1} f = E_{\mathbf{k}}^{d,1} f,$$

откуда, применяя (2.47), выводим

$$\begin{aligned} \|E_{\mathbf{k}}^{d,1}f\|_{L_p(I^d)} &= \left\| \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \sigma_{\kappa} \mathcal{E}_{\kappa}^{d,1} \right)^2 f \right\|_{L_p(I^d)} \\ &= \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \sigma_{\kappa} \mathcal{E}_{\kappa}^{d,1} \left(\sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \sigma_{\kappa'} (\mathcal{E}_{\kappa'}^{d,1} f) \right) \right\|_{L_p(I^d)} \\ &\leq c_{19} \left\| \sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \sigma_{\kappa'} (\mathcal{E}_{\kappa'}^{d,1} f) \right\|_{L_p(I^d)}. \end{aligned}$$

Как видно из доказательства (2.44) и (1.21), в неравенстве (2.51) можно перейти к пределу при $\mathbf{m}(\mathbf{k}) \rightarrow \infty$, в результате чего получим (2.50). Следствие доказано.

С помощью теоремы 2.7 и следствия 2.8, опираясь на схему доказательства теоремы Литтлвуда–Пэли, изложенную в [3, п. 1.5.2] для операторов взятия частных сумм кратных рядов Фурье, устанавливается

ТЕОРЕМА 2.9. *В условиях теоремы 2.7 существуют такие константы $c_{20}(d, \mathbf{l}, p) > 0$, $c_{21}(d, \mathbf{l}, p) > 0$, что для любой функции $f \in L_p(I^d)$ выполняются неравенства*

$$c_{20} \|f\|_{L_p(I^d)} \leq \left(\int_{I^d} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} ((\mathcal{E}_{\kappa}^{d,1} f)(\mathbf{x}))^2 \right)^{p/2} d\mathbf{x} \right)^{1/p} \leq c_{21} \|f\|_{L_p(I^d)}. \quad (2.52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему Радемахера, состоящую из функций

$$\omega_{\kappa}(t) = \text{sign} \sin(2^{\kappa+1} \pi t), \quad t \in I, \quad \kappa \in \mathbb{Z}_+,$$

и определим семейство функций ω_{κ}^d , $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, полагая

$$\omega_{\kappa}^d(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^d \omega_{\kappa_j}(t_j), \quad \mathbf{t} \in I^d.$$

Как известно (см., например, [3, п. 1.5.2]), существуют константы $c_{22}(d, p) > 0$, $c_{23}(d, p) > 0$ такие, что при любом $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$ для любого набора чисел $\{a_{\kappa} \in \mathbb{R}, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})\}$ имеют место неравенства

$$c_{22} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} a_{\kappa}^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} a_{\kappa} \omega_{\kappa}^d(\cdot) \right\|_{L_p(I^d)} \leq c_{23} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} a_{\kappa}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.53)$$

Для $f \in L_p(I^d)$ при $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$, используя (2.51), теорему Фубини и соотношение (2.53), выводим

$$\|E_{\mathbf{k}}^{d,1}f\|_{L_p(I^d)}^p = \int_{I^d} \|E_{\mathbf{k}}^{d,1}f\|_{L_p(I^d)}^p d\mathbf{t} \leq \int_{I^d} \left(c_{19} \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \omega_{\kappa}^d(\mathbf{t}) (\mathcal{E}_{\kappa}^{d,1} f) \right\|_{L_p(I^d)} \right)^p d\mathbf{t}$$

$$\begin{aligned}
&= (c_{19})^p \int_{I^d} \int_{I^d} \left| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \omega_\kappa^d(\mathbf{t})(\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}) \right|^p d\mathbf{x} d\mathbf{t} \\
&= (c_{19})^p \int_{I^d} \int_{I^d} \left| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \omega_\kappa^d(\mathbf{t})(\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}) \right|^p d\mathbf{t} d\mathbf{x} \\
&= (c_{19})^p \int_{I^d} \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} (\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}) \omega_\kappa^d(\cdot) \right\|_{L_p(I^d)}^p d\mathbf{x} \\
&\leq (c_{19})^p \int_{I^d} \left(c_{23} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}))^2 \right)^{1/2} \right)^p d\mathbf{x} \\
&= (c_{24})^p \int_{I^d} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}))^2 \right)^{p/2} d\mathbf{x}, \tag{2.54}
\end{aligned}$$

и, пользуясь (2.53), теоремой Фубини и (2.47), получаем

$$\begin{aligned}
\int_{I^d} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}))^2 \right)^{p/2} d\mathbf{x} &\leq \int_{I^d} \left(c_{25} \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} (\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}) \omega_\kappa^d(\cdot) \right\|_{L_p(I^d)} \right)^p d\mathbf{x} \\
&= (c_{25})^p \int_{I^d} \int_{I^d} \left| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \omega_\kappa^d(\mathbf{t})(\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}) \right|^p d\mathbf{t} d\mathbf{x} \\
&= (c_{25})^p \int_{I^d} \int_{I^d} \left| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \omega_\kappa^d(\mathbf{t})(\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}) \right|^p d\mathbf{x} d\mathbf{t} \\
&= (c_{25})^p \int_{I^d} \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \omega_\kappa^d(\mathbf{t})(\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f) \right\|_{L_p(I^d)}^p d\mathbf{t} \\
&\leq (c_{25})^p \int_{I^d} (c_{19} \|f\|_{L_p(I^d)})^p d\mathbf{t} = (c_{21})^p \|f\|_{L_p(I^d)}^p,
\end{aligned}$$

откуда, в частности, имеем

$$\int_{I^d} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(n\epsilon)} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}))^2 \right)^{p/2} d\mathbf{x} \leq (c_{21})^p \|f\|_{L_p(I^d)}^p, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.55}$$

Для получения второго неравенства в (2.52) достаточно применить теорему Леви о предельном переходе под знаком интеграла к монотонно возрастающей последовательности функций $\{(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(n\epsilon)} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}))^2)^{p/2}, n \in \mathbb{Z}_+\}$, принимая во внимание (2.55) и учитывая, что почти для всех $\mathbf{x} \in I^d$ имеем

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(n\epsilon)} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}))^2 \right)^{p/2} &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(n\epsilon)} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}))^2 \right)^{p/2} \\
&= \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}))^2 \right)^{p/2}.
\end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо в силу того, что при $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathfrak{m}(\mathbf{k})\mathfrak{e})} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}))^2 &\leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}))^2 \\ &\leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathfrak{M}(\mathbf{k})\mathfrak{e})} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}))^2, \quad \mathbf{x} \in I^d. \end{aligned}$$

Ввиду изложенного и на основании (1.21), переходя к пределу в (2.54) при $\mathfrak{m}(\mathbf{k}) \rightarrow \infty$, приходим к первому неравенству в (2.52). Теорема доказана.

