Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Х. Сабитов, Изометрические погружения и вложения
плоского листа Мёбиуса в евклидовы пространства, *Изв.
РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 5, 197–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:42:33

УДК 513.73

И. Х. Сабитов

Изометрические погружения и вложения плоского листа Мёбиуса в евклидовы пространства

В работе устанавливаются формулы для изометрических вложений и погружений лент Мёбиуса с локально-евклидовой метрикой и изучаются внешне-геометрические свойства таких поверхностей. Рассматриваются как случаи стандартных лент Мёбиуса, соответствующих вложениям прямоугольного листа Мёбиуса, так и общие ленты Мёбиуса, в частности, с образующими, ортогональными к направляющей линии.

Библиография: 21 наименование.

1. Стандартные плоские ленты Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$. Каждому математику, конечно, известна неориентируемая поверхность, открытая Мёбиусом почти 150 лет назад и получаемая из прямоугольной полоски бумаги путем такого “отождествления” двух коротких сторон прямоугольника, при котором его диагонали переходят в замкнутые линии. Осуществить это склеивание физически не представляет большого труда, лишь бы полоска была достаточно длинной и узкой. Удивительно, однако, что задание хотя бы одной такой поверхности явными формулами оказалось совсем не простой задачей, и она была решена сравнительно недавно в статье Г. Шварца [1], но на самом деле до сих пор еще неизвестно, найдено ли уже самое простое ее решение. Довольно обширная библиография работ на эту тему содержится в статье [2] того же автора, только в этот список надо еще добавить работу [3] (мы не претендуем на полноту списка, тем более, что в Интернете о листе Мёбиуса есть огромное количество и текстовых, и графических сайтов¹). Неориентируемую поверхность нулевой кривизны, *вложенную* в $\mathbb{R}^3$ и *диффеоморфную* прямоугольному листу Мёбиуса (т. е. имеющую, в частности, однокомпонентный замкнутый край), мы будем называть *лентой* Мёбиуса, а если такая поверхность *изометрична* в целом прямоугольному листу Мёбиуса, то ее будем называть *стандартной* лентой Мёбиуса. Первая (известная нам) работа, посвященная доказательству существования *аналитической* стандартной ленты Мёбиуса, принадлежит В. Вундерлиху [4]; в этой работе, однако, нет окончательных формул (для их нахождения нужно решить несколько довольно сложных систем алгебраических уравнений). В неаналитическом классе стандартная лента Мёбиуса, состоящая из трех плоских и трех цилиндрических областей, построена в работе [5] (это построение может дать гладкость вплоть до класса C^∞). Хронологически следующей работой на эту тему является, по-видимому, статья [3], в которой

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00204) и Министерства образования РФ (грант РНП-2.1.1.7988).

¹См. также заключительное замечание в конце этой работы.

доказывается, что для существования изометрического погружения² прямоугольного листа Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$ необходимо и достаточно, чтобы длина L средней линии и высота h прямоугольника были связаны неравенством $L > \frac{\pi}{2}h$. В работах [1] и [2] строится пример стандартной аналитической ленты Мёбиуса с высокой симметрией и, возможно, с самой простой средней линией, задаваемой уравнениями

$$x = \sin \varphi, \quad y = (1 - \cos \varphi)^3, \quad z = (1 - \cos \varphi) \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (1)$$

и представимой как пересечение двух алгебраических поверхностей соответственно степеней 4 и 6. Но подробное описание направлений $\mathbf{l}$ образующих этой поверхности как функций от φ занимает уже по крайней мере несколько строк текста, хотя предложенная в работах [1], [2] запись самой формулы для $\mathbf{l}$ довольно простая:

$$\mathbf{l} = \text{sign} \left(\sin \frac{t}{2} \right) \mathbf{B} + \frac{\varkappa(t)}{q(t)} \mathbf{T},$$

где $\varkappa(t)$ и $k(t) = \text{sign}(\sin \frac{t}{2})q(t)$ – соответственно кручение и кривизна средней линии, $\mathbf{T}$ и $\mathbf{B}$ – единичные векторы касательной и бинормали средней линии. В этом пункте мы на основании идеи работы [1] предложим общую формулу для построения стандартной ленты Мёбиуса с заданной аналитической средней линией, удовлетворяющей некоторым необходимым условиям.

Итак, пусть $\mathbf{r}(s) = \{x(s), y(s), z(s)\}$, $0 \leq s \leq L$, – натуральное уравнение аналитической средней линии Γ стандартной C^2 -гладкой ленты Мёбиуса S , а L – длина средней линии, которая, как образ прямолинейного отрезка, должна быть на S геодезической. Через точки этой линии проходят образующие, которые нигде ее не касаются, так как в одном направлении можно провести только одну геодезическую. Пусть единичные векторы этих образующих обозначены как $\mathbf{l}(s)$. Лента имеет единичную нормаль $\mathbf{n}(s)$, сонаправленную с вектором $\pm[\mathbf{l}(s), \mathbf{r}'(s)]$ (знак нужно выбрать в одной точке, а дальше – по непрерывности). Векторная функция $\mathbf{r}(s)$ и все ее производные являются периодическими, а нормаль к поверхности при обходе средней линии меняет направление на противоположное, поэтому векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{l}$ являются *антипериодическими*, т. е. $\mathbf{n}(s+L) = -\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{l}(s+L) = -\mathbf{l}(s)$. В точках кривой Γ , в которых ее кривизна не равна нулю, обычно принимается, что $\mathbf{r}_{ss} = k\mathbf{N}$, где $\mathbf{N}$ – главная нормаль к кривой, а $k = |\mathbf{r}_{ss}| > 0$ – кривизна кривой. Но при переходе через точки $\mathbf{r}_{ss} = 0$ направление главной нормали должно быть выбрано так, чтобы она изменялась непрерывно. В нашем случае средняя линия является на поверхности геодезической, поэтому ее главная нормаль $\mathbf{N}$ коллинеарна с нормалью $\mathbf{n}$ к поверхности. Следовательно, вдоль Γ у нас *уже есть* непрерывное (и даже C^1 -гладкое) векторное поле $\mathbf{n}$, которое на начальном участке, где $k \neq 0$, можно взять совпадающим с $\mathbf{N}$ (за счет свободы выбора направления нормали к поверхности в начальной точке), а после перехода через возможный нуль кривизны мы оставим направление главной нормали $\mathbf{N}$ совпадающим с $\mathbf{n}$, т. е. на всем протяжении Γ считаем, что $\mathbf{N} = \mathbf{n}$. Тогда, соответственно, положим $\mathbf{r}_{ss} = k_A \mathbf{n}$, где функция $k_A = (\mathbf{r}_{ss} \cdot \mathbf{n})$ играет для кривой Γ роль кривизны со знаком, который при переходе $|\mathbf{r}_{ss}|$ через нуль в некоторой точке $s = s_0$ ведет себя по следующему правилу: если $|\mathbf{r}_{ss}|^2 = c_0^2(s - s_0)^{2m}(1 + \dots)$, $c_0 > 0$, то при

²Но класс гладкости получаемой поверхности в [3] не уточняется, ясно только, что рассматривается неаналитический случай.

