Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Дьяконов, Критерии вырожденности матрицы попарных l_1 -расстояний и их обобщения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 3, 93–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/im5404>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:34:44

УДК 519.712

А. Г. Дьяконов

Критерии вырожденности матрицы попарных l_1 -расстояний и их обобщения

Исследуется задача о вырожденности матрицы попарных расстояний системы точек, а также ее обобщения, связанные с приложениями в теории интерполяции и алгебраическом подходе к решению задач распознавания. Получены необходимые и достаточные условия для системы, при которых размерность пространства значений полиномов ограниченной степени над столбцами такой матрицы меньше числа точек системы.

Библиография: 22 наименования.

Ключевые слова: матрица попарных расстояний, интерполяция, метрика, критерии корректности, система точек.

Введение

Матрицы попарных расстояний возникают во многих задачах, связанных с интерполяцией, например, с помощью радиальных базисных функций (RBF) [1] или жестких функций (riddle functions) [2]. Один из результатов, полученных И. Я. Шенбергом в серии классических работ [3]–[5] о вложении метрических пространств в гильбертово, – невырожденность таких матриц для конечной системы $\{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ попарно различных точек пространства $\mathbb{R}^m$ (только такие системы рассматриваются в дальнейшем) и метрики l_p , $1 < p \leq 2$, $q > 1$. Особый интерес представляет случай $p = 1$, для которого многие исследователи пытались найти “геометрический” критерий вырожденности матрицы попарных расстояний. В [6] такой критерий получен для пространства $\mathbb{R}^2$: системы точек на плоскости, которые соответствуют вырожденным матрицам, должны содержать подсистему вида $\{(a_i, b_i), (a_i, b_{i+1})\}_{i=1}^r$, $b_{r+1} = b_1$. В [6] такие подсистемы были названы *замкнутыми путями* (closed paths). Отметим, что идея “замкнутого пути” появилась в работе [7] и аналогичная конструкция под названием “замкнутая молния” использовалась при решении тринадцатой проблемы Гильберта [8]. Прямое обобщение этого понятия в случае пространства $\mathbb{R}^m$ при произвольном m дает только достаточное условие вырожденности матрицы (см. [2], [9]). Критерий для $\mathbb{R}^m$ был получен в [2] с помощью техники размеченных прямоугольников (signed rectangles). *Размеченным прямоугольником* называется функция, которая в точках

$$\begin{aligned} & (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m), \\ & (x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_m) \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-07-00187) и Программы Президента РФ “Поддержка молодых докторов России” (грант МД-757.2011.9).

принимает значение 1, а в точках

$$\begin{aligned} & (x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m), \\ & (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_m) \end{aligned}$$

– значение -1 , $i < j$, в остальных точках она равна нулю. Оказывается, матрица попарных l_1 -расстояний системы точек вырождена тогда и только тогда, когда система содержит непустой носитель (множество наборов, на которых функция отлична от нуля) суммы размеченных прямоугольников (см. [2]).

В [10] показано, что задача о невырожденности матрицы попарных l_1 -расстояний возникает также в теории распознавания (классификации) при нахождении критериев корректности алгебраических замыканий конечной степени модели алгоритмов вычисления оценок [11]. Более того, интерес представляет задача о размерности пространства значений всевозможных полиномов степени не выше k от столбцов такой матрицы (с адамаровым умножением). Опишем вкратце, как возникает эта задача. В алгебраическом подходе к решению задач распознавания (классификации) [10]–[12] алгоритмы классификации представляются в виде суперпозиции распознающего оператора и решающего правила. Распознающий оператор порождает матрицу, ij -й элемент которой равен оценке принадлежности i -го объекта j -му классу. Решающее правило затем по этой матрице осуществляет классификацию, и мы фактически получаем бинарную матрицу, ij -й элемент которой равен 1, если алгоритм относит i -й объект к j -му классу, и равен 0 в противном случае. В [11], [12] описана модель алгоритмов вычисления оценок (АВО), которая стала достаточно универсальной: многие модели алгоритмов классификации являются ее подмоделями. Операции над матрицами оценок (сложение, поэлементное умножение, умножение на константу) индуцируют операции над алгоритмами при фиксированном решающем правиле. Доказано [12], что при необременительных ограничениях для постановки задачи полиномами над АВО можно получить любую матрицу оценок, а следовательно, реализовать произвольную классификацию объектов. Такая возможность получения произвольной матрицы оценок называется *корректностью модели*. Доказано [10], что существует (и достаточно просто строится) система точек, линейные комбинации столбцов матрицы попарных l_1 -расстояний которой полностью описывают матрицы оценок линейных комбинаций АВО (это и есть матрицы, “вытянутые в вектор”). Поэтому корректность множества полиномов степени не выше k над АВО (это множество принято называть *алгебраическим замыканием степени k*) сводится к исследованию полиномов степени не выше k над столбцами матрицы попарных l_1 -расстояний.

В настоящей работе введено понятие k -сингулярности, формализующее “полноту” пространства полиномов степени не выше k над столбцами матрицы попарных l_1 -расстояний: система из q точек называется *k -сингулярной*, если размерность пространства таких полиномов меньше q . Таким образом, 1-сингулярность соответствует вырожденности матрицы попарных l_1 -расстояний. Показано (теорема 2.1), что по системе точек строится новая система, которая 1-сингулярна тогда и только тогда, когда k -сингулярна исходная. Получены критерии k -сингулярности. В частности, критерий, доказанный в теореме 2.2, дает мотивировку для исследования k -сингулярности: система не является

k -сингулярной тогда и только тогда, когда любая функция на точках этой системы может быть представлена в виде суммы функций от k переменных. В работе также получены новые критерии вырожденности матрицы l_1 -расстояний, в том числе геометрические. Например, в теореме 2.3 показано, что система точек не является k -сингулярной тогда и только тогда, когда при любом ее разбиении на две непересекающиеся подсистемы они разделимы с помощью гиперплоскости с предварительным действием элемента некоторой группы (преобразований пространства). В теореме 2.4 показано, что 1-сингулярность системы точек эквивалентна линейной зависимости системы функций (это функции расстояния, на место второго аргумента которых подставляются точки системы). Основной критерий k -сингулярности получен в теореме 3.2. Вместе с леммой 3.4 этот результат является существенным обобщением теоремы 2 из [2]. Показано, что система точек k -сингулярна тогда и только тогда, когда содержит непустой носитель суммы размеченных параллелепипедов (это обобщение понятия "размеченный прямоугольник"). Построены также другие множества функций, носители сумм которых описывают k -сингулярные системы точек (см. леммы 3.4, 3.5). Отметим, что подобные конструкции часто используются в теоретических работах по теории интерполяции; например, введенный в [13] брусок (brick) является проекцией размеченного параллелепипеда на плоскость. Отметим, что в настоящей работе получены результаты, краткое описание которых содержится в [14].

§ 1. Обозначения

Пусть $\tilde{1} = (1, \dots, 1)^T$ – вектор, состоящий из единиц; $\tilde{0} = (0, \dots, 0)^T$ – вектор, состоящий из одних нулей; $\tilde{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ – бинарный вектор, i -я координата которого равна единице, а остальные координаты равны нулю; E – матрица, состоящая только из единиц; $\tilde{v}(i) = (v_1, \dots, v_n)$ – бинарный вектор, представляющий двоичную запись числа i , т.е. $i = \sum_{j=1}^n 2^{j-1} v_j$ (размерность векторов и размеры матриц будут ясны из контекста). Для вектора $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ введем следующие обозначения: $(\tilde{x})_i = x_i$ при $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\text{Ind}(\tilde{x}) = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid x_i \neq 0\}$, $\|\tilde{x}\| = |\text{Ind}(\tilde{x})|$, $\tilde{\bar{x}} = (1 - x_1, \dots, 1 - x_n)^T$, $\tilde{x}|_I = (x_{i_1}, \dots, x_{i_s})^T$ при $I = \{i_1, \dots, i_s\}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n$.

Для функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, где X – произвольное множество, используем следующие обозначения: $Z[f] = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ – множество нулей функции f ; $N[f] = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ – носитель функции f ; $f(Y) = \{f(x) \mid x \in Y\}$, где $Y \subseteq X$.

Пусть $F[X]$ – функция, которая на элементах множества X равна единице, а в остальных точках равна нулю (область определения будет ясна из контекста).

Для матрицы H обозначим через $L(H)$ множество всевозможных линейных комбинаций столбцов этой матрицы, $U^k(H)$ – множество полиномов над столбцами матрицы H степени не выше k с нулевым свободным членом, $F(H) = \|F(h_{ij})\|$ при $H = \|h_{ij}\|$ и $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. В полиномах операция умножения столбцов покоординатная (адамарово умножение), будем обозначать ее символом $\circ$. Нетрудно видеть, что $U^1(H) = L(H)$. Обозначения $L(X)$, $U^k(X)$ будем использовать также, если X является множеством векторов (это соответственно множество линейных комбинаций векторов и множество полиномов

над ними степени не выше k с нулевым свободным членом). Пространство $L(X)$ называется *линейным замыканием* множества X . Пусть $L^\perp(X)$ – пространство векторов, ортогональных ко всем векторам множества X .

ПРИМЕР 1.1. Пусть $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$L(H) = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} \mid c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

$$U^2(H) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1^2 \\ 0^2 \\ 1^2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0^2 \\ 1^2 \\ 1^2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \{c_1, \dots, c_5\} \subset \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3.$$

§ 2. k -сингулярные системы точек

Пусть задана система попарно различных точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ пространства $\mathbb{R}^m$. На множестве $\{1, 2, \dots, q\}$ введем отношение эквивалентности $\sim_t$:

$$i \sim_t j \Leftrightarrow (\tilde{s}_i)_t = (\tilde{s}_j)_t, \quad t \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Систему эквивалентностей $\{\sim_t\}_{t=1}^m$ обозначим через $\psi(S)$ (обозначение будет использовано при доказательстве теоремы 2.1). Пусть множество значений t -й координаты $\{(\tilde{s}_i)_t \mid i \in \{1, 2, \dots, q\}\}$ есть $\{a_{t0}, a_{t1}, \dots, a_{tp(t)}\}$, $a_{t0} < a_{t1} < \dots < a_{tp(t)}$ при $t \in \{1, 2, \dots, m\}$. Считаем, что $p(t) \geq 1$ для всех $t \in \{1, 2, \dots, m\}$ (если $p(t) = 0$, то t -ю координату можно удалить, понизив размерность задачи). Пусть $T^t = \|\theta_{ij}\|_{q \times (p(t)+1)}$ – бинарная матрица, в которой

$$\theta_{ij} = 1 \Leftrightarrow (\tilde{s}_i)_t = a_{t,j-1}, \quad i \in \{1, 2, \dots, q\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, p(t)+1\}$$

(т.е. в ней по столбцам записаны характеристические векторы классов эквивалентности $\sim_t$). Пусть $T_S = [T^1, \dots, T^m]$, $H_S = T_S T_S^T$. Заметим, что $H_S = \|h_{ij}\|_{q \times q}$:

$$h_{ij} = |\{t \mid i \sim_t j\}| = |\{t \mid (\tilde{s}_i)_t = (\tilde{s}_j)_t\}|, \quad i \in \{1, 2, \dots, q\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, q\}.$$

В работе [2] такая матрица названа *характеристической*. Очевидно, что матрица $P_S = mE - H_S$ является матрицей попарных расстояний Хэмминга [15] системы точек S , поскольку ее ij -й элемент равен

$$m - |\{t \in \{1, 2, \dots, m\} \mid i \sim_t j\}| = |\{t \in \{1, 2, \dots, m\} \mid (\tilde{s}_i)_t \neq (\tilde{s}_j)_t\}|,$$

$i \in \{1, 2, \dots, q\}$, $j \in \{1, 2, \dots, q\}$. При $t \in \{1, 2, \dots, m\}$, $r \in \{0, 1, \dots, p(t)\}$ на множестве $\{1, 2, \dots, q\}$ введем отношение эквивалентности $\sim_{tr}$:

$$i \sim_{tr} j \Leftrightarrow \begin{cases} (\tilde{s}_i)_t < a_{tr}, & (\tilde{s}_j)_t < a_{tr}, \\ (\tilde{s}_i)_t \geq a_{tr}, & (\tilde{s}_j)_t \geq a_{tr} \end{cases}$$

(значения $(\tilde{s}_i)_t, (\tilde{s}_j)_t$ находятся по одну сторону от порога a_{tr}), из характеристических векторов классов которого сформируем матрицу T^{tr} . Пусть

$$H'_S = \sum_{t=1}^m \sum_{r=1}^{p(t)} (a_{tr} - a_{t,r-1}) T^{tr} (T^{tr})^T.$$

Матрица $P'_S = \sum_{t=1}^m (a_{tp(t)} - a_{t0}) E - H'_S$ является матрицей попарных l_1 -расстояний системы точек S . Действительно, ее ij -й элемент равен

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^m (a_{tp(t)} - a_{t0}) - \sum_{t=1}^m \sum_{r \in \{1, 2, \dots, p(t)\} : i \sim_{tr} j} (a_{tr} - a_{t,r-1}) \\ &= \sum_{t=1}^m (a_{tp(t)} - a_{t0}) - \sum_{t=1}^m ((a_{tp(t)} - \max[(\tilde{s}_i)_t, (\tilde{s}_j)_t]) + (\min[(\tilde{s}_i)_t, (\tilde{s}_j)_t] - a_{t0})) \\ &= \sum_{t=1}^m (\max[(\tilde{s}_i)_t, (\tilde{s}_j)_t] - \min[(\tilde{s}_i)_t, (\tilde{s}_j)_t]) = \sum_{t=1}^m |(\tilde{s}_i)_t - (\tilde{s}_j)_t|. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.1. Для функций

$$F_k(x) = \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k (x - j + 1), \quad G_k(x) = x^k$$

и системы попарно различных точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q \subseteq \mathbb{R}^m$, $q \geq 2$, при $k \leq m$ справедливы равенства

$$U^k(P_S) = L(F_k(H_S)) = U^k(T_S) = L(G_k(H'_S)) = U^k(P'_S).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы основано на результатах теории эквивалентностей [16], [17]. Для системы эквивалентностей $\{\sim_t\}_{t=1}^m$ в матрице T_S по столбцам записаны характеристические векторы классов эквивалентностей системы, а для характеристической матрицы $H_S = T_S T_S^T$ выполняется очевидное свойство $L(H_S) = L(T_S)$ (см. [18]). Перейдем к системе эквивалентностей $\{\sim_{t_1, \dots, t_k}\}_{t_1, \dots, t_k}$, где $(t_1, \dots, t_k)$ пробегает множество $\{(i_1, \dots, i_k) \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m\}$ сочетаний без повторений объема k и

$$\forall i \in X, \quad \forall j \in X \quad i \sim_{t_1, \dots, t_k} j \Leftrightarrow (i \sim_{t_1} j) \& \dots \& (i \sim_{t_k} j).$$

Очевидно, что линейное замыкание характеристических векторов классов эквивалентностей этой системы совпадает с $U^k(T_S)$, а характеристическая матрица равна $F_k(H_S)$ (заметим, что $F_k(x) = C_x^k = \frac{x!}{k!(x-k)!}$), поэтому $L(F_k(H_S)) = U^k(T_S)$. Второе равенство в утверждении леммы доказано. Заметим, что $U^k(H_S) = L(F_k(H_S))$ (из $L(H_S) = L(T_S)$ следует, что $U^k(H_S) = U^k(T_S)$).