Из теоремы 2.9, используя соображения, приведенные в [2] для аналогичного утверждения об операторах взятия частных сумм ряда Фурье, выводится

СЛЕДСТВИЕ 2.10. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_+^d$, $1 \leq p < \infty$. Тогда существует константа $c_{26}(d, \mathbf{l}, p) > 0$ такая, что если для $f \in L_1(I^d)$ ряд $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f\|_{L_p(I^d)}^{p^*}$ сходится, где $p^* = \min(2, p)$, то $f \in L_p(I^d)$ и выполняется неравенство

$$\|f\|_{L_p(I^d)} \leq c_{26} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f\|_{L_p(I^d)}^{p^*} \right)^{1/p^*}. \quad (2.56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы 2.9 с помощью неравенства треугольника для нормы в пространстве $L_{p/2}(I^d)$ при $p > 2$ и неравенства Гёльдера с показателем $p/2$ при $1 < p \leq 2$ из (2.54) выводим

$$\begin{aligned} \|E_{\mathbf{k}}^{d,1}f\|_{L_p(I^d)} &\leq c_{24} \left(\left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} (\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)^2 \right\|_{L_{p/2}(I^d)} \right)^{1/2} \\ &\leq c_{24} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \|(\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)^2\|_{L_{p/2}(I^d)} \right)^{1/2} = c_{24} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f\|_{L_p(I^d)}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где $f \in L_p(I^d)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$, $p > 2$,

$$\begin{aligned} \|E_{\mathbf{k}}^{d,1}f\|_{L_p(I^d)} &\leq c_{24} \left(\int_{I^d} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x}))^2 \right)^{p/2} d\mathbf{x} \right)^{1/p} \\ &\leq c_{24} \left(\int_{I^d} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} |(\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f)(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} = c_{24} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1}f\|_{L_p(I^d)}^p \right)^{1/p}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

где $f \in L_p(I^d)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$, $1 < p \leq 2$.

Заметим, что на самом деле неравенства (2.57) и (2.58) имеют место для любой функции $f \in L_1(I^d)$.

Действительно, если $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$ и $f \in L_1(I^d)$, то, применяя (2.57) в случае $p > 2$ и, соответственно, (2.58) в случае $1 < p \leq 2$ к функции $E_{\mathbf{k}}^{d,1}f \in L_\infty(I^d) \subset$

$L_p(I^d)$ и учитывая (1.11) и то обстоятельство, что вследствие (1.1) и (1.12) соблюдаются равенства

$$\mathcal{E}_\kappa^{d,1} E_{\mathbf{k}}^{d,1} f = \mathcal{E}_\kappa^{d,1} \left(\sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \mathcal{E}_{\kappa'}^{d,1} f \right) = \sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} \mathcal{E}_\kappa^{d,1} \mathcal{E}_{\kappa'}^{d,1} f = \mathcal{E}_\kappa^{d,1} f$$

при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})$, $f \in L_1(I^d)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$, получаем, что (2.57) и, соответственно, (2.58) справедливы для $f \in L_1(I^d)$.

Отметим, что для любого семейства неотрицательных чисел $\{a_\kappa \in \mathbb{R} : a_\kappa \geq 0, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{\mathbf{m}(\mathbf{k}) \rightarrow \infty} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} a_\kappa = \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} a_\kappa,$$

поскольку для любых $\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathbb{Z}_+^d$ таких, что $\mathbf{m}(\mathbf{k}) \geq \mathbf{m}(\mathbf{k}')$, соблюдается неравенство

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k})} a_\kappa \geq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{k}')} a_\kappa.$$

Пусть теперь $f \in L_1(I^d)$ и ряд $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1} f\|_{L_p(I^d)}^{p^*}$ сходится. Тогда с учетом замечаний на основании (2.57), (2.58) заключаем, что при $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$\|E_{k\epsilon}^{d,1} f\|_{L_p(I^d)} \leq c_{26} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1} f\|_{L_p(I^d)}^{p^*} \right)^{1/p^*} < \infty, \quad (2.59)$$

причем в силу (1.21) последовательность функций $\{E_{k\epsilon}^{d,1} f, k \in \mathbb{Z}_+\}$ сходится к f в $L_1(I^d)$, а следовательно, $\{E_{k\epsilon}^{d,1} f\}$ сходится к f по мере. Поэтому существует подпоследовательность $\{E_{k_n\epsilon}^{d,1} f, n \in \mathbb{N}\}$, которая сходится к f почти всюду на I^d . Применяя теорему Фату о предельном переходе под знаком интеграла к последовательности функций $\{|E_{k_n\epsilon}^{d,1} f|^p, n \in \mathbb{N}\}$, почти всюду на I^d сходящейся к $|f|^p$, с учетом (2.59) приходим к выводу, что $f \in L_p(I^d)$ и соблюдается (2.56) при $1 < p < \infty$. Справедливость (2.56) при $p = 1$ вытекает из (1.23) и неравенства треугольника для нормы в $L_1(I^d)$. Следствие доказано.

§ 3. Колмогоровский n -поперечник классов функций, удовлетворяющих смешанным условиям Гёльдера

В настоящем параграфе применим полученные выше результаты для оценки колмогоровских поперечников классов Никольского и Бесова функций, удовлетворяющих смешанным условиям Гёльдера.

3.1. Здесь определим классы функций, рассматриваемые в этом параграфе, и приведем сведения, необходимые для вывода оценки их поперечников.

Для области $D \subset \mathbb{R}^d$ и векторов $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ и $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_+^d$ через $D_{\mathbf{h}}^{\mathbf{l}}$ обозначим множество

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{h}}^{\mathbf{l}} &= (\dots (D_{l_d h_d \mathbf{e}_d})_{l_{d-1} h_{d-1} \mathbf{e}_{d-1}} \dots)_{l_1 h_1 \mathbf{e}_1} = \{\mathbf{x} \in D: \mathbf{x} + \mathbf{t} \mathbf{l} \mathbf{h} \in D \forall \mathbf{t} \in \bar{I}^d\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} \in D: \left(\mathbf{x} + \sum_{j \in s(\mathbf{l})} t_j l_j h_j \mathbf{e}_j \right) \in D \forall \mathbf{t}^{s(\mathbf{l})} \in (\bar{I}^d)^{s(\mathbf{l})} \right\}. \end{aligned}$$

Пусть $d \in \mathbb{N}$, D – область в $\mathbb{R}^d$ и $1 \leq p \leq \infty$. Тогда для $f \in L_p(D)$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ и $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_+^d$ определим в $D_{\mathbf{h}}^{\mathbf{l}}$ смешанную разность функции f порядка $\mathbf{l}$, соответствующую вектору $\mathbf{h}$, равенством

$$\begin{aligned} (\Delta_{\mathbf{h}}^{\mathbf{l}} f)(\mathbf{x}) &= \left(\left(\prod_{j=1}^d \Delta_{h_j \mathbf{e}_j}^{l_j} \right) f \right)(\mathbf{x}) = \left(\left(\prod_{j \in s(\mathbf{l})} \Delta_{h_j \mathbf{e}_j}^{l_j} \right) f \right)(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{l})} (-\epsilon)^{1-\mathbf{k}} C_{\mathbf{l}}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x} + \mathbf{k} \mathbf{h}), \quad \mathbf{x} \in D_{\mathbf{h}}^{\mathbf{l}}, \end{aligned}$$

где $C_{\mathbf{l}}^{\mathbf{k}} = \prod_{j=1}^d C_{l_j}^{k_j}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d(\mathbf{l})$.

Ввиду того, что для $f \in L_p(D)$, $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_+^d$ и векторов $\mathbf{h}, \mathbf{h}' \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{h}^{s(\mathbf{l})} = (\mathbf{h}')^{s(\mathbf{l})}$, соблюдается соотношение

$$\|\Delta_{\mathbf{h}}^{\mathbf{l}} f\|_{L_p(D_{\mathbf{h}}^{\mathbf{l}})} = \|\Delta_{\mathbf{h}'}^{\mathbf{l}} f\|_{L_p(D_{\mathbf{h}'}^{\mathbf{l}})},$$

определим для функции f смешанный модуль непрерывности в $L_p(D)$ порядка $\mathbf{l}$ равенством

$$\Omega^{\mathbf{l}}(f, \mathbf{t}^{s(\mathbf{l})})_{L_p(D)} = \sup_{\{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d: \mathbf{h}^{s(\mathbf{l})} \in \mathbf{t}^{s(\mathbf{l})}(B^d)^{s(\mathbf{l})}\}} \text{vrai} \|\Delta_{\mathbf{h}}^{\mathbf{l}} f\|_{L_p(D_{\mathbf{h}}^{\mathbf{l}})}, \quad \mathbf{t}^{s(\mathbf{l})} \in (\mathbb{R}_+^d)^{s(\mathbf{l})}.$$

Теперь определим классы функций, изучаемые в этом параграфе (см. [11], [12]).

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p \leq \infty$ и D – область в $\mathbb{R}^d$. Тогда зададим вектор $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\alpha) \in \mathbb{N}^d$, полагая $l_j = \min\{m \in \mathbb{N}: \alpha_j < m\}$, $j = 1, \dots, d$, и обозначим через $S_p^{\alpha} H(D)$ ($S_p^{\alpha} \mathcal{H}(D)$) множество всех функций $f \in L_p(D)$, обладающих тем свойством, что для любого непустого множества $J \subset \{1, \dots, d\}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{t}^J \in (\mathbb{R}_+^d)^J} (\mathbf{t}^J)^{-\alpha^J} \Omega^{\mathbf{l}_{XJ}}(f, \mathbf{t}^J)_{L_p(D)} \\ = \sup_{\mathbf{t}^J \in (\mathbb{R}_+^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-\alpha_j} \right) \Omega^{\mathbf{l}_{XJ}}(f, \mathbf{t}^{s(\mathbf{l}_{XJ})})_{L_p(D)} < \infty (\leq 1). \end{aligned}$$

Пусть α, p, D и $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\alpha)$ те же, что и выше, и $\theta \in \mathbb{R}$, $1 \leq \theta < \infty$. Тогда обозначим через $S_{p,\theta}^{\alpha} B(D)$ ($S_{p,\theta}^{\alpha} \mathcal{B}(D)$) множество всех функций $f \in L_p(D)$, которые

для любого непустого множества $J \subset \{1, \dots, d\}$ удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} & \left(\int_{(\mathbb{R}_+^d)^J} (\mathbf{t}^J)^{-\epsilon^J - \theta \alpha^J} (\Omega^{\mathbf{1}_{X^J}}(f, \mathbf{t}^J)_{L_p(D)})^\theta d\mathbf{t}^J \right)^{1/\theta} \\ &= \left(\int_{(\mathbb{R}_+^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-1 - \theta \alpha_j} \right) (\Omega^{\mathbf{1}_{X^J}}(f, \mathbf{t}^{s(\mathbf{1}_{X^J})})_{L_p(D)})^\theta \prod_{j \in J} dt_j \right)^{1/\theta} < \infty \quad (\leq 1). \end{aligned}$$

При $\theta = \infty$ положим $S_{p,\infty}^\alpha B(D) = S_p^\alpha H(D)$, $S_{p,\infty}^\alpha \mathcal{B}(D) = S_p^\alpha \mathcal{H}(D)$.

Как известно (см., например, [9]), имеет место включение

$$S_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(D) \subset c_1(\alpha) S_p^\alpha \mathcal{H}(D), \quad (3.1)$$

где $c_1(\alpha) = \prod_{j=1}^d 2^{1+\alpha_j}$.

В [5], [9] установлена справедливость следующих леммы и теоремы.

ЛЕММА 3.1. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{l} \in \mathbb{N}^d$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Тогда существуют константы $c_2(d, \mathbf{l}, p, q) > 0$ и $c_3(d) > 0$ такие, что для любой функции $f \in L_p(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_\kappa^{d, \mathbf{l}-\epsilon} f\|_{L_q(I^d)} &\leq c_2 \left(\prod_{j \in s(\kappa)} 2^{\kappa_j(p^{-1} + (p^{-1} - q^{-1})_+)} \right) \\ &\times \left(\int_{(c_3 2^{-\kappa} B^d)^{s(\kappa)}} \int_{(I^d)_\xi^{\mathbf{1}_{X^{s(\kappa)}}}} |\Delta_\xi^{\mathbf{1}_{X^{s(\kappa)}}} f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} d\xi^{s(\kappa)} \right)^{1/p}, \quad (3.2) \end{aligned}$$

где $t_+ = \frac{1}{2}(t + |t|)$, $t \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\alpha)$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Тогда существует константа $c_4(d, \alpha, p, q) > 0$ такая, что для любой функции $f \in S_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}$ соблюдается неравенство

$$\|\mathcal{E}_\kappa^{d, \mathbf{l}-\epsilon} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_4 2^{-(\kappa, \alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ \epsilon)}, \quad (3.3)$$

и при выполнении условия

$$\alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ \epsilon > \mathbf{0} \quad (3.4)$$

в $L_q(I^d)$ имеет место равенство (1.23).

3.2. В этом пункте напомним некоторые сведения о поперечниках (см. [13]).

Пусть C – подмножество банахова пространства X и $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда n -поперечником по Колмогорову множества C в пространстве X называется величина

$$d_n(C, X) = \inf_{M \in \mathcal{M}_n(X)} \sup_{\mathbf{x} \in C} \inf_{\mathbf{y} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_X,$$

где $\mathcal{M}_n(X)$ – совокупность всех плоскостей M в X , у которых $\dim M \leq n$.

Отметим, что для симметричного (относительно нуля) множества C значение величины $d_n(C, X)$ не изменится, если вместо совокупности всех плоскостей размерности не больше n в определении $d_n(C, X)$ рассматривать лишь совокупность тех из них, которые проходят через 0, т. е. линейных подпространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $U: X \mapsto Y$ – непрерывное линейное отображение банахова пространства X в банахово пространство Y и $C \subset X$ – некоторое множество. Тогда при $n \in \mathbb{Z}_+$ справедлива оценка

$$d_n(U(C), Y) \leq \|U\|_{\mathcal{B}(X, Y)} d_n(C, X). \quad (3.5)$$

Напомним, что при $1 \leq p, q \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$ для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{x}\|_{l_q^n} \leq n^{(1/q-1/p)_+} \|\mathbf{x}\|_{l_p^n}. \quad (3.6)$$

Как показано в [14], существует константа $c_1 > 0$ такая, что для $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, имеет место оценка

$$d_n(B(l_2^m), l_\infty^m) \leq c_1 n^{-1/2} \left(1 + \log \frac{m}{n}\right)^{3/2}. \quad (3.7)$$

3.3. Здесь с использованием следствия 2.10 проводится оценка сверху колмогоровского n -поперечника класса $\mathcal{S}_{p, \theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ в пространстве $L_q(I^d)$. Отметим, что вывод этой оценки имеет как сходство, так и отличия от вывода подобной оценки для периодических функций в [2].

ЛЕММА 3.4. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\alpha)$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ и выполнено условие (3.4). Пусть $J = \{j = 1, \dots, d: \alpha_j = \mathbf{m}(\alpha)\}$, $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\alpha) = \text{card } J$, а вектор $\beta \in \mathbb{R}_+^d$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \beta_j &= 1 \quad \text{для } j \in J, \\ \beta_j &> 1, \quad \beta_j^{-1}(\alpha_j - (p^{-1} - q^{-1})_+) > \mathbf{m}(\alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ \epsilon) \\ &\text{для } j \in J' = \{1, \dots, d\} \setminus J. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Тогда существует константа $c_1(d, \alpha, \theta, p, q, \beta) > 0$ такая, что для $f \in \mathcal{S}_{p, \theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ при любом $r \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} \mathcal{E}_\kappa^{d, 1-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)} \\ &\leq c_1 \cdot \begin{cases} 2^{-\mathbf{m}(\alpha - (1/p-1/q)\epsilon)r} r^{\mathbf{c}(\alpha)-1(1/q^*-1/\theta)_+} & \text{при } p \leq q, \\ 2^{-\mathbf{m}(\alpha)r} r^{\mathbf{c}(\alpha)-1(1/p^*-1/\theta)_+} & \text{при } p > q, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $q^* = \min(2, q)$, $p^* = \min(2, p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим справедливость (3.9) при $p \leq q$. Принимая во внимание (3.1), (3.3), (3.4), в соответствии с (2.56), (1.12) для $f \in \mathcal{S}_{p, \theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ при $r \in \mathbb{N}$ имеем неравенство

$$\left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} \mathcal{E}_\kappa^{d, 1-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)} \leq c_2 \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} \|\mathcal{E}_\kappa^{d, 1-\epsilon} f\|_{L_q(I^d)}^{q^*} \right)^{1/q^*}. \quad (3.10)$$

Далее, для $f \in \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, используя (3.2), выводим

$$\|\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_3 2^{(\kappa, (1/p-1/q)+\epsilon)} \Omega^{\chi_{s(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{s(\kappa)})_{L_p(I^d)}. \quad (3.11)$$

Учитывая (3.11), для $f \in \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ получаем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f\|_{L_q(I^d)}^{q^*} \right)^{1/q^*} &\leq c_3 \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} 2^{-q^*(\kappa, \alpha - (1/p-1/q)+\epsilon)} \right. \\ &\quad \times \left. \left(2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{\chi_{s(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{s(\kappa)})_{L_p(I^d)} \right)^{q^*} \right)^{1/q^*}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

При оценке правой части в (3.12) рассмотрим два случая. В первом случае, когда $\theta > q^*$, применяя неравенство Гёльдера с показателем $\theta/q^* > 1$, для $f \in \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ находим, что

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} 2^{-q^*(\kappa, \alpha - (1/p-1/q)+\epsilon)} \left(2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{\chi_{s(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{s(\kappa)})_{L_p(I^d)} \right)^{q^*} \right)^{1/q^*} \\ &\leq \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} 2^{-q^*\theta(\kappa, \alpha - (1/p-1/q)+\epsilon)/(\theta-q^*)} \right)^{1/q^*-1/\theta} \\ &\quad \times \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} \left(2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{\chi_{s(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{s(\kappa)})_{L_p(I^d)} \right)^\theta \right)^{1/\theta}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Согласно (1.3) с учетом (3.8) получаем

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} 2^{-q^*\theta(\kappa, \alpha - (1/p-1/q)+\epsilon)/(\theta-q^*)} \right)^{1/q^*-1/\theta} \\ &\leq c_5 2^{-m(\alpha - (1/p-1/q)+\epsilon)r_{\mathcal{P}}(c(\alpha)-1)(1/q^*-1/\theta)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Кроме того, для $f \in \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ выводим (см. [5])

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} \left(2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{\chi_{s(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{s(\kappa)})_{L_p(I^d)} \right)^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\leq \left(c_6 \sum_{\mathcal{J} \subset \mathcal{N}_{1,d}^1: \mathcal{J} \neq \emptyset} \int_{(\mathbb{R}_+^d)^\mathcal{J}} (\mathbf{t}^\mathcal{J})^{-\epsilon^\mathcal{J} - \theta\alpha^\mathcal{J}} \left(\Omega^{\chi_\mathcal{J}}(f, c_4\mathbf{t}^\mathcal{J})_{L_p(I^d)} \right)^\theta d\mathbf{t}^\mathcal{J} \right)^{1/\theta} \leq c_7. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Объединяя (3.12)–(3.15), для $f \in \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ при $\theta > q^*$ приходим к неравенству

$$\left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f\|_{L_q(I^d)}^{q^*} \right)^{1/q^*} \leq c_8 2^{-m(\alpha - (1/p-1/q)+\epsilon)r_{\mathcal{P}}(c(\alpha)-1)(1/q^*-1/\theta)_+}. \quad (3.16)$$

Оценивая правую часть в (3.12) при $\theta \leq q^*$, для $f \in \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ в силу (3.8) и неравенства Гёльдера с показателем $\theta/q^* \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} 2^{-q^*(\kappa, \alpha - (1/p - 1/q) + \epsilon)} \left(2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l_{\chi_s(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{s(\kappa)})_{L_p(I^d)} \right)^{q^*} \right)^{1/q^*} \\
 & \leq \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} 2^{-q^* m(\beta^{-1}(\alpha - (1/p - 1/q) + \epsilon))(\kappa, \beta)} \right. \\
 & \quad \left. \times \left(2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l_{\chi_s(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{s(\kappa)})_{L_p(I^d)} \right)^{q^*} \right)^{1/q^*} \\
 & \leq 2^{-m(\alpha - (1/p - 1/q) + \epsilon)r} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} \left(2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l_{\chi_s(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{s(\kappa)})_{L_p(I^d)} \right)^\theta \right)^{1/\theta}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Подставляя (3.15) в (3.17) и соединяя с (3.12), для $f \in \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ получаем (3.16) при $\theta \leq q^*$.

Объединяя (3.10) с (3.16), приходим к (3.9) при $p \leq q$.

Для получения (3.9) при $q < p$ достаточно заметить, что в этом случае справедлива оценка

$$\left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} \mathcal{E}_\kappa^{d, 1-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)} \leq \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} \mathcal{E}_\kappa^{d, 1-\epsilon} f \right\|_{L_p(I^d)}, \quad f \in \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d),$$

и применить (3.9) при $q = p$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. Пусть выполнены условия леммы 3.4 и $p \leq q$. Тогда для $C = \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ и $X = L_q(I^d)$ существует константа $c_9(d, \alpha, \theta, p, q, \beta) > 0$ такая, что для любых $n, r \in \mathbb{N}$, $j_0 \in \mathbb{Z}_+$ и любого набора чисел $\{n_\kappa \in \mathbb{Z}_+ : \kappa \in \mathbb{Z}_+^d, r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0\}$, подчиненных условию

$$n \geq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{R}_\kappa^{d, 1-\epsilon} + \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0} n_\kappa, \tag{3.18}$$

можно построить линейное подпространство $M \subset X$ с размерностью $\dim M \leq n$, а для $f \in C$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
 \inf_{g \in M} \|f - g\|_{L_q(I^d)} & \leq c_9 \left(\left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, 1-\epsilon}} \left(2^{(\kappa, (p^{-1} - q^{-1}) + \epsilon)} \right. \right. \right. \\
 & \quad \times d_{n_\kappa} \left(B(l_p^{\mathfrak{R}_\kappa^{d, 1-\epsilon}}, l_q^{\mathfrak{R}_\kappa^{d, 1-\epsilon}}) \Omega^{l_{\chi_s(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{s(\kappa)})_{L_p(I^d)} \right)^{q^*} \Big)^{1/q^*} \\
 & \quad \left. + 2^{-(r+j_0)m(\alpha - (p^{-1} - q^{-1}) + \epsilon)} (r + j_0)^{(\epsilon - 1)(1/q^* - 1/\theta)_+} \right).
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $j_0 \in \mathbb{Z}_+$ и набор чисел $\{n_\kappa \in \mathbb{Z}_+ : \kappa \in \mathbb{Z}_+^d, r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0\}$ удовлетворяют условию (3.18). Для каждого $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$

такого, что $r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0$, $n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}$, фиксируем линейное подпространство $M_\kappa \subset \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon}$, для которого $\dim M_\kappa \leq n_\kappa$ и

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon}} \inf_{g \in M_\kappa} \|f - g\|_{L_q(I^d)} \\ & < 2d_{n_\kappa}(B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon}, \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon} \cap L_q(I^d)) > 0, \end{aligned}$$

а следовательно, для каждого $f \in B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon}$ выполняется неравенство

$$\inf_{g \in M_\kappa} \|f - g\|_{L_q(I^d)} < 2d_{n_\kappa}(B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon}, \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon} \cap L_q(I^d)).$$

Для $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ такого, что $r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0$, $n_\kappa \geq \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}$, положим $M_\kappa = \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon}$.

Учитывая изложенное, для $f \in C$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ таком, что $r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0$, $n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}$, выберем функцию $g_\kappa = g_\kappa(f) \in M_\kappa$ такую, что

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\|\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)}} \mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f - g_\kappa \right\|_{L_q(I^d)} \\ & < 2d_{n_\kappa}(B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon}, \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon} \cap L_q(I^d)), \quad \text{если } \mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f \neq 0, \\ & g_\kappa = 0, \quad \text{если } \mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f = 0, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f - \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} g_\kappa \right\|_{L_q(I^d)} \\ & \leq \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} 2d_{n_\kappa}(B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon}, \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon} \cap L_q(I^d)). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Тогда получаем, что для $f \in C$ и подпространства

$$M = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon} + \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0} M_\kappa$$

ввиду (3.1), (3.4), (1.23) выполнены неравенства

$$\begin{aligned} & \inf_{g \in M} \|f - g\|_{L_q(I^d)} \leq \left\| f - \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) \leq r} \mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f \right. \\ & \quad - \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0, n_\kappa \geq \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}} \mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f \\ & \quad \left. - \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} g_\kappa \right\|_{L_q(I^d)} \\ & \leq \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}} (\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f - \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} g_\kappa) \right\|_{L_q(I^d)} \\ & \quad + \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r + j_0} \mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Оценивая первое слагаемое в правой части (3.21), на основании соотношений (2.56), (1.13), (1.12), (3.20) заключаем, что для $f \in C$ соблюдаются неравенства

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}} (\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f - \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} g_\kappa) \right\|_{L_q(I^d)} \\
 & \leq c_{10} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f - \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} g_\kappa\|_{L_q(I^d)}^{q^*} \right)^{1/q^*} \\
 & \leq c_{11} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}} (\|\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} \right. \\
 & \quad \left. \times d_{n_\kappa}(B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon}, \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon} \cap L_q(I^d))\|^{q^*} \right)^{1/q^*}. \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

Заметим, что при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0$, $n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}$, в силу соотношений (3.5), (1.17) справедлива оценка

$$\begin{aligned}
 d_{n_\kappa}(B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon}, \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon} \cap L_q(I^d)) \\
 \leq c_{12} 2^{(\kappa, (1/p-1/q)\epsilon)} d_{n_\kappa}(B(l_p^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}}, l_q^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}})). \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Поэтому, подставляя (3.23) и (3.11) при $q = p$ в (3.22), приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}} (\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f - \|\mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} g_\kappa) \right\|_{L_q(I^d)} \\
 & \leq c_{13} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}} (2^{(\kappa, (p^{-1}-q^{-1})\epsilon)} \right. \\
 & \quad \left. \times d_{n_\kappa}(B(l_p^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}}, l_q^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}}) \Omega^{1\chi_{s(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{s(\kappa)})_{L_p(I^d)})^{q^*} \right)^{1/q^*}, \quad f \in C. \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

Применение (3.9) ко второму слагаемому в правой части (3.21) дает оценку

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r+j_0} \mathcal{E}_\kappa^{d,1-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)} \\
 & \leq c_{14} 2^{-(r+j_0)m(\alpha-(p^{-1}-q^{-1})+\epsilon)} (r+j_0)^{(\epsilon-1)(1/q^*-1/\theta)_+}, \quad f \in C. \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

Соединяя (3.21), (3.24), (3.25), получаем (3.19), причем по построению ввиду (3.18) соблюдается неравенство

$$\begin{aligned}
 \dim M & \leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) \leq r} \dim \mathfrak{P}_\kappa^{d,1-\epsilon} + \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0} \dim M_\kappa \\
 & \leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon} + \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0} n_\kappa \leq n.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, и пусть $J = \{j \in \{1, \dots, d\} : \alpha_j = \mathbf{m}(\alpha)\}$, $\mathbf{c} = \text{card } J$. Тогда для $C = \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ и $X = L_q(I^d)$ существуют константы $c_{15}(C, X) > 0$ и $c_{16}(C, X) > 0$ такие, что при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$d_n(C, X) \leq c_{15} \cdot \begin{cases} n^{-\mathbf{m}(\alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ \mathbf{e})} (\log n)^{(\mathbf{m}(\alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ \mathbf{e}) + (1/q - 1/\theta)_+)(\mathbf{c} - 1)} \\ \text{при } q \leq p \text{ (или } p < q \leq 2 \text{ и соблюдении условия (3.4))}, \\ n^{-\mathbf{m}(\alpha - (p^{-1} - 1/2)_+ \mathbf{e})} (\log n)^{(\mathbf{m}(\alpha - (p^{-1} - 1/2)_+ \mathbf{e}) + (1/2 - 1/\theta)_+)(\mathbf{c} - 1)} \\ \text{при } q \geq \max(2, p) \text{ и выполнении условия} \\ \alpha - p^{-1} \mathbf{e} - (1/2 - p^{-1})_+ \mathbf{e} > \mathbf{0}, \end{cases} \quad (3.26)$$

где $q = \min(2, \max(p, q))$,

$$d_n(C, X) \geq c_{16} n^{-\mathbf{m}(\alpha - (p^{-1} - 1/2)_+ \mathbf{e})} (\log n)^{(\mathbf{m}(\alpha - (p^{-1} - 1/2)_+ \mathbf{e}) + (1/2 - 1/\theta)_+)(\mathbf{c} - 1)} \quad (3.27)$$

при $q \geq 2$ и выполнении условия (3.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В первом случае, когда $q \leq p$ (или $p < q \leq 2$ и соблюдается условие (3.4)), полагая $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\alpha)$ и фиксируя вектор $\beta \in \mathbb{R}_+^d$, подчиненный условиям (3.8), для достаточно большого $n \in \mathbb{N}$ выберем число $r \in \mathbb{N}$ такое, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{R}_\kappa^{d, 1-\epsilon} \leq n < \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r+1} \mathfrak{R}_\kappa^{d, 1-\epsilon}, \quad (3.28)$$

и рассмотрим линейное подпространство $M \subset X$, определяемое равенством

$$M = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{P}_\kappa^{d, 1-\epsilon}.$$

Тогда, учитывая (3.28) и соотношение

$$\dim M = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{R}_\kappa^{d, 1-\epsilon} \leq n,$$

для $f \in C$ согласно (1.23), (3.9) соблюдается неравенство

$$\begin{aligned} \inf_{g \in M} \|f - g\|_{L_q(I^d)} &\leq \left\| f - \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \mathcal{E}_\kappa^{d, 1-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)} \\ &= \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} \mathcal{E}_\kappa^{d, 1-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)} \leq c_{17} 2^{-r \mathbf{m}(\alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ \mathbf{e})} r^{(\mathbf{c} - 1)(1/q - 1/\theta)_+}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$d_n(C, X) \leq \sup_{f \in C} \inf_{g \in M} \|f - g\|_X \leq c_{17} 2^{-r \mathbf{m}(\alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ \mathbf{e})} r^{(\mathbf{c} - 1)(1/q - 1/\theta)_+}. \quad (3.29)$$

Замечая, что вследствие (1.16), (1.2), (3.8) для $r \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$c_{18}(d, 1, \beta)2^r r^{c-1} \leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{R}_\kappa^{d, 1-\epsilon} \leq c_{19}(d, 1, \beta)2^r r^{c-1}, \quad (3.30)$$

из (3.29), (3.28) и (3.30) получаем (3.26) в первом случае.

Теперь рассмотрим второй случай, когда $q \geq \max(2, p)$ и выполняется условие $\alpha - p^{-1}\epsilon - (1/2 - p^{-1})_+\epsilon > 0$, которое влечет (3.4).

В этом случае, полагая $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\alpha)$ и обозначая $J' = \{1, \dots, d\} \setminus J$, фиксируем вектор $\beta \in \mathbb{R}_+^d$, для которого выполняются условия (3.8) и для $j \in J'$ верно неравенство

$$\beta_j^{-1} \left(\alpha_j - p^{-1} - \left(\frac{1}{2} - p^{-1} \right)_+ \right) > \mathfrak{m} \left(\alpha - p^{-1}\epsilon - \left(\frac{1}{2} - p^{-1} \right)_+ \epsilon \right).$$

Далее, фиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что для $j \in J'$ соблюдается неравенство

$$\beta_j^{-1} \left(\alpha_j - p^{-1} - \left(\frac{1}{2} - p^{-1} \right)_+ \right) > \mu + \varepsilon,$$

где $\mu = \mathfrak{m}(\alpha - p^{-1}\epsilon - (1/2 - p^{-1})_+\epsilon)$, а также выберем $\gamma > 0$ и $\gamma' > 0$ такие, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} \gamma &< \frac{1}{3}, \quad \mu - \frac{\gamma}{2} > 0, \\ \left(1 + \frac{1}{3\gamma} \right) \mathfrak{m}(\alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+\epsilon) &\geq \mathfrak{m} \left(\alpha - \left(p^{-1} - \frac{1}{2} \right)_+ \epsilon \right), \\ \gamma' &< \gamma, \quad \varepsilon - \frac{\gamma'}{2} > 0. \end{aligned}$$

Для $r \in \mathbb{N}$ положим число $j_0 = j_0(r) = [\frac{r}{3\gamma}]$ и зададим набор чисел $\{n_\kappa(r) \in \mathbb{N}: \kappa \in \mathbb{Z}_+^d, r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0(r)\}$ равенством

$$n_\kappa(r) = \min([c_0 2^{r-\gamma j - \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})}] + 1, \mathfrak{R}_\kappa^{d, 1-\epsilon})$$

для $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ таких, что $r + j - 1 < (\kappa, \beta) \leq r + j$, $j = 1, \dots, j_0(r)$, где $c_0 = \max_{\mathcal{J} \subset \{1, \dots, d\}} \mathfrak{R}_{\chi_{\mathcal{J}}}^{d, 1-\epsilon}$ (см. (1.16)).

Тогда в силу (1.4) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0(r)} n_\kappa(r) &\leq \sum_{j=1}^{j_0(r)} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r+j-1 < (\kappa, \beta) \leq r+j} 2c_0 2^{r-\gamma j - \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})} \\ &\leq c_{20} 2^r r^{c-1}, \quad r \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Из (3.30) и (3.31) вытекает, что для $r \in \mathbb{N}$ соблюдается неравенство

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{R}_\kappa^{d, 1-\epsilon} + \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0(r)} n_\kappa(r) \leq c_{21} 2^r r^{c-1}. \quad (3.32)$$

Теперь для достаточно большого $n \in \mathbb{N}$ подберем $r \in \mathbb{N}$ такое, чтобы выполнялись неравенства

$$c_{21}2^r r^{\epsilon-1} \leq n < c_{21}2^{r+1}(r+1)^{\epsilon-1}. \quad (3.33)$$

Тогда для этого r , сопоставляя (3.32), (3.33) с (3.18), при $j_0 = j_0(r)$, $n_\kappa = n_\kappa(r)$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0(r)$, в соответствии с леммой 3.5 построим подпространство $M \subset X$ с размерностью $\dim M \leq n$, а для $f \in C$ имеет место оценка (3.19). Из (3.19), пользуясь тем, что в силу (3.5), (1.16), (3.6) и (3.7) справедливо соотношение

$$\begin{aligned} d_{n_\kappa}(B(l_p^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}}), l_q^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}}) \\ \leq c_{22}2^{(\kappa, (1/2-p^{-1})+\epsilon+q^{-1}\epsilon)} n_\kappa^{-1/2} \left(1 + \log \frac{\mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}}{n_\kappa}\right)^{3/2} \end{aligned}$$

при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ таком, что $r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0$, $n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}$, получаем, что для $f \in C$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \inf_{g \in M} \|f - g\|_X \leq c_{23} \left(\left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}} \left(2^{-(\kappa, \alpha - p^{-1}\epsilon - (1/2-p^{-1})+\epsilon)} n_\kappa^{-1/2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 + \log \frac{\mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}}{n_\kappa} \right)^{3/2} 2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{\mathbf{1}_{X_{S(\kappa)}}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{S(\kappa)})_{L_p(I^d)} \right)^2 \right)^{1/2} \\ \left. + 2^{-(r+j_0)m(\alpha - (p^{-1}-q^{-1})+\epsilon)} (r+j_0)^{(\epsilon-1)(1/2-1/\theta)+} \right). \quad (3.34) \end{aligned}$$

Оценим правую часть (3.34). Для этого заметим, что при $j = 1, \dots, j_0$ для $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $r + j - 1 < (\kappa, \beta) \leq r + j$, $n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}$, соблюдаются неравенства

$$\begin{aligned} (\kappa, \alpha - p^{-1}\epsilon - (1/2 - p^{-1})+\epsilon) &> \mu(r + j - 1) + \varepsilon(\kappa^{J'}, \beta^{J'}), \\ n_\kappa &= [c_0 2^{r-\gamma j - \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})}] + 1 \geq c_0 2^{r-\gamma j - \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})}, \\ \log \frac{\mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}}{n_\kappa} &\leq (\log 2)(j + \gamma j + \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})), \end{aligned} \quad (3.35)$$

и рассмотрим два случая. В первом случае, когда $\theta > 2$, используя неравенство Гёльдера с показателем $\theta/2 > 1$, неравенства (3.15), (3.35), (1.4), для $f \in C$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}} \left(2^{-(\kappa, \alpha - p^{-1}\epsilon - (1/2-p^{-1})+\epsilon)} n_\kappa^{-1/2} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 + \log \frac{\mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}}{n_\kappa} \right)^{3/2} 2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{\mathbf{1}_{X_{S(\kappa)}}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{S(\kappa)})_{L_p(I^d)} \right)^2 \right)^{1/2} \\ \leq \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}} \left(2^{-(\kappa, \alpha - p^{-1}\epsilon - (1/2-p^{-1})+\epsilon)} n_\kappa^{-1/2} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(1 + \log \frac{\mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}}{n_\kappa} \right)^{3/2} \left(2^{\theta/(\theta-2)} \right)^{1/2-1/\theta} \\
& \times \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{1\chi_s(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{s(\kappa)})_{L_p(I^d)})^\theta \right)^{1/\theta} \\
& \leq c_{24} \left(\sum_{j=1}^{j_0} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r+j-1 < (\kappa, \beta) \leq r+j, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}} (2^{-\mu(r+j-1)-\epsilon(\kappa^{J'}, \beta^{J'})}) \right. \\
& \quad \times (c_0 2^{r-\gamma j - \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})})^{-1/2} (j + \gamma j + \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'}))^{3/2} 2^{\theta/(\theta-2)} \left. \right)^{1/2-1/\theta} \\
& \leq c_{25} 2^{-m(\alpha - (p^{-1}-1/2)_+ \epsilon)} r_{r, (\epsilon-1)(1/2-1/\theta)_+}. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Во втором случае, когда $\theta \leq 2$, применяя неравенство Гёльдера с показателем $\theta/2 \leq 1$, а также (3.35), (3.15), для $f \in C$ получаем

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}} \left(2^{-(\kappa, \alpha - p^{-1}\epsilon - (1/2-p^{-1})_+ \epsilon)} n_\kappa^{-1/2} \right. \right. \\
& \quad \times \left. \left(1 + \log \frac{\mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}}{n_\kappa} \right)^{3/2} 2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{1\chi_s(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{s(\kappa)})_{L_p(I^d)} \right)^2 \left. \right)^{1/2} \\
& \leq c_{26} \left(\sum_{j=1}^{j_0} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: r+j-1 < (\kappa, \beta) \leq r+j, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,1-\epsilon}} (2^{-\mu(r+j-1)-\epsilon(\kappa^{J'}, \beta^{J'})}) \right. \\
& \quad \times (c_0 2^{r-\gamma j - \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})})^{-1/2} (j + \gamma j + \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'}))^{3/2} \\
& \quad \times \left. 2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{1\chi_s(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{s(\kappa)})_{L_p(I^d)} \right)^\theta \left. \right)^{1/\theta} \\
& \leq c_{27} 2^{-m(\alpha - (p^{-1}-1/2)_+ \epsilon)} r. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Оценивая, далее, правую часть (3.34), выводим

$$\begin{aligned}
& 2^{-(r+j_0)m(\alpha - (p^{-1}-q^{-1})_+ \epsilon)} (r + j_0)^{(\epsilon-1)(1/2-1/\theta)_+} \\
& \leq c_{28} 2^{-m(\alpha - (p^{-1}-1/2)_+ \epsilon)} r_{r, (\epsilon-1)(1/2-1/\theta)_+}. \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Соединяя (3.34), (3.36)–(3.38) и учитывая, что $\dim M \leq n$, приходим к неравенству

$$d_n(C, X) \leq \sup_{f \in C} \inf_{g \in M} \|f - g\|_X \leq c_{29} 2^{-m(\alpha - (p^{-1}-1/2)_+ \epsilon)} r_{r, (\epsilon-1)(1/2-1/\theta)_+}.$$

Отсюда и из (3.33) вытекает (3.26) во втором случае.

Для получения (3.27) заметим, что при $\alpha - (1/p - 1/2)_+ \epsilon > 0$ выполняется неравенство (см. [5])

$$\begin{aligned}
& d_n(B(S_{p,\theta}^\alpha B(I^d)), L_2(I^d)) \\
& \geq c_{29} n^{-m(\alpha - (p^{-1}-1/2)_+ \epsilon)} (\log n)^{m(\alpha - (p^{-1}-1/2)_+ \epsilon) + (1/2-1/\theta)_+ (\epsilon-1)},
\end{aligned}$$

где $B(S_{p,\theta}^\alpha B(I^d)) = B(L_p(I^d)) \cap (S_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d))$. Отсюда, пользуясь тем, что для $f \in L_q(I^d)$ при $q \geq 2$ соблюдается неравенство $\|f\|_{L_2(I^d)} \leq \|f\|_{L_q(I^d)}$, в силу (3.5) при $q \geq 2$ и $\alpha - (1/p - 1/q)_+ \epsilon > 0$ выводим

$$\begin{aligned} d_n(S_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d), L_q(I^d)) &\geq d_n(S_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d), L_2(I^d)) \geq d_n(B(S_{p,\theta}^\alpha B(I^d)), L_2(I^d)) \\ &\geq c_{30} n^{-m(\alpha - (p^{-1} - 1/2)_+ \epsilon)(\log n)^{(m(\alpha - (p^{-1} - 1/2)_+ \epsilon) + (1/2 - 1/\theta)_+)(c-1)}, \end{aligned}$$

что совпадает с (3.27). Теорема доказана.

Список литературы

1. В. Н. Темляков, “Приближение функций с ограниченной смешанной производной”, Тр. МИАН СССР, **178**, Наука, М., 1986, 3–113; англ. пер.: V. N. Temlyakov, “Approximation of functions with a bounded mixed derivative”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **178** (1989), 1–121.
2. Э. М. Галеев, “Поперечники классов Бесова $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ ”, *Матем. заметки*, **69**:5 (2001), 656–665; англ. пер.: É. M. Galeev, “Widths of the Besov classes $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ ”, *Math. Notes*, **69**:5 (2001), 605–613.
3. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, 2-е изд., Наука, М., 1977; англ. пер. 1-го изд.: S. M. Nikol’skii, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975.
4. О. В. Бесов, “Теорема Литтлвуда–Пэли для смешанной нормы”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям*. Ч. 10, Тр. МИАН СССР, **170**, Наука, М., 1984, 31–36; англ. пер.: O. V. Besov, “The Littlewood–Paley theorem for a mixed norm”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **170** (1987), 33–38.
5. С. Н. Кудрявцев, “Обобщенные ряды Хаара и их применение”, *Anal. Math.*, **37**:2 (2011), 103–150.
6. С. Н. Кудрявцев, *Теорема типа Литтлвуда–Пэли для ортопроекторов на взаимно ортогональные подпространства кусочно полиномиальных функций и следствие из нее*, arXiv: <http://arxiv.org/abs/1111.5968>.
7. Э. М. Галеев, “Порядковые оценки производных периодического многомерного α -ядра Дирихле в смешанной норме”, *Матем. сб.*, **117**(159):1 (1982), 32–43; англ. пер.: Eh. M. Galeev, “Order estimates of derivatives of the multidimensional periodic Dirichlet α -kernel in a mixed norm”, *Math. USSR-Sb.*, **45**:1 (1983), 31–43.
8. С. Н. Кудрявцев, “Приближение производных функций конечной гладкости из неизотропных классов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:1 (2004), 79–122; англ. пер.: S. N. Kudryavtsev, “Approximation of the derivatives of finitely smooth functions belonging to non-isotropic classes”, *Izv. Math.*, **68**:1 (2004), 77–123.
9. С. Н. Кудрявцев, “Приближение и восстановление производных для функций, удовлетворяющих смешанным условиям Гёльдера”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:5 (2007), 37–80; англ. пер.: S. N. Kudryavtsev, “Approximation and reconstruction of the derivatives of functions satisfying mixed Hölder conditions”, *Izv. Math.*, **71**:5 (2007), 895–938.
10. И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.

11. С. М. Никольский, “Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гёльдера”, *Сиб. матем. журн.*, **4:6** (1963), 1342–1364.
12. Т. И. Аманов, *Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной*, Наука КазССР, Алма-Ата, 1976.
13. В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1976.
14. Б. С. Кашин, “Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41:2** (1977), 334–351; англ. пер.: B. S. Kašin, “Diameters of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions”, *Math. USSR-Izv.*, **11:2** (1977), 317–333.

С. Н. Кудрявцев

(S. N. KUDRYAVTSEV)

Вычислительный центр

им. А. А. Дородницына РАН, г. Москва

E-mail: s_kudr@ccas.ru

Поступило в редакцию

08.09.2010

29.11.2011