четных m функция k_A проходит через нуль без изменения знака, а при нечетных m она изменяет свой знак. Формально это выглядит так: пусть $\text{sign } k$ – знак k_A для достаточно близких к s_0 значений $s < s_0$, тогда в окрестности точки $s = s_0$ берем $k_A(s) = (\text{sign } k)c_0(s-s_0)^m(1+\dots) = (\text{sign } k)|\mathbf{r}_{ss}|$ при четных m и $k_A(s) = -(\text{sign } k)c_0(s-s_0)^m(1+\dots) = (\text{sign } k)(\text{sign}(s_0-s))|\mathbf{r}_{ss}|$ при нечетных m . Определенная таким образом кривизна $k_A(s)$ будет аналитической функцией, а вместе с ней аналитическими будут главная нормаль $\mathbf{N}$ кривой и совпадающая с ней нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности.

После введения на всей кривой аналитического вектора главной нормали $\mathbf{N} = \mathbf{n}$ определим теперь на ней аналитическую бинормаль $\mathbf{B}$ по формуле $\mathbf{B} = [\mathbf{r}', \mathbf{n}]$. Производная $\mathbf{B}'$ коллинеарна $\mathbf{n}$, поэтому положим $\mathbf{B}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{n}$, взяв по определению аналитическую функцию $\kappa(s) = -(\mathbf{B}' \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{r}')$ за кручение. Имеем

$$\mathbf{B} = [\mathbf{r}', \mathbf{N}], \quad \mathbf{r}' = [\mathbf{N}, \mathbf{B}], \quad \mathbf{N} = [\mathbf{B}, \mathbf{r}'],$$

откуда прямой проверкой получаем, что для введенных триэдра $\mathbf{T} = \mathbf{r}', \mathbf{N}, \mathbf{B}$ и функций кривизны k_A и кручения κ справедливы соотношения Френе. Таким образом, для средней линии стандартной ленты Мёбиуса в триэдре Френе главная нормаль и бинормаль, а также кривизна оказываются антипериодическими, в то время как кручение является периодической функцией³, как и в обычном случае, когда $k \neq 0$. Тем не менее, оказывается, что кручение тоже обладает некоторым специальным свойством, а именно, *кручение обязательно обращается в нуль в точках, где кривизна $k_A = 0$, причем в этих точках оно будет иметь нуль не меньшего порядка, чем кривизна.*

Действительно, пусть кривая является средней линией на стандартной ленте Мёбиуса. Поскольку единственный вектор образующих $\mathbf{l}$ ортогонален $\mathbf{N}$, имеем $\mathbf{l} = \mathbf{T} \cos \alpha + \mathbf{B} \sin \alpha$, причем $\sin \alpha \neq 0$, иначе вектор $\mathbf{l}$ был бы касательным к средней линии. Произведение $(\mathbf{l}, \mathbf{T})$ антипериодично, поэтому есть точка, в которой образующая перпендикулярна средней линии, и мы можем считать, что начало отсчета дуги находится в этой точке. Кроме того, можно считать, что в этой точке параллельный бинормали вектор образующей сонаправлен с бинормалью, так как в нашем распоряжении находится начальный выбор и направления нормали к поверхности, и направления образующей. Тогда в начальной точке $\sin \alpha = 1$, а в дальнейшем всюду выполнено неравенство $\sin \alpha > 0$. Если бы мы знали, что вектор $\mathbf{l}(s)$ имеет производную, мы бы воспользовались известным условием локальной евклидовости метрики линейчатой поверхности $(\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{T}) = 0$ и быстро получили бы нужное утверждение. Однако известно, что существуют даже C^∞ -гладкие разветвляющиеся поверхности, на которых направления образующих не имеют первой производной, см. [6] и [7]. Поэтому мы поступим следующим образом. Будем смотреть на нашу поверхность как на огибающую семейства ее касательных плоскостей $\mathbf{N}(s)\mathbf{R} - \mathbf{N}(s)\mathbf{r}(s) = 0$, где $\mathbf{R} = \{x, y, z\}$, а $\mathbf{r}(s)$ – радиус-вектор средней линии кривой Γ . Тогда образующие будут прямыми в пересечении двух плоскостей

$$\mathbf{N}(s)\mathbf{R} - \mathbf{N}(s)\mathbf{r}(s) = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{N}'(s)\mathbf{R} - \mathbf{N}'(s)\mathbf{r}(s) = 0.$$

³ На самом деле свойство периодичности кручения не связано с тем, что мы рассматриваем среднюю линию стандартной ленты Мёбиуса, – оно верно для *любой замкнутой* C^3 -гладкой кривой при условии необращения в нуль ее кривизны (так как из классической формулы для кручения видно, что все участвующие в ней функции являются периодическими), а для *аналитических* кривых оно верно всегда (так как в этом случае легко проверить, что кручение в точке нуля кривизны имеет предел и поэтому может быть доопределено в этой точке как аналитическая функция).

Разыскивая радиус-векторы этих прямых в виде $\{x, y, z\} = \mathbf{l}(s)v + \mathbf{r}(s) = (a\mathbf{N} + b\mathbf{T} + c\mathbf{B})v + \mathbf{r}(s)$ с условием $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, найдем, что в точках, где $k_A \neq 0$, выполнены соотношения $a = 0$, $k_A(s)b(s) = \varkappa(s)c(s)$. Следовательно,

$$\mathbf{l}(s) = \mathbf{T} \cos \alpha + \mathbf{B} \sin \alpha = b\mathbf{T} + c\mathbf{B},$$

т. е. $k_A \cos \alpha = \varkappa \sin \alpha$. Поскольку $\sin \alpha \neq 0$, можно записать $\varkappa(s) = (\operatorname{ctg} \alpha)k_A$, откуда и следует доказываемое утверждение. Заодно мы показали, что направления образующих являются аналитическими функциями от длины дуги средней линии.

Теперь с учетом условия положительности функции $\sin \alpha$ можно написать, что

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + h^2(s)}}, \quad \cos \alpha = \frac{h(s)}{\sqrt{1 + h^2(s)}}, \quad (2)$$

где функция

$$h(s) = \frac{\varkappa(s)}{k_A(s)}$$

является аналитической, если считать ее доопределенной в нулях кривизны по непрерывности. В итоге получаем, что если некоторая C^2 -гладкая стандартная лента Мёбиуса S имеет аналитическую среднюю линию, то эта линия определяет направления образующих поверхности *единственным образом* и эти направления оказываются аналитическим семейством прямых, а поверхность на самом деле является аналитической с представлением

$$S: \{x(s), y(s), z(s)\} + t(\mathbf{T} \cos \alpha + \mathbf{B} \sin \alpha), \quad (3)$$

где $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ задаются через кривизну и кручение кривой Γ формулой (2). Тем самым доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы аналитическая замкнутая кривая Γ была средней линией аналитической стандартной ленты Мёбиуса, необходимо и достаточно, чтобы ее кривизна была антипериодической и чтобы в точках обращения кривизны в нуль кручение кривой имело нуль не меньшего порядка, чем кривизна. При этом лента Мёбиуса даже в классе C^2 -гладких поверхностей определяется своей заданной аналитической средней линией единственным образом в виде аналитической поверхности с представлением (3).*

Эту теорему и ее доказательство можно использовать для получения разных фактов, полезных с геометрической и аналитической точек зрения, которые мы представим в виде ряда следствий и замечаний.

СЛЕДСТВИЕ. *На стандартной аналитической ленте Мёбиуса разность между числом нулей (с учетом кратности) кручения средней линии и ее кривизны является нечетным числом (и, следовательно, существует хотя бы одна точка, где порядок нуля кручения больше, чем порядок нуля кривизны⁴).*

Действительно, мы знаем, что кручение замкнутой аналитической кривой периодически (см. сноску на с. 199), а для средней динии стандартной аналитической ленты Мёбиуса аналитическая функция $h(s) = \varkappa(s)/k_A(s)$ является антипериодической и поэтому число ее нулей нечетно.

⁴ Сюда включаются, конечно, те возможные точки, где кручение равно нулю, а кривизна отлична от нуля.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из проведенных выше рассмотрений следует, что свойство непрерывности функции $h(s) = \varkappa(s)/k_A(s)$ в точках обращения кривизны в нуль является локальным необходимым и достаточным условием существования некоторой развертывающейся поверхности, на которой эта кривая является геодезической и направляющей. Кроме того, получаем, что если на некоторой C^2 -гладкой развертывающейся поверхности существует аналитическая геодезическая направляющая, то такая поверхность на самом деле является аналитической.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В представлении (3) можно сделать замену переменных

$$\xi = s + t \cos \alpha, \quad \eta = t \sin \alpha, \quad (4)$$

которая приведет метрику поверхности к стандартному виду $d\xi^2 + d\eta^2$. При этом, как и положено, средняя линия переходит в отрезок $\eta = 0$, $0 \leq \xi \leq L$, а образующая в точке $s = 0$ переходит в прямые $\xi = 0$ и $\xi = L$ (напомним, что по нашему выбору $\sin \alpha(0) = 1$). Если равенства (4) обратимы (теоретически это гарантировано в окрестности отрезка $\eta = 0$, $0 \leq \xi \leq L$), то мы получаем явные формулы изометрического погружения прямоугольного листа Мёбиуса из плоскости (ξ, η) в $\mathbb{R}^3$. Далее, пусть прямоугольный лист Мёбиуса имеет ограничение $|\eta| \leq C$. Тогда в силу (2) и (4) получаем, что должно выполняться неравенство

$$C < \min \frac{1}{|h'(s)|}, \quad h(s) = \frac{\varkappa(s)}{k_A(s)},$$

которое с учетом известной длины L основания и дает необходимое ограничение на высоту $2C$ прямоугольника. Следовательно, появляется надежда на решение поставленной в [4] задачи (см. п. 6) о соотношении длины и высоты прямоугольника Мёбиуса, допускающего изометрическое вложение в $\mathbb{R}^3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Заметим, что в классах конечной гладкости в случаях прохождения кривизны через нуль конечного порядка кривые тоже допускают введение на них гладкого триэдра Френе, в предположении, что вторая производная радиус-вектора кривой имеет локальное представление с выделением главного члена, допускающее дифференцирование эквивалентности. При этих условиях все проведенные выше рассмотрения возможны и для неаналитических кривых.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Поскольку при непрерывной деформации аналитических кривых (сохраняющей класс гладкости) свойство главной нормали – и, соответственно, бинормали – быть периодической или антипериодической не изменяется, то тем самым оказывается, что *все замкнутые пространственные аналитические кривые разбиваются на два непересекающихся класса – с периодическими или антипериодическими главными нормальными и бинормальными.*

2. Нерешенные вопросы. Возвращаясь к вопросу о “наиболее простом” представлении аналитической стандартной ленты Мёбиуса, отметим следующие возможные здесь подходы. Во-первых, речь может идти о наиболее простой в каком-то смысле форме асимптотической параметризации ленты в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u), \quad (5)$$

где u – некоторый параметр для описания средней линии ленты (например, u – натуральный параметр или стандартная переменная, изменяющаяся от 0 до

2π для периодических тригонометрических функций), $b(u)$ – единичный вектор образующей длины $2v$, с некоторой границей изменения $c_1(u) \leq v \leq c_2(u)$, соответствующей размерам погружаемого прямоугольного листа Мёбиуса (например, можно начинать с поиска наименьшего порядка для представления радиус-вектора $a(u)$ направляющей линии через тригонометрические многочлены, зависящие от параметра φ , как это сделано в [1]). Во-вторых, можно говорить о “наиболее простой” форме уравнения той алгебраической поверхности, на которой расположена конструируемая стандартная лента Мёбиуса (например, в [4] про описываемую там поверхность утверждается, что она в плюккеровых координатах имеет степень 39, а для найденной в [1] стандартной ленты Мёбиуса известно только, что она расположена на некоторой алгебраической поверхности, но явное алгебраическое описание дано лишь для средней линии, записанной как пересечение двух алгебраических поверхностей степеней 4 и 6 соответственно⁵). В-третьих, в работах М. Садовского [5] и [8] предлагается одна вариационная задача, решением которой должна быть некоторая стандартная лента Мёбиуса. Каждый, кто склеивал ленту Мёбиуса, наверно замечал, что при подведении краев прямоугольной полоски к требуемому их совпадению в пространстве полоска как бы сама принимает форму некоторой поверхности без всякого “силового” вмешательства экспериментатора; более того, если пытаться немного изменить форму поверхности, придавливая для этого некоторые ее участки, и затем отнять руку, модель вернется в исходную форму. Это означает, что существуют какие-то внутренние напряжения материала, автоматически придающие листу бумаги некоторую оптимальную форму, минимизирующую эти напряжения. Садовский нашел вариационную задачу, соответствующую его интерпретации этих напряжений как сил упругости, распределенных по площади обратно пропорционально квадрату радиуса кривизны поверхности. Это приводит к задаче минимизации интеграла $\iint H^2 dS$, где H – средняя кривизна поверхности (сам Садовский предложил в [8] некоторую одномерную вариационную задачу, которая описана также в [2]). Таким образом, проблема о “самой простой” форме стандартной ленты Мёбиуса может быть сформулирована и как задача нахождения уравнения поверхности, минимизирующей каким-то разумным образом выписанный функционал, и с такой точки зрения этот вопрос остается пока открытым.

3. Некоторые общие утверждения о плоских лентах Мёбиуса.

Прежде чем переходить к построению общих лент Мёбиуса, докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *В аналитическом классе погружений (т.е. и без требования отсутствия самопересечений) плоские ленты Мёбиуса могут быть только торсами – развертками касательных к некоторой пространственной кривой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – некоторая аналитическая лента Мёбиуса. Поскольку лента Мёбиуса по определению диффеоморфна прямоугольному листу Мёбиуса, мы можем рассмотреть на S замкнутую кривую Γ , являющуюся образом средней линии листа Мёбиуса. Кривую Γ также будем называть средней линией поверхности S . Так как поверхность аналитическая и неплоская, то через каждую ее внутреннюю точку, в частности через каждую точку кривой Γ ,

⁵По сообщению Ю. Г. Никонорова студентом С. Полетаевым установлено, что лента Мёбиуса, найденная в [1], лежит на алгебраической поверхности степени 20. (Прим. при корректуре.)

проходит единственная прямолинейная образующая, идущая в обе стороны до края поверхности. Предположим, что поверхность S является цилиндрической. Покажем, что это противоречит неориентируемости S .

Все образующие цилиндрической поверхности параллельны одному направлению $\mathbf{l}$. Будем считать, что это направление параллельно оси z , т.е. $\mathbf{l} = \{0, 0, 1\}$. Для большей наглядности будем предполагать, что вся поверхность расположена выше плоскости (x, y) . Пусть $\mathbf{r}(s)$ – радиус-вектор средней линии Γ в натуральном параметре. Нормаль к S определяется направлением вектора $[\mathbf{r}'(s), \mathbf{l}]$, и если ни одна образующая не касается средней линии, то после ее обхода нормаль вернется к исходному положению. Следовательно, на Γ есть конечное число точек, в которых $\mathbf{r}'(s) \parallel \mathbf{l}$. Покроем среднюю линию конечным числом открытых окрестностей U_i , в пределах каждой из которых S является вложенной цилиндрической поверхностью, с границей, состоящей из двух отрезков образующей и двух сечений S горизонтальными плоскостями $z = C'_i$ и $z = C''_i$. Кроме того, будем предполагать, что часть Γ_i кривой Γ в пределах U_i является простой жордановой дугой с возможным касанием с образующей не более чем в одной точке. Сечения $z = C'_i$ и $z = C''_i$ в пределах U_i проектируются на плоскость (x, y) в одну и ту же регулярную аналитическую кривую γ_i . Нормаль к цилиндрической поверхности с плоской направляющей линией $\gamma_i: (x_i(t), y_i(t), 0)$ определяется выбором одной из нормалей к γ_i , скажем, нормали $\mathbf{N} = \{-y'(t), x'(t), 0\}$. Если бы мы знали, что объединение кривых γ_i представляет собой регулярную замкнутую кривую, то из формулы для нормали $\mathbf{N}$ мы сразу же получили бы требуемое противоречие с неориентируемостью поверхности S . Но в принципе это объединение может и не быть погружением окружности⁶, поэтому для установления ориентируемости S требуется провести более тщательные рассуждения.

Пусть число окрестностей U_i , покрывающих Γ , равно n , и пусть они занумерованы так, чтобы лежащие в них дуги $\Gamma_i \subset \Gamma$, пересекаясь с соседями по малым дугам, последовательно продолжали друг друга. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – начальные точки этих дуг (при некотором фиксированном направлении обхода средней линии), а $B_1, \dots, B_n$ – их конечные точки, так что все эти точки можно считать упорядоченными по правилу, условно записанному в виде неравенств $A_i < B_{i-1} < A_{i+1} < B_i < A_{i+2} < B_{i+1}$ и т.д. Поскольку точки касания средней линии Γ с образующими являются изолированными, то дуга Γ_i в окрестности точки касания или находится по одну сторону от образующей (такую точку назовем *точкой касания 1-го типа*), или переходит в точке касания с одной стороны образующей в другую ее сторону. Во втором случае проекция дуги Γ_i совпадает с γ_i – проекцией сечения U_i горизонтальной плоскостью, поэтому нормаль к S вдоль Γ_i будет совпадать с аналитически изменяющейся нормалью $\mathbf{N}$ к γ_i . Так как до и после перехода через такую точку касания направление нормали к S выражается одной и той же формулой $[\mathbf{r}'(s), \mathbf{l}]$, не нарушая периодичности нормали, то на Γ обязательно должны быть точки касания 1-го типа, при переходе через которые выражение для направления нормали меняет знак на противоположный (при этом сама нормаль изменяется непрерывно, оставаясь постоянной вдоль образующей). В этом случае проекция дуги Γ_i тоже остается на кривой γ_i , но на этот раз она дважды покрывает некоторую ее часть, расположенную в пределах проекции U_i до той точки, куда проектируется образующая на S , касающаяся дуги Γ_i , и вовсе не проектируется на другую

⁶А проекция средней линии Γ хотя и является замкнутой кривой, но на ней точкам касания Γ с образующими будут соответствовать особые точки.

часть γ_i . При этом нормаль к S вдоль Γ остается нормалью к цилиндрической поверхности, сохраняя непрерывность при проходе через точку касания Γ_i с образующей, поэтому она совпадает с прежней нормалью $\mathbf{N}$ к γ_i в соответствующих точках⁷. При движении вдоль дуги Γ_i ее проекция дважды проходит по соответствующей части кривой γ_i , аналитически продолжаясь по той из кривых γ_{i-1} или γ_{i+1} , которая соответствует переходу точки на S в окрестность U_{i-1} или U_{i+1} .

Пусть проекции точек A_i на плоскость (x, y) обозначены через A'_i , а точек B_i – через B'_i , $1 \leq i \leq n$, и пусть в качестве дуги Γ_1 выбрана та дуга на Γ , на которой нет точки касания с образующей, и продолжение в виде прямой образующей в точке A_1 тоже нигде не касается линии Γ (этого всегда можно добиться уменьшением размеров окрестности U_1 и увеличением числа окрестностей). Для большей наглядности в рассуждениях также можно считать, что точка A_1 является самой нижней точкой на прямой, отрезки (или отрезок) которой служат образующими к S вдоль средней линии Γ .

Тогда вся дуга Γ_1 спроектируется на дугу γ_1 и ходу вдоль Γ_1 соответствует ход вдоль γ_1 от точки A'_1 до точки B'_1 . Далее проекции дуг $\Gamma_2, \dots$ совпадают с $\gamma_2, \dots$ до тех пор, пока не встретится первая дуга Γ_j , $j \geq 2$, на которой для образующих есть некоторая точка $C_1 \in \Gamma_j = \widetilde{A_j B_j} \subset \Gamma$ касания 1-го типа с линией Γ (хотя бы одна такая точка всегда существует). Тогда движению вдоль Γ от C_1 до точки B_j (а может, и дальше) соответствует *обратный* ход вдоль γ_j (а может, и дальше), причем нормаль к S будет совпадать с прежней нормалью $\mathbf{N}$ к γ_j . Пусть этому обратному ходу вдоль проекции Γ на самой линии Γ соответствует некоторая дуга $C_1 C_2$ по ходу обхода средней линии (где C_2 – очередная точка после C_1 , в которой образующая касается средней линии, если, конечно, такая точка, существует), а в проекции – путь от C'_1 до C'_2 , с понятным обозначением C'_1 и C'_2 для проекций точек C_1 и C_2 соответственно (см. рис. 1).

Рис. 1

⁷Формально надо было бы записать теперь $\mathbf{N}$ в виде $\{y'(t), -x'(t), 0\}$, имея в виду, что касательная к γ_i при обратном ходе вдоль γ_i изменяет свое направление на противоположное, но для краткости сопровождающей записи мы ограничимся словесным выражением “прежняя нормаль”.

Предположим сначала, что в проекции обратный ход не дошел до точки A'_1 . Тогда уберем в проекции дважды пройденный в противоположных направлениях путь $C'_2C'_1C'_2$ и продолжим обход Γ с точки C_2 , при этом проекция линии Γ вначале вновь пойдет по прежней проекции $C'_2C'_1$ и нормаль к S будет совпадать с нормалью к проекции. Далее повторяем прежнее построение: каждый раз убираем дважды проходимый участок проекции (если возвращение назад не приводит нас к исходной точке A'_1). В итоге мы получим в проекции однократно проходимую замкнутую регулярную аналитическую кривую с началом и концом в точке A'_1 (возможно, с самопересечениями), нормаль $\mathbf{N}$ к которой окажется периодической, что и приведет к искомому противоречию с неориентируемостью поверхности S .

Пусть оказалось, что в предыдущих рассмотрении при каком-либо обратном ходе мы дошли в проекции до начальной точки A'_1 . Отметим на линии Γ ту точку C_* , в которой это случилось впервые. От проекции всего участка $A_1C_* \subset \Gamma$ останется только одна точка, являющаяся общей проекцией $A'_1 = C'_*$ точек $A_1 \in \Gamma$ и $C_* \in \Gamma$. В этих точках поверхность S имеет одинаково направленные нормали (сонаправленные с нормалью $\mathbf{N}$ к кривой γ_1 в точке A'_1). Проекция поверхности S в малых окрестностях точек A_1 и C_* совпадают и содержат общую с кривой γ_1 дугу с общим направлением нормали $\mathbf{N}$. Повторим предыдущие построения, продолжая обход кривой Γ из точки C_* в ранее выбранном направлении. И мы или пройдем всю оставшуюся часть кривой Γ , возвратившись в проекции в точку $A'_1 = C'_*$ по замкнутой регулярной кривой с нормальными, совпадающими в начале и конце пути (может случиться также, что кривая после уничтожения дважды проходимых участков выродится в точку с сохранением в A'_1 в пределе в конце деформации того направления нормали, которое было в A'_1 вначале), или же придем к некоторой точке $C_*^{(1)} \in \Gamma$ с полным уничтожением дважды пройденных участков, но с совпадением направлений нормалей к S в точках A_1 , C_* и $C_*^{(1)}$. В итоге, повторяя этот процесс несколько раз, мы убедимся, что нормали к S вдоль Γ в начале и конце обхода совпадают, что и требовалось показать для получения противоречия.

Предположим теперь, что лента Мёбиуса S является конической поверхностью. Тогда мы рассмотрим пересечения малых областей поверхности S со сферой достаточно большого радиуса, имеющей центр в вершине конуса, и с помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, придем к противоречию с неориентируемостью S . Напомним, что неплоские аналитические развешивающиеся поверхности бывают лишь следующих типов: цилиндрические, конические или торсы (поверхности, образованные касательными к некоторой пространственной кривой). В силу аналитичности для S остается лишь вариант тора. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Поскольку выражение для направления нормали $[\mathbf{r}'(s), \mathbf{l}]$ при переходе через точку касания 1-го типа образующей со средней линией меняет знак, то неориентируемость цилиндрической ленты Мёбиуса равносильна нечетности числа точек касания 1-го типа. Поэтому другое доказательство невозможности существования аналитической ленты Мёбиуса в виде цилиндрической поверхности можно было бы получить установлением четности числа точек касания 1-го типа.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Основным моментом в доказательстве невозможности существования аналитической ленты Мёбиуса в виде цилиндра была единственность

продолжения проекции поверхности в окрестности каждой образующей независимо от положения проектируемой области вдоль образующей, при условии совпадения проекций на любой сколь угодно малой дуге. Поэтому теорема остается справедливой и в классах гладкости C^n , $2 \leq n \leq \infty$, и вообще для C^1 -гладких цилиндров при условии, что через каждую точку проходит единственная образующая, если, как в случае аналитических поверхностей, предположить единственность продолжения проекций. Так бывает, например, на алгебраических цилиндрах с уравнением вида $F(x, y) = 0$, которые в окрестности точек $\text{grad } F(x, y) = 0$ могут не иметь аналитического представления вида $y = f(x)$ или $x = g(y)$ (например, это так на поверхности цилиндра с уравнением $x^6 - x^3(y^5 + y^7) + y^{12} = (x^3 - y^5)(x^3 - y^7) = 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В самом начале доказательства было установлено, что если образующие нигде не касаются средней линии, то теорема верна. Важно отметить, что это справедливо и в классе поверхностей гладкости C^n , $2 \leq n \leq \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8 (см. также заключительное замечание в конце работы). Без условия аналитичности или без условия единственности продолжения проекций, описанного в замечании 6, даже в классе C^∞ могут существовать вложенные ленты Мёбиуса, являющиеся цилиндрическими поверхностями.

Пример приведен на рис. 2, где лента Мёбиуса состоит из части на цилиндре над кривой 1, затем она продолжается на цилиндр над кривой 2 и дальше на цилиндр над кривой 2'. Все кривые можно взять аналитическими всюду, кроме точки самопересечения. Касание между кривыми 2 и 2', а также между кривыми 1 и 2' можно сделать произвольного класса гладкости, в том числе класса C^∞ (одна из кривых, скажем, кривая 2–2' или 1–2', может быть даже аналитической), в любом случае заштрихованная поверхность останется вложенной цилиндрической лентой Мёбиуса. Объяснение возможности такой ситуации простое – вдоль образующей AB проекции поверхности в окрестностях точек A и E не совпадают, хотя они и имеют общие дуги. Заметим, что у этой поверхности средняя линия имеет только одну (т. е. нечетное число) точку касания 1-го типа, в окрестности которой поверхность аналитическая, поэтому доказательство теоремы по идее замечания 5 не представляется легким делом.

Рис. 2

Хотя в классе C^∞ и существуют цилиндрические ленты Мёбиуса, но метрически полный лист Мёбиуса не может быть погружен в $\mathbb{R}^3$ даже в виде C^2 -гладкой поверхности и, более общо, даже в виде так называемых C^1 -гладких торсов, которые являются C^1 -гладкими поверхностями с условием, что через каждую их точку проходит отрезок образующей, и к числу которых относятся, например, поверхности ограниченной внешней кривизны в смысле Погорелова (ОВКП) [9] и ограниченной внешней положительной кривизны в смысле Бураго (ОВПКБ) [10]. Действительно, если такая поверхность S существует, то ее двукратное накрытие будет полной ориентируемой развертывающейся поверхностью, которая по теореме Погорелова (см. [9, гл. IX, § 4, теорема 2]) обязана быть цилиндром (теорема Погорелова распространяется также на C^1 -гладкие торсы). В таком случае и сама исходная поверхность S является цилиндром, и так как она без края, то ее сечение ортогональной к образующим плоскостью является гладкой замкнутой кривой. А в таком случае непрерывная нормаль к этой кривой является периодической и она же служит нормалью к цилиндрической поверхности S , которая, тем самым, оказывается ориентируемой, что невозможно.

4. Построение общих плоских лент Мёбиуса. Общая процедура построения плоской ленты Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$ получается из следующих соображений. Будем искать аналитическую развертывающуюся поверхность в асимптотической параметризации вида (5), предполагая, что образующие нигде не касаются направляющей линии. Пусть направляющая задана как аналитическая⁸ средняя линия кривой Γ с 2π -периодическим радиус-вектором $\mathbf{r}(\varphi) = \{x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)\}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (параметр φ пока не считаем натуральным, предполагая, что мы ищем ленту Мёбиуса с направляющей средней линией произвольной длины). Пусть $\mathbf{l}(\varphi) = \{a(\varphi), b(\varphi), c(\varphi)\}$ – ненулевой вектор направления образующих, нигде не касающийся направляющей. Тогда согласно [7] соответствующая асимптотическая параметризация аналитической ленты Мёбиуса будет аналитической, и поэтому все участвующие в дальнейших рассуждениях функции можно считать аналитическими. Направление нормали $\mathbf{n}$ к искомой поверхности S , задаваемой уравнениями

$$x = x(\varphi) + ta(\varphi), \quad y = y(\varphi) + tb(\varphi), \quad z = z(\varphi) + tc(\varphi), \quad (6)$$

определяется по векторному произведению $[\mathbf{r}'(\varphi), \mathbf{l}(\varphi)]$, и оно после обхода направляющей линии должно измениться на противоположное. Поскольку касательный к кривой Γ вектор $\mathbf{r}'(\varphi)$ периодический, то изменение направления нормали возможно лишь за счет изменения направления вектора образующей. Поэтому имеем условия $a(\varphi + 2\pi) = -a(\varphi)$, $b(\varphi + 2\pi) = -b(\varphi)$, $c(\varphi + 2\pi) = -c(\varphi)$, т. е. компоненты вектора $\mathbf{l}$ должны быть 2π -антипериодическими. Значит, каждая компонента вектора $\mathbf{l}$ где-нибудь обращается в нуль. Используем сразу же этот факт для доказательства следующего утверждения (отложив пока продолжение вывода искомого уравнения поверхности).

ТЕОРЕМА 3. *Не существует аналитической ленты Мёбиуса с плоской средней линией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы начнем со следующей леммы.

⁸На любой аналитической ленте Мёбиуса легко построить замкнутую аналитическую кривую, которую можно принять за среднюю линию ленты.

ЛЕММА 1. На аналитической развертывающейся поверхности, отличной от плоской области, касательная плоскость локально пересекается с поверхностью только по образующей, проходящей через точку касания.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть $(0, 0, 0)$ – точка касания, $z = 0$ – касательная плоскость. Пусть ось Ox направлена по образующей, и пусть $\mathbf{r}(s) = \{0, y(s), z(s)\}$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$, – аналитический радиус-вектор направляющей линии на плоскости $x = 0$ и $\{a(s), b(s), c(s)\}$ – аналитический единичный вектор образующей. Тогда поверхность задается следующими уравнениями:

$$x = ta(s), \quad y = y(s) + tb(s), \quad z = z(s) + tc(s).$$

По условиям на расположение поверхности имеем следующие представления:

$$\begin{aligned} y(s) &= y_0 s + \dots, & y_0 &\neq 0, \\ z(s) &= z_0 s^n + \dots, & z_0 &\neq 0, \quad n \geq 2, \\ a(s) &= 1 + a_0 s^m + \dots, & a_0 &\neq 0, \quad m \geq 1, \\ b(s) &= b_0 s^p + \dots, & b_0 &\neq 0, \quad p \geq 1, \\ c(s) &= c_0 s^q + \dots, & c_0 &\neq 0, \quad q \geq 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме того, имеем условие развертываемости поверхности:

$$(ca' - ac')y' + (ab' - ba')z' = 0.$$

Из этого условия с учетом соотношений (7) получаем равенство $q = n + p - 1$, которое в применении к уравнению $z(s, t) = 0$ показывает, что пересечение поверхности с плоскостью $z = 0$ состоит только из линии $s = 0$, т. е. из образующей $(t, 0, 0)$. Лемма доказана.

Приступим теперь к доказательству теоремы. Прежде всего заметим, что так как поверхность аналитическая, то любая плоская линия на ней, как пересечение с плоскостью, является аналитической, поэтому предполагаемая плоская средняя линия Γ на рассматриваемой ленте S обязана быть аналитической. Пусть плоскость кривой Γ совпадает с плоскостью $z = 0$, и пусть $\mathbf{r}(\varphi) = \{x(\varphi), y(\varphi), 0\}$ – радиус-вектор кривой Γ , а $\mathbf{l}(\varphi) = \{a(\varphi), b(\varphi), c(\varphi)\}$ – единичный вектор направления образующих. Сначала предположим, что образующие нигде не касаются средней линии. Тогда в достаточно узкой полосе вдоль Γ поверхность имеет аналитическое представление (6), и единичную нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности вдоль всей кривой Γ можно вычислять по векторному произведению $\mathbf{n} = [\mathbf{r}'(\varphi), \mathbf{l}(\varphi)]$. Имеем

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{(bx' - ay')^2 + c^2(x'^2 + y'^2)}} \{cy', -cx', bx' - ay'\}. \quad (8)$$

Условие стационарности нормали к S вдоль образующих означает равенство нулю смешанного произведения $(\mathbf{r}', \mathbf{l}, \mathbf{l}')$, что приводит к уравнению

$$c'(bx' - ay') + c(a'y' - b'x') = 0. \quad (9)$$

Функции a, b, c являются антипериодическими, поэтому на Γ есть точка $\varphi = \varphi_0$ такая, что $c(\varphi_0) = 0$. Из уравнения (9) имеем, что в этой точке должно быть выполнено равенство $bx' - ay' = 0$ (поскольку нуль аналитической функции $c(\varphi)$ имеет порядок выше, чем возможный нуль ее производной $c'(\varphi)$). Но тогда

окажется, что в этой точке вектор $\mathbf{l}$ касается средней линии, что невозможно по предположению.

Рассмотрим теперь случай, когда на линии Γ есть одна или несколько точек, в которых она касается образующих. В таком случае мы не можем представить поверхность в целом в виде (6), но легко показать, что вдоль Γ направления образующих $\mathbf{l}$ все равно имеют аналитическую зависимость от φ , так как локально аналитическое представление вида (6) остается в силе с некоторой другой аналитической направляющей, не касающейся линии Γ . Тогда при переходе через точку касания выражение (8) для нормали может изменить свой знак на противоположный, т. е. непрерывно изменяющееся направление нормали к S может определяться на Γ по разные стороны от точки касания векторными произведениями $[\mathbf{r}', \mathbf{l}]$ и $[\mathbf{l}, \mathbf{r}'] = -[\mathbf{r}', \mathbf{l}]$. Если направление $\mathbf{l}$ антипериодично, то для получения противоположного направления нормали после обхода Γ мы в конце обхода должны прийти к начальному выбору знака произведения $[\mathbf{r}', \mathbf{l}]$. Это значит, что число изменений знака перед векторным произведением должно быть четным. Там, где образующая касается линии Γ , должны быть выполнены равенства $c = 0$, $bx' - ay' = 0$. Пусть в точке $\varphi = \varphi_0$ порядок нуля функции $c(\varphi)$ равен n , а у функции $h(\varphi) = bx' - ay'$ он равен m . Допустим, что $n > m$. Тогда, переходя в (8) к пределу при $\varphi \rightarrow \varphi_0$, видим, что касательная плоскость к поверхности в точке $\varphi = \varphi_0$ совпадает с плоскостью средней линии. Это значит, что касательная плоскость пересекается с поверхностью по крайней мере по двум линиям – по образующей $\mathbf{l}(\varphi_0)$ и по кривой Γ , что невозможно по лемме 1. Следовательно, всегда $n \leq m$. Пусть $n = m = 2p$. Тогда $c(\varphi) = c_0(\varphi - \varphi_0)^{2p} + \dots$, $c_0 \neq 0$, $h(\varphi) = h_0(\varphi - \varphi_0)^{2p} + \dots$ и формула (8) для нормали примет вид

$$\mathbf{n} = \pm \frac{s^{2p}}{|s|^{2p} \sqrt{A_0^2 + \dots}} \{c_0 y' + \dots, -c_0 x' + \dots, h_0 + \dots\},$$

где $A_0 \neq 0$. Следовательно, выражение для нормали не должно изменять свой знак при переходе через точку касания. Если же $n = m = 2p + 1$, то для сохранения непрерывности нормали выражение должно изменить свой знак.

Пусть теперь $n < m$. Тогда изменение знака в формуле снова происходит только при нечетных n . Поскольку число изменений знака должно быть четным, в итоге получаем, что суммарное число нулей антипериодической функции $c(\varphi)$ с учетом кратностей должно быть четным, что невозможно. Случай периодического $\mathbf{l}$ рассматривается аналогично. Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Лемма 1, доказанная для аналитического случая, в классах C^n , $2 \leq n \leq \infty$, уже неверна, но она верна при дополнительном предположении, что кривизна плоской направляющей линии отлична от нуля, т. е. когда рассматриваемая точка поверхности не является точкой уплощения. Поэтому наше доказательство теоремы 3 распространяется и на случаи неаналитических лент Мёбиуса при следующих дополнительных предположениях: 1) кривизна плоской средней линии всюду отлична от нуля (т. е. эта линия строго выпуклая); 2) возможные точки касания средней линии с образующими изолированы; 3) касание в них целого порядка.

Продолжим вывод уравнения развертывающейся ленты Мёбиуса в общем случае. Из условия постоянства нормали вдоль образующих получаем уравнение

$$(\mathbf{r}', \mathbf{l}, \mathbf{l}') = (cb' - bc')x' + (ac' - ca')y' + (ba' - ab')z' = 0. \quad (10)$$

Следовательно, для построения вложенной ленты Мёбиуса достаточно найти три 2π -периодических функции x, y, z и три 2π -антипериодических функции a, b, c , удовлетворяющие уравнению (10) и трем условиям: 1) $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$; 2) пространственная кривая $\Gamma: \mathbf{r}(u) = \{x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)\}$ не имеет самопересечений; 3) вектор $\{a, b, c\}$ нигде не касается кривой Γ (первые два условия являются и необходимыми). Тогда уравнения (6) при достаточно малых $|t|$ определяют поверхность, содержащую как часть изометрический образ некоторой четырехугольной (в общем случае криволинейной) области на плоскости с отождествлением одной пары противоположных сторон равной длины с их переворачиванием при отождествлении (см. ниже рис. 5).

По предположению, ни одна образующая не касается направляющей, поэтому векторы $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{l}$ линейно независимы. Значит, вектор $\mathbf{l}'$ линейно выражается через эти два вектора: $\mathbf{l}' = \mu\mathbf{l} + \nu\mathbf{r}'$, где $\mu(\varphi)$ – 2π -периодическая, а $\nu(\varphi)$ – 2π -антипериодическая функция. Это соотношение приводит к неоднородной линейной дифференциальной системе

$$a'(\varphi) = \mu a + \nu x', \quad b'(\varphi) = \mu b + \nu y', \quad c'(\varphi) = \mu c + \nu z', \quad (11a)$$

или, в сокращенной векторной форме,

$$\mathbf{l}'(\varphi) = \mu(\varphi)\mathbf{l}(\varphi) + \nu(\varphi)\mathbf{r}'(\varphi), \quad (11b)$$

при произвольно выбранных 2π -периодической функции $\mu(\varphi)$ и 2π -антипериодической функции $\nu(\varphi)$ с условием $[\mathbf{r}', \mathbf{l}] \neq 0$. Это же уравнение пригодно и в неаналитическом случае, поскольку с учетом результатов работ [7] и [11] можно показать, что начиная с класса регулярности C^2 образующие в асимптотической параметризации имеют направления, составляющие семейство класса Липшица $C^{0,1}$, и поэтому левая часть уравнения (11b) существует в обобщенном смысле.

Используя систему (11a), мы можем получить новое доказательство теоремы 3 уже без предположения аналитичности искомой поверхности (но с предположением отсутствия касания образующей и средней линии). Действительно, предположим, что направляющая линия плоская с $z = \text{const}$. Тогда третье уравнение системы (11a) становится однородным, и оно не может иметь нетривиального решения, которое обращалось бы в нуль хотя бы в одной точке, что необходимо, так как функция $c(\varphi)$ является 2π -антипериодической. Значит, $c(\varphi) \equiv 0$, а в таком случае нормаль к поверхности всюду имеет направление $\{0, 0, 1\}$, т. е. поверхность является плоской и ориентируемой.

Вернемся к нахождению общего вида решения уравнения (11b). Имеем:

$$\mathbf{l}(\varphi) = A(\varphi)(\mathbf{C} + \mathbf{B}(\varphi)), \quad (12)$$

где

$$A(\varphi) = \exp\left(\int_0^\varphi \mu(\theta) d\theta\right), \quad \mathbf{B}(\varphi) = \int_0^\varphi (A(\theta))^{-1}\nu(\theta)\mathbf{r}'(\theta) d\theta,$$

а $\mathbf{C}$ – некоторый постоянный трехмерный вектор. Подберем этот вектор $\mathbf{C}$ так, чтобы вектор направления образующих $\mathbf{l}(\varphi)$ был 2π -антипериодическим. Имеем

$$A(\varphi + 2\pi) = A(2\pi)A(\varphi), \quad \mathbf{B}(\varphi + 2\pi) = \mathbf{B}(2\pi) - (A(2\pi))^{-1}\mathbf{B}(\varphi),$$

поэтому

$$\mathbf{l}(\varphi + 2\pi) = A(2\pi)A(\varphi)(\mathbf{C} + \mathbf{B}(2\pi) - (A(2\pi))^{-1}\mathbf{B}(\varphi)) = -A(\varphi)(\mathbf{C} + \mathbf{B}(\varphi)).$$

Из этого равенства получаем, что

$$\mathbf{C} = -\frac{A(2\pi)}{1 + A(2\pi)} \int_0^{2\pi} \frac{\nu(\theta)\mathbf{r}'(\theta)}{A(\theta)} d\theta.$$

Отсюда имеем окончательный вид решения:

$$\mathbf{l}(\varphi) = \frac{A(\varphi)}{1 + A(2\pi)} \left(\int_0^\varphi \frac{\nu(\theta)\mathbf{r}'(\theta)}{A(\theta)} d\theta - A(2\pi) \int_\varphi^{2\pi} \frac{\nu(\theta)\mathbf{r}'(\theta)}{A(\theta)} d\theta \right), \quad (13)$$

где

$$A(\varphi) = e^{\int_0^\varphi \mu(\theta) d\theta}.$$

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *На общей ленте Мёбиуса с известной C^n -гладкой, $n \geq 1$, средней линией $\Gamma: \mathbf{r}(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, и с C^n -гладкой регулярной асимптотической параметризацией*

$$\mathbf{R}(\varphi, v) = \mathbf{r}(\varphi) + v\mathbf{l}(\varphi) \quad (14)$$

направления образующих $\mathbf{l}(\varphi)$ необходимо задаются равенством (13), в котором μ и ν – произвольные C^{n-1} -гладкие 2π -периодическая и 2π -антипериодическая функции соответственно. Для того, чтобы эти образующие действительно определяли ленту Мёбиуса с заданной средней линией Γ , достаточно, чтобы векторы $\mathbf{l}(\varphi)$ не обращались в нуль и не были параллельны $\mathbf{r}'(\varphi)$ (т.е. достаточно, чтобы параметризация (14) была регулярной).

В отношении требований гладкости необходимо сделать некоторые комментарии.

1) Предполагаемая в асимптотической параметризации (14) гладкость начинается с минимально допустимой, т.е. с класса C^1 .

2) Пусть рассматриваются поