Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Погруженные многоугольники и их диагональные триангуляции, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 1, 67–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/im534>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:02:58

УДК 514.77+512.816.4+517.924.8

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Погруженные многоугольники и их диагональные триангуляции

Введено понятие “погруженного многоугольника” – естественное обобщение обычного плоского многоугольника, ограниченного замкнутой (вложенной) ломаной, для случая, когда эта ломаная имеет самопересечения. Доказано, что каждый погруженный многоугольник допускает диагональную триангуляцию и что каждая вложенная монотонная ломаная, построенная до замкнутой, ограничивает некоторый погруженный многоугольник. Кроме того, для каждого плоского невырожденного линейного дерева построен содержащий его погруженный многоугольник.

Библиография: 18 наименований.

Введение

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы определить понятие “погруженного многоугольника” – естественное обобщение обычного плоского многоугольника, ограниченного замкнутой (вложенной) ломаной, для случая, когда эта ломаная имеет самопересечения. В качестве такого обобщения предлагается рассматривать некоторые классы кусочно аффинных отображений многоугольников в плоскость (для обычного многоугольника соответствующее отображение – это тождественное вложение).

Исследование свойств введенных в рассмотрение погруженных многоугольников показало, что они во многом аналогичны обычным многоугольникам; например, для них естественно определяются стороны, углы в вершинах, диагонали и диагональные триангуляции (см. § 2), остается справедливой теорема о существовании диагональной триангуляции (теорема 3.1). Существуют, разумеется, и значительные отличия. Например, одна и та же ломаная ограничивает, вообще говоря, несколько погруженных многоугольников.

Интересно было бы получить ответ на следующий вопрос: какие замкнутые ломаные ограничивают погруженные многоугольники? В настоящей работе показано, что ломаная, полученная замыканием вложенной монотонной ломаной, всегда ограничивает некоторый погруженный многоугольник (вообще говоря, не единственный); см. теорему 4.1. Более сложный случай так называемых петельных ломаных рассматривается в работе [1].

Наш интерес к погруженным многоугольникам восходит к вопросам, связанным с проблемой Штейнера, в частности с отношением Штейнера. Напомним, что проблема Штейнера для плоскости состоит в поиске кратчайшего

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 04-01-00682, 03-01-00503, 05-01-22002), Программ Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-4578.2006.1) и Минобрнауки России (грант РНП.2.1.1.7988), а также Программы Эйлера ДААД.

связного графа G , множество вершин которого содержит данное конечное подмножество M точек евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ (подробный обзор о проблеме Штейнера можно найти, например, в [2]). Более точно, если задано конечное подмножество $M \subset \mathbb{R}^2$, то определена величина

$$\text{SMT}(M) = \inf\{\ell(G) \mid G = (V, E) - \text{связный плоский граф, } M \subset V \subset \mathbb{R}^2\},$$

где $\ell(G)$ – длина плоского графа G , т. е. сумма длин его ребер – плоских кривых. Граф G_0 такой, что $\text{SMT}(M) = \ell(G_0)$, всегда существует, является деревом и называется *минимальным деревом Штейнера с границей M* . Вершины минимального дерева Штейнера, не входящие в граничное множество, называются *точками Штейнера*. Важность появления дополнительных вершин (т. е. точек Штейнера) для минимизации длины графа, затягивающего данное граничное множество, была известна уже Ферма [3] и ясна из следующего примера. Пусть $M = \{A, B, C\}$ – множество вершин правильного треугольника, $|AB| = 1$ и S – центр треугольника ABC . Тогда минимальное дерево Штейнера для M – это граф G_0 , состоящий из трех ребер, соединяющих дополнительную вершину S с вершинами треугольника. Длина G_0 равна $\sqrt{3}$. Если не добавлять дополнительные вершины, т. е. рассматривать только связные графы, множество вершин которых совпадает с M , то кратчайший (в этом более узком классе) граф на M , очевидно, имеет длину $2 > \sqrt{3}$ (каждый такой граф состоит из двух сторон треугольника ABC).

Локальное устройство минимального дерева Штейнера Γ , затягивающего множество M , легко описывается. Ребра Γ – суть прямолинейные отрезки, встречающиеся под углами, не меньшими, чем 120° , поэтому степени вершин дерева Γ не превосходят 3. При этом все вершины Γ степени 1 принадлежат M . Более того, без ограничения общности можно предполагать, что множество M состоит в точности из вершин дерева Γ степени 1 и 2. Плоское дерево, удовлетворяющее перечисленным свойствам, называется *локально минимальным*.

Если разрезать локально минимальное дерево Γ по его (граничным) вершинам степени 2, то оно распадется на так называемые *невыврожденные компоненты* – локально минимальные бинарные деревья, все вершины степени 1 которых принадлежат M . Дерево Γ называется *невыврожденным*, если совпадает со своей единственной невыврожденной компонентой, т. е. не имеет вершин степени 2.

Глобальная структура минимального дерева Штейнера с трудом поддается описанию. Именно с этим, в первую очередь, связана так называемая NP -трудность проблемы Штейнера [4]. Последнее, говоря неформально, означает, что “скорее всего” не существует полиномиального алгоритма ее решения. Причина этого состоит в том, что имеется экспоненциально много возможных комбинаторных структур локально минимальных деревьев (с дополнительными вершинами), затягивающих данное граничное множество. Существующие алгоритмы (см. [5], [6] или [2]) позволяют находить решение проблемы Штейнера лишь для граничных множеств, состоящих из нескольких десятков точек. На практике, однако, приходится решать проблему Штейнера для граничных множеств, состоящих из нескольких сотен элементов. Имеются два принципиально разных подхода: или попытаться сильно сократить перебор возможных

графов-кандидатов исходя из геометрических свойств конкретного граничного множества M (см. подробности в [2]), или заменить точное решение задачи на легко ищущееся приближенное решение. В последнем случае в качестве приближенного решения обычно выбирают так называемое *минимальное остовное дерево* на множестве M , т.е. кратчайший связный граф, множество вершин которого совпадает с M (исключение из рассмотрения дополнительных вершин приводит к тому, что минимальное остовное дерево может быть найдено с помощью хорошо известных полиномиальных алгоритмов; см. подробности, например, в [7], или в [8]–[10]). Длину минимального остовного дерева на множестве M обозначим через $\text{MST}(M)$.

Используя приближенное решение, важно представлять себе, насколько сильно оно может отличаться от точного. В качестве меры возможной ошибки Е. Н. Гилберт и Г. О. Поллак [11] предложили следующую характеристику, которая называется *отношением Штейнера* (для плоскости $\mathbb{R}^2$):

$$m(\mathbb{R}^2) = \inf \left\{ \frac{\text{SMT}(M)}{\text{MST}(M)} \mid M - \text{конечное подмножество в } \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Ясно, что это число характеризует относительную ошибку рассматриваемого приближенного решения в наихудшей возможной ситуации.

Задача вычисления точного значения отношения Штейнера оказывается чрезвычайно сложной. Еще в 1968 г. Гилберт и Поллак [11] высказали гипотезу, что отношение Штейнера достигается на множестве вершин правильного треугольника и равно $\sqrt{3}/2 \approx 0.866025$. (Отметим, что неравенство $m(\mathbb{R}^2) \leq \sqrt{3}/2$ очевидно, поэтому на самом деле требуется доказать противоположную оценку $m(\mathbb{R}^2) \geq \sqrt{3}/2$). Эта гипотеза до сих пор не доказана, хотя получен ряд довольно точных оценок снизу, убеждающих в справедливости гипотезы Гилберта–Поллака. Так, по сообщению [11] Моор установил справедливость неравенства $0.5 \leq m(\mathbb{R}^2)$, которое, впрочем, имеет место для любого метрического пространства (определение отношения Штейнера метрического пространства см., например, в [2]). Затем оценка последовательно улучшалась:

1) в 1977 г. Р. Л. Грэхем и Ф. К. Хванг [12] получили

$$m(\mathbb{R}^2) \geq 1/\sqrt{3} \approx 0.57735;$$

2) в 1978 г. Ф. Р. К. Чанг и Ф. К. Хванг [13] получили

$$m(\mathbb{R}^2) \geq (2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{7 + 2\sqrt{3}})/3 \approx 0.74309;$$

3) в 1983 г. Д. Ду и Ф. К. Хванг [14] получили

$$m(\mathbb{R}^2) \geq 4/5 \approx 0.8;$$

4) в 1985 г. Ф. Р. К. Чанг и Р. Л. Грэхем [15] получили

$$m(\mathbb{R}^2) \geq x_0 \approx 0.824168,$$

где x_0 – максимальный вещественный корень многочлена $x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} + 40x^9 - 31x^8 - 72x^7 + 116x^6 + 16x^5 - 151x^4 + 80x^3 + 56x^2 - 64x + 16$.

Таким образом, были получены оценки с точностью до сотых. В 1990 г. Ду и Хванг анонсировали доказательство гипотезы Гилберта–Поллака [16], [17], полный текст которого, впрочем, так и не был опубликован. Более того, анализ предложенной в [17] конструкции выявил существенные трудности, требующие серьезной доработки.

Разработанный Ду и Хвангом в [16], [17] подход основан на понятиях “характеристической области” и “внутреннего остовного дерева”. Пусть Γ – плоское локально минимальное бинарное дерево, затягивающее множество M . Тогда обход дерева Γ по плоскости, скажем, против часовой стрелки, начиная с некоторой вершины из M , порождает нумерацию точек из M . Тем самым, $M = \{A_i\}$, и определена замкнутая ломаная L_Γ с последовательными вершинами $A_1, \dots, A_n$. Если ломаная L_Γ – вложенная, то определен плоский многоугольник Ω_Γ , ограниченный ломаной L_Γ , который называется *характеристической областью* дерева Γ . Если же ломаная L_Γ имеет самопересечения, то [16], [17] многоугольник Ω_Γ также можно определить, только он получится “погруженным” “как риманова поверхность”. Ду и Хванг не приводят строгого определения характеристической области в общем случае ни в [16], ни в [17], ни в других работах. Кроме того, Ду и Хванг пользуются понятием характеристической области в более общем случае, а именно для произвольного плоского локально минимального дерева Γ , т. е. когда дерево Γ может иметь вершины степени 2.

Внутреннее остовное дерево на множестве M вершин степени 1 дерева Γ – это такое дерево с множеством вершин M , что все его ребра – прямолинейные отрезки, “лежащие внутри” характеристической области Ω_Γ . Что означает термин “лежать внутри погруженного многоугольника”, Ду и Хванг также нигде не объясняют. Наконец, Ду и Хванг определяют минимальное внутреннее остовное дерево для множества M как кратчайшее внутреннее остовное дерево, длина которого обозначается через $\text{MIST}(M)$.

“Доказательство” Ду и Хванга устроено следующим образом. Чтобы получить необходимую оценку $m(\mathbb{R}^2) \geq \sqrt{3}/2$, они [16], [17] сначала сводят задачу к оценке отношения длины невырожденного минимального дерева Штейнера к длине минимального внутреннего остовного дерева, а затем строят деформацию M_t , $t \in [0, 1]$, произвольного граничного множества $M = M_0$ такую, что, во-первых, величина

$$\frac{\text{SMT}(M_t)}{\text{MIST}(M_t)}$$

не возрастает с ростом t и, во-вторых, полученное в результате множество M_1 лежит на стандартной треугольной решетке плоскости. Для таких симметричных множеств требуемое неравенство проверяется непосредственно. Отметим, что в ходе “доказательства” Ду и Хванг пользуются многими “очевидными” свойствами характеристической области и внутренних остовных деревьев.

Мы попытались использовать погруженные многоугольники, изучаемые в настоящей статье, для устранения пробелов в конструкции Ду и Хванга. Часть результатов, полученных нами в этом направлении, содержится в § 5. Оказалось (см. теорему 5.1), что даже в более общем случае произвольного

невыврожденного линейного дерева Γ (см. формальные определения ниже) удастся построить погруженный многоугольник Ω , ограниченный замкнутой ломаной L_Γ и такой, что дерево Γ целиком лежит в этом многоугольнике. Более того, по теореме 3.1 многоугольник Ω обладает диагональной триангуляцией, которая порождает богатый набор внутренних остовных деревьев, составленных из ребер этой триангуляции. Поэтому построенный нами погруженный многоугольник Ω можно было бы использовать в качестве характеристической области. Однако здесь возникает следующее затруднение.

В ходе доказательства необходимо рассматривать деформации M_t граничного множества M и соответствующие деформации Γ_t минимального дерева Γ , затачивающего M . При этом некоторые ребра исходного дерева могут вырождаться. Поэтому характеристическую область для деревьев с вырожденными ребрами следует определять так, чтобы длина минимального внутреннего остовного дерева непрерывно зависела от параметра деформации. С другой стороны, как показывают простые примеры, в этом случае характеристическая область невырожденной компоненты дерева может оказаться больше (по включению), чем характеристическая область всего дерева в целом. Но тогда объединение внутренних остовных деревьев для невырожденных компонент не обязано быть внутренним остовным деревом для дерева в целом, и не получается редуцировать задачу к случаю невырожденных минимальных деревьев Штейнера.

По мнению авторов, результаты, касающиеся погруженных многоугольников и их триангуляций, имеют самостоятельный интерес. Кроме того, авторы надеются, что обсуждаемые в данной работе понятия и конструкции позволят более глубоко понять трудности, стоящие на пути доказательства гипотезы Гилберта–Поллака.

Авторы искренне признательны академику А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе. Авторы благодарны А. В. Болсинову, Н. С. Гусеву, А. С. Мищенко, О. Р. Мусину, А. А. Ошемкову, И. Х. Сабитову и М. И. Штогрину за полезные замечания и обсуждения.

§ 1. Кусочно аффинные триангуляции

В настоящем параграфе мы дадим необходимые определения, связанные с понятием аффинной триангуляции, изучим свойства операции измельчения триангуляции, а также докажем, что каждая односвязная аффинная триангуляция эквивалентна аффинной триангуляции с выпуклой областью определения.

Обобщенной плоской триангуляцией называется конечная совокупность $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^n$ треугольников $\Delta_i \subset \mathbb{R}^2$ (рассматриваемых вместе со своими внутренностями) такая, что для любых $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, треугольники Δ_i и Δ_j либо не пересекаются, либо пересекаются по общей вершине, либо пересекаются по общей стороне. Число n назовем *мощностью* обобщенной триангуляции T . Далее для краткости мы будем называть обобщенные плоские триангуляции просто *обобщенными триангуляциями*.

Пусть T – обобщенная триангуляция. Стороны и вершины треугольников, входящих в T , называются соответственно *сторонами* и *вершинами обобщенной триангуляции T* . Отношение принадлежности между вершинами, сторонами и треугольниками из T называется *инцидентностью*. Треугольники из T называются *смежными*, если они пересекаются по стороне; стороны из T *смежны*, если они пересекаются по вершине; вершины из T называются *смежными*, если они инцидентны одному и тому же ребру. Множество всех треугольников, инцидентных вершине из T , называется *звездой* этой вершины. Плоский граф, порожденный множеством всех сторон из T , называется *графом обобщенной триангуляции T* . Граф обобщенной триангуляции T будем обозначать через $\Gamma_T = \Gamma$. Каждый k -цикл графа Γ , т. е. цикл, составленный из k ребер, назовем *k -циклом триангуляции*. Будем говорить, что k -цикл триангуляции *нетривиален*, если он не является границей треугольника триангуляции. Ясно, что при $k > 3$ каждый k -цикл нетривиален.

Для произвольной обобщенной триангуляции T определим ее *двойственный граф*, вершины которого – треугольники из T , причем две вершины соединены ребром, если и только если соответствующие им треугольники смежны.

Обозначим через $W_T = W$ объединение всех треугольников обобщенной триангуляции T . Множество $W \subset \mathbb{R}^2$ называется *областью обобщенной триангуляции T* . *Граница обобщенной триангуляции* – это граница области W . *Граничные стороны* и *граничные вершины обобщенной триангуляции T* – это те ее стороны и вершины, которые лежат на ее границе, т. е. на границе области W . Остальные стороны и вершины из T назовем *внутренними*. Если каждая сторона из T соединяет некоторые граничные вершины из T , то T – *диагональная обобщенная триангуляция*. Отметим, что обобщенная триангуляция T *диагональна* тогда и только тогда, когда она не имеет внутренних вершин. Если T односвязна, то она *диагональна* в том и только в том случае, когда ее двойственный граф является деревом.

Пусть T' и T'' – две обобщенные триангуляции с одной и той же областью W . Будем говорить, что T' является *измельчением T''* и записывать $T' \geq T''$, если каждый треугольник из T'' является объединением некоторых треугольников из T' . При этом если известно, что $T' \neq T''$, то будем записывать $T' > T''$. Легко видеть, что отношение $\geq$ является частичным порядком на обобщенных триангуляциях с данной областью W .

Легко доказывается следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Пусть W – область произвольной обобщенной триангуляции T и $\{I_k\}$ – некоторая конечная совокупность отрезков, лежащих в W . Тогда существует такое измельчение T' триангуляции T , что каждый отрезок I_k лежит в графе триангуляции T' , т. е. является объединением ребер триангуляции T' .

Из утверждения 1.1 вытекает, что у любых двух обобщенных триангуляций одной и той же области существует общая мажоранта.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть T' и T'' – две обобщенные триангуляции с одной и той же областью W . Тогда существует обобщенная триангуляция T с областью W , являющаяся измельчением как T' , так и T'' .

Более общо, имеет место следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. Пусть T_1 и T_2 – две обобщенные триангуляции. Тогда существуют такие их измельчения T'_1 и T'_2 , что $T'_1 \cup T'_2$ – обобщенная триангуляция.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Если области W_{T_1} и W_{T_2} обобщенных триангуляций из утверждения 1.2 не пересекаются, то в качестве измельчений T'_i , $i = 1, 2$, можно взять исходные триангуляции T_i .

Обобщенная триангуляция называется *связной*, если ее двойственный граф связан. Связную обобщенную триангуляцию будем называть просто *триангуляцией*, если для любых двух ее треугольников, пересекающихся по вершине v , существует такой соединяющий их путь в двойственном графе, что все вершины этого пути – инцидентные v треугольники.

Если область W_T триангуляции T является k -связной, то триангуляцию T назовем k -связной. Имеет место следующее несложное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. Пусть T – некоторая k -связная триангуляция. Тогда граница триангуляции T представляет собой k попарно не пересекающихся вложенных замкнутых ломаных.

Непрерывное отображение $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ области W триангуляции T , являющееся аффинным отображением на каждом треугольнике из T и сохраняющее ориентации всех треугольников, на которых f невырожденно, называется *кусочно аффинной*¹ *триангуляцией типа T* . Ограничение отображения f на разные элементы триангуляции T (например, на стороны, вершины, звезды и т. д.) будем называть так же, как и для самой триангуляции T . Область W будем называть *областью кусочно аффинной триангуляции f* . Если каждый треугольник кусочно аффинной триангуляции f является невырожденным аффинным отображением, то f называется *невырожденной кусочно аффинной триангуляцией*. Отметим, что отображение f не предполагается инъективным. Если f – топологическое погружение, то f – *погруженная кусочно аффинная триангуляция*, если же f – топологическое вложение, то f – *вложенная кусочно аффинная триангуляция*. Далее для краткости мы будем называть кусочно аффинные триангуляции просто *аффинными триангуляциями*.

Отметим, что вложенная аффинная триангуляция $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ задает триангуляцию $f(T)$ области $f(W)$, треугольники которой суть образы треугольников триангуляции T при отображении f . Триангуляцию $f(T)$ будем называть *образом триангуляции T при отображении f* .

В случае невырожденной аффинной триангуляции на ее образе можно задать структуру связной обобщенной триангуляции.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4. Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ – невырожденная аффинная триангуляция типа T . Тогда существует такое измельчение T' триангуляции T ,

¹Чтобы избежать недоразумений, отметим, что под аффинным отображением мы понимаем отображение вида $x \mapsto Ax + b$, где A – постоянная матрица, а b – постоянный вектор (см., например, [18]). Аффинное отображение невырожденно, если и только если $\det A \neq 0$, и сохраняет ориентацию, если и только если $\det A > 0$.

что множество f -образов треугольников из T' , в котором отождествлены совпадающие треугольники, является связной обобщенной триангуляцией с областью $f(W)$.

Невырожденную аффинную триангуляцию f типа T назовем *правильной*, если множество образов всех треугольников этой триангуляции (одинаковые образы отождествляются) – некоторая (связная) обобщенная триангуляция, которую мы будем обозначать через $f(T)$ и называть *образом правильной аффинной триангуляции* f .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.5. Пусть $f_i: W_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ – такие невырожденные аффинные триангуляции типа T_i , $i = 1, 2$, что $f_1(W_1) = f_2(W_2)$. Тогда существуют их измельчения T'_i , для которых отображения f_i являются правильными аффинными триангуляциями, причем $f_1(T'_1) = f_2(T'_2)$.

Вложенную аффинную триангуляцию f назовем *выпуклой*, если $f(W)$ – выпуклый многоугольник. Если при этом $f(W)$ – строго выпуклый многоугольник, т. е. каждый его угол строго меньше π , то f называется *строго выпуклой* аффинной триангуляцией. Ясно, что выпуклая (строго выпуклая) аффинная триангуляция односвязна (т. е. W – односвязная замкнутая область).

ТЕОРЕМА 1.1. Для каждой односвязной триангуляции T существует строго выпуклая аффинная триангуляция f типа T . Другими словами, каждую триангуляцию произвольного многоугольника можно превратить в триангуляцию строго выпуклого многоугольника с помощью кусочно аффинного гомеоморфизма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разберем сначала ряд простых случаев.

1. Существование искомой аффинной триангуляции f очевидно в случаях, когда T не содержит внутренних вершин, т. е. является диагональной триангуляцией, и когда T является звездой своей единственной внутренней вершины. При этом можно так подобрать отображение f , чтобы его образ совпал с произвольным заранее заданным строго выпуклым многоугольником, число вершин которого равно количеству граничных вершин триангуляции T .

2. Если никакая пара внутренних вершин триангуляции T не смежна, то звезды внутренних вершин из T , а также треугольники из T , не инцидентные внутренним вершинам, образуют разбиение триангуляции T , которое мы обозначим через $\mathcal{P}$ (элементы множества $\mathcal{P}$ – это соответствующие звезды и треугольники). В силу односвязности области W пересечение любых двух элементов разбиения $\mathcal{P}$ или пусто, или состоит из одного ребра. Более того, граф G , вершины которого отвечают элементам из $\mathcal{P}$, а ребра соединяют те и только те вершины из G , которые соответствуют пересекающимся элементам из $\mathcal{P}$, является деревом.

Построение f проведем индукцией по числу вершин графа G . Рассмотрим в G вершину P степени 1 и удалим из G единственное инцидентное P ребро. Полученный граф обозначим через G' . Пусть T' – триангуляция, полученная из T выбрасыванием элемента $P \in \mathcal{P}$. Пусть $f': W' \rightarrow \mathbb{R}^2$ – существующая по предположению индукции строго выпуклая аффинная триангуляция типа T' . Обозначим через e ребро триангуляции T' , к которому примыкает элемент P .

Напомним, что P – это или звезда некоторой внутренней вершины из T , или треугольник из T . В любом случае P можно рассматривать как триангуляцию, мощность которой мы обозначим через k . К строго выпуклому многоугольнику $f'(W')$ пристроим вдоль его стороны $f'(e)$ строго выпуклый $(k+2)$ -угольник Q так, чтобы $Q \cap f'(W') = f'(e)$ и $Q \cup f'(W')$ представляло собой строго выпуклый многоугольник. Реализовав триангуляцию P в многоугольнике Q в соответствии с п. 1, получим реализацию триангуляции T .

3. Пусть триангуляция T отлична от триангуляций, разобранных в пп. 1 и 2. Доказательство будем проводить индукцией по мощности n триангуляции T . Если $n = 1$, то доказательство очевидно. Предположим, что для всех $n < N$ теорема доказана. Докажем ее для $n = N$.

Рассмотрим два следующих случая:

- (а) триангуляция T содержит по крайней мере один нетривиальный 3-цикл;
- (б) триангуляция T не содержит нетривиальных 3-циклов.

Заметим, что если область W' произвольной триангуляции T' является треугольником, а f' – произвольная вложенная аффинная триангуляция, то каждое невырожденное аффинное преобразование h плоскости $\mathbb{R}^2$ порождает вложенную аффинную триангуляцию $h \circ f'$ такую, что $h \circ f'(W')$ – треугольник. Поскольку любые два треугольника можно перевести друг в друга некоторым аффинным преобразованием, тем самым, если существует вложенная аффинная триангуляция f' типа T' , то для любого треугольника $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ существует вложенная аффинная триангуляция g типа T' такая, что $g(W') = \Delta$.

Докажем случай (а). Пусть T содержит по крайней мере один нетривиальный 3-цикл γ . Удалив из T все треугольники, лежащие в замкнутой области, ограниченной циклом γ , и добавив треугольник, ограниченный γ , мы вновь получим некоторую триангуляцию T' мощности меньше N , для которой в силу предположения индукции существует строго выпуклая аффинная триангуляция f' . Пусть Δ – треугольник, ограниченный $f'(\gamma)$, а T'' – триангуляция, состоящая из всех треугольников триангуляции T , содержащихся в замкнутой области, ограниченной γ . Мощность триангуляции T'' также меньше N , поэтому и для нее по индукции существует строго выпуклая аффинная триангуляция f'' . Из сделанного выше замечания вытекает, что существует аффинная триангуляция g'' типа T'' такая, что ее образ совпадает с треугольником Δ . Ясно, что отображения f' и g'' порождают строго выпуклую триангуляцию типа T .

Докажем теперь случай (б). Пусть T не содержит нетривиальных 3-циклов, $\Gamma = \Gamma_T$ – граф триангуляции T . По предположению триангуляция T содержит пару соседних внутренних вершин (все триангуляции, не обладающие этим свойством, описаны в пп. 1 и 2). Пусть e – ребро графа Γ , соединяющее эти внутренние вершины, а Δ и Δ' – треугольники из T , инцидентные e . Обозначим через e_1 и $\bar{e}_1$ стороны треугольника Δ , отличные от e , а через e_2 и $\bar{e}_2$ – отличные от e стороны треугольника Δ' ; при этом будем предполагать, что e_1 и e_2 смежны. Стянем в Γ ребро e в точку и отождествим кратные ребра, возникшие из e_1 и $\bar{e}_1$, а также из e_2 и $\bar{e}_2$. В результате этой операции мы получим новый плоский граф $\bar{\Gamma}$, все грани которого ограничены 3-циклами. Действительно, так как по предположению граф Γ не содержит нетривиальных 3-циклов, то в результате стягивания ребра e и отождествления e_i с $\bar{e}_i$ мы не получим кратных ребер,

поэтому граф останется простым. Кроме того, все грани, отличные от Δ и Δ' , не вырождаются. Теперь можно применить теорему К. Вагнера [7], справедливую для простых графов, и построить триангуляцию T' , граф Γ' которой будет планарно эквивалентен $\bar{\Gamma}$. Так как мощность триангуляции T' меньше мощности триангуляции T , то по индукции существует строго выпуклая аффинная триангуляция f' типа T' .

Пусть v' – вершина из T' , полученная из ребра e , и пусть e'_i – ребро из T' , полученное из ребер e_i и $\bar{e}_i$, $i = 1, 2$. Пусть ℓ'_i – луч, выходящий из $w = f'(v')$ и проходящий через отрезок $f'(e'_i)$. Пусть α – меньший из двух углов, ограниченных ℓ'_1 и ℓ'_2 , и пусть $g_1, \dots, g_k$ обозначают f' -образы инцидентных v' ребер из Γ' , лежащие в α , причем $g_1 = f'(e'_1)$ и $g_2 = f'(e'_2)$. Обозначим через w_j , $j = 1, \dots, k$, концевую точку отрезка g_j , отличную от w . Выберем внутри α точку w' , находящуюся столь близко от w , чтобы она лежала внутри f' -образа звезды вершины v' и из нее были видны все точки w_j . Перестроим триангуляцию $f'(T')$, удалив при $j > 2$ отрезки g_j (если такие есть) и добавив отрезок $[w, w']$, а также отрезки $[w', w_j]$. Ясно, что полученная триангуляция является образом некоторой строго выпуклой аффинной триангуляции типа T . Теорема доказана.

Пусть для каждого $i = 1, 2$ заданы триангуляция T_i с областью W_i и аффинная триангуляция $f_i: W_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ типа T_i . Будем говорить, что f_1 и f_2 эквивалентны, если существует такой гомеоморфизм $\varphi: W_1 \rightarrow W_2$, что $f_1 = f_2 \circ \varphi$.

Из теоремы 1.1 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Каждая односвязная аффинная триангуляция эквивалентна некоторой аффинной триангуляции со строго выпуклой областью.*

Из утверждения 1.5 вытекает следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.6. *Пусть $f_i: W_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, – невырожденные аффинные триангуляции типа T_i и $\varphi: W_1 \rightarrow W_2$ – гомеоморфизм, устанавливающий эквивалентность между f_1 и f_2 , т. е. $f_1 = f_2 \circ \varphi$. Тогда φ – кусочно аффинное отображение, т. е. существуют такие измельчения T'_i триангуляций T_i , что φ является вложенной аффинной триангуляцией типа T'_1 и задает изоморфизм графов триангуляций T'_1 и T'_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению 1.5 существуют измельчения T'_i триангуляций T_i такие, что отображения f_i являются правильными аффинными триангуляциями для T'_i . Рассмотрим произвольный треугольник Δ из T'_1 . Тогда $f_2^{-1}(f_1(\Delta)) \subset T'_2$ – некоторый набор треугольников $\{\Delta'_{j_k}\}$ триангуляции $T'_2 = \{\Delta'_j\}$. Более того, так как ограничение f_i на каждый треугольник триангуляции – гомеоморфизм с образом, то $f_2^{-1}(f_1(\text{int } \Delta)) = \cup \text{int } \Delta'_{j_k}$. Поскольку $f_1 = f_2 \circ \varphi$, то $\varphi(\text{int } \Delta) \subset \cup \text{int } \Delta'_{j_k}$. Так как по определению триангуляции внутренности составляющих ее треугольников не пересекаются, а отображение φ непрерывно, то $\varphi(\text{int } \Delta)$ содержится во внутренней $\text{int } \Delta'$ некоторого треугольника Δ' из $\{\Delta'_{j_k}\}$. Отсюда вытекает, что $\varphi(\Delta) = \Delta'$, так как иначе некоторая граничная точка треугольника Δ переходит внутрь треугольника Δ' , что противоречит правильности аффинных триангуляций f_i для T'_i . Поскольку $f_1|_{\Delta}$ и $f_2|_{\Delta'}$ – невырожденные аффинные отображения и

$\varphi|_{\Delta} = (f_2|_{\Delta'})^{-1} \circ f_1|_{\Delta}$, заключаем, что $\varphi|_{\Delta}$ – невырожденное аффинное отображение, что и требовалось доказать.

§ 2. Погруженные многоугольники

Будем говорить, что аффинная триангуляция $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет *погруженную внутренность*, если f является гомеоморфизмом в некоторой окрестности каждой внутренней точки области W . Из условия кусочной аффинности отображения f вытекает, что каждая такая триангуляция невырождена, а локальная гомеоморфность может нарушаться лишь в граничных вершинах. Классы эквивалентности аффинных триангуляций с погруженной внутренностью будем называть *погруженными многоугольниками*. Погруженный многоугольник, соответствующий аффинной триангуляции f с погруженной внутренностью, будем обозначать через $[f]$ и говорить, что f – *представитель погруженного многоугольника* $[f]$.

Погруженный многоугольник называется *k-связным*, если k -связен некоторый, а значит и любой, его представитель. Далее для краткости термин “погруженный многоугольник” будем использовать для односвязных погруженных многоугольников. Неодносвязные погруженные многоугольники будем называть *многосвязными*.

Нам понадобится следующая топологическая лемма².

ЛЕММА 2.1. Пусть $f_i: W_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, – представители некоторого погруженного многоугольника $F = [f_1] = [f_2]$. Тогда существует и единствен гомеоморфизм $\varphi: W_1 \rightarrow W_2$ такой, что $f_2 \circ \varphi = f_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование гомеоморфизма φ непосредственно вытекает из эквивалентности триангуляций f_1 и f_2 . Докажем единственность. Предположим противное, т. е. пусть существуют по крайней мере два разных таких гомеоморфизма, скажем φ_1 и φ_2 . Тогда гомеоморфизм $\psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ многоугольника W_1 на себя отличен от тождественного и обладает тем свойством, что $f_1 \circ \psi = f_1$. Гомеоморфизм ψ имеет неподвижную точку (теорема Брауера), которую мы обозначим через x . Предположим сначала, что x – внутренняя точка многоугольника W_1 . Напомним, что f_1 по определению является локальным гомеоморфизмом на внутренности многоугольника W_1 , поэтому существует окрестность U точки x , состоящая из неподвижных точек отображения ψ . Действительно, если такой окрестности нет, то существует последовательность $x_n \rightarrow x$ такая, что $\psi(x_n) \neq x_n$ при каждом n . Но тогда, в силу локальной гомеоморфности отображения f_1 и непрерывности ψ , начиная с некоторого n имеем $f_1(\psi(x_n)) \neq f_1(x_n)$. Противоречие.

Из этих рассуждений следует, что множество неподвижных точек отображения ψ , лежащих внутри W_1 , открыто. С другой стороны, это множество замкнуто в W_1 и, значит, во внутренности W_1 . Но внутренность W_1 связна, поэтому все точки из внутренности W_1 , а значит, и вообще все точки из W_1 неподвижны, т. е. ψ – тождественное отображение. Противоречие. Таким образом, ψ не имеет неподвижных точек внутри W_1 . Поскольку для любого

²Идея приведенного доказательства любезно подсказана авторам А. А. Ошемковым, которому мы очень признательны за полезные обсуждения.

натурального k отображение $f_1^k \circ \psi$ также совпадает с f_1 , то к ψ^k применимы описанные выше рассуждения, поэтому для любого $k \in \mathbb{N}$ отображение ψ^k или тождественно, или не имеет неподвижных точек внутри W_1 .

Покажем, что гомеоморфизм ψ^k не может быть тождественным. Действительно, пусть k – наименьшее натуральное число такое, что ψ^k – тождественное отображение. Тогда гомеоморфизмы $\psi^0, \dots, \psi^{k-1}$ задают свободное действие группы $\mathbb{Z}_k$ на внутренности многоугольника W_1 , гомеоморфной плоскости $\mathbb{R}^2$. Это действие порождает накрытие $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_k$. Поэтому эйлерова характеристика базы накрытия π в k раз меньше эйлеровой характеристики плоскости, равной 1. Так как $k > 1$, получаем противоречие. Итак, для любой точки x из внутренности многоугольника W_1 все точки $x, \psi(x), \dots, \psi^k(x), \dots$ различны. Заметим, что все эти точки переводятся отображением f_1 в одну и ту же точку плоскости. Однако, так как f_1 – аффинная триангуляция с погруженной внутренностью, каждая точка плоскости имеет лишь конечное число f_1 -прообразов. Полученное противоречие завершает доказательство.

Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ – односвязная аффинная триангуляция с погруженной внутренностью. Пусть x – произвольная точка многоугольника W и $X = f(x)$. Фиксируем произвольное направление n , т. е. единичный вектор на плоскости $\mathbb{R}^2$. Предположим, что существует треугольник Δ из T , содержащий x и такой, что $f(\Delta)$ содержит отрезок $[X, X + \varepsilon n]$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Пару (n, Δ) назовем *допустимым направлением для x* .

Рассмотрим множество всех допустимых направлений для x . При этом если x – вершина триангуляции T , то отождествим допустимые направления (n, Δ) и (n', Δ') , если $n = n'$, а Δ и Δ' – треугольники, имеющие такую общую сторону xy , что векторы $f(x)f(y)$ и n сонаправлены. Кроме того, если x лежит внутри ребра e триангуляции T , то отождествим допустимые направления (n, Δ) и (n', Δ') , если $n = n'$, а e – общая сторона треугольников Δ и Δ' . Полученное в результате множество назовем *углом допустимых направлений точки x* . Каждому допустимому направлению (n, Δ) для x поставим в соответствие вектор n из окружности направлений. Полученное отображение обозначим через π_x и назовем *естественной проекцией*.

Пусть $\nu = (n, \Delta)$ и $\nu' = (n', \Delta')$ – допустимые направления для точки $x \in W$. Определим для них расстояние ρ следующим образом. Если x – внутренняя точка многоугольника, то положим $\rho(\nu, \nu')$ равным *угловому расстоянию $\alpha(n, n')$ между векторами n и n'* , т. е. величине наименьшего угла между n и n' .

Пусть теперь x – вершина многоугольника W . Если треугольники Δ и Δ' совпадают, то снова положим $\rho(\nu, \nu') = \alpha(n, n')$. В противном случае рассмотрим единственную последовательность $\Delta = \Delta_1, \dots, \Delta_k = \Delta'$ треугольников из T с общей вершиной x таких, что каждый Δ_i смежен с Δ_{i+1} по стороне e_i . Обозначим через n_i направление ребра e_i , ориентированного от вершины x , и положим

$$\rho(\nu, \nu') = \alpha(n, n_1) + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha(n_i, n_{i+1}) + \alpha(n_k, n').$$

Легко видеть, что определенная таким образом функция ρ является функцией расстояния на угле допустимых направлений. Более того, полученное метрическое пространство изометрично отрезку прямой, поэтому соответствующая изометрия порождает некоторый линейный порядок на угле допустимых направлений (для фиксированной вершины x). Отметим, что имеются два таких порядка, однако для дальнейшего выбора конкретного порядка не имеет значения.

Далее, пусть имеются две аффинных триангуляции $f_i: W_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, с погруженными внутренностями, и пусть x_i – вершина многоугольника W_i . Пусть $\mathcal{A}_i$ – угол допустимых направлений в вершине x_i . Будем говорить, что углы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ равны, если они изометричны и одна из двух возможных изометрий, которую мы обозначим через $\psi: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$, согласована с естественными проекциями π_{x_i} в следующем смысле: $\pi_{x_2} \circ \psi = \pi_{x_1}$.

Пусть F и G – некоторые погруженные многоугольники. Предположим, что существуют погруженный многоугольник $H = [h: W \rightarrow \mathbb{R}^2]$ и такой путь L , составленный из внутренних сторон соответствующей h триангуляции многоугольника W , что L разбивает W на многоугольники W_1 и W_2 , для которых $[h|_{W_1}] = F$, $[h|_{W_2}] = G$. В этом случае мы будем говорить, что многоугольник H получен склейкой многоугольников F и G .

§ 3. Диагональные триангуляции погруженных многоугольников

В данном параграфе мы определим понятие кривой, лежащей внутри погруженного многоугольника, а также геодезической на нем, докажем существование диагональных триангуляций погруженных многоугольников, т. е. покажем, что в соответствующем классе эквивалентности существует представитель, тип которого – некоторая диагональная триангуляция.

Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ – односвязная аффинная триангуляция с погруженной внутренностью. Пусть (n, Δ) – допустимое направление для $x \in W$, $X = f(x)$ и ε_m – максимальное из ε , для которых $[X, X + \varepsilon n] \subset f(\Delta)$. Положим $Y = X + \varepsilon_m n$. Отрезок $[X, Y]$ однозначно поднимается в отрезок $[x, y] \subset \Delta$, при этом y лежит на границе треугольника Δ . Будем говорить, что точка y получена трансляцией $\tau(n, \Delta)$ точки x в направлении (n, Δ) , и записывать $y = \tau(n, \Delta)x$. Отметим, что $x \neq y$.

Имеет место следующее очевидное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Если x – внутренняя точка многоугольника W , то для любого единичного вектора n существует такой треугольник $\Delta \in T$, что (n, Δ) – допустимое направление для x . Более того, точка $\tau(n, \Delta)x$ не зависит от выбора такого Δ .*

Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ – аффинная триангуляция типа T и $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ – непрерывная кривая. Если существует такая непрерывная кривая $\hat{\gamma}: [a, b] \rightarrow W$, что $\gamma = f \circ \hat{\gamma}$, то $\hat{\gamma}$ называется *поднятием кривой* γ . В этом случае будем говорить, что кривая γ *лежит внутри триангуляции* f . Поднятие прямолинейного отрезка будем называть *геодезической триангуляции*. Прямолинейный отрезок $[X, Y]$, соединяющий f -образы $X = f(x)$ и $Y = f(y)$ не соседних вершин x и y многоугольника W , называется *диагональю триангуляции* f , если существует

его поднятие, соединяющее x и y . Само такое поднятие будем также называть *диагональю*. Отметим, что по определению аффинной триангуляции поднятие любой диагонали является ломаной в W .

Пусть T – некоторая диагональная триангуляция многоугольника W . Тогда каждую аффинную триангуляцию типа T будем называть *диагональной*.

Пусть V – некоторое подмножество множества вершин многоугольника W и $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ – некоторая аффинная триангуляция. Будем говорить, что f *допускает диагональную аффинную триангуляцию на множестве V* , если существует эквивалентная f диагональная аффинная триангуляция $f': W' \rightarrow \mathbb{R}^2$ такая, что соответствующий гомеоморфизм $\varphi: W \rightarrow W'$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством V и множеством всех вершин многоугольника W' .

Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ – аффинная триангуляция, x – произвольная точка из W и (n, Δ) – некоторое допустимое направление. Обозначим через $y_1 = \tau(n, \Delta)x$ результат трансляции точки x в допустимом направлении (n, Δ) . Если существует такой треугольник Δ_1 , что (n, Δ_1) – допустимое направление для y_1 , то положим $y_2 = \tau(n, \Delta_1)y_1$. Продолжим этот процесс до тех пор, пока это возможно. Ясно, что полученная в результате точка y_k принадлежит границе многоугольника W . Построенная ломаная L с последовательными вершинами $x, y_1, \dots, y_k$ является геодезической триангуляции f и называется *максимальной геодезической, выпущенной из x в направлении (n, Δ)* . Максимальные геодезические обладают следующим свойством.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Пересечение выпущенной из точки x максимальной геодезической с ребром триангуляции, не содержащим x , состоит не более чем из одной точки или совпадает с этим ребром.*

Максимальная геодезическая, вообще говоря, определена неоднозначно в силу того, что суммарный угол в граничных вершинах многоугольника может быть больше или равен 2π , что приводит к ветвлению. Тем не менее, из утверждения 3.1 вытекает следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. *Из произвольной точки x многоугольника W в любом допустимом направлении (n, Δ) можно выпустить максимальную геодезическую. Фрагмент этой геодезической от точки x до первой вершины $y \neq x$ многоугольника W (если такой вершины нет, то вся геодезическая) определяется однозначно.*

Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ – аффинная триангуляция с погруженной внутренностью. Вершину x многоугольника W назовем *фиктивной* (по отношению к аффинной триангуляции f), если величина угла допустимых направлений для x равна π . Все остальные вершины будем называть *регулярными*. Выбросим из границы многоугольника W регулярные вершины. Замыкания полученных связных компонент назовем *линейными фрагментами границы ∂W многоугольника W* (по отношению к триангуляции f). Концевые вершины каждого линейного фрагмента будем называть *соседними регулярными вершинами*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. *Пусть x – произвольная точка многоугольника W и γ – максимальная геодезическая, соединяющая x с точкой y , лежащей внутри линейного фрагмента l из ∂W . Обозначим через $\nu = (n, \Delta)$ направление*

геодезической γ . Пусть внутри γ нет вершин многоугольника W . Тогда внутренность геодезической γ не пересекается с ∂W . Более того, для всех достаточно близких к n единичных векторов n' существуют такие треугольники $\Delta' \in T$, что:

- 1) направления $\nu' = (n', \Delta')$ допустимы для x и $\rho(\nu, \nu') = \alpha(n, n')$;
- 2) максимальные геодезические, выпущенные из x в направлениях ν' , также приходя в внутренние точки линейного фрагмента l и не содержат внутри себя других точек из ∂W ;
- 3) эти максимальные геодезические u , в частности, их концевые точки непрерывно зависят от направления ν' .

Допустимое направление $\nu = (n, \Delta)$ для $x \in W$ назовем внутренним, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого n' , $\alpha(n, n') < \varepsilon$, найдется треугольник $\Delta' \in T$, для которого $\nu' = (n', \Delta')$ – допустимое направление для x , и $\rho(\nu, \nu') = \alpha(n, n')$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. В предположениях утверждения 3.4 направление ν геодезической γ является внутренним.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ – аффинная триангуляция типа T с погруженной внутренностью, и пусть Δ – произвольный треугольник триангуляции T . Рассмотрим в Δ замкнутое подмножество K , не содержащее регулярных вершин многоугольника W , и пусть $K' = f^{-1}(f(K)) \setminus K$. Тогда множество K' замкнуто. В частности, существует окрестность множества K , не пересекающаяся с K' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. существует последовательность $\{y_i\}$ точек из K' , сходящаяся к точке $y \notin K'$. Поскольку $f^{-1}(f(K))$ замкнуто, то $y \in K$. Так как y не является регулярной вершиной многоугольника W , то отображение f – гомеоморфизм в некоторой окрестности U точки y . Поэтому $U \cap K = U \cap f^{-1}(f(K))$, откуда следует, что U не пересекается с K' . Противоречие. Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Предыдущее утверждение можно переформулировать в топологических терминах следующим образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.6. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение топологических пространств, являющееся локальным гомеоморфизмом на подмножестве $X' \subset X$. Последнее означает, что для каждой точки $x \in X'$ существует окрестность в X , на которой f является гомеоморфизмом с образом. Пусть $K \subset X'$ – замкнутое в X подмножество. Тогда множество $K' = f^{-1}(f(K)) \setminus K$ замкнуто.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.7. Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ – аффинная триангуляция типа T с погруженной внутренностью, x – произвольная точка многоугольника W и $I = [\nu', \nu'']$ – отрезок в множестве допустимых направлений для x . Предположим, что для каждого $\nu \in I$ на максимальной геодезической γ_ν , выпущенной из x в направлении ν , не существует регулярных вершин многоугольника W , отличных от x , если x – регулярная вершина. Тогда:

- 1) отличные от x концевые вершины y_ν геодезических γ_ν лежат на одном и том же линейном фрагменте из ∂W ;

- 2) величина отрезка I строго меньше, чем π ;
 3) ограничение отображения f на множество $\bigcup_{\nu \in I} \gamma_\nu$ является гомеоморфизмом с образом, причем этот образ представляет собой треугольник, если $\nu' \neq \nu''$, и отрезок в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1). Предположим, что среди y_ν встречаются точки, лежащие на разных линейных фрагментах. Пусть $\nu_1 < \nu_2$ и точка y_{ν_i} лежит на линейном фрагменте l_i , $i = 1, 2$. Пусть ν^* – точная верхняя грань тех значений $\nu \in [\nu_1, \nu_2] \subset I$, для которых $y_\nu \in l_1$. В силу утверждения 3.4 точка y_{ν^*} не может быть внутренней точкой ни одного линейного фрагмента, следовательно, y_{ν^*} – регулярная вершина многоугольника W , что противоречит условию. Тем самым, утверждение 1) доказано.

Поскольку образы геодезических γ_ν – отрезки, соединяющие точку $f(x)$ с точками отрезка $f(I)$, то утверждение 2) сразу вытекает из 1).

Докажем утверждение 3). Образ множества $K_I = \bigcup_{\nu \in I} \gamma_\nu$ при отображении f представляет собой треугольник D , ограниченный отрезками $f(\gamma_{\nu'})$, $f(\gamma_{\nu''})$ и частью отрезка $f(I)$. Поэтому множество $f(K_I) = D$ замкнуто. Обозначим через T' множество тех треугольников триангуляции T , каждый из которых пересекается с одной из геодезических γ_ν , $\nu \in I$. Положим $K = \bigcup_{\Delta \in T'} (f^{-1}(D) \cap \Delta)$. Множество K , будучи конечным объединением замкнутых множеств, замкнуто и в силу ограниченности компактно. Более того, $K = K_I$. Действительно, любая точка z из K_I лежит на некоторой γ_ν , поэтому она принадлежит некоторому $\Delta \in T'$. Кроме того, $f(z) \in D$, откуда $z \in f^{-1}(D)$, таким образом, $K_I \subset K$. Обратно, пусть $z \in K$. Тогда $f(z) \in D$ и существует треугольник $\Delta \in T$, содержащий z и некоторую точку v геодезической γ_{ν_0} , $\nu_0 \in I$. Рассмотрим отрезок $[z, v]$. Положим $Z = f(z)$ и $V = f(v)$. В силу утверждения 3.5 существует окрестность отрезка $[z, v]$, не пересекающаяся с $f^{-1}([Z, V]) \setminus [z, v]$.

Поскольку $Z \in D$, для некоторого $\nu_1 \in I$ существует геодезическая γ_{ν_1} , образ которой при отображении f содержит Z . По утверждению 3.4 геодезические непрерывно зависят от направления, поэтому все геодезические γ_ν для ν , находящихся между ν_0 и ν_1 , пересекают отрезок $[z, v]$. Более того, геодезические γ_ν не пересекают $f^{-1}([Z, V]) \setminus [z, v]$, так как ограничение отображения f на каждую геодезическую взаимно однозначно, а образ каждой геодезической пересекает отрезок $[Z, V]$ ровно в одной точке. Поэтому геодезическая γ_{ν_1} проходит через точку z , т. е. $K \subset K_I$.

Рассмотрим ограничение отображения f на компактное множество K_I . Полученное отображение непрерывно и взаимно однозначно по построению, поэтому оно – гомеоморфизм. Утверждение доказано.

Следующий результат состоит в том, что у любого многосвязного погруженного многоугольника существует диагональ. Нам понадобится диагональ “специального вида”.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.8. Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ – произвольная аффинная триангуляция типа T с погруженной внутренностью и W имеет более трех регулярных вершин. Тогда триангуляция f имеет диагональ, соединяющую регулярные вершины.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам понадобится следующая лемма, непосредственно вытекающая из определения аффинной триангуляции.

ЛЕММА 3.1. Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ – произвольная аффинная триангуляция с погруженной внутренностью. Тогда существуют такие положительные числа c_1 и c_2 , что для любой спрямляемой кривой γ в W имеет место двойное неравенство

$$c_1 \ell(f(\gamma)) \leq \ell(\gamma) \leq c_2 \ell(f(\gamma)),$$

где через ℓ обозначен функционал длины. В частности, если γ_i – последовательность таких измеримых кривых, что $\ell(f(\gamma_i)) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, и последовательность начальных точек кривых γ_i сходится к некоторой точке z , то последовательность конечных точек кривых γ_i также сходится, причем к той же точке z .

Вернемся к доказательству утверждения. Рассмотрим произвольную регулярную вершину x многоугольника W и выпустим из x максимальные геодезические γ_ν во всех допустимых направлениях ν . Если ν – внутреннее допустимое направление, то обозначим через y_ν первую отличную от x точку границы ∂W на γ_ν . Отметим, что если среди y_ν имеется регулярная вершина многоугольника, то $[f(x), f(y_\nu)]$ – искомая диагональ.

Предположим сначала, что среди y_ν встречаются точки, лежащие на разных линейных фрагментах из ∂W . Пусть $\nu_1 < \nu_2$ и точка y_{ν_i} лежит на линейном фрагменте l_i , $i = 1, 2$. Пусть ν^* – точная верхняя грань тех значений $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$, для которых $y_\nu \in l_1$. В силу утверждения 3.4 точка y_{ν^*} не может быть внутренней точкой ни одного линейного фрагмента, следовательно, y_{ν^*} – регулярная вершина многоугольника W , и, тем самым, $[f(x), f(y_{\nu^*})]$ – искомая диагональ. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда все точки y_ν лежат внутри некоторого линейного фрагмента l .

Итак, пусть все точки y_ν лежат внутри одного линейного фрагмента l , и пусть $[\nu_1, \nu_2]$ – отрезок допустимых направлений. Геодезическая γ_{ν_i} содержит линейный фрагмент $l_i = xz_i$, где z_i , $i = 1, 2$, – соседние с x регулярные вершины многоугольника W . Так как имеется более трех регулярных вершин, регулярные вершины z_1 и z_2 не являются соседними. Положим $Z_i = f(z_i)$. Покажем, что отрезок $[Z_1, Z_2]$ лежит в $f(W)$ и является искомой диагональю.

Действительно, обозначим через Y_i предел отображения $f(y_\nu)$ при $\nu \rightarrow \nu_i$, и пусть D – треугольник XY_1Y_2 . Из утверждения 3.7 вытекает, что ограничение f' отображения f на множество K , являющееся объединением геодезических γ_ν по всем внутренним направлениям ν , – гомеоморфизм на $D' = D \setminus \bigcup_i (X, Y_i]$.

Пусть xz'_i – сторона многоугольника W , принадлежащая линейному фрагменту l_i . Обозначим через Δ'_i треугольник из T , примыкающий к стороне xz'_i , и пусть e'_i – сторона треугольника Δ'_i , противоположная x . Ясно, что $f(\Delta'_i) \subset D$. При $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$, близких к ν_i , пересечение геодезической γ_ν с треугольником Δ'_i представляет собой отрезок, соединяющий точку x с точкой $z'_i(\nu)$ стороны e'_i , причем при $\nu \rightarrow \nu_i$ точка $z'_i(\nu)$ стремится к z'_i . Положим $Z'_i(\nu) = f(z'_i(\nu))$. Из непрерывности f вытекает, что $Z'_i(\nu)$ стремится к $Z'_i = f(z'_i)$ при $\nu \rightarrow \nu_i$.

Пусть l_i состоит из одной стороны многоугольника W , т.е. $z_i = z'_i$ и $Z_i = Z'_i$. Отрезок $[Z_1, Z_2]$ лежит в треугольнике XY_1Y_2 , а значит, и в $f(W)$, так как Z_i

лежит на его стороне $[X, Y_i]$. Для каждого $\nu \in (\nu_1, \nu_2)$ обозначим через $u(\nu)$ единственную точку из γ_ν , образ которой лежит на интервале (Z_1, Z_2) . Так как при $\nu \rightarrow \nu_i$ точка $U(\nu) = f(u(\nu))$ стремится к Z_i , длина отрезка $[U(\nu), Z'_i(\nu)]$ стремится к нулю. Обозначим через γ_ν^i часть геодезической γ_ν , соединяющую точки $u(\nu)$ и $z'_i(\nu)$ (при соответствующих ν). Ясно, что $f(\gamma_\nu^i) = [U(\nu), Z'_i(\nu)]$. Из леммы 3.1 вытекает, что $u(\nu)$ стремится к z_i при $\nu \rightarrow \nu_i$.

Если же l_i состоит из более чем одной стороны, то обозначим через $z'_i z''_i$ отличную от xz'_i сторону многоугольника W (сторона $z'_i z''_i$, очевидно, содержится в l_i). Пусть Δ''_i – треугольник из T , примыкающий к $z'_i z''_i$. Обозначим через e''_i сторону из Δ''_i , противоположную вершине z''_i . Поскольку при ν , достаточно близких к ν_i , образы геодезических γ_ν пересекают образы всех треугольников, примыкающих к сторонам и фиктивным вершинам многоугольника W из фрагмента l_i , для каждого такого ν существует и однозначно определена точка $z''_i(\nu)$ стороны e''_i , лежащая на геодезической γ_ν . Более того, при $\nu \rightarrow \nu_i$ образы $Z''_i(\nu) = f(z''_i(\nu))$ точек $z''_i(\nu)$ стремятся к $Z''_i = f(z''_i)$. Из леммы 3.1 вытекает, что и $z''_i(\nu)$ стремится к z''_i при $\nu \rightarrow \nu_i$. Продолжая описанную процедуру до тех пор, пока не будут исчерпаны все стороны многоугольника W , входящие в l_i , и повторив на последнем шаге рассуждения, приведенные в предыдущем абзаце, мы снова убедимся в том, что точка $u(\nu)$ стремится к z_i при $\nu \rightarrow \nu_i$.

Из доказанного вытекает, что замыкание f' -прообраза интервала (Z_1, Z_2) представляет собой геодезическую, соединяющую z_1 и z_2 , что и требовалось доказать. Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если ограничение аффинной триангуляции $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ на внутренность многоугольника W не является погружением, то утверждение 3.8 не выполняется. Пример – пятиконечная звезда с триангуляцией из пяти треугольников с одной общей внутренней вершиной ветвления.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть F – произвольный погруженный многоугольник. Тогда среди его представителей имеется аффинная триангуляция, являющаяся диагональной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную аффинную триангуляцию $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ из погруженного многоугольника F . Доказательство проведем индукцией по числу регулярных вершин многоугольника W по отношению к аффинной триангуляции f . Пусть сначала имеется ровно три регулярных вершины, и пусть V – произвольное подмножество множества вершин многоугольника W , содержащее регулярные вершины. Покажем, что f допускает диагональную триангуляцию на множестве V . Ясно, что образ $f(W)$ многоугольника W является треугольником, образы всех фиктивных вершин лежат на сторонах этого треугольника и само отображение f – вложение. Определим многоугольник W' как $f(W)$ с множеством вершин $f(V)$. Рассмотрим произвольную диагональную триангуляцию многоугольника W' , и пусть f' – естественное вложение W' в плоскость. Тогда, очевидно, отображение $\varphi: W \rightarrow W'$, совпадающее с f , задает эквивалентность триангуляций f и f' , что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что любая аффинная триангуляция $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ с погруженной внутренностью, имеющая менее n регулярных вершин, при любом выборе подмножества V множества вершин многоугольника W , содержащего

все его регулярные вершины, допускает диагональную триангуляцию на множестве V . Покажем, что тогда то же самое имеет место и для таких триангуляций с n регулярными вершинами.

По утверждению 3.8 существует диагональ, соединяющая регулярные вершины многоугольника W . Пусть γ – соответствующая геодезическая. В силу утверждения 1.1 можно построить такое измельчение триангуляции T , что ломаная γ будет лежать в графе результирующей триангуляции. Поскольку полученная аффинная триангуляция эквивалентна исходной, будем сразу предполагать, что T обладает указанным свойством. Ломаная γ разбивает многоугольник W на два многоугольника, скажем W_1 и W_2 . На многоугольнике W_i триангуляция T индуцирует триангуляцию T_i , $i = 1, 2$. Ограничение f_i отображения f на многоугольник W_i представляет собой аффинную триангуляцию с погруженной внутренностью, имеющую меньше n регулярных вершин, поэтому к триангуляциям f_i применимо предположение индукции, где в качестве множеств V_i мы возьмем пересечение множества V с ∂W_i . (Отметим, что все внутренние вершины геодезической γ являются, очевидно, фиктивными по отношению к f_i .) По предположению триангуляция f_i допускает диагональную триангуляцию на множестве V_i . Последнее означает, что существуют многоугольник W'_i , его диагональная триангуляция T'_i , аффинная триангуляция $f'_i: W'_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ и гомеоморфизм $\varphi_i: W'_i \rightarrow W_i$, задающий взаимно однозначное соответствие между множеством вершин многоугольника W'_i и множеством V_i , для которых $f_i \circ \varphi_i = f'_i$. По теореме 1.1 существует строго выпуклая аффинная триангуляция $\varphi'_i: W'_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ типа T'_i . Положим $W''_i = \varphi'_i(W'_i)$, $T''_i = f(T'_i)$. Ясно, что естественное вложение многоугольника W''_i в плоскость задает аффинную триангуляцию типа T''_i , эквивалентную f_i . Нам осталось склеить многоугольники W''_1 и W''_2 по сторонам, являющимся образами геодезической γ . Для этого достаточно к одному из этих многоугольников применить соответствующее растяжение и сдвиг. На склеиваемых сторонах, соответствующих геодезической γ , результирующие отображения в плоскость являются аффинными, поэтому совпадают. Доказательство закончено.

Из теорем 3.1 и 1.1 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Для любой аффинной триангуляции $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ с погруженной внутренностью, где W – некоторый n -угольник, любого строго выпуклого n -угольника W' и любого сохраняющего положительный порядок обхода вершин взаимно однозначного отображения β множества вершин многоугольника W на множество вершин многоугольника W' существует диагональная аффинная триангуляция $f': W' \rightarrow \mathbb{R}^2$ с погруженной внутренностью, эквивалентная f , причем ограничение эквивалентности на вершины многоугольника W совпадает с β .*

Из доказательства теоремы 3.1 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ – аффинная триангуляция с погруженной внутренностью и $\{d_i\}$ – семейство ломаных в W , являющихся поднятиями диагоналей триангуляции f . Предположим, что ломаные d_i вместе со сторонами многоугольника W образуют граф D в W , каждая грань которого ограничена тремя ребрами. Тогда существует диагональная триангуляция*

$f': W' \rightarrow \mathbb{R}^2$ типа T' , эквивалентная f и такая, что соответствующий гомеоморфизм $\varphi: W' \rightarrow W$ отображает каждый треугольник из T' на некоторую грань графа D .

Теорема 3.1 позволяет также непрерывно деформировать каждую аффинную триангуляцию с погруженной внутренностью во вложенную аффинную триангуляцию в классе аффинных триангуляций с погруженной внутренностью. Действительно, достаточно рассмотреть эквивалентную диагональную аффинную триангуляцию, параметризованную триангуляцией выпуклого многоугольника, и для этих двух триангуляций построить связывающую их линейную деформацию соответствующих сторон. Так как триангуляции диагональны, эта линейная деформация продолжается до деформации аффинных триангуляций.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Каждую аффинную триангуляцию с погруженной внутренностью можно непрерывно деформировать во вложенную аффинную триангуляцию в классе аффинных триангуляций с погруженной внутренностью.*

Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ – некоторая аффинная триангуляция с погруженной внутренностью. Ясно, что ограничение отображения f на границу ∂W многоугольника W задает замкнутую ломаную, вообще говоря, самопересекающуюся, о которой мы будем говорить, что она *ограничивает триангуляцию f* , а также *ограничивает погруженный многоугольник $[f]$* . Замкнутую ломаную, ограничивающую некоторую аффинную триангуляцию с погруженной внутренностью, будем называть *погруженной границей*.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Пусть фиксированы две погруженные границы с одинаковым количеством вершин. Тогда одна из них может быть непрерывно деформирована в другую в классе погруженных границ с тем же количеством вершин.*

§ 4. Монотонные ломаные и кусочно аффинные триангуляции

Несложно построить пример замкнутой ломаной, которая не ограничивает никакой погруженный многоугольник. В данном параграфе мы покажем, что если замкнутая ломаная получена замыканием вложенной монотонной ломаной, то она ограничивает некоторый погруженный многоугольник. Более сложный случай так называемых “петельных” ломаных рассматривается в работе [1].

Напомним общее определение ломаной. Конечный набор невырожденных отрезков $e_i = [A_i, A_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, называется *незамкнутой ломаной*. Конечное множество невырожденных отрезков $e_i = [A_i, A_{(i+1) \bmod n}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, называется *замкнутой ломаной*.

Отрезки $[A_i, A_{i+1}]$ называются *ребрами* ломаной, а точки A_i – ее *вершинами*. Если ломаная незамкнута, то вершины A_0 и A_n называются *концевыми*, а все остальные – *внутренними* вершинами ломаной. Ребра незамкнутой ломаной, содержащие ее концевые вершины, также называются *концевыми ребрами*, а все остальные ребра – *внутренними ребрами* ломаной.

Ребра e_i и e_{i+1} называются *смежными* (здесь в случае замкнутой ломаной сложение понимается по модулю n). Если несмежные ребра ломаной не пересекаются, а смежные пересекаются лишь по общей вершине, то ломаная называется *вложенной*.

Ломаная L' называется *подломаной* ломаной L , если каждое ребро ломаной L' является также и ребром ломаной L .

Ломаную можно понимать как кусочно аффинное отображение отрезка в плоскость.

Вершину ломаной назовем *точкой уплощения*, если угол между выходящими из нее ребрами ломаной равен 180° . Вершину ломаной назовем *точкой возврата*, если угол между выходящими из нее ребрами ломаной равен нулю. Максимальная подломаная, все внутренние вершины которой являются точками уплощения, называется *звеном ломаной*. Звено, содержащее конечное ребро, также будем называть *концевым*, остальные звенья – *внутренними*.

Пусть L – ломаная на плоскости, соединяющая точки A и B . Нумерация последовательных вершин A_i ломаной L задает одну из двух возможных ее ориентаций. Если $A_0 = A$, а $A_n = B$, то будем говорить, что ломаная L *ориентирована от A к B* . Если ориентация выбрана, то каждое ребро $[A_i, A_{i+1}]$ ломаной можно рассматривать как вектор $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$, поэтому в каждой внутренней вершине A_i ломаной L , отличной от точки возврата, определен ориентированный угол α_i от вектора $\overrightarrow{A_{i-1} A_i}$ к вектору $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$, где $-\pi < \alpha_i < \pi$. Вложенная ломаная L называется *монотонной*, если величины α_i или все неположительны, или все неотрицательны. Отметим, что вложенная ломаная не имеет точек возврата, поэтому величины α_i определены во всех ее внутренних вершинах. Кроме того, при замене ориентации свойство ломаной быть монотонной сохраняется.

Пусть L – вложенная монотонная незамкнутая ломаная на плоскости $\mathbb{R}^2$, соединяющая точки A и B и не содержащаяся ни в одной прямой. Проведем отрезок $[A, B]$. Полученную замкнутую ломаную обозначим через $\bar{L}$ и будем называть *замыканием ломаной L* . Пусть l – прямая AB , ориентированная от A к B (рис. 1). Ориентируем ломаную L также от A к B . Пересечение ломаной L

Рис. 1. Компоненты C_i и области Ω_j

с прямой l состоит из конечного числа связных компонент C_i , каждая из которых представляет собой или точку, или отрезок. Будем предполагать, что компоненты C_i занумерованы в соответствии с ориентацией ломаной L . С другой

стороны, все C_i лежат на прямой l , поэтому корректно определено *направление сдвига* от C_i к C_j вдоль l , совмещающего произвольную точку из C_i с некоторой точкой из C_j . Из монотонности ломаной L вытекает, что для любых трех последовательных (вдоль L) компонент C_{i-1} , C_i , C_{i+1} сдвиги от C_{i-1} к C_i и от C_i к C_{i+1} вдоль прямой l имеют противоположные направления.

Выбросим из ломаной L компоненты C_i . Замыкания полученных связных компонент занумеруем в соответствии с ориентацией ломаной и обозначим через L_j . Каждая ломаная L_j вместе с соответствующим отрезком l_j прямой l ограничивает замкнутую область Ω_j , являющуюся выпуклым многоугольником (см. рис. 1).

ЛЕММА 4.1. *Пусть ломаная L вложена, незамкнута и монотонна. В сделанных обозначениях если компонента C_i является отрезком, то она содержит по крайней мере одну из концевых точек ломаной L .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C_i – отрезок, не содержащий концевых точек ломаной L . Тогда к его концам примыкают некоторые ломаные L_j и L_{j+1} . Из монотонности и вложенности ломаной L вытекает, что L_j и L_{j+1} лежат в одной полуплоскости относительно l и, кроме того, на прямой l между концевыми точками ломаной L_j лежит одна из концевых точек ломаной L_{j+1} , а между концевыми точками ломаной L_{j+1} – одна из концевых точек ломаной L_j . Поэтому ломаные L_j и L_{j+1} должны пересекаться, что противоречит вложенности ломаной L . Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Две последовательных области Ω_j и Ω_{j+1} лежат по разные стороны от прямой l . Более того, последовательные отрезки l_j и l_{j+1} имеют общую точку $L_j \cap L_{j+1}$, и один из этих отрезков вложен в другой, но не совпадает с ним.*

ЛЕММА 4.2. *Каждая компонента $C \in \{C_i\}$ содержится в некоторой области Ω_j .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если C – точка, то утверждение очевидно. Пусть теперь C – отрезок, ограниченный точками X и Y . В силу леммы 4.1 одна из этих точек, скажем X , является концевой вершиной ломаной L . Пусть C' – единственная соседняя (на ломаной L) с C компонента из $\{C_i\}$. Из монотонности ломаной вытекает, что X расположена на прямой l между C' и Y . Поэтому C содержится в области Ω_k , соответствующей подломаной L_k , ограниченной Y и C' , что и требовалось доказать.

По аналогии с леммой 4.1 доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 4.3. *Для любых трех последовательных отрезков l_{j-1} , l_j , l_{j+1} если $l_j \subset l_{j-1}$, то $l_{j+1} \subset l_j$, и поэтому, начиная с номера $j - 1$, каждый последующий отрезок l_k вложен в предыдущий. Если же $l_j \subset l_{j+1}$, то $l_{j-1} \subset l_j$, и поэтому вплоть до номера $j + 1$ каждый предыдущий отрезок содержится в последующем.*

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Среди отрезков l_j существует максимальный по включению.*

Рис. 2. Компонента L_m и область Ω , охваченная ломаной $\bar{L}$ (a); средняя подломаная $m(L)$, крайняя подломаная L_A (L_B пуста) и средний многоугольник $m(\Omega)$ (b)

Обозначим через l_m максимальный по включению отрезок из $\{l_j\}$, через L_m – соответствующую ломаную из $\{L_j\}$ и через Ω_m – соответствующую область. Добавим к Ω_m предыдущую и последующую области (если они определены). Полученную в результате область обозначим через Ω .

Из лемм 4.3 и 4.2 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Область Ω содержит все области Ω_j , ломаную L и отрезок $[A, B]$. Пересечение границы области Ω с ломаной L связно, пересечение прямой l с областью Ω связно и равно l_m . Более того, граница $\partial\Omega$ представляет собой объединение подломаной ломаной L и подотрезка отрезка $[A, B]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве нуждается только последнее утверждение следствия. Из связности пересечения $\partial\Omega$ и L вытекает, что $\partial\Omega$ – объединение подломаной из L и отрезка I прямой l , причем I содержится в максимальном отрезке l_m . Из леммы 4.3 следует, что внутренность отрезка I получается отрезанием от каждого из концов отрезка l_m по отрезку, возможно вырожденному. При этом одна из концевых точек ломаной L лежит в одном из этих отсекаемых отрезков, а другая – в другом. Следствие доказано.

Таким образом, для каждой незамкнутой монотонной вложенной ломаной L , не содержащейся в прямой, мы определили ее замыкание $\bar{L}$. Отметим, что замкнутая ломаная $\bar{L}$, вообще говоря, имеет самопересечения, и поэтому $\bar{L}$ не является границей никакой плоской области. Как мы увидим ниже, $\bar{L}$ является границей некоторого погруженного многоугольника, образом которого является построенная нами выше замкнутая область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Мы будем говорить, что область Ω *охвачена* ломаной $\bar{L}$. Еще раз отметим, что в общем случае $\bar{L} \neq \partial\Omega$.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Если ломаная L лежит в одной полуплоскости, ограниченной прямой l , то область Ω совпадает с областью Ω_m и пересечение прямой l с ломаной L состоит из двух компонент. Область Ω в этом случае выпукла, и ломаная L лежит на границе своей выпуклой оболочки $\text{conv } L = \Omega$.*

Рассмотрим ломаную L' , получающуюся из L_m добавлением смежных с ней компонент C_i . Если концевая вершина ломаной L' не является вершиной из L , то ототрежем от L' соответствующее этой вершине концевое ребро. Полученную ломаную (возможно, точечную) обозначим через $m(L)$ и назовем *средней подломаной* ломаной L . Подломанные, полученные из L удалением $m(L)$, назовем *крайними подломанными* ломаной L и обозначим через L_A и L_B в зависимости

от того, какую из концевых точек A или B ломаной L они содержат. Отметим, что каждая из крайних подломанных может быть пустой (см. рис. 2).

Рассмотрим среднюю подломаную $m(L)$ ломаной L . Ориентация ломаной L порождает ориентацию $m(L)$. Если первая вершина ломаной $m(L)$ не лежит на прямой l , то соединим ее с точкой A ; аналогично, если последняя вершина ломаной $m(L)$ не лежит на прямой l , то соединим ее с точкой B . Из построения ясно, что проведенные отрезки отсекают от выпуклого многоугольника Ω_m треугольники, у которых две из трех сторон лежат на границе многоугольника Ω_m . Поэтому в результате получается выпуклый многоугольник, который мы обозначим через $m(\Omega)$ и назовем *средним многоугольником*. На рис. 2, a представлены компонента L_m и область Ω , охваченная ломаной $\bar{L}$, на рис. 2, b – средняя подломаная $m(L)$, крайняя подломаная L_A (L_B – пуста) и средний многоугольник $m(\Omega)$.

Пусть $X \in \{A, B\}$ – одна из концевых вершин ломаной L и L_X – соответствующая крайняя ломаная. Предположим, что L_X не пуста. Ориентируем ломаную L_X в направлении вершины X . Пусть e – произвольное ребро из L_X и l – прямая, проходящая через это ребро. Обозначим через Π замкнутую полуплоскость, ограниченную l и содержащую вершину X (рис. 3). Будем говорить, что полуплоскость Π *порождена ребром e из L_X* .

Рис. 3. Полуплоскость Π , порожденная ребром e крайней ломаной L_A

ЛЕММА 4.4. *Все ребра ломаной L_X (начиная с ребра e) лежат в полуплоскости Π .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности предположим, что $X = B$. По построению сторона e или ее подотрезок представляет собой сторону выпуклого многоугольника Ω_i , отличного от Ω_m . Поэтому прямая l является опорной для Ω_i и в силу леммы 4.3 многоугольник Ω_i содержится в полуплоскости Π . В силу той же леммы достаточно показать, что если множество Ω_{i+1} не пусто, то оно также содержится в Π . По следствию 4.1 ломаная L_{i+1} и область Ω_{i+1} лежат в той ограниченной прямой AB полуплоскости Π_{AB} , которая не содержит Ω_i . Если l параллельна AB , то полуплоскость Π_{AB} содержится в полуплоскости Π , что и требовалось доказать. Если эти прямые не параллельны, то достаточно показать, что L_{i+1} не пересекает луч $l_1 = l \cap \Pi_{AB}$.

Ориентация концевой ломаной порождает ориентацию ребра e и, следовательно, прямой l . Пусть сначала луч l_1 сонаправлен с e . Пусть Y – первая

от e точка пересечения L_{i+1} с внутренностью луча l_1 . Рассмотрим монотонную ломаную $L' \subset L$, начинающуюся с ребра e и заканчивающуюся в точке Y . Используем для ломаной L' лемму 4.2. В силу этой леммы соответствующая L' область Ω' должна содержать e . Противоречие. Пусть теперь луч l_1 направлен ребру e . Тогда с помощью предыдущего рассуждения легко доказать, что Ω_{i-1} содержится в Π , а значит, в Π содержится и Ω_{i+1} . Лемма доказана.

Из леммы 4.4 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть e_1, e_2 – последовательные звенья крайней ломаной L_X и Π_k – полуплоскость, порожденная ребром e_k из L_X , $k = 1, 2$. Тогда все звенья ломаной L_X (начиная с e_1) содержатся в угле $\Pi_1 \cap \Pi_2$.

Рассмотрим теперь выпуклую оболочку $\text{conv } L$ ломаной L , и пусть H – граница этой выпуклой оболочки.

ЛЕММА 4.5. Пересечение ломаных H и L связно. В частности, если H не содержит L , то по крайней мере одна из концевых точек ломаной L лежит внутри $\text{conv } L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпуклая оболочка $\text{conv } L$ представляет собой выпуклый многоугольник, вершины которого – вершины ломаной L . Рассмотрим произвольную сторону многоугольника $\text{conv } L$ и проведем через нее прямую, которую обозначим через l' . По определению вся ломаная L лежит в одной из полуплоскостей, ограниченных l' . Покажем, что пересечение прямой l' с ломаной L состоит не более чем из двух связных компонент. Действительно, пусть C'_i – связные компоненты из $L \cap l'$, упорядоченные в соответствии с какой-нибудь ориентацией L . Пусть L' – наименьшая подломаная в L , содержащая все компоненты C'_i . Тогда концевые точки монотонной ломаной L' лежат на прямой l' . Таким образом, мы находимся в условиях следствия 4.4, что и требовалось доказать.

Если все пересечения прямых, проходящих через стороны $\text{conv } L$, с ломаной L состоят из одной компоненты, то ломаная L содержит H , что противоречит незамкнутости L . Поэтому имеется по крайней мере одна такая прямая l' , проходящая через сторону из H , пересечение которой с L состоит из двух компонент. Применяя еще раз только что описанную конструкцию, построим подломаную L' , и пусть Ω' – область, охваченная ломаной $\bar{L}'$, получающейся из L' соединением концевых вершин. По следствию 4.4 ломаная L' лежит на границе своей выпуклой оболочки, которая совпадает с областью Ω' . Связные подломанные, полученные из L удалением L' , обозначим через L_1 и L_2 (каждая из них может быть пустой). Из монотонности ломаной L и выбора прямой l' вытекает, что ребра ломаных L_i , $i = 1, 2$, выходящие из концевых точек A_i ломаной L' , лежат в области Ω . Поскольку ломаная L не имеет самопересечений, а количество компонент ее пересечения с прямой l' равно двум, ломаные L_i содержатся в области Ω' и пересекаются с границей этой области только по точкам A_i . Поэтому $\text{conv } L = \text{conv } L' = \Omega'$ и $L \cap \partial \text{conv } L = L'$, в частности $L \cap \partial \text{conv } L$ связно. Лемма доказана.

Пусть n – количество звеньев ломаной $\bar{L}$. Рассмотрим на плоскости строго выпуклый n -угольник W , и пусть T – некоторая диагональная триангуляция

Рис. 4. Треугольники Δ_A^i и Δ_B^j (a); треугольники $\Delta_A^{i,j}$ и $\Delta_B^{k,l}$ (b)

этого многоугольника. Пусть $\beta: \partial W \rightarrow \bar{L}$ – непрерывное взаимно однозначное отображение, аффинное на ребрах рассматриваемых ломаных. Отображение β однозначно продолжается до непрерывного отображения $\bar{\beta}_T: W \rightarrow \mathbb{R}^2$, аффинного на каждом треугольнике триангуляции T .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *В сделанных выше обозначениях существует диагональная триангуляция T такая, что отображение $\bar{\beta}_T$ задает диагональную аффинную триангуляцию с погруженной внутренностью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим выпуклую оболочку $\text{conv } L$ ломаной L , и пусть $H = \partial \text{conv } L$ – граница выпуклого многоугольника $\text{conv } L$. Если ломаная $\bar{L}$ целиком лежит на границе H , то она, очевидно, совпадает с H и утверждение тривиально. Действительно, возьмем многоугольник $W' = \text{conv } L$ и любую его диагональную триангуляцию T' . Отображение β и триангуляция T' порождают триангуляцию T многоугольника W . Соответствующее отображение $\bar{\beta}_T$ и есть искомая диагональная вложенная аффинная триангуляция. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $H \neq \bar{L}$.

Как и выше, обозначим через A и B концевые точки ломаной L . Напомним, что ломаная L разбита на три компоненты: среднюю подломаную $m(L)$ и две крайних подломанных L_A и L_B . Напомним, что через $m(\Omega)$ мы обозначили средний многоугольник. Обозначим через X_A (соответственно, X_B) ближайшую к A (к B) концевую вершину ломаной $m(L)$. Отметим, что вершины X_A и X_B могут совпадать.

Фиксируем произвольную диагональную триангуляцию среднего многоугольника $m(\Omega)$, и пусть $\Delta^1, \dots, \Delta^k$ – треугольники этой триангуляции.

Далее, пусть $l_A^1, \dots, l_A^p$ – последовательные звенья ломаной L_A , ориентированной в сторону вершины A , а $l_B^1, \dots, l_B^q$ – последовательные звенья ломаной L_B , ориентированной в сторону вершины B . Обозначим через Δ_A^i , $i = 1, \dots, p-1$, треугольник с вершиной в A и противолежащей A стороной l_A^i , а через Δ_B^j , $j = 1, \dots, q-1$, – треугольник с вершиной в B и противолежащей B стороной l_B^j (рис. 4, a).

Из определений и следствия 4.5 вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 4.6. *Все треугольники Δ_A^i и Δ_B^j невырожденные. Последовательные треугольники $\Delta_A^i, \Delta_A^{i+1}$, $i = 1, \dots, p-2$, пересекаются по общей стороне. Аналогично, последовательные треугольники $\Delta_B^j, \Delta_B^{j+1}$, $j = 1, \dots, q-2$, пересекаются по общей стороне. Наконец, средний многоугольник $m(\Omega)$ пересекается с треугольниками Δ_A^1 и Δ_B^1 по общей стороне.*

Далее, если некоторое звено l_X^i крайней ломаной L_X , $X \in \{A, B\}$, состоит из нескольких ребер и не является концевым звеном для L , то триангулируем соответствующий треугольник Δ_X^i , проведя отрезки, соединяющие X с вершинами ломаной L , лежащими внутри l_X^i . Полученные треугольники обозначим через $\Delta_X^{i,j}$ (рис. 4, b). Если звено l_X^i состоит из одного ребра, то переобозначим треугольник Δ_X^i через $\Delta_X^{i,1}$. Проведем эту процедуру для всех звеньев l_X^i , не являющихся концевыми для L , перейдем к ее концевым звеньям. Пусть концевое звено l_X^r ломаной L состоит из нескольких ребер (очевидно, l_X^r содержит X). Рассмотрим треугольник $\Delta_X^{r-1,j}$, стороной которого является звено l_X^r , и пусть Y – вершина треугольника $\Delta_X^{r-1,j}$, противоположная стороне l_X^r . Триангулируем треугольник $\Delta_X^{r-1,j}$, проведя отрезки, соединяющие Y с вершинами ломаной L , лежащими внутри l_X^r . Полученные треугольники обозначим через $\Delta_X^{r,k}$.

Рассмотрим все построенные выше треугольники. Их совокупность

$$\{\Delta^m\} \cup \{\Delta_A^{i,j}\} \cup \{\Delta_B^{k,l}\}$$

с помощью отображения β порождает диагональную триангуляцию T многоугольника W . Так как в силу леммы 4.6 отображение β_T переводит смежные по стороне треугольники из T в треугольники, пересекающиеся по стороне, то отображение β_T сохраняет ориентацию, поэтому является искомой аффинной диагональной триангуляцией. Утверждение доказано.

Далее нам понадобится уточнить построение триангуляции среднего многоугольника $m(\Omega)$. Прежде чем сделать это, докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4.7. *Пусть Π – та из ограниченных прямой AB полуплоскостей, которая содержит многоугольник $m(\Omega)$. Тогда единственная прямая l , лежащая внутри Π и опорная для выпуклой оболочки $\text{conv } L$, пересекает $\partial \text{conv } L$ по связному замкнутому подмножеству из $m(L)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пересечение опорной прямой l с многоугольником $\text{conv } L$ содержит по крайней мере одну вершину ломаной L . Более того, так как пересечение L с внутренностью полуплоскости Π совпадает с внутренностью L_m , то все вершины ломаной L , лежащие на l , принадлежат L_m . Далее, L_m вместе с отрезком ℓ_m ограничивает выпуклый многоугольник Ω_m , целиком лежащий в $\text{conv } L$, поэтому прямая l является опорной и для Ω_m . Поскольку ℓ_m и l не пересекаются, то l пересекает L_m , а значит, и L или по вершине, или по звену.

Напомним, что ломаная $m(L)$ отличается от L_m , быть может, выброшенными концевыми ребрами. При этом выбрасываемые ребра пересекают прямую AB по точке и, в частности, не параллельны l . Отсюда вытекает, что они не могут лежать в l . Лемма доказана.

Построим теперь следующую триангуляцию среднего многоугольника $m(\Omega)$. Пусть Y – некоторая вершина ломаной L , лежащая на опорной прямой l из леммы 4.7. Напомним, что ломаная $m(L)$ ориентирована в соответствии с ориентацией ломаной L от A к B . Пусть $X_1, \dots, X_k$ – последовательные вершины ломаной $m(L)$ и $Y = X_j$ для некоторого фиксированного j , $1 \leq j \leq k$.

Построим диагональную триангуляцию T' многоугольника $m(\Omega)$, проведя все отрезки вида AX_i , $i \leq j$, а также все отрезки вида BX_i , $i \geq j$, являющиеся диагоналями многоугольника $m(\Omega)$. Выбирая в конструкции из доказательства утверждения 4.1 триангуляцию T' многоугольника $m(\Omega)$ (напомним, что в этой конструкции триангуляция многоугольника $m(\Omega)$ может быть выбрана произвольно), получим некоторую диагональную триангуляцию T_Y многоугольника W такую, что непрерывное отображение $f_Y: W \rightarrow \mathbb{R}^2$, совпадающее с β на множестве вершин из W и аффинное на каждом треугольнике из T_Y , является эквивалентной $\bar{\beta}_T$ аффинной триангуляцией с погруженной внутренностью. Вершину Y ломаной L назовем *главной*, а триангуляцию T_Y многоугольника W и аффинную триангуляцию f_Y назовем *главными диагональными триангуляциями* (соответствующими Y). Таким образом, доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть L – монотонная вложенная ломаная на плоскости $\mathbb{R}^2$, не содержащаяся в прямой, соединяющая точки A и B , ориентированная от A к B и такая, что при движении от A к B ориентированные звенья ломаной L поворачиваются в положительном направлении. Пусть W – выпуклый многоугольник, имеющий столько же вершин, сколько и ломаная L . Пусть $A = A_1, \dots, A_n = B$ – последовательные вершины из L и $x_1, \dots, x_n$ – последовательные вершины многоугольника W , ориентированного против часовой стрелки. Обозначим через β взаимно однозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке x_i , $i = 1, \dots, n$, точку A_i , и пусть Y – произвольная главная вершина ломаной L . Тогда отображение β продолжается до аффинной триангуляции $f_Y: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ типа T_Y с погруженной внутренностью, где T_Y – главная диагональная триангуляция, соответствующая Y . Более того, главные диагональные триангуляции, соответствующие разным главным вершинам ломаной L , эквивалентны между собой.*

Пусть $\bar{L}$ – произвольная замкнутая ломаная, имеющая n вершин, W – многоугольник, также имеющий n вершин. Множества вершин ломаной $\bar{L}$ и многоугольника W обозначим соответственно через $V(\bar{L})$ и $V(W)$. Пусть $\beta: V(W) \rightarrow V(\bar{L})$ – взаимно однозначное отображение, переводящее соседние вершины в соседние. Пусть существует аффинная триангуляция $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ некоторого типа T с погруженной внутренностью, совпадающая с β на $V(W)$. Тогда будем говорить, что триангуляция f *затягивает* $\bar{L}$, а ломаная $\bar{L}$ *ограничивает* f и является *границей погруженного многоугольника* $[f]$.

Таким образом, в силу теоремы 4.1 для каждой монотонной вложенной ломаной L , не содержащейся в прямой, все главные диагональные триангуляции, затягивающие замыкание этой ломаной, принадлежат одному и тому же погруженному многоугольнику, который мы будем называть *характеристической областью* ломаной L .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Одну и ту же замкнутую ломаную можно по-разному представить в виде замыкания незамкнутой монотонной ломаной. Полученные в результате характеристические области (ограниченные одной и той же

Рис. 5. Два способа представления одной и той же замкнутой ломаной в виде замыкания вложенной ломаной, и две разные характеристические области

ломаной) могут оказаться разными. Пример такой замкнутой ломаной, являющейся границей двух разных погруженных многоугольников, т. е. ограничивающей неэквивалентные аффинные триангуляции с погруженной внутренностью, приведен на рис. 5.

§ 5. Кусочно аффинные триангуляции и линейные деревья

Напомним, что плоское (вложенное) дерево называется *линейным*, если все его ребра суть прямолинейные отрезки. Говорят, что вершина v линейного дерева Γ принадлежит его *геометрической границе* $\partial\Gamma$, или, короче, является *граничной вершиной*, если внутренности всех ребер дерева Γ , инцидентных v , лежат в некоторой открытой полуплоскости, ограниченной проходящей через точку v прямой.

Пусть Γ – плоское линейное дерево, и пусть его геометрическая граница $\partial\Gamma$ совпадает с множеством его вершин степени 1. Такие деревья будем называть *невыврожденными*. Пусть $\partial\Gamma = \{x_1, \dots, x_n\}$, где нумерация вершин из $\partial\Gamma$ согласована с порядком обхода по плоскости дерева Γ . Вершины x_i и x_{i+1} , $i = 1, \dots, n-1$, а также вершины x_n и x_1 назовем *соседними*. Конечное упорядоченное множество $\partial\Gamma$ задает на плоскости замкнутую ломаную, которую мы обозначим через L_Γ .

Единственный путь в дереве Γ , соединяющий соседние граничные вершины, назовем *путем Штейнера* в дереве Γ . Легко видеть, что каждый путь Штейнера в невырожденном линейном дереве представляет собой монотонную ломаную.

Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ – аффинная триангуляция с погруженной внутренностью, V – множество вершин многоугольника W и Γ – плоское вложенное невырожденное линейное дерево такое, что f устанавливает взаимно однозначное соответствие между V и $\partial\Gamma$. Будем говорить, что Γ *лежит внутри триангуляции* f , если существует такое плоское дерево Γ' , вложенное в W и натягивающее V , что $f(\Gamma') = \Gamma$, а ограничение f на Γ' есть гомеоморфизм с образом. Далее, заметим, что свойство дерева Γ лежать внутри аффинной триангуляции сохраняется при переходе к эквивалентной аффинной триангуляции. Тем самым, корректно определено свойство дерева Γ *лежать внутри соответствующего погруженного многоугольника*.

Рис. 6. Построение дерева Γ'

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть Γ – плоское невырожденное линейное дерево. Тогда ломаная L_Γ является границей некоторого погруженного многоугольника, внутри которого лежит дерево Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим сначала новое плоское дерево Γ' , планарно эквивалентное Γ . Пусть v – произвольная внутренняя вершина дерева Γ . По предположению степень d вершины v не меньше трех. Выберем вершину v в качестве корневой и ориентируем дерево Γ от вершины v . Построим на плоскости правильный d -угольник P с центром в начале координат, и пусть S^1 – описанная вокруг него окружность. Реализуем вершину v в начале координат, а ее дочерние вершины v_i , $i = 1, \dots, d$, – в серединах сторон a_i правильного многоугольника P с сохранением порядка обхода вокруг v (рис. 6).

Теперь для каждой вершины v_i степени исхода $d_i \geq 2$ реализуем ее дочерние вершины следующим образом. Равномерно разобьем меньшую дугу окружности S^1 , опирающуюся на сторону a_i многоугольника P , на d_i частей и соединим последовательные точки. Вершины, дочерние для v_i , реализуем в серединах полученных отрезков (с сохранением порядка обхода вокруг v_i). Продолжим этот процесс, пока не исчерпаем все внутренние вершины. Полученное в результате дерево обозначим через Γ' .

ЛЕММА 5.1. Замыкание произвольного пути Штейнера s дерева Γ' ограничивает выпуклый многоугольник W_s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть s – произвольный путь Штейнера дерева Γ' и x – вершина ломаной s , ближайшая к корню v в дереве Γ' . Обозначим через a_x хорду окружности S^1 , в середине которой реализована вершина x , и пусть a_i – последовательные хорды окружности S^1 , в серединах которых реализованы дочерние для x вершины. Из определения пути Штейнера вытекает, что соседние с x вершины x' и x'' пути Штейнера s реализуются как середины соседних хорд. Обозначим через y общую точку этих хорд. Тогда все вершины пути Штейнера s , за исключением x , реализуются как середины хорд окружности S^1 , выходящих из точки y .

Напомним, что середины хорд, выходящих из точки y окружности, образуют окружность $\tilde{S}^1$ половинного радиуса. Поэтому замыкание пути Штейнера s представляет собой часть границы вписанного в окружность $\tilde{S}^1$ многоугольника P' , объединенную с отрезками xx' и xx'' . Поскольку все вершины многоугольника P' лежат с одной стороны от прямой, проходящей через хорду a_x , точка x лежит вне P' . Так как, кроме того, каждый путь Штейнера строго монотонен, замыкание пути Штейнера s ограничивает некоторый выпуклый многоугольник W_s , что и требовалось доказать.

Для каждого пути Штейнера s , воспользовавшись утверждением 4.1, построим аффинную триангуляцию $f'_s: W'_s \rightarrow \mathbb{R}^2$ с погруженной внутренностью. Склеим эти триангуляции в искомую. В силу следствия 3.2 для каждого s существует эквивалентная f'_s диагональная аффинная триангуляция $f_s: W_s \rightarrow \mathbb{R}^2$ с погруженной внутренностью, согласованная с f'_s на пути Штейнера s . Обозначим через W объединение многоугольников W_s . Заметим, что отображения f_s совпадают на пересечениях многоугольников W_s , и поэтому склеиваются в единую аффинную триангуляцию $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$, которая по построению содержит дерево Γ и затягивает ломаную L_Γ . Теорема доказана.

Каждый погруженный многоугольник из теоремы 5.1 можно было бы использовать в качестве неопределенной в работе [16] характеристической области дерева Γ (см. обсуждение этого вопроса во введении).

Список литературы

1. Н. С. Гусев, “Каноническое разложение кусочно-аффинных функций, многогранники-следы и геометрические вариационные задачи”, *Фундам. и прикл. математика*, **12:1** (2006), 57–94.
2. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Современ. матем., Ин-т компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2003.
3. P. Fermat, “Abhandlungen über Maxima und Minima”, *Oswalds, Klassiker der Exakten Wissenschaften*, **238**, 1934.
4. M. R. Garey, R. L. Graham, D. S. Johnson, “Some NP-complete geometric problems”, *Eighth annual ACM symposium on theory of computing* (Hershey, 1976), Assoc. Comput. Mach., New York, 1976, 10–22.
5. Z. A. Melzak, “On the problem of Steiner”, *Canad. Math. Bull.*, **4** (1961), 143–148.
6. F. K. Hwang, “A linear time algorithm for full Steiner trees”, *Oper. Res. Lett.*, **4:5** (1986), 235–237.
7. В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич, *Лекции по теории графов*, Наука, М., 1990; англ. пер.: О. Melnikov, R. Tyshkevich, V. Yemelichev, V. Sarvanov, *Lectures on graph theory*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1994.
8. J. B. Kruskal, “On the shortest spanning subtree of a graph and traveling salesman problem”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7:1** (1956), 48–50.
9. Р. К. Прим, “Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения”, *Кибернетический сборник*, №2, Наука, М., 1961, 95–107; пер. с англ.: R. C. Prim, “Shortest connection networks and some generalizations”, *Bell System Tech. J.*, **36** (1957), 1389–1401.
10. B. Delaunay, “Sur la sphère vide”, *Bull. Acad. Sci. USSR*, VII, 1934, №6, 793–800.
11. E. N. Gilbert, H. O. Pollak, “Steiner minimal trees”, *SIAM J. Appl. Math.*, **16:1** (1968), 1–29.

12. R. L. Graham, F. K. Hwang, "A remark on Steiner minimal trees", *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, **4**:1 (1976), 177–182.
13. F. R. K. Chung, F. K. Hwang, "A lower bound for the Steiner tree problem", *SIAM J. Appl. Math.*, **34**:1 (1978), 27–36.
14. D. Z. Du, F. K. Hwang, "A new bound for the Steiner ratio", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **278**:1 (1983), 137–148.
15. F. R. K. Chung, R. L. Graham, "A new bound for Euclidean Steiner minimal trees", *Discrete geometry and convexity* (New York, 1982), Ann. New York Acad. Sci., **440**, New York Acad. Sci., New York, 1985, 328–346.
16. D. Z. Du, F. K. Hwang, "An approach for proving lower bounds: solution of Gilbert–Pollak’s conjecture on steiner ratio", *31st annual symposium on foundations of computer science*, Vol. I, II (St. Louis, MO, 1990), IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 1990, 76–85.
17. D.-Z. Du, F. K. Hwang, "A proof of Gilbert–Pollak Conjecture on the Steiner ratio", *Algorithmica*, **7**:2–3 (1992), 121–135.
18. Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, Факториал Пресс, М., 2002; англ. пер.: E. B. Vinberg, *A course in algebra*, Grad. Stud. Math., **56**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

А. О. ИВАНОВ (A. O. IVANOV)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию

28.02.2005

А. А. ТУЖИЛИН (A. A. TUZHILIN)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: tuz@mech.math.msu.su