Докажем теперь первое равенство. Достаточно доказать, что $L(P_S) = L(H_S)$. Вложение $L(P_S) \subseteq L(H_S)$ очевидно, поскольку $\tilde{1} \in L(H_S) = L(T_S)$ (вектор $\tilde{1}$ является суммой столбцов подматрицы T^1 матрицы T_S) и каждый столбец матрицы $P_S = mE - H_S$ есть $m\tilde{1} - \tilde{h}$, где $\tilde{h}$ — соответствующий столбец матрицы H_S . Докажем обратное вложение, достаточно доказать, что

$$\tilde{1} \in L(mE - H_S). \quad (2.1)$$

Пусть (2.1) не выполняется и $\tilde{1} = H_S \tilde{c}$, $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_q)^T$; тогда

$$(mE - H_S)\tilde{c} = mE\tilde{c} - \tilde{1} = m \sum_{i=1}^q c_i \tilde{1} - \tilde{1} = \left(m \sum_{i=1}^q c_i - 1 \right) \tilde{1}.$$

Поскольку (2.1) не выполняется, то $m \sum_{i=1}^q c_i = 1$, но тогда из $\tilde{1} = H_S \tilde{c}$ следует, что $1 = h_{11}c_1 + \dots + h_{1q}c_q < m \sum_{i=1}^q c_i = 1$, где $H_S = \|h_{ij}\|_{q \times q}$ (мы пользуемся тем, что $q \geq 2$, $h_{11} = m$ и $h_{1j} < m$ при $j \in \{2, \dots, q\}$, если точки попарно различны). Противоречие.

Аналогично доказываются остальные равенства из утверждения леммы.

Рассмотрим матрицу T'_S с q строками, которая составлена из подматриц $\sqrt{a_{tr} - a_{t,r-1}} T^{tr}$, $t \in \{1, 2, \dots, m\}$, $r \in \{1, 2, \dots, p(t)\}$. Очевидно, что $L(T'_S) = L(T_S)$, поскольку

$$L(T^t) = L([T^{t1}, \dots, T^{tp(t)}])$$

для всех $t \in \{1, 2, \dots, m\}$, поэтому и $U^k(T'_S) = U^k(T_S)$. Очевидно также, что $H'_S = T'_S(T'_S)^T$ и $L(H'_S) = L(T'_S)$. Равенство $L(G_k(H'_S)) = U^k(T'_S)$ доказывается так же, как и равенство $L(F_k(H_S)) = U^k(T_S)$, только здесь от системы эквивалентностей $\{\sim_v\}_{v \in V} = \{\sim_{tr}\}_{t \in \{1, 2, \dots, m\}, r \in \{1, 2, \dots, p(t)\}}$ приходится переходить к системе $\{\sim_{v_1, \dots, v_k}\}_{(v_1, \dots, v_k) \in V \times \dots \times V}$ (отметим, что $G_k(x) = x^k$ — число размещений с повторениями объема k). Линейное замыкание множества характеристических векторов классов эквивалентностей последней системы совпадает с $U^k(T'_S)$, и $L(G_k(H'_S)) = U^k(T'_S)$. Аналогично доказывается равенство $L(P'_S) = L(H'_S)$ (см. [17], [18]). Только здесь вместо принадлежности (2.1) доказывается принадлежность

$$\tilde{1} \in L\left(\sum_{t=1}^m (a_{tp(t)} - a_{t0})E - H'_S\right).$$

Лемма доказана.

Из леммы 2.1 (точнее, из равенства $L(P_S) = L(P'_S)$) следует

ЛЕММА 2.2. *Матрица P_S попарных расстояний Хэмминга вырождена тогда и только тогда, когда вырождена матрица P'_S попарных l_1 -расстояний.*

Далее будем предполагать, что $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q \subseteq \mathbb{R}^m$ — система попарно различных точек и $q \geq 2$, а множество $U^k(T_S)$ будем обозначать через $U^k[S]$ (обозначение предполагает, что множество S упорядочено).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Система точек S называется k -сингулярной, если размерность пространства $U^k[S]$ меньше q .

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть $k \leq m$ и z — биективное отображение множества $\{1, 2, \dots, C_m^k\}$ на множество $\{i_1, \dots, i_k \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m\}$. Система точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ является k -сингулярной тогда и только тогда, когда является 1-сингулярной система точек $D = \{\tilde{d}_i\}_{i=1}^q$ пространства $\mathbb{R}^{C_m^k}$ такая, что для всех $t \in \{1, 2, \dots, C_m^k\}$ справедливо*

$$(\tilde{d}_i)_t = (\tilde{d}_j)_t \Leftrightarrow \forall r \in z(t) \quad (\tilde{s}_i)_r = (\tilde{s}_j)_r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что $\psi(D)$ совпадает с системой эквивалентностей $\{\sim_{t_1, \dots, t_k}\}_{t_1, \dots, t_k}$, построенной при доказательстве леммы 2.1, поскольку

$$\begin{aligned} i \sim_{t_1, \dots, t_k} j &\Leftrightarrow \forall r \in \{t_1, \dots, t_k\} \quad i \sim_r j \\ &\Leftrightarrow \forall r \in \{t_1, \dots, t_k\} \quad (\tilde{s}_i)_r = (\tilde{s}_j)_r \Leftrightarrow (\tilde{d}_i)_{z^{-1}(\{t_1, \dots, t_k\})} = (\tilde{d}_j)_{z^{-1}(\{t_1, \dots, t_k\})}. \end{aligned}$$

Поэтому $U^k[S] = U^1[D]$ и справедливость утверждения теоремы очевидна. Ясно, что система точек D , описанная в условии теоремы, существует. Теорема доказана.

С помощью введенных обозначений легко формулируются (и становятся очевидными) некоторые результаты из [2], [13]. Следующие условия эквивалентны:

- 1) система точек S не является 1-сингулярной;
- 2) $\det(P'_S) \neq 0$;
- 3) если $N(\cdot)$ – норма в $\mathbb{R}^r$, $r = m + p(1) + \dots + p(m)$, то $N(\tilde{x}^T T_S)$ является нормой в $\mathbb{R}^q$ (см. [2]);
- 4) условие $\tilde{x}^T T_S = \tilde{0}$ выполняется только для $\tilde{x} = \tilde{0}$ (см. [2, теорема 1] и [13, предложение 1.1]);
- 5) матрица H_S является положительно определенной (см. [2, теорема 3]).

ТЕОРЕМА 2.2. Система точек S не является k -сингулярной при $k \leq m$ тогда и только тогда, когда любая функция $f(x_1, \dots, x_m)$ на точках системы S может быть представлена в виде конечной суммы функций, каждая из которых зависит от k переменных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор-столбец значений функции $g(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, на точках системы S равен

$$\sum_{(b_1, \dots, b_k) \in A_{i_1, \dots, i_k}} g(b_1, \dots, b_k) \tilde{\theta}_{i_1}(b_1) \circ \dots \circ \tilde{\theta}_{i_k}(b_k),$$

где $A_{i_1, \dots, i_k} = \{((\tilde{s}_i)_{i_1}, \dots, (\tilde{s}_i)_{i_k})\}_{i=1}^q$, $\tilde{\theta}_{i_r}(b_r) = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ – бинарный вектор, в котором

$$\theta_j = 1 \Leftrightarrow (\tilde{s}_j)_{i_r} = b_r, \quad r \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Отсюда видно, что конечная (непустая) сумма вектор-столбцов, соответствующих функциям $g(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, есть вектор из $U^1[D]$ (в обозначениях теоремы 2.1). Множество значений суммы (при выборе различных функций $g(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$) совпадает с множеством $U^1[D] = U^k[S]$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Любая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ на точках множества S может быть представлена в виде конечной суммы функций, каждая из которых зависит от $\lfloor \log_2 |S| \rfloor$ переменных, где $\lfloor x \rfloor$ – наибольшее целое число, не превосходящее числа x .

Это следует из [19, теорема 6.1.3], где доказано, что если бинарная матрица T содержит попарно различные строки и $\tilde{1} \in L(T)$, то $U^k(T)$ при $k = \lfloor \log_2 q \rfloor$ содержит произвольный вектор. Отсюда следует, что система $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ попарно различных точек является $\lfloor \log_2 q \rfloor$ -сингулярной. Отметим, что этот результат в [19] сформулирован в другой терминологии: как результат о $(0, 1)$ -полноте

семейства корректирующих операций. Схема доказательства следующая. Среди множества векторов $\{\tilde{t}, \tilde{1} - \tilde{t}\}_{\tilde{t}}$, где $\tilde{t}$ пробегает все столбцы матрицы T , выбирается вектор $\tilde{t}_1$, содержащий наименьшее число единиц. Затем в этом множестве выбирается вектор $\tilde{t}_2$, содержащий наименьшее число единиц в позициях с номерами из $\text{Ind}(\tilde{t}_1)$. Потом выбирается вектор $\tilde{t}_3$, содержащий наименьшее число единиц в позициях с номерами из $\text{Ind}(\tilde{t}_1 \circ \tilde{t}_2)$, и т. д. Сделав $k \leq \lfloor \log_2 q \rfloor$ шагов, мы получим вектор $\tilde{t}^1 = \tilde{t}_1 \circ \dots \circ \tilde{t}_k$, содержащий только одну единицу. Затем аналогично строится вектор $\tilde{t}^2$, содержащий одну единицу во множестве $\{1, 2, \dots, q\} \setminus \text{Ind}(\tilde{t}^1)$, и т. д. В итоге получаем базис q -мерного пространства, состоящий из векторов $\tilde{t}^1, \dots, \tilde{t}^q$, представимых в виде произведения не более $\lfloor \log_2 q \rfloor$ столбцов и их инверсий матрицы T , т. е. $\{\tilde{t}^1, \dots, \tilde{t}^q\} \subset U^{\lfloor \log_2 q \rfloor}(T)$.

Пусть $g_{t,x,y}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$g_{t,x,y}(\tilde{s}) = \begin{cases} \tilde{s}, & s_t \notin \{x, y\}, \\ (s_1, \dots, s_{t-1}, y, s_{t+1}, \dots, s_m), & s_t = x, \\ (s_1, \dots, s_{t-1}, x, s_{t+1}, \dots, s_m), & s_t = y, \end{cases}$$

для вектора $\tilde{s} = (s_1, s_2, \dots, s_m)$, $t \in \{1, 2, \dots, m\}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Пусть G – минимальная группа, содержащая преобразования $g_{t,x,y}$ для всех $t \in \{1, 2, \dots, m\}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ (групповая операция – суперпозиция).

ЛЕММА 2.3. *Для любого преобразования $g \in G$ справедливо равенство $U^k[S] = U^k[g(S)]$, где $g(S) = \{g(\tilde{s}_i)\}_{i=1}^q$. В частности, система точек S k -сингулярна тогда и только тогда, когда k -сингулярна система точек $g(S)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из равенства $H_S = H_{g(S)}$, справедливого для любого преобразования $g \in G$. Действительно, поскольку $g_{t,x,y} = g_{t,y,x}^{-1}$, то любой элемент g группы G представим в виде $g_{t_1,x_1,y_1} \dots g_{t_r,x_r,y_r}$, а равенство $H_S = H_{g_{t,x,y}(S)}$ очевидно для всех $t \in \{1, 2, \dots, m\}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Отметим, что система эквивалентностей $\{\sim_t\}_{t=1}^m$ вообще не меняется при действии элементов группы G . Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. При исследовании k -сингулярности достаточно ограничиться рассмотрением систем точек на целочисленной решетке, поскольку

$$U^k[\{(a_{1,b(i,1)}, \dots, a_{m,b(i,m)})\}_{i=1}^q] = U^k[\{(b(i,1), \dots, b(i,m))\}_{i=1}^q].$$

ТЕОРЕМА 2.3. *Система точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ является 1-сингулярной тогда и только тогда, когда существует такое подмножество $X \subseteq \{1, 2, \dots, q\}$, что для любого преобразования $g \in G$ система точек $\{g(\tilde{s}_i)\}_{i \in X}$ не отделима от системы точек $\{g(\tilde{s}_i)\}_{i \in \{1, 2, \dots, q\} \setminus X}$ гиперплоскостью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Систему неравенств

$$\begin{aligned} m_{i1}y_1 + \dots + m_{ir}y_r &> c, & i \in X, \\ m_{i1}y_1 + \dots + m_{ir}y_r &< c, & i \in \{1, 2, \dots, q\} \setminus X, \end{aligned}$$

при $X \subseteq \{1, 2, \dots, q\}$ будем обозначать через

$$M\tilde{y} >_X c,$$

где $M = \|m_{ij}\|_{q \times r}$, $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_r)^T$. Заметим, что отделимость системы точек $\{(m_{i1}, \dots, m_{ir})\}_{i \in X}$ от системы точек $\{(m_{i1}, \dots, m_{ir})\}_{i \in \{1, 2, \dots, q\} \setminus X}$ гиперплоскостью означает совместность этой системы относительно переменных $y_1, \dots, y_r, c$.

Пусть

$$M_S = \begin{pmatrix} \tilde{s}_1^T \\ \dots \\ \tilde{s}_q^T \end{pmatrix}$$

(в этой $(q \times m)$ -матрице по строкам записаны точки системы S). Отделимость системы точек $\{g(\tilde{s}_i)\}_{i \in X}$ от системы точек $\{g(\tilde{s}_i)\}_{i \in \{1, 2, \dots, q\} \setminus X}$ гиперплоскостью эквивалентна наличию решения $(g, \tilde{y}, c) \in G \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ системы $M_{g(S)} \tilde{y} \underset{X}{>} c$, которое существует тогда и только тогда, когда существует такое решение $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m, c)$ системы

$$T^1 \tilde{x}^1 + \dots + T^m \tilde{x}^m \underset{X}{>} c, \quad (2.2)$$

что в каждом векторе $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m$ все координаты попарно различны или равны нулю. Обоснуем это. Каждый элемент g группы G представим в виде

$$g_{1, x_1^1, y_1^1} \dots g_{1, x_{r(1)}^1, y_{r(1)}^1} \dots g_{m, x_1^m, y_1^m} \dots g_{m, x_{r(m)}^m, y_{r(m)}^m}$$

(мы пользуемся тем, что $g_{t_1, x_1, y_1} g_{t_2, x_2, y_2} = g_{t_2, x_2, y_2} g_{t_1, x_1, y_1}$ при $t_1 \neq t_2$). Поэтому элемент g действует на точку m -мерного пространства следующим образом: $g(s_1, \dots, s_m) = (g_1(s_1), \dots, g_m(s_m))$, где g_t – перестановка конечного числа точек из $\mathbb{R}$, поэтому t -й столбец матрицы $M_{g(S)}$ равен $T^t(g_t(a_{t,0}), \dots, g_t(a_{tp(t)}))$. Множество векторов вида

$$M_{g(S)} \tilde{y} = \sum_{t=1}^m y_t T^t(g_t(a_{t,0}), \dots, g_t(a_{tp(t)}))^T$$

при всех $g \in G$, $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ совпадает со множеством $T^1 \tilde{x}^1 + \dots + T^m \tilde{x}^m$, где в каждом векторе $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m$ все координаты попарно различны или равны нулю.

Искомое решение (2.2) существует тогда и только тогда, когда совместна система

$$T_S \tilde{x} \underset{X}{>} c$$

(без дополнительных ограничений на решение), а следовательно, система

$$T_S \tilde{x} \underset{X}{>} 0,$$

поскольку $\tilde{1} \in L(T_S)$. Последняя система совместна при всех $X \subseteq \{1, 2, \dots, q\}$ тогда и только тогда, когда $\text{rank}(T_S) = q$ (см., например, [20]). Теорема доказана.

Неформально условие теоремы 2.3 можно переформулировать следующим образом: система точек не является 1-сингулярной тогда и только тогда, когда при любом разбиении ее на две непересекающиеся подсистемы они разделимы с помощью “суперпозиции” некоторого преобразования $g \in G$ и гиперплоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В условии теоремы 2.3 отделимость гиперплоскостью можно заменить на отделимость гиперплоскостью, проходящей через нуль, или на отделимость фиксированной гиперплоскостью, заданной уравнением $a_1x_1 + \dots + a_mx_m + a_0 = 0$, $0 \notin \{a_1, \dots, a_m\}$.

ТЕОРЕМА 2.4. Система точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ пространства $\mathbb{R}^m$ является 1-сингулярной тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $(c_1, \dots, c_q)$ такой, что для всех $\tilde{s} \in \mathbb{R}^m$ справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^q c_i \rho(\tilde{s}, \tilde{s}_i) = 0, \quad (2.3)$$

где ρ – метрика Хэмминга или l_1 -метрика.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся рассмотрением случая, когда ρ является метрикой Хэмминга (для l_1 -метрики доказательство аналогично). Пусть равенство (2.3) выполнено для всех точек системы $\tilde{s} \in S$ и некоторого ненулевого вектора $(c_1, \dots, c_q)$; тогда $(c_1, \dots, c_q)P_S = \tilde{0}^T$ (по лемме 2.1 это эквивалентно 1-сингулярности системы S). Пусть теперь $\tilde{s} \notin S$. Очевидно, что $(c_1, \dots, c_q, 0)T_{S \cup \{\tilde{s}\}} = \tilde{0}^T$, а из леммы 2.1 следует, что

$$(c_1, \dots, c_q, 0)^T \in L^\perp(L(T_{S \cup \{\tilde{s}\}})) = L^\perp(L(P_{S \cup \{\tilde{s}\}})),$$

поэтому

$$(c_1, \dots, c_q, 0)P_{S \cup \{\tilde{s}\}} = \tilde{0}^T$$

и равенство (2.3) выполняется для точки $\tilde{s}$ (достаточно заметить, что скалярное произведение вектора $(c_1, \dots, c_q, 0)$ и последнего столбца матрицы $P_{S \cup \{\tilde{s}\}}$ равно нулю).

Если равенство (2.3) выполнено для всех точек пространства, то, в частности, оно выполнено и для точек системы S , откуда следует 1-сингулярность системы. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Теорема 2.4 была анонсирована в [14] и недавно обобщена П. А. Карповичем [21]: критерий k -сингулярности получается при замене условия (2.3) на условие

$$\sum_{i=1}^q c_i \rho^k(\tilde{s}, \tilde{s}_i) = 0$$

(однако доказательство становится достаточно громоздким, поэтому здесь приведено простое доказательство для $k = 1$). Таким образом, k -сингулярность соответствует вырожденности матрицы k -х степеней попарных l_1 -расстояний (расстояний Хэмминга).

ПРИМЕР 2.1. Покажем, что теорема 2.4 перестает быть верной при изометричном вложении системы точек в другое пространство. Пусть точки системы записаны по строкам в матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда вектор $(-2, 1, 1, 1, -1)$ ортогонален всем столбцам матрицы попарных l_1 -расстояний (и расстояний Хэмминга)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Такая же матрица соответствует системе точек $\{1, 2, \dots, 5\}$ в графе с множеством вершин $\{0, 1, \dots, 5\}$ и множеством ребер

$$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 4\}, \{0, 5\}\}$$

для стандартной метрики графа ρ_Γ (длина кратчайшего маршрута между вершинами графа). Заметим, что

$$-2\rho_\Gamma(0, 1) + \rho_\Gamma(0, 2) + \rho_\Gamma(0, 3) + \rho_\Gamma(0, 4) - \rho_\Gamma(0, 5) = -2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Теорема 2.4 имеет следующую (немного искусственную) интерпретацию. Если считать число $c\rho(\tilde{s}, \tilde{d})$ “антипотенциалом”, который порождается в точке $\tilde{s}$ “зарядом” величины c , размещенным в точке $\tilde{d}$, и считать, что “антипотенциалы”, порождаемые разными “зарядами”, суммируются, то 1-сингулярные системы описывают точечные конфигурации, в которых можно разместить заряды так, чтобы антипотенциал в каждой точке пространства был равен нулю. Таким образом, порождается “нулевое антипотенциальное поле”.

§ 3. Описание k -сингулярных систем точек

Для вектора $\tilde{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$ при $n = \sum_{t=1}^m p(t)$ введем обозначение $\tilde{w}^{[t]} = (w_{\eta(t-1)+1}, \dots, w_{\eta(t)})^T$, где $\eta(t) = \sum_{j=1}^t p(j)$, $t \in \{1, 2, \dots, m\}$ (считаем, что $\eta(0) = 0$). Пусть $A = \times_{t=1}^m \{a_{t0}, a_{t1}, \dots, a_{tp(t)}\} \subseteq \mathbb{R}^m$, для вектора $\tilde{s} \in A$ положим $w(\tilde{s}) = \tilde{w} \in \{0, 1\}^n$:

$$\tilde{w}^{[t]} = \begin{cases} \tilde{0}, & (\tilde{s})_t = a_{t0}, \\ \tilde{e}_r, & (\tilde{s})_t = a_{tr}, \quad r \in \{1, 2, \dots, p(t)\}, \end{cases}$$

для всех $t \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Запишем в матрицу N размера $2^n \times n$ последовательно по строкам все n -мерные бинарные векторы:

$$N = \begin{pmatrix} (\tilde{v}(0))^T \\ \dots\dots\dots \\ (\tilde{v}(2^n - 1))^T \end{pmatrix}.$$

Пусть $\tilde{x}_j$ — j -й столбец этой матрицы, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Для вектора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \{0, 1\}^n$ введем обозначения

$$\tilde{x}_{\tilde{\alpha}} = \tilde{1} \circ \prod_{j: \alpha_j=1} \tilde{x}_j, \quad \tilde{y}_{\tilde{\alpha}} = \tilde{1} \circ \prod_{j: \alpha_j=0} \tilde{x}_j.$$

Здесь произведение поэлементное (конъюнкция), т. е.

$$\text{Ind}(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}) = \{i + 1 | \tilde{v}(i) \geq \tilde{\alpha}\}, \quad \text{Ind}(\tilde{y}_{\tilde{\alpha}}) = \{i + 1 | \tilde{v}(i) \leq \tilde{\alpha}\}$$

(знаком $\leq$ обозначено “стандартное” поэлементное сравнение векторов [22]). Заметим, что векторы системы $\{\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}\}_{\tilde{\alpha} \in \{0,1\}^n}$ (так же, как и векторы системы $\{\tilde{y}_{\tilde{\alpha}}\}_{\tilde{\alpha} \in \{0,1\}^n}$) линейно независимы.

Пусть $u(\tilde{v}(i)) = i + 1$, т. е. функция u по вектору указывает номер строки, в которой он записан в матрице N . Считаем, что $\tilde{x}_0 = \tilde{1}$; тогда очевидно, что $U^k[S] = U^k(\{\tilde{x}_j|_{u(w(S))}\}_{j=0}^n)$. Вообще, матрица размером $q \times n$, составленная из векторов множества $\{\tilde{x}_j|_{u(w(S))}\}_{j=1}^n$, получается из матрицы T_S вычеркиванием некоторых столбцов: по одному (первому) из каждой подматрицы T^t , $t \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Пусть $\tilde{r} = (r_1, \dots, r_{2^n})^T$: $r_i = (-1)^{\|\tilde{v}(i-1)\|}$ при $i \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$.

ЛЕММА 3.1. *Справедливо равенство*

$$\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}^T \cdot (\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\beta}}) = \begin{cases} (-1)^{\|\tilde{\alpha}\|}, & \tilde{\alpha} = \tilde{\beta}, \\ 0, & \tilde{\alpha} \neq \tilde{\beta}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}^T \cdot (\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\beta}}) = \tilde{r}^T \cdot (\tilde{x}_{\tilde{\alpha}} \circ \tilde{y}_{\tilde{\beta}}) = \tilde{r}^T \cdot \tilde{z}$, где $\tilde{z}$ – бинарный вектор, для которого $\text{Ind}(\tilde{z}) = \text{Ind}(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}) \cap \text{Ind}(\tilde{y}_{\tilde{\beta}})$. Если $\tilde{\alpha} \not\leq \tilde{\beta}$, то $\text{Ind}(\tilde{z}) = \emptyset$ и $\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}^T \cdot (\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\beta}}) = 0$, иначе

$$\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}^T \cdot (\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\beta}}) = \sum_{i \in \text{Ind}(\tilde{z})} r_i = \sum_{i: \tilde{\alpha} \leq \tilde{v}(i) \leq \tilde{\beta}} (-1)^{\|\tilde{v}(i)\|} = \sum_{k=\|\tilde{\alpha}\|}^{\|\tilde{\beta}\|} (-1)^k C_{\|\tilde{\beta}\|-\|\tilde{\alpha}\|}^{k-\|\tilde{\alpha}\|}.$$

Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Напомним, что *монотонной булевой функцией* [22] называется функция $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, для которой

$$\forall \tilde{\alpha} \in \{0, 1\}^n, \quad \forall \tilde{\beta} \in \{0, 1\}^n \quad \tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta}).$$

ЛЕММА 3.2. *Для монотонной булевой функции $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ справедливо равенство*

$$U^k(\{\tilde{x}_j|_{u(Z[f])}\}_{j=0}^n) = L(\{\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| \leq k}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство

$$U^k(\{\tilde{x}_j|_I\}_{j=0}^n) = L(\{\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}|_I\}_{\tilde{\alpha}: \|\tilde{\alpha}\| \leq k})$$

для произвольного множества $I \subseteq \{1, 2, \dots, 2^n\}$ следует из определения векторов $\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\alpha} \in \{0, 1\}^n$. Если $f(\tilde{\alpha}) = 1$, т. е. $\tilde{\alpha} \notin Z[f]$, то $\text{Ind}(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}) \cap u(Z[f]) = \emptyset$. Действительно, если $i \in \text{Ind}(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}) \cap u(Z[f]) \neq \emptyset$, т. е.

$$\tilde{v}(i-1) \geq \tilde{\alpha}, \quad f(\tilde{v}(i-1)) = 0,$$

то это противоречит монотонности функции f :

$$0 = f(\tilde{v}(i-1)) \geq f(\tilde{\alpha}) = 1.$$

Поэтому при $\tilde{\alpha} \notin Z[f]$ справедливо равенство

$$\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])} = \tilde{0},$$

из которого следуют равенство

$$L(\{\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}\}_{\tilde{\alpha}: \|\tilde{\alpha}\| \leq k}) = L(\{\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| \leq k})$$

и утверждение леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. *Для монотонной булевой функции $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ справедливо равенство*

$$L^\perp(U^k(\{\tilde{x}_j|_{u(Z[f])}\}_{j=0}^n)) = L(\{\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| > k}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из трех очевидных фактов:

- 1) все векторы множества $Y_f^k = \{\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| > k}$ ортогональны ко всем векторам множества $X_f^k = \{\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| \leq k}$;
- 2) все векторы множества X_f^k линейно независимы, и все векторы множества Y_f^k линейно независимы;
- 3) $|X_f^k| + |Y_f^k| = |Z[f]|$.

Отметим, что утверждение 1) следует из леммы 3.1 и того, что в векторах $\{\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]}$ все координаты с номерами не из $u(Z[f])$ равны нулю:

$$\begin{aligned} (\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}})_i \neq 0 &\Leftrightarrow (\tilde{y}_{\tilde{\alpha}})_i = 1 \Leftrightarrow \tilde{\nu}(i-1) \leq \tilde{\alpha} \\ &\Rightarrow f(\tilde{\nu}(i-1)) \leq f(\tilde{\alpha}) = 0 \Rightarrow f(\tilde{\nu}(i-1)) = 0 \Rightarrow i \in u(Z[f]). \end{aligned}$$

Поэтому

$$(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])})^T (\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\beta}}|_{u(Z[f])}) = \tilde{x}_{\tilde{\alpha}}^T \cdot (\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\beta}}) = 0$$

для $\tilde{\alpha} \in Z[f]$, $\|\tilde{\alpha}\| \leq k$ и $\tilde{\beta} \in Z[f]$, $\|\tilde{\beta}\| > k$. При доказательстве утверждения 3) пользуемся тем, что

$$|X_f^k| = |\{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| \leq k\}|, \quad |Y_f^k| = |\{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| > k\}|.$$

Лемма доказана.

Далее считаем, что булева функция f задана дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ [22])

$$\bigvee_{t=1}^m \bigvee_{\eta(t-1)+1 \leq a < b \leq \eta(t)} x_a x_b,$$

где $\vee$ – операция дизъюнкции: $1 \vee 1 = 1 \vee 0 = 0 \vee 1 = 1$, $0 \vee 0 = 0$.

Заметим, что функция f монотонная и $Z[f] = w[A]$, а функция w устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством A и множеством нулевых наборов функции f .

ТЕОРЕМА 3.1. *Система точек S k -сингулярна тогда и только тогда, когда*

$$\exists \tilde{l} \in L(\{\tilde{y}_{\tilde{\alpha}}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| > k}): \quad \emptyset \neq \text{Ind}(\tilde{l}) \subseteq u(w(S)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система точек S k -сингулярна тогда и только тогда, когда пространство $L^\perp(U^k(\{\tilde{x}_j|_I\}_{j=0}^n))$ при $I = u(w(S))$ содержит ненулевой вектор. Это означает, что пространство $L^\perp(U^k(\{\tilde{x}_j|_{u(Z[f])}\}_{j=0}^n))$ должно содержать вектор $\tilde{l}$, для которого $\emptyset \neq \text{Ind}(\tilde{l}) \subseteq I$. Из леммы 3.3 получаем следующий критерий k -сингулярности системы S :

$$\exists \tilde{l} \in L(\{\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| > k}): \quad \emptyset \neq \text{Ind}(\tilde{l}) \subseteq I.$$

Поскольку $\text{Ind}(\tilde{r} \circ \tilde{z}) = \text{Ind}(\tilde{z})$ для любого 2^n -мерного вектора $\tilde{z}$, то

$$\emptyset \neq \text{Ind}(\tilde{l}) \subseteq I \iff \emptyset \neq \text{Ind}(\tilde{r} \circ \tilde{l}) \subseteq I$$

и критерий можно переписать в виде

$$\exists (\tilde{r} \circ \tilde{l}) \in L(\{(\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}})|_{u(Z[f])}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| > k}): \quad \emptyset \neq \text{Ind}(\tilde{r} \circ \tilde{l}) \subseteq I,$$

или

$$\exists \tilde{l} \in L(\{\tilde{y}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| > k}): \quad \emptyset \neq \text{Ind}(\tilde{l}) \subseteq I.$$

При доказательстве леммы 3.3 было показано, что координаты с номерами из $\{1, 2, \dots, 2^n\} \setminus u(Z[f])$ векторов множества $\{\tilde{y}_{\tilde{\alpha}}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| > k}$ равны нулю, отсюда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Условие существования вектора*

$$\tilde{l} \in L(\{\tilde{y}_{\tilde{\alpha}}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| > k})$$

можно заменить тем условием, что вектор $\tilde{l}$ является суммой векторов $\pm \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\alpha} \in Z[f]$, $\|\tilde{\alpha}\| > k$.

Действительно, если этот вектор линейно выражается через векторы $\tilde{y}_{\tilde{\alpha}}$, то рациональные коэффициенты в разложении можно привести к общему знаменателю, а вектор $\tilde{l}$ нам нужен (для проверки $\emptyset \neq \text{Ind}(\tilde{l}) \subseteq u(w(S))$) с точностью до ненулевого множителя. Кроме того, векторы $\tilde{y}_{\tilde{\alpha}}$ можно заменить векторами $\tilde{y}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}$ (отбросив нулевые координаты).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В качестве функции f можно взять функцию, заданную условием

$$f(\tilde{\alpha}) = 0 \iff \exists i \in \{1, 2, \dots, q\}: \tilde{\alpha} \leq w(\tilde{s}_i),$$

т. е. множество ее нулей – “тень” образов точек системы.

Пусть $\Pi \left[\begin{smallmatrix} (a_1, \dots, a_m) \\ (b_1, \dots, b_m) \end{smallmatrix} \right]$ – функция, действующая из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$, которая равна нулю во всех точках, кроме точек множества $\times_{t=1}^m \{a_t, b_t\}$ (допускается, что $a_t = b_t$ для некоторых $t \in \{1, 2, \dots, m\}$). На каждой точке $(c_1, \dots, c_m)$ этого множества она равна

$$(-1)^{|\{t \in \{1, 2, \dots, m\} | c_t = a_t\}|}.$$

Будем называть такую функцию *размеченным параллелепипедом* размерности

$$r = |\{t \in \{1, 2, \dots, m\} | a_t \neq b_t\}|.$$

Модуль этой функции $F[\times_{t=1}^m \{a_t, b_t\}]$ будем называть *неразмеченным параллелепипедом* размерности r . Элементы множества $\times_{t=1}^m \{a_t, b_t\}$ будем называть *вершинами размеченного (неразмеченного) параллелепипеда*.

Рассмотрим набор $\tilde{\alpha} \in Z[f]$; ясно, что $\|\tilde{\alpha}^{[t]}\| \leq 1$ для всех $t \in \{1, 2, \dots, m\}$. Пусть

$$b_t = \begin{cases} a_{t0}, & \tilde{\alpha}^{[t]} = \tilde{0}, \\ a_{tr}, & \tilde{\alpha}^{[t]} = \tilde{e}_r, \end{cases}$$

и $Y_{\tilde{\alpha}} = \times_{t=1}^m \{a_{t0}, b_t\}$. Нетрудно видеть, что

$$u(w(Y_{\tilde{\alpha}})) = \{i + 1 \mid \tilde{v}(i) \leq \tilde{\alpha}\} = \text{Ind}(\tilde{y}_{\tilde{\alpha}}).$$

Пусть Π^k – множество неразмеченных параллелепипедов размерности больше k с одной общей вершиной $(a_{10}, \dots, a_{m0})$ и их отрицаний (для функции f ее отрицание – функция $(-f)$). При дальнейших рассуждениях можно рассматривать только параллелепипеды, множества вершин которых содержатся во множестве A .

ТЕОРЕМА 3.2. Система точек S k -сингулярна тогда и только тогда, когда найдется такая конечная сумма Σ функций из множества Π^k , что

$$\emptyset \neq N[\Sigma] \subseteq S. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждой функции g на множестве A можно взаимно однозначно сопоставить вектор $\tilde{z} = (z_1, \dots, z_{2^n})$, в котором $z_{u(w(\tilde{s}))} = g(\tilde{s})$ и $z_i = 0$ при $i \notin u(Z[f])$. Доказываемое утверждение вытекает из теоремы 3.1 и следствия 3.1. Действительно, система точек S k -сингулярна тогда и только тогда, когда найдется вектор $\tilde{l}$, представимый в виде суммы векторов $\pm \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}$ (или $\pm \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}$), $\tilde{\alpha} \in Z[f]$, $\|\tilde{\alpha}\| > k$, для которого

$$\emptyset \neq \text{Ind}(\tilde{l}) \subseteq u(w(S)) \quad (3.2)$$

(каждый вектор может входить в сумму несколько раз). Вектору $\tilde{y}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}$ при $\tilde{\alpha} \in Z[f]$ соответствует функция $F[Y_{\tilde{\alpha}}]$ на множестве A . Условия $\tilde{\alpha} \in Z[f]$, $\|\tilde{\alpha}\| > k$ эквивалентны тому, что неразмеченный параллелепипед $F[Y_{\tilde{\alpha}}]$ имеет размерность больше k . Поэтому вектору $\tilde{l}$ соответствует сумма Σ и условие (3.2) переписывается в виде (3.1). Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Будем называть семейство Π^k *допустимым*, если для него верно утверждение теоремы 3.2.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Допустимым является множество размеченных параллелепипедов размерности больше k с одной общей вершиной $(a_{10}, \dots, a_{m0})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно векторы $\tilde{y}_{\tilde{\alpha}}$ в формулировке теоремы 3.1 заменить векторами $\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}$ (как следует из доказательства теоремы 3.1, после замены ее утверждение останется верным). Заметим, что

$$\Pi \begin{bmatrix} (b_1, a_2, \dots, a_m) \\ (a_1, b_2, \dots, b_m) \end{bmatrix} = -\Pi \begin{bmatrix} (a_1, \dots, a_m) \\ (b_1, \dots, b_m) \end{bmatrix}$$

при $a_1 \neq b_1$, а вектору $\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}$ при $\tilde{\alpha} \in Z[f]$, $\|\tilde{\alpha}\| > k$ соответствует размеченный параллелепипед с множеством вершин $Y_{\tilde{\alpha}}$ размерности больше k . Если

рассматривать множество всех параллелепипедов (не обязательно с вершинами во множестве A), то допустимым будет множество размеченных параллелепипедов размерности больше k с одной общей вершиной.

ЛЕММА 3.4. *Допустимым является множество размеченных параллелепипедов размерности $k + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейное замыкание множества размеченных параллелепипедов размерности больше k с одной общей вершиной $(a_{10}, \dots, a_{m0})$ в точности описывает множество $L^\perp(U^k[S])$. Поскольку при $g \in G$

$$L^\perp(U^k[S]) = L^\perp(U^k[g(S)])$$

(см. лемму 2.3), в качестве общей вершины может быть любая точка множества A . Поэтому допустимым является множество всех (не только с общей вершиной) размеченных параллелепипедов размерности больше k . Осталось заметить, что каждый размеченный параллелепипед размерности r является разностью двух размеченных параллелепипедов размерности $r - 1$. Например, справедлива формула

$$\begin{aligned} & \Pi \left[\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_r, a_{r+1}, \dots, a_m \end{pmatrix} \right] \\ &= \Pi \left[\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_{r-1}, a_r, a_{r+1}, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_{r-1}, a_r, a_{r+1}, \dots, a_m \end{pmatrix} \right] - \Pi \left[\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_{r-1}, b_r, a_{r+1}, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_{r-1}, b_r, a_{r+1}, \dots, a_m \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

при $a_r \neq b_r$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. При $k = 1$ лемма 3.4 превращает теорему 3.2 в критерий 1-сингулярности, доказанный в [2] (см. [2, теорема 2], где доказательство было проведено по индукции).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Параллелепипед (размеченный или неразмеченный) с множеством вершин $\times_{t=1}^m Y^t$ называется *последовательным относительно множества A* , если

$$\forall t \in \{1, 2, \dots, m\} \quad \exists r \in \{1, 2, \dots, p(t)\}: \quad Y^t \subseteq \{a_{t,r-1}, a_{tr}\}.$$

ЛЕММА 3.5. *Множество последовательных относительно множества A размеченных параллелепипедов размерности $k + 1$ является допустимым. Множество последовательных относительно множества A неразмеченных параллелепипедов размерности $k + 1$ и их отрицаний является допустимым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что любой размеченный параллелепипед размерности r с множеством вершин, содержащимся в A , представим в виде суммы последовательных относительно множества A размеченных параллелепипедов размерности r . Это следует, например, из формулы

$$\Pi \left[\begin{pmatrix} a_{1,b(1)}, \dots, a_{m,b(m)} \\ a_{1,c(1)}, \dots, a_{m,c(m)} \end{pmatrix} \right] = \sum_{r=b(m)}^{c(m)-1} \Pi \left[\begin{pmatrix} a_{1,b(1)}, \dots, a_{m-1,b(m-1)}, a_{m,r} \\ a_{1,c(1)}, \dots, a_{m-1,c(m-1)}, a_{m,r+1} \end{pmatrix} \right]$$

при $c(m) > b(m)$. Поэтому из леммы 3.4 следует, что допустимым является множество последовательных относительно A размеченных параллелепипедов размерности $k + 1$ (что доказывает первое утверждение леммы).

Пусть функция R определена на множестве A (в остальных точках ее можно считать равной нулю):

$$R(a_{1,b(1)}, \dots, a_{m,b(m)}) = (-1)^{b(1)+\dots+b(m)}.$$

Очевидно, что если Π – последовательный относительно множества A неразмеченный параллелепипед, то $\{\pm R \cdot \Pi\}$ – множество всех размеченных параллелепипедов, последовательных относительно множества A , с таким же множеством вершин. Утверждение леммы следует из равенства

$$N(f) = N(R \cdot f),$$

справедливого для любой функции f , определенной на A (см. (3.1)). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Несмотря на то, что полученные критерии описывают расположения точек k -сингулярных систем, пока не найден эффективный “геометрический” алгоритм проверки k -сингулярности.

Теорема 3.2 описывает k -сингулярные системы точек как содержащие подсистемы специального вида. Эти подсистемы являются носителями непустых конечных сумм функций из допустимого множества. Теорема 3.2 предлагает в некотором смысле “минимальное универсальное” допустимое множество, лемма 3.4 – обобщение классического, а лемма 3.5 – “просто устроенное”.

Автор выражает благодарность Ю. И. Журавлеву за поддержку, обсуждение результатов работы и ценные замечания.

Список литературы

1. B. J. C. Baxter, “Conditionally positive functions and p -norm distance matrices”, *Constr. Approx.*, **7**:1 (1991), 427–440.
2. L. Reid, X. Sun, “Distance matrices and ridge function interpolation”, *Canad. J. Math.*, **45**:6 (1993), 1313–1323.
3. I. J. Schoenberg, “On certain metric spaces arising from Euclidean spaces by a change of metric and their imbedding in Hilbert space”, *Ann. of Math.* (2), **38**:4 (1937), 787–793.
4. I. J. Schoenberg, “Metric spaces and positive definite functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **44**:3 (1938), 522–536.
5. I. J. Schoenberg, “Metric spaces and completely monotone functions”, *Ann. of Math.* (2), **39**:4 (1938), 811–841.
6. N. Dyn, W. A. Light, E. W. Cheney, “Interpolation by piecewise-linear radial basis functions. I”, *J. Approx. Theory*, **59**:2 (1989), 202–223.
7. S. P. Diliberto, E. G. Straus, “On the approximation of a function of several variables by the sum of functions of fewer variables”, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 195–210.
8. В. И. Арнольд, “О функциях трех переменных”, *Докл. АН СССР*, **114**:4 (1957), 679–681; англ. пер.: V. I. Arnol'd, “On functions of three variables”, *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **28** (1963), 51–54.
9. W. A. Light, “The singularity of distance matrices”, *Multivariate approximation theory*, v. IV (Oberwolfach, 1989), Internat. Ser. Numer. Math., **90**, Birkhäuser, Basel, 1989, 233–240.

10. А. Г. Дьяконов, “Критерии корректности алгебраических замыканий модели алгоритмов вычисления оценок”, *Докл. РАН*, **420**:6 (2008), 732–735; англ. пер.: A. G. D'yakonov, “Correctness criteria for algebraic closures of the estimate-calculating algorithm model”, *Dokl. Math.*, **77**:3 (2008), 453–456.
11. Ю. И. Журавлев, “Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации”, *Пробл. кибернетики*, **33** (1978), 5–68.
12. Ю. И. Журавлев, “Корректные алгоритмы над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. II”, *Кибернетика*, **6** (1977), 21–27.
13. D. Braess, A. Pinkus, “Interpolation by ridge functions”, *J. Approx. Theory*, **73**:2 (1993), 218–236.
14. А. Г. Дьяконов, “Критерии вырожденности матрицы попарных l_1 -расстояний и их обобщения”, *Докл. РАН*, **425**:1 (2009), 11–14; англ. пер.: A. G. D'yakonov, “Necessary and sufficient conditions for the singularity of the pairwise l_1 -distance matrix and their generalizations”, *Dokl. Math.*, **79**:2 (2009), 150–152.
15. М. М. Деза, М. Лоран, *Геометрия разрезов и метрик*, МЦНМО, М., 2001; пер. с фр.: M. M. Deza, M. Laurent, *Geometry of cuts and metrics*, Algorithms Combin., **15**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
16. А. Г. Дьяконов, “Теория систем эквивалентностей для описания алгебраических замыканий обобщенной модели вычисления оценок”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:2 (2010), 388–400; англ. пер.: A. G. D'yakonov, “Theory of equivalence systems for describing the algebraic closures of a generalized estimation model”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **50**:2 (2010), 369–381.
17. А. Г. Дьяконов, “Теория систем эквивалентностей для описания алгебраических замыканий обобщенной модели вычисления оценок. II”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:3 (2011), 529–544; англ. пер.: A. G. D'yakonov, “Theory of equivalence systems for describing algebraic closures of a generalized estimation model. II”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:3 (2011), 490–504.
18. А. Г. Дьяконов, “Метрика алгебраических замыканий в задачах распознавания образов с двумя непересекающимися классами”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:5 (2008), 916–927; англ. пер.: A. G. D'yakonov, “Metrics of algebraic closures in pattern recognition problems with two nonoverlapping classes”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **48**:5 (2008), 866–876.
19. К. В. Рудаков, *Алгебраическая теория универсальных и локальных ограничений для алгоритмов распознавания*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, ВЦ РАН, М., 1992, <http://www.ccas.ru/frc/thesis/RudakovDocDisser.pdf>.
20. А. Г. Дьяконов, *Алгебра над алгоритмами вычисления оценок*, Учебное пособие, Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, М., 2006.
21. П. А. Карпович, “Критерии k -сингулярности и разделение 1-сингулярных систем”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика*, 2010, № 4, 17–24; англ. пер.: P. A. Karpovich, “Criteria of the k -singularity and division of 1-singular systems”, *Moscow Univ. Comput. Math. Cybernet.*, **34**:4 (2010), 164–171.
22. С. В. Яблонский, *Введение в дискретную математику*, Учебное пособие для вузов, 3-е изд., Высшая школа, М., 2001; англ. пер. 2-го изд.: S. V. Yablonsky, *Introduction to discrete mathematics*, Mir, Moscow, 1989.

А. Г. Дьяконов (A. G. D'YAKONOV)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова,
 факультет вычислительной математики и кибернетики
 E-mail: djakonov@mail.ru

Поступило в редакцию
 07.10.2010