Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Джрбашян, О вложении классов $N\{\omega\}$ типа Неванлинны, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 4, 59–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/im521>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 17:42:36

УДК 517.53

А. М. Джрбашян

О вложении классов $N\{\omega\}$ типа Неванлинны

В статье найдены естественные условия, обеспечивающие вложение весовых классов мероморфных функций $N\{\omega\}$ М. М. Джрбашяна. При выполнении некоторых из этих условий разрешимы предложенная им проблема моментов, а также интегральное уравнение Вольтерра первого рода.

Библиография: 13 наименований.

Введение

В данной статье исследована хорошо известная проблема вложения весовых классов $N\{\omega\}$ мероморфных в единичном круге функций [1]–[3]. Впервые эта задача была поставлена М. М. Джрбашяном на международном математическом конгрессе в Ванкувере в 1974 г. в дополнение к его приглашенному докладу [4]. Формулировка была такова: *какая зависимость между двумя функциями ω_1, ω_2 из требуемого класса Ω обеспечивает вложение $N_{\omega_2} \subseteq N_{\omega_1}$?*

Предполагалось, что путь к решению этой задачи лежит через решение проблемы моментов Хаусдорфа [5], [6], состоящей в доказательстве существования функции β , для которой

$$-\int_0^1 x^n d\beta(x) = \lambda_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (0.1)$$

где

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_n = \left(\int_0^1 \omega_1(x) x^{n-1} dx \right) \left(\int_0^1 \omega_2(x) x^{n-1} dx \right)^{-1}, \quad n \geq 1, \quad (0.2)$$

а функции ω_1 и ω_2 лежат в классе Ω , т.е. положительны в $[0, 1)$ и удовлетворяют условиям

$$\omega_{1,2} \in C([0, 1)), \quad \omega_{1,2}(0) = 1, \quad (0.3)$$

$$\int_0^1 \omega_{1,2}(x) dx < +\infty, \quad (0.4)$$

$$\int_0^1 |1 - \omega_{1,2}(x)| \frac{dx}{x} < +\infty. \quad (0.5)$$

Была выдвинута также следующая гипотеза.

ГИПОТЕЗА [5], [6]. Если функции $\omega_{1,2} \in \Omega$ монотонны в $[0, 1]$ и отношение ω_1/ω_2 не возрастает, то решение β проблемы моментов (0.1), (0.2) существует в классе невозрастающих, ограниченных на $[0, 1]$ функций или по крайней мере в классе функций ограниченной вариации в $[0, 1]$.

Позднее некоторое решение проблемы моментов (0.1), (0.2) было найдено И. В. Островским [7]. Им было установлено, что если обе функции ω_1, ω_2 не убывают, подчинены условиям (0.3), (0.5) и таковы, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\sup_{t < \tau < 1} \frac{\omega_2(\tau(1-\varepsilon))}{\omega_2(\tau)} \leq \frac{\omega_1(t(1-\varepsilon))}{\omega_1(t)}, \quad 0 \leq t < 1, \quad (0.6)$$

то существует неубывающая на $[0, 1]$ функция β , являющаяся решением проблемы (0.1), (0.2). В [7] также было доказано, что замещение условия (0.6) неубыванием отношения ω_1/ω_2 приводит к противоречию.

Тем не менее, в настоящей статье показано, что первоначальная гипотеза из [5], [6] естественна. Справедливость этой гипотезы доказана при дополнительном ограничении, что хотя бы одна из функций $\omega_1(x), \omega_2(x)$ подчинена некоторому условию логарифмической выпуклости. В § 1 дано решение проблемы моментов (0.1), (0.2), основанное на решении уравнения Вольтерра первого рода. На этой основе в § 2 доказана теорема о вложении классов $N\{\omega\}$, содержащихся в неванлиновском классе N мероморфных функций ограниченного вида в круге. В § 3 иным путем установлены результаты о вложении δ -субгармонических расширений классов $N\{\omega\}$ – классов N_ω [8], [9] (в частном случае переходящие в аналогичные результаты для классов $N\{\omega\}$, содержащих класс N).

§ 1. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода и проблема моментов Хаусдорфа

В этом параграфе метод работы [7] усовершенствован и дополнен таким образом, что он приводит к подтверждению отмеченной выше гипотезы из [5], [6].

1.1. Мы решим уравнение Вольтерра первого рода

$$\omega_1(x) = - \int_x^1 \omega_2\left(\frac{x}{t}\right) d\beta(t), \quad \text{п. в. } x \in (0, 1), \quad (1.1)$$

что непосредственно приведет нас к решению проблемы моментов Хаусдорфа (0.1), (0.2). С этой целью докажем результат, относящийся к обращению преобразования свертки

$$\Omega_1(x) = \int_0^x \Omega_2(x-t) d\alpha(t), \quad \text{п. в. } x \in (0, \infty), \quad (1.2)$$

переходящей в (1.1) после подстановок

$$\beta(x) \equiv \alpha(-\log x), \quad \omega_{1,2}(x) \equiv \Omega_{1,2}(-\log x) \quad (1.3)$$

и называемой также интегральным уравнением Вольтерра первого рода с разностным ядром.

Основными результатами параграфа являются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. 1) Пусть ω_1 и ω_2 – непрерывные, положительные и монотонные на $(0, 1)$ функции, и пусть ω_2 не убывает в $(0, 1)$. Далее, пусть выполнены следующие условия:

- а) отношение ω_1/ω_2 не возрастает в $(0, 1)$;
- б) логарифм хотя бы одной из функций ω_1, ω_2 в $(0, 1)$ выпуклый по отношению к $\log x$, т.е. по крайней мере для одного из значений $j = 1, 2$

$$\omega_j(x\Delta)\omega_j\left(\frac{x}{\Delta}\right) \geq [\omega_j(x)]^2, \quad 0 < x < \Delta < 1;$$

- в) для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\lim_{x \rightarrow +0} x^\varepsilon \omega_2(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x^\varepsilon \omega_1(x)/\omega_2(x) = 0$;
- г) $\omega_{1,2} \in L^1(\Delta, 1)$ при любом $\Delta \in (0, 1)$.

Тогда существует неубывающее решение β уравнения (1.1), подчиненное условиям

$$\beta(1) = 0, \quad \beta(x) \leq \frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)}, \quad 0 < x < 1.$$

2) Если вместо в) и г) соответственно выполнены более ограничительные условия $\omega_{1,2}(0) = 1$ и (0.5), то дополнительно $\beta(+0) = 1$.

3) Функция β является решением проблемы моментов (0.1), (0.2).

ТЕОРЕМА 1.2. 1) Пусть Ω_1 и Ω_2 – непрерывные, положительные и монотонные на оси $(0, +\infty)$ функции, и пусть Ω_2 не возрастает на $(0, +\infty)$. Далее, пусть выполнены следующие условия:

- а') отношение Ω_1/Ω_2 не убывает на $(0, +\infty)$;
- б') логарифм хотя бы одной из функций Ω_1, Ω_2 выпуклый в $(0, +\infty)$, т.е. по крайней мере для одного из значений $j = 1, 2$

$$\Omega_j(x+\delta)\Omega_j(x-\delta) \geq [\Omega_j(x)]^2, \quad 0 < \delta < x;$$

- в') для любого $s > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-sx} \Omega_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-sx} \frac{\Omega_1(x)}{\Omega_2(x)} = 0; \quad (1.4)$$

- г') $\Omega_{1,2} \in L^1(0, R)$ при любом $R > 0$.

Тогда уравнение (1.2) обладает неубывающим решением α , подчиненным условиям

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(x) \leq \frac{\Omega_1(x)}{\Omega_2(x)}, \quad 0 < x < +\infty. \quad (1.5)$$

2) Если вместо в') и г') соответственно выполнены более ограничительные условия

$$\Omega_{1,2}(+\infty) = 1 \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} |\Omega_{1,2}(x) - 1| dx < +\infty, \quad (1.6)$$

то дополнительно $\alpha(+\infty) = 1$.

Рассматривая логарифмическую производную интеграла Лапласа, нетрудно установить следующее следствие, представляющее самостоятельный интерес.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Ω – свертка конечного числа функций Ω_k ($1 \leq k \leq n$), обращающихся в нуль на полуси $(-\infty, 0]$ и удовлетворяющих условиям теоремы 1.2, налагаемым на Ω_2 (в том числе б')). Тогда интеграл Лапласа

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} \Omega(t) dt$$

является голоморфной в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ функцией без нулей.

Ниже мы докажем лишь теорему 1.2, поскольку теорема 1.1 легко следует из нее после подстановки (1.3). В теоремах 1.1 и 1.2 монотонность отношений функций и их логарифмическая выпуклость могут быть заменены более общими условиями, включая условие, найденное в [7] (см. (0.6) и аналогичное условие для $\Omega_{1,2}$). Это утверждение мы не докажем, а лишь сформулируем его как

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Если выполнены условия а) и б), то для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено по крайней мере одно из условий

$$\begin{aligned} \sup_{t < \tau < 1} \frac{\omega_2(\tau(1-\varepsilon))}{\omega_2(\tau)} &\leq \frac{\omega_1(t(1-\varepsilon))}{\omega_1(t)}, \\ \frac{\omega_2(t(1-\varepsilon))}{\omega_2(t)} &\leq \inf_{0 < \tau < t} \frac{\omega_1(\tau(1-\varepsilon))}{\omega_1(\tau)}, \quad 0 < t < 1. \end{aligned}$$

При замене а) и б) каким-либо из этих условий утверждения теоремы 1.1 остаются верными.

Если выполнены условия а') и б'), то для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено по крайней мере одно из условий

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < x} \frac{\Omega_2(t+\varepsilon)}{\Omega_2(t)} &\leq \frac{\Omega_1(x+\varepsilon)}{\Omega_1(x)}, \\ \frac{\Omega_2(x+\varepsilon)}{\Omega_2(x)} &\leq \inf_{x < t < +\infty} \frac{\Omega_1(t+\varepsilon)}{\Omega_1(t)}, \quad 0 < x < +\infty. \end{aligned}$$

При замене а') и б') каким-либо из этих условий утверждения теоремы 1.2 остаются верными.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Условия б) и б') теорем 1.1 и 1.2 выполнены для основной шкалы функций

$$\begin{aligned}\omega_2(t) &= (1-t)^\alpha, & \omega_1(t) &= (1-t)^{\alpha+\beta}, & 0 \leq t < 2, & \beta > 0, \\ \Omega_2(x) &= x^\alpha, & \Omega_1(x) &= x^{\alpha+\beta}, & 0 < x < +\infty, & \beta > 0,\end{aligned}$$

где $-1 < \alpha \leq 0$ (и $\alpha + \beta \leq 0$, если эти условия наложены на ω_1 и Ω_1).

1.2. Нам понадобится следующая

ЛЕММА 1.1. Пусть $\{P_k\}_0^\infty$ и $\{C_k\}_0^\infty$ – последовательности положительных чисел, и пусть последовательность $\{x_k\}_0^\infty$ определена бесконечной системой уравнений

$$\begin{aligned}P_0 &= C_0 x_0, \\ P_1 &= C_1 x_0 + C_0 x_1, \\ P_2 &= C_2 x_0 + C_1 x_1 + C_0 x_2, \\ &\dots\dots\dots \\ P_k &= C_k x_0 + C_{k-1} x_1 + \dots + C_1 x_{k-1} + C_0 x_k, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}\tag{1.7}$$

1) Если выполнено хотя бы одно из условий

$$\text{А)} \quad \max_{0 \leq i \leq k} \frac{C_i}{C_{i-1}} \leq \frac{P_k}{P_{k-1}}, \quad k \geq 1; \quad \text{Б)} \quad \frac{C_k}{C_{k-1}} \leq \inf_{k \leq i < +\infty} \frac{P_i}{P_{i-1}}, \quad k \geq 1,$$

то

$$x_k \geq \frac{P_0}{C_0} \prod_{i=1}^k \left(\frac{P_i}{P_{i-1}} - \frac{C_1}{C_0} \right) \geq 0.\tag{1.8}$$

2) Если отношение P_k/C_k не убывает, то при выполнении условий

$$\text{А')} \quad C_{k+1}C_{k-1} \geq C_k^2, \quad k \geq 1, \quad \text{и} \quad \text{Б')} \quad P_{k+1}P_{k-1} \geq P_k^2, \quad k \geq 1,$$

соответственно выполнены условия А) и Б).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если выполнено хотя бы одно из условий А) и Б), то очевидно

$$x_0 = \frac{P_0}{C_0} > 0 \quad \text{и} \quad x_1 = \frac{P_0}{C_0} \left(\frac{P_1}{P_0} - \frac{C_1}{C_0} \right) \geq 0.$$

Пусть $k \geq 2$ – какое-либо число такое, что при всех $1 \leq n \leq k-1$ выполнено (1.8). Тогда

$$\begin{aligned}
 x_k &= \frac{P_k}{C_0} - \frac{C_k}{C_0} x_0 - \frac{C_{k-1}}{C_0} x_1 - \dots - \frac{C_1}{C_0} x_{k-1} \\
 &= \frac{P_k}{P_{k-1}} \frac{P_{k-1}}{C_0} - \frac{C_k}{C_{k-1}} \frac{C_{k-1}}{C_0} x_0 - \frac{C_{k-1}}{C_{k-2}} \frac{C_{k-2}}{C_0} x_1 - \dots - \frac{C_2}{C_1} \frac{C_1}{C_0} x_{k-2} - \frac{C_1}{C_0} x_{k-1} \\
 &\geq \frac{P_k}{P_{k-1}} \left[\frac{P_{k-1}}{C_0} - \frac{C_{k-1}}{C_0} x_0 - \frac{C_{k-2}}{C_0} x_1 - \dots - \frac{C_1}{C_0} x_{k-2} \right] - \frac{C_1}{C_0} x_{k-1} \\
 &= \left(\frac{P_k}{P_{k-1}} - \frac{C_1}{C_0} \right) x_{k-1} \geq \frac{P_0}{C_0} \prod_{i=1}^k \left(\frac{P_i}{P_{i-1}} - \frac{C_1}{C_0} \right).
 \end{aligned}$$

2) Если выполнены $A')$ или $B')$, то соответственно

$$\max_{0 \leq i \leq k} \frac{C_i}{C_{i-1}} = \frac{C_k}{C_{k-1}} \leq \frac{P_k}{P_{k-1}} \quad \text{или} \quad \frac{C_k}{C_{k-1}} \leq \inf_{k \leq i < +\infty} \frac{P_i}{P_{i-1}} = \frac{P_k}{P_{k-1}}.$$

1.3. Теорема 1.1 является усилением теоремы 2 работы [7]. Данное ниже доказательство в целом следует схеме доказательства этой теоремы и приводится для полноты изложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. 1) Пусть $h > 0$ любое. Положим $P_k = \Omega_1((k+1)h)$, $C_k = \Omega_2((k+1)h)$, $k \geq 0$. Тогда из $b')$, очевидно, вытекает выполнение по крайней мере одного из условий $A')$, $B')$ леммы 1.1. В силу этой леммы числа $\{x_k\}_0^\infty$, определенные из системы уравнений (1.7), неотрицательны. При любом натуральном N и любом $s > 0$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^N e^{-ksh} P_k \Big/ \sum_{k=0}^N e^{-ksh} C_k \\
 &= \sum_{k=0}^N e^{-ksh} x_k - \frac{\sum_{k=1}^N x_k (e^{-(k-1)sh} C_N + \dots + C_{N-k+1})}{\sum_{k=0}^N e^{-ksh} C_k} e^{-(N+1)sh} \\
 &\equiv S_1 - S_2.
 \end{aligned}$$

Здесь $S_2 \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Действительно, поскольку $\{C_k\}_0^\infty$ – невозрастающая последовательность, то

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \sum_{k=1}^N x_k (e^{-(k-1)sh} C_N + e^{-(k-2)sh} C_{N-1} + \dots + C_{N-k+1}) \\
 &\leq C_1 N \sum_{k=1}^N x_k < C_1 N \frac{P_N}{C_N}.
 \end{aligned}$$

В силу первого соотношения в (1.4) имеем $0 < \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksh} C_k < +\infty$. Поэтому в силу второго соотношения

$$0 \leq S_2 < e^{-(N+1)sh} C_1 N \frac{P_N}{C_N} \left(\sum_{k=0}^N e^{-ksh} C_k \right)^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Тем самым при любых $s > 0$ и $h > 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksh} P_k / \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksh} C_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksh} x_k. \quad (1.9)$$

Прежде чем устремить здесь $h \rightarrow +0$, покажем, что при $j = 1, 2$

$$\lim_{h \rightarrow +0} h e^{-sh} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksh} \Omega_j((k+1)h) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \Omega_j(x) dx, \quad (1.10)$$

где интеграл справа сходится ввиду Γ'). С этой целью обозначим

$$\begin{aligned} J_{1,2}(h) &\equiv \int_0^{+\infty} e^{-sx} \Omega_{1,2}(x) dx - h \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k+1)sh} \Omega_{1,2}((k+1)h) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kh}^{(k+1)h} (e^{-sx} - e^{-s(k+1)h}) \Omega_{1,2}(x) dx \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s(k+1)h} \int_{kh}^{(k+1)h} [\Omega_{1,2}(x) - \Omega_{1,2}((k+1)h)] dx. \end{aligned}$$

Затем заметим, что $0 \leq e^{-sx} - e^{-s(k+1)h} \leq e^{-sx} sh$ при $kh \leq x \leq (k+1)h$. Если $\Omega_1(x)$ – невозрастающая функция (вместе с $\Omega_2(x)$), то

$$\begin{aligned} 0 &\leq e^{-s(k+1)h} \int_{kh}^{(k+1)h} [\Omega_{1,2}(x) - \Omega_{1,2}((k+1)h)] dx \\ &\leq e^{-sh} h [\Omega_{1,2}(kh) - \Omega_{1,2}((k+1)h)] \quad \text{при } k \geq 1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 0 &\leq J_{1,2}(h) \leq sh \int_0^{+\infty} e^{-sx} \Omega_{1,2}(x) dx \\ &\quad + e^{-sh} h \sum_{k=1}^{\infty} [\Omega_{1,2}(kh) - \Omega_{1,2}((k+1)h)] + e^{-sh} \int_0^h [\Omega_{1,2}(x) - \Omega_{1,2}(h)] dx \\ &= sh \int_0^{+\infty} e^{-sx} \Omega_{1,2}(x) dx + e^{-sh} \int_0^h \Omega_{1,2}(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Если же $\Omega_1(x)$ – неубывающая функция, то ясно, что

$$\begin{aligned} |J_1(h)| &\leq sh \int_0^{+\infty} e^{-sx} \Omega_1(x) dx + e^{-sh} h \sum_{k=1}^{\infty} [\Omega_1((k+1)h) - \Omega_1(kh)] \\ &\quad + e^{-sh} \int_0^h [\Omega_1(h) - \Omega_1(x)] dx \\ &= sh \int_0^h e^{-sx} \Omega_1(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Соотношение (1.10) доказано. Тем самым, переходом $h \rightarrow +0$ в (1.9) получаем

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \Omega_1(x) dx \Big/ \int_0^{+\infty} e^{-sx} \Omega_2(x) dx = \lim_{h \rightarrow +0} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksh} x_k, \quad s > 0. \quad (1.11)$$

Для вычисления последнего предела положим

$$\alpha_h(x) = \sum_{0 \leq k < x/h} x_k, \quad \alpha_h(0) = 0.$$

Тогда, очевидно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksh} x_k = \int_0^{+\infty} e^{-sx} d\alpha_h(x).$$

Так как $\Omega_2(x)$ не возрастает в $(0, +\infty)$, то

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n \leq x_0 + \frac{C_{n-1}}{C_n} x_1 + \frac{C_{n-2}}{C_n} x_2 + \dots + \frac{C_0}{C_n} x_n = \frac{P_n}{C_n}.$$

Тем самым, если $x > 0$ и n – наибольшее натуральное число, меньшее $[x/h]$, то $(n+1)h < x+h$, и ввиду а')

$$\alpha_h(x) \leq \frac{P_n}{C_n} \leq \frac{\Omega_1(x+h)}{\Omega_2(x+h)} \leq \frac{\Omega_1(x+\Delta)}{\Omega_2(x+\Delta)} \quad \text{при любых } \Delta \geq h. \quad (1.12)$$

Итак, при $h \in (0, 1)$ функции $\alpha_h(x)$ положительны, не убывают и равномерно ограничены в любом отрезке $[0, N]$ ($N \geq 1$). Тем самым с использованием теоремы Хелли и дополнительной диагональной операции придем к последовательности $h_n \downarrow 0$, на которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{h_n}(x) = \alpha(x), \quad 0 \leq x < +\infty,$$

где α – неотрицательная, неубывающая на $[0, +\infty)$ функция, подчиненная (1.5) ввиду (1.12). В силу теоремы Лебега (1.11) принимает вид

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \Omega_1(x) dx \Big/ \int_0^{+\infty} e^{-sx} \Omega_2(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-sx} d\alpha(x), \quad s > 0, \quad (1.13)$$

или, после простого преобразования,

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \left[\Omega_1(x) - \int_0^x \Omega_2(x-t) d\alpha(t) \right] dx \equiv 0, \quad s > 0.$$

Ввиду хорошо известной теоремы единственности для интегралов Лапласа (см., например, [10, следствие 6.2b]) отсюда следует (1.1).

2) Если v' и γ' заменить условиями (1.6), то

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \Omega_{1,2}(x) dx = \frac{1}{s} + \int_0^{+\infty} e^{-sx} [\Omega_{1,2}(x) - 1] dx = \frac{1}{s} + O(1) \quad \text{при } s \rightarrow +0.$$

Ввиду (1.13)

$$\lim_{s \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-sx} d\alpha(x) = 1. \quad (1.14)$$

С другой стороны, в силу (1.6)

$$\int_0^{+\infty} d\alpha(x) = \alpha(+\infty) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Omega_1(x)}{\Omega_2(x)} = 1.$$

Тем самым $\alpha(+\infty) = 1$ в силу (1.14) и теоремы Лебега. Теорема доказана.

Воспользовавшись формулой (1.13), являвшейся основной для доказательства теоремы 1.2, нетрудно установить следующее усиление этой теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Пусть функции $\Omega_{1,2}$ таковы, что $e^{-\varepsilon t} \Omega_{1,2} \in L_1(0, +\infty)$ при любом $\varepsilon > 0$. Далее, пусть существует функция $\gamma(t)$ ограниченной вариации на любом отрезке $[0, R]$ ($R > 0$) такая, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t} d\gamma(t) < +\infty,$$

и пусть существует целое число $n \geq 0$ такое, что для каждого $m = 0, 1, \dots, n-1$

$$\frac{d^m}{dx^m} D_\gamma \Omega_{1,2}(+0) = 0$$

и для любого $\varepsilon > 0$

$$e^{-\varepsilon x} \frac{d^m}{dx^m} D_\gamma \Omega_{1,2}(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad \text{где } D_\gamma \Omega_{1,2}(x) = \int_0^x \Omega_{1,2}(x-t) d\gamma(t).$$

Тогда утверждения теоремы 1.2 (о разрешимости уравнения (1.2) с $\Omega_{1,2}$) остаются верными, если ограничения на $\Omega_{1,2}$, принятые в этой теореме, наложить на $d^n/dx^n D_\gamma \Omega_{1,2}$.

§ 2. Вложение классов $N_\omega \subseteq N$

2.1. Устанавливаемому результату предпошлем некоторые определения, согласованные с [2]. Заданная в $[0, 1)$ функция $\omega(x)$ принадлежит классу Ω^* , если она удовлетворяет условиям (0.3), (0.4) и

$$|\omega_{1,2}(x) - 1| \leq O(x) \quad \text{при } x \rightarrow +0.$$

Класс $N\{\omega\}$ (где $\omega \in \Omega^*$) совпадает с множеством функций f , мероморфных в $|z| < 1$ и представимых в виде отношения

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}, \quad |z| < 1, \quad (2.1)$$

двух функций, голоморфных в $|z| < 1$ и подчиненных условиям

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} [L^{(\omega)} \log |f_{1,2}(re^{i\vartheta})|]^+ d\vartheta < +\infty \quad (2.2)$$

(здесь и всюду ниже $u^+ = \max\{u, 0\}$), где $L^{(\omega)}$ – оператор,

$$L^{(\omega)}\varphi(z) = -\frac{\partial}{\partial|z|} \left\{ |z| \int_0^1 \varphi(tz) dp(t) \right\}, \quad p(t) = t \int_t^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau^2} d\tau.$$

Нижеприводимая теорема является следствием результатов § 1.

ТЕОРЕМА 2.1. Если $\omega_{1,2}(x) \in \Omega^*$ – функции, подчиненные условиям а) и б) теоремы 1.1 при x , достаточно близком к 1, то $N\{\omega_2\} \subseteq N\{\omega_1\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В [2, теорема 4.2] доказано, что если $\omega(x)$ – неубывающая (или строго возрастающая) функция из Ω^* , то $N_\omega \subseteq N$ (или строго $N_\omega \subset N$). Кроме того, если $\omega(x) \in \Omega^*$ не возрастает (или строго убывает) в $(0, 1)$, то $N \subseteq N_\omega$ (или строго $N \subset N_\omega$). С другой стороны, можно убедиться в том, что условия а), б) теоремы 1.1, и даже общие условия, приведенные в замечании 1.1, по существу предполагают неубывание хотя бы одной из функций ω_1, ω_2 . Поэтому теорему 2.1 можно рассматривать лишь как продвижение в задаче вложения классов $N_\omega \subseteq N$.

2.2. **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1.** Как нетрудно показать, любые два класса $N\{\omega\}$ совпадают при совпадении их функций-параметров ω в окрестности точки 1. Тем самым без потери общности можно предполагать, что условия теоремы 2.1 выполнены на всем отрезке $[0, 1)$. По теореме 4.1 из [2] любая мероморфная функция $f \in N\{\omega_2\}$ может быть записана в виде отношения (2.1), где $f_{1,2}$ – голоморфные функции, представимые в виде

$$f_{1,2}(z) = a_{1,2}(z)b_{1,2}(z)c_{1,2}(z), \quad |z| < 1.$$

Здесь $a_{1,2}(z) = z^{\lambda_{1,2}} e^{-\gamma_{1,2} + \lambda_{1,2} K_{\omega_2}}$, где $\lambda_{1,2}$ и $\gamma_{1,2}$ – неотрицательные числа, а $K_{\omega_2} = \int_0^1 [1 - \omega_2(x)] x^{-1} dx$,

$$b_{1,2}(z) = B_{\omega_2}(z, \{z_k^{(1,2)}\}) = \prod_k A_{\omega_2}(z, z_k^{(1,2)})$$

– произведение типа Бляшке М.М. Джрбашяна с нулями $\{z_k^{(1,2)}\} \subset \{|z| < 1\}$ ($z_k^{(1,2)} \neq 0$, $k \geq 1$), подчиненными условию

$$\sum_k \int_{|z_k^{(1,2)}|}^1 \omega_2(x) dx < +\infty.$$

Наконец,

$$c_{1,2}(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{\omega_2}(e^{-i\vartheta} z) d\psi_{1,2}(\vartheta) \right\},$$

где $\psi_{1,2}$ – неубывающие, ограниченные в $[0, 2\pi]$ функции, а

$$S_{\omega_2}(\zeta) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{\Delta_n(\omega_2)}, \quad |\zeta| < 1, \quad \Delta_n(\omega_2) = n \int_0^1 \omega_2(x) x^{n-1} dx, \quad k \geq 1,$$

– ядро типа Шварца, использованное в [1], [2].

Мы докажем, что $f_{1,2} \in N\{\omega_1\}$, откуда, очевидно, будет следовать, что $f \in N\{\omega_1\}$ и $N\{\omega_2\} \subseteq N\{\omega_1\}$. С этой целью мы в отдельности покажем, что функции $a_{1,2}$, $b_{1,2}$ и $c_{1,2}$ принадлежат классу $N\{\omega_1\}$. Тогда $f \in N\{\omega_1\}$ ввиду вложений (4.5) из [2]. В силу формулы (1.36) из [2]

$$L^{(\omega_1)} \log |a_{1,2}(z)| = L^{(\omega_1)} (\lambda_{1,2} K_{\omega_2} + \lambda_{1,2} \log |z|) = K_{\omega_2} (\lambda_{1,2} - 1) + \lambda_{1,2} \log |z|.$$

Отсюда вытекает, что $[L^{(\omega_1)} \log |a_{1,2}(z)|]^+ \leq K_{\omega_2} |\lambda_{1,2} - 1| < +\infty$. Следовательно, имеют место оценки (2.2) и $a_{1,2} \in N\{\omega_1\}$. Далее, по формулам (4.22), (4.23) из [2] при $|z| < |\zeta| < 1$

$$A_{\omega_2}(z, \zeta) = \exp \left\{ - \int_{|\zeta|}^1 \left[C_{\omega_2} \left(\frac{z\bar{\zeta}}{x} \right) + C_{\omega_2} \left(\frac{zx}{\zeta} \right) - 1 \right] \frac{\omega_2(x)}{x} dx \right\}, \quad (2.3)$$

где

$$C_{\omega_2}(\zeta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{\Delta_n(\omega_2)}, \quad |\zeta| < 1.$$

В силу утверждения 3) теоремы 1.1 и формулы (1.16) из [2]

$$L^{(\omega_1)} C_{\omega_2}(\alpha z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n z^n \lambda_n(\beta) = L\{\beta\} \left(\frac{1}{1 - \alpha z} \right), \quad |\alpha z| < 1,$$

где полагаем

$$L\{\beta\}\varphi(z) = - \int_0^1 \varphi(tz) d\beta(t).$$

Следовательно, ввиду (2.3)

$$\begin{aligned} L^{(\omega_1)} \log A_{\omega_2}(z, \zeta) &= L\{\beta\} \left\{ - \int_{|\zeta|}^1 \left[\left(1 - \frac{z\bar{\zeta}}{x}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{zx}{\zeta}\right)^{-1} - 1 \right] \frac{\omega_2(x)}{x} dx \right\} \\ &= L\{\beta\} L^{(\omega_2)} \log A_{\omega_2}(z, \zeta), \quad |z| < |\zeta| < 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В силу леммы 2.1 из [2] функция $L^{(\omega_2)} \log A_{\omega_2}(z, \zeta)$ голоморфна в $|z| < 1$, вне отрезка $[\zeta, e^{i \arg \zeta}]$. Поэтому, как нетрудно доказать, в той же области голоморфна функция $L^{(\omega_1)} \log A_{\omega_2}(z, \zeta)$, представляемая там в виде (2.4). Аналогично формуле (2.27) из [2], при $|z| \neq |\zeta_k|$ ($k \geq 1$, $0 < r < 1$) имеем

$$L^{(\omega_1)} \log b_{1,2}(z) = L^{(\omega_1)} \log B_{\omega_2}(z, \{z_k^{(1,2)}\}) = L\{\beta\} \sum_k L_{\omega_2} \log A_{\omega_2}(z, z_k^{(1,2)}).$$

Воспользовавшись оценкой (3.12) из [2], при $r \in (0, 1)$ получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [L^{(\omega_1)} \log |b_{1,2}(re^{i\vartheta})|]^+ d\vartheta \\ &\leq L\{\beta\} \sum_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |L^{(\omega_2)} \log |A_{\omega_2}(re^{i\vartheta}, z_k^{(1,2)})|| d\vartheta \\ &\leq C(r_0) \left(- \int_0^1 d\beta(t) \right) \sum_k \int_{|z_k^{(1,2)}|}^1 \omega_2(x) dx = C(r_0) \sum_k \int_{|z_k^{(1,2)}|}^1 \omega_2(x) < +\infty, \end{aligned}$$

где $C(r_0) > 0$ – постоянная, зависящая лишь от $r_0 = \min_{k \geq 1} |z_k|$ (> 0). Тем самым $b_{1,2} \in N\{\omega_1\}$. Наконец, ясно, что

$$L^{(\omega_1)} \log |c_{1,2}(z)| = -L\{\beta\} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|1 - ze^{-i\vartheta}|^2} d\psi_{1,2}(\vartheta) \leq 0, \quad |z| < 1.$$

Тем самым $[L^{(\omega_1)} \log |c_{1,2}(z)|]^+ = 0$ в $|z| < 1$ и, следовательно, $c_{1,2} \in N_{\omega_1}$.

§ 3. Вложение классов $N\{\omega\} \supseteq N$

3.1. Теорема 2.5 из [9] непосредственно связывает решение уравнения Вольterra (1.1) с вложением наиболее общих классов $N_\omega \supseteq N$, состоящих из δ -субгармонических функций. Решение уравнения (1.1) и вложение $N_{\omega_2} \subseteq N_{\omega_1}$ легко могут быть сведены к случаю, рассмотренному в теореме 1.1, если ω_1 и ω_2 убывают в $(0, 1)$, но при некотором $p \geq 1$ условиям этой теоремы удовлетворяют их производные $\omega_1^{(p)}$ и $\omega_2^{(p)}$. При этом очевидно, что поведение по крайней мере одной из функций ω_1, ω_2 по существу должно быть подобно $(1 - x)^\alpha$ ($\alpha > 0$). В общем

же случае, т.е. при любых убывающих функциях ω_1, ω_2 , на пути приведенных выше рассуждений, приводящих к решению уравнения (1.1) (т.е. доказательству теоремы 1.1), возникают существенные осложнения. Как нетрудно убедиться, при этом условий о выпуклости функций ω_1, ω_2 , с одновременным убыванием отношения ω_1/ω_2 , не может быть достаточно для разрешимости уравнения (1.1), даже в случае, когда $\omega_2(x) = (1-x)^\alpha$ ($\alpha > 0$), поскольку оказываются неизбежными определенные дифференциальные свойства функции ω_1 . Далее, бесполезны также хорошо известные результаты об обращении преобразования свертки (1.2), ибо те предполагают использование функций Ω_2 (ядер) особого, явного вида. Поэтому ниже будет применен другой подход, в обход решения уравнения (1.1).

Мы будем рассматривать задачу вложения для некоторых подклассов из N_ω , меры Рисса δ -субгармонических функций которых имеют степенной рост вблизи границы $|z| < 1$. Согласно [9] Ω_s – множество функций ω , которые:

- 1) положительны, не убывают и непрерывно дифференцируемы на $[0, 1]$;
- 2) $\omega(0) = 1$, и существует число $\beta > 0$ такое, что $\omega(x) \leq O((1-x)^\beta)$ при $x \rightarrow 1-0$.

Далее, N_ω – множество δ -субгармонических в $|z| < 1$ функций $u(z)$ таких, что ограничены неванлинновские характеристики функций

$$L^{(\omega)}u(z) = - \int_0^1 u(tz) d\omega(t), \quad |z| < 1,$$

которые тоже δ -субгармоничны в $|z| < 1$. Класс N_ω совпадает с множеством функций u , представимых в виде разностей:

$$u(z) = u_1(z) - u_2(z), \quad |z| < 1,$$

двух субгармонических в $|z| < 1$ функций, подчиненных условиям

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} [L^{(\omega)}u_{1,2}(re^{i\vartheta})]^+ d\vartheta < +\infty. \quad (3.1)$$

Мера Рисса ν любой функции $u \in N_\omega$ подчинена условию

$$\iint_{|\zeta| < 1} \left(\int_{|\zeta|}^1 \omega(x) dx \right) |d\nu(\zeta)| < +\infty. \quad (3.2)$$

Теоретико-множественная сумма классов N_ω , взятая по всем $\omega \in \Omega_s$, совпадает с множеством всех δ -субгармонических в $|z| < 1$ функций. Явная связь между мерами Рисса функций $L^{(\omega)}u(z)$ и $u(z)$ дана в [9] формулой (1.12).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Обозначим через N_ω^α множество тех δ -субгармонических функций $u \in N_\omega$ ($\omega \in \Omega_s$), меры Рисса ν которых удовлетворяют условию

$$\iint_{|\zeta| < 1} (1 - |\zeta|)^{1+\alpha} |d\nu(\zeta)| < +\infty, \quad (3.3)$$

где число $\alpha \geq 0$ такое, что для целого $p \geq 0$, найденного из $p - 1 < \alpha \leq p$, выполнены условия:

- а) $\omega^{(p)}$ непрерывна, монотонна и не обращается в нуль на $[0, 1]$;
- б) $\omega^{(p)} \in L_1(\Delta, 1)$ при любом $\Delta \in (0, 1)$ и $\omega^{(n)}(1 - 0) = 0$ при $n = 0, 1, \dots, p - 1$;
- в) $|\omega^{(p)}(x)(1 - x)^{p-\alpha}| \searrow$ в $(0, 1)$.

Легко видеть, что условия а)–в) имеют место при $\alpha = 0$. С другой стороны, не трудно показать, что условие (3.3) более ограничительное, чем (3.2). Наша цель – доказать нижеприводимую теорему вложения для подклассов $N_\omega^\alpha \subseteq N_\omega$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\omega_2, \omega_1 \in \Omega_s$ – любые функции. Тогда $N_{\omega_2}^\alpha \subseteq N_{\omega_1}$, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $|\omega_2'(x)| \nearrow$ при $x \in [0, 1)$, достаточно близких к 1, а ω_1 такова, что

$$\frac{\omega_1'(x)}{\omega_2'(x)} \leq C_1(1 - x)^\varepsilon, \quad \Delta < x < 1,$$

при некоторых постоянных $C_1 > 0$, $\Delta > 0$ и $\varepsilon > 1$;

- 2) условие 1) выполнено для $0 < \varepsilon \leq 1$, но существует постоянная $C_2 > 0$ такая, что

$$1 - \frac{\Delta_k(\omega_2)}{\Delta_{k-1}(\omega_2)} \leq \frac{C_2}{k}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (3.4)$$

- 3) $|\omega_2'(x)| \searrow 0$ при $x \rightarrow 1 - 0$, а ω_1 такова, что

$$\frac{\omega_1'(x)}{\omega_2'(x + \delta(x))} \leq C_3[\delta(x)]^\varepsilon, \quad \Delta < x < 1,$$

при некоторых постоянных $C_3 > 0$, $\Delta > 0$, $\varepsilon > 1$ и какой-либо функции $\delta(x)$ ($0 < \delta(x) < 1 - x$);

- 4) условие 3) выполнено для $0 < \varepsilon \leq 1$, но выполнено также (3.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Условиям 1)–4) теоремы 2.2 удовлетворяет основная шкала функций

$$\omega_2(x) = (1 - x)^\alpha, \quad \omega_1(x) = (1 - x)^\beta, \quad 0 < \alpha < \beta < +\infty.$$

3.2. Доказательству теоремы 3.1 предположим необходимые определения и леммы. **Функция**

$$\pi_\alpha(z, \zeta) = \exp \left\{ - \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{(1-\frac{z}{\zeta}x)^{1+\alpha}} \frac{dx}{x} \right\}, \quad |z|, |\zeta| < 1, \quad \alpha > -1, \quad (3.5)$$

– первоначальное произведение типа Бляшке, введенное М.М. Джрбашьяном [11], [12] в 1945 г. Эта функция голоморфна в $|z| < 1$ и имеет нуль, притом первого порядка, только в точке $z = \zeta$.

ЛЕММА 3.1. Пусть ω – любая функция из Ω_s . Тогда при $|z|, |\zeta| < 1$

$$\log |A_\omega(z, \zeta)| = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} S_\omega(e^{-i\vartheta} z) L^{(\omega)} \log \left| \frac{\zeta - e^{i\vartheta}}{1 - \bar{\zeta} e^{i\vartheta}} \right| d\vartheta + \log \left| \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z} \right| \quad (3.6)$$

и при любом $\alpha > -1$ и любых $|z|, |\zeta| < 1$

$$\begin{aligned} \log |A_\omega(z, \zeta)| \\ = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} S_\omega(e^{-i\vartheta} z) L^{(\omega)} \log |\pi_\alpha(e^{i\vartheta}, \zeta)| d\vartheta + \log |\pi_\alpha(z, \zeta)|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|\zeta| < 1$, то функция $\log |\zeta/(1 - \bar{\zeta}z)|$ гармонична в $|z| < 1/|\zeta|$. Следовательно, она принадлежит N_ω и

$$\log \left| \frac{\zeta}{1 - \bar{\zeta}z} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} S_\omega(e^{-i\vartheta} z) L^{(\omega)} \log \left| \frac{\zeta}{1 - \bar{\zeta} e^{-i\vartheta}} \right| d\vartheta, \quad |z| < 1.$$

Равенство (3.6) следует из формул (1.56), (1.56') и (1.64) работы [2]. Для доказательства (3.7) заметим, что ввиду тех же формул

$$\begin{aligned} \log |A_\omega(z, \zeta)| = & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} S_\omega(e^{-i\vartheta} z) L^{(\omega)} \log |\pi_\alpha(e^{-i\vartheta}, \zeta)| d\vartheta \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} S_\omega(e^{-i\vartheta} z) L^{(\omega)} \Phi_\alpha(e^{-i\vartheta}, \zeta) d\vartheta + \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right|, \end{aligned}$$

где $\Phi_\alpha(z, \zeta) = \log |1 - z/\zeta| - \log |\pi_\alpha(z, \zeta)|$ – гармоническая в $|z| < 1/|\zeta|$ функция. Если покажем, что $\Phi_\alpha \in N_\omega$, то, очевидно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} S_\omega(e^{-i\vartheta} z) L^{(\omega)} \Phi_\alpha(e^{-i\vartheta}, \zeta) d\vartheta = \Phi_\alpha(z, \zeta), \quad |z| < 1,$$

и формула (3.7) будет установлена. Покажем, что, более того, функция $[\Phi_\alpha(z, \zeta)]^+$ ограничена в $|z| < 1$. С этой целью заметим, что $\log |\pi_0(z, \zeta)| = \log |1 - z/\zeta| + \log |\zeta|^2/|1 - z\bar{\zeta}|$. Тем самым

$$[\Phi_\alpha(z, \zeta)]^+ \leq \log \left| \frac{\pi_0(z, \zeta)}{\pi_\alpha(z, \zeta)} \right| + \log \frac{2}{|\zeta|^2}.$$

При $z = \sigma\zeta$ ($0 < \sigma < 1$) заменой переменной $y = (1-x)/(1-\sigma x)$ в представлении, непосредственно следующем из (3.5), получаем

$$\frac{\pi_0(z, \zeta)}{\pi_\alpha(z, \zeta)} = \exp \left\{ - \int_0^1 [1 - y^\alpha] dy + \int_0^{|\zeta|^2} \left[1 - \left(\frac{1-x}{1-\sigma x} \right)^\alpha \right] \frac{dx}{(1-\sigma x)x} \right\}.$$

Воспользовавшись единственностью голоморфной функции, приходим к соответствующему представлению, а затем к оценке

$$[\Phi_\alpha(z, \zeta)]^+ \leq \int_0^{|\zeta|^2} \left| 1 - \left(\frac{1-x}{1-\frac{\zeta}{\zeta}x} \right)^\alpha \right| \frac{dx}{|1-\frac{\zeta}{\zeta}x|x} + \log \frac{2}{|\zeta|^2} + C_\alpha, \quad (3.8)$$

где $C_\alpha = \int_0^1 [y^\alpha - 1]^+ dy$. Теперь заметим, что $|1 - (1-a)^\alpha| < 2|\alpha a|$ при $|a| < \delta_\alpha < 1$. Одновременно

$$1 - \left(\frac{1-x}{1-\frac{\zeta}{\zeta}x} \right)^\alpha = 1 - \left(1 - \frac{1-\frac{\zeta}{\zeta}}{1-\frac{\zeta}{\zeta}x} x \right)^\alpha, \quad 0 < x < |\zeta|^2,$$

где $|1 - \frac{\zeta}{\zeta}x| \leq (1 + |\zeta|)x / ((1 - |\zeta|)|\zeta|)$. Поэтому

$$\left| 1 - \left(\frac{1-x}{1-\frac{\zeta}{\zeta}x} \right)^\alpha \right| \leq 2|\alpha| \left| \frac{1-\frac{\zeta}{\zeta}}{1-\frac{\zeta}{\zeta}x} \right| x, \quad 0 < x < \delta_\alpha \frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|} |\zeta|.$$

Пользуясь этим представлением, из (3.8) получаем $[\Phi_\alpha(z, \zeta)]^+ \leq M_{\alpha, |\zeta|} < +\infty$, $|z| < 1$, где $M_{\alpha, |\zeta|}$ — постоянная, зависящая лишь от α и $|\zeta|$.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\omega \in \Omega_s$, и пусть $\alpha \geq 0$ — число из определения 3.1. Тогда при $0 < \rho \leq |\zeta| < 1$ справедливо неравенство

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |L^{(\omega)} \log |\pi_\alpha(e^{i\vartheta}, \zeta)|| d\vartheta \leq C_{\alpha, \omega, \rho} (1 - |\zeta|)^{1+\alpha}, \quad (3.9)$$

где $C_{\alpha, \omega, \rho}$ — постоянная, зависящая лишь от α , ω и ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha > 0$. Поскольку функции $\omega_1 = |\omega^{(p)}|$ и $\omega_2(x) = (1-x)^{\alpha-p}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1, существует функция β , неубывающая в $(0, 1)$ и такая, что $\beta(1) = 0$, $\beta(x) \leq |\omega^{(p)}(x)(1-x)^{p-\alpha}|$, $0 < x < 1$, и

$$\omega^{(p)}(x) = -(\text{sign } \omega^{(p)}) \int_x^1 \left(1 - \frac{x}{t} \right)^{\alpha-p} d\beta(x), \quad 0 < x < 1.$$

Интегрируя по частям $p-1$ раз, получим

$$\omega'(x) = \frac{(-1)^p}{\Gamma(p-1)} \int_x^1 (t-x)^{p-2} \omega^{(p)}(t) dt.$$

Далее, подставляя сюда представление $\omega^{(p)}$, найдем

$$\omega'(x) = - \int_x^1 \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} d\tilde{\beta}(t), \quad (3.10)$$

где

$$\tilde{\beta}(t) = (-1)^{p+1} (\text{sign } \omega^{(p)}) \frac{\Gamma(1+\alpha-p)}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 \sigma^{p-1} d\beta(\sigma).$$

Тем самым

$$L^{(\omega)} \log |\pi_\alpha(e^{i\vartheta}, \zeta)| = \int_0^1 J(\sigma) \sigma d\tilde{\beta}(\sigma), \quad J(\sigma) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} \log |\pi_\alpha(t\sigma e^{i\vartheta}, \zeta)| dt.$$

Полагая $\vartheta - \arg \zeta = \varphi$ и пользуясь (3.5), нетрудно вычислить

$$\begin{aligned} J(\sigma) &= -\frac{1}{\alpha} \text{Re} \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{1 - e^{i\varphi} \frac{\sigma}{|\zeta|} x} \frac{dx}{x} \\ &= -\frac{1}{2\alpha} \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \frac{1}{2\alpha} \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{1 - \left(\frac{\sigma x}{|\zeta|}\right)^2}{\left|e^{i\varphi} - \frac{\sigma x}{|\zeta|}\right|^2} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I \leq \frac{1}{\alpha} \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx \int_0^1 \sigma |d\tilde{\beta}(\sigma)| \leq \frac{\Gamma(1+\alpha-p)}{\Gamma(2+\alpha)} \frac{2^{1+\alpha}}{|\zeta|^2} |\omega^{(p)}(0)| (1-|\zeta|)^{1+\alpha}.$$

При $\alpha = 0$ доказательство аналогично.

3.3. Полагая, что $\gamma(x) \geq 0$ – измеримая функция в $(0, 1)$, введем A_γ как класс тех функций u , субгармонических в $|z| < 1$, для которых

$$\iint_{|z|<1} u^+(z) \gamma(|z|) dm_2(z) < +\infty, \quad (3.11)$$

где m_2 – плоская мера Лебега.

ЛЕММА 3.3. Если $\omega \in \Omega_s$, $\alpha \geq 0$ – число из определения 2.1, а ν – неотрицательная борелевская мера, подчиненная условию (3.3), то потенциал типа Грина

$$I(z) = \iint_{|\zeta|<1} \log |A_\omega(z, \zeta)| d\nu(\zeta) \quad (3.12)$$

является субгармонической в $|z| < 1$ функцией и для

$$\gamma(x) = - \int_x^1 (t-x)^{\varepsilon-1} d\omega(t), \quad \varepsilon > 0,$$

этот потенциал принадлежит классу A_γ при любом $\varepsilon > 1$, а если выполнено условие (3.4) – то при любом $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (3.10), легко прийти к аналогичному представлению для ω , откуда следует, что

$$\int_{|\zeta|}^1 \omega(x) dx \leq C_{\alpha, \omega} (1 - |\zeta|)^{1+\alpha}, \quad |\zeta| < 1,$$

где $C_{\alpha, \omega}$ – постоянная, зависящая лишь от α и ω . Следовательно, из (3.3) вытекает условие (3.2), обеспечивающее сходимость интеграла (3.12) (см. [9, теорема 1.1]). По той же теореме δ -субгармонична в $|z| < 1$ функция I . Искомое включение будет следовать, если мы покажем, что

$$J_j = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 I_j^+(re^{i\vartheta}) \gamma(r) dr < +\infty, \quad j = 1, 2,$$

где

$$I_1(z) = \iint_{|\zeta| \leq 1/2} \log |A_\omega(z, \zeta)| d\nu(\zeta), \quad I_2(z) = \iint_{1/2 < |\zeta| < 1} \log |A_\omega(z, \zeta)| d\nu(\zeta).$$

Предположим сначала, что $\varepsilon > 1$. По формуле (3.6) при $|z|, |\zeta| < 1$ имеем

$$\log^+ |A_\omega(z, \zeta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_\omega(e^{-i\vartheta} z)| L^{(\omega)} \left| \log \left| \frac{\zeta - e^{i\vartheta}}{1 - \bar{\zeta} e^{i\vartheta}} \right| \right| d\vartheta. \quad (3.13)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J_1 &\leq M_\omega \int_0^1 \gamma(r) \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{\Delta_k} \right\} dr \iint_{|\zeta| \leq 1/2} d\nu(\zeta) \\ &\leq \frac{3M_\omega}{\varepsilon - 1} \iint_{|\zeta| \leq 1/2} d\nu(\zeta) < +\infty, \end{aligned}$$

где $M_\omega = \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 \log \frac{2}{|x-t|} |d\omega(t)| < +\infty$. Пусть теперь $\varepsilon > 0$ – любое и выполнено (3.4). Тогда по (3.13)

$$\begin{aligned} J_1 &\leq M_\omega \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{|1 - re^{i\vartheta}|} \int_0^1 |S_\omega(re^{i\vartheta})(1 - re^{i\vartheta})| \gamma(r) dr \iint_{|\zeta| \leq 1/2} d\nu(\zeta) \\ &\leq 2\pi M_\omega \int_0^1 \log \frac{2}{1-r} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\Delta_k} - \frac{1}{\Delta_{k-1}} \right) r^k \right\} \gamma(r) dr \iint_{|\zeta| \leq 1/2} d\nu(\zeta) \\ &\leq 2\pi M_\omega \int_0^1 \log \frac{2}{x} \left(1 + C_2 \log \frac{1}{x} \right) x^{\varepsilon-1} dx \iint_{|\zeta| \leq 1/2} d\nu(\zeta) < +\infty. \end{aligned}$$

Для оценки J_2 заметим, что ввиду (3.7) и оценки типа Пулди, установленной в [13], при $|z|, |\zeta| < 1$

$$\log^+ |A_\omega(z, \zeta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_\omega(e^{-i\vartheta} z)| L^{(\omega)} \log |\pi_\alpha(e^{i\vartheta}, \zeta)| d\vartheta + C_\alpha \left(\frac{1 - |\zeta|}{|1 - \bar{\zeta} z|} \right)^{1+\alpha},$$

где $C_\alpha \in (0, +\infty)$ – постоянная, зависящая только от α . Тем самым $J_2 \leq J_2^{(1)} + J_2^{(2)}$, где

$$\begin{aligned} J_2^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{1/2 < |\zeta| < 1} d\nu(\zeta) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \gamma(r) dr \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} |S_\omega(re^{i(\varphi-\vartheta)})| |L^{(\omega)} \log |\pi_\alpha(e^{i\vartheta}, \zeta)|| d\vartheta, \\ J_2^{(2)} &= C_\alpha \iint_{1/2 < |\zeta| < 1} (1 - |\zeta|)^{1+\alpha} d\nu(\zeta) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\gamma(r) dr}{|1 - \bar{\zeta} r e^{i\varphi}|^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается показать, что $J_2^{(1)}$ и $J_2^{(2)}$ – конечные числа. По (3.10) при любом $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \frac{\gamma(r) dr}{|1 - |\zeta| r e^{i\vartheta}|^{1+\alpha}} &\leq C'_\alpha \int_0^1 \frac{\gamma(r) dr}{(1-r)^\alpha} \\ &\leq C'_\alpha \int_0^1 |d\tilde{\beta}(\sigma)| \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} dt \int_0^1 \frac{(1-x)^{\varepsilon-1}}{(1-tx)^\alpha} dx, \end{aligned}$$

где $C'_\alpha > 0$ – постоянная, зависящая от α . Как можно проверить,

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^{\varepsilon-1}}{(1-tx)^\alpha} dx = C_{\alpha, \varepsilon} \begin{cases} \frac{1}{(1-t)^{\alpha-\varepsilon}} & \text{при } \alpha > \varepsilon, \\ 1 + \log \frac{1}{1-t} & \text{при } \alpha = \varepsilon, \\ 1 & \text{при } \alpha < \varepsilon. \end{cases}$$

Следовательно, $J_2^{(2)} < +\infty$. Для оценки $J_2^{(1)}$ достаточно воспользоваться (3.9) и повторить рассуждения, приведшие выше к оценке J_1 .

3.4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Любую δ -субгармоническую функцию из $N_{\omega_2}^\alpha$, очевидно, можно представить в виде разности двух субгармонических функций, удовлетворяющих условию (3.1) и таких, что их массы подчинены (3.3). Сначала мы докажем, что любая такая субгармоническая функция u принадлежит A_γ , а затем докажем вложение $A_\gamma \subseteq N_{\omega_1}$.

Ввиду леммы 2.3 и теоремы 2.3 работы [9] для доказательства включения $u \in A_\gamma$ достаточно показать, что при любой неубывающей на $[0, 2\pi]$ функции ψ

$$\mathcal{J}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\omega(e^{-i\vartheta} z) d\psi(\vartheta) \in A_\gamma.$$

Это включение нетрудно проверить, повторив рассуждения, приведшие к оценке J_1 в доказательстве леммы 3.3. Для доказательства вложения $A_\gamma \subseteq N_{\omega_1}$ рассмотрим в отдельности два случая: 1), 2). Поскольку

$$\gamma(x) \geq |\omega'_2(x)| \int_x^1 (t-x)^{\varepsilon-1} dt = \frac{1}{\varepsilon} (1-x)^\varepsilon |\omega'_2(x)|, \quad 0 < x < 1,$$

то можно выбрать постоянную $C'_1 > 0$ такую, что $\gamma(x) \geq C'_1 |\omega'_1(x)|$, $x \in (0, 1)$. Тем самым $A_\gamma \subseteq N_{\omega_1}$. Теперь рассмотрим случаи 3), 4). Очевидно,

$$\gamma(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_x^1 (t-x)^\varepsilon |d\omega'_2(t)| \geq \frac{[\delta(x)]^\varepsilon}{\varepsilon} \int_{x+\delta(x)}^1 |d\omega'_2(t)| = \frac{1}{\varepsilon} [\delta(x)]^\varepsilon |\omega'_2(x+\delta(x))|.$$

Следовательно, можно выбрать постоянную $C'_2 > 0$ такую, что $\gamma(x) \geq C'_2 |\omega'_1(x)|$ ($0 < x < 1$). Повторив вышеприведенное рассуждение, приходим к вложению $A_\gamma \subseteq N_{\omega_1}$.

Список литературы

1. Джрбашян М. М. Обобщенный оператор Римана–Лиувилля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. № 5. С. 1075–1111.
2. Джрбашян М. М. Теория факторизации функций, мероморфных в круге // Матем. сб. 1969. Т. 79(121). № 4(8). С. 517–615.
3. Джрбашян М. М., Захарян В. С. Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. М.: Наука, 1993.
4. Džrbasjan M. M. Theory of factorization and boundary properties of functions meromorphic in the disk // Proc. of the Int. Congr. of Math. Vancouver. 1974. P. 197–202.
5. Джрбашян М. М. Некоторые открытые вопросы теории представлений аналитических функций // Заметки науч. сем. ЛОМИ. 1978. № 81. С. 238–241.
6. Džrbasjan M. M. Some open problems in the theory of representations of analytic functions // Lecture Notes in Math. 1984. V. 1043. P. 522–526.
7. Островский И. В. Об одной проблеме моментов Хаусдорфа // Изв. АН Армении. Математика. 1990. Т. 25. № 1. С. 91–96.
8. Jerbashian A. M. An extension of the factorization theory of M. M. Djrbashian // Theory of Functions and Applications. Yerevan: Louys, 1995. P. 65–74.
9. Джрбашян А. М. Расширение теории факторизации М. М. Джрбашяна // Изв. НАН Армении. Математика. 1995. Т. 30. № 2. С. 47–75.
10. Widder D. V. The Laplace Transform. Princeton Univ. Press, 1946.
11. Джрбашян М. М. О представимости некоторых классов мероморфных функций в единичном круге // ДАН АрмССР. 1945. Т. 3. № 1. С. 3–9.
12. Джрбашян М. М. К проблеме представимости аналитических функций: Сообщ. института матем. и мех. АН АрмССР. 1948. Вып. 2. С. 3–40.
13. Шамоян Ф. А. Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста // Изв. АН АрмССР. Математика. 1978. Т. 13. № 5–6. С. 405–422.

Институт математики
Национальной академии наук Армении

Поступило в редакцию
15.XII.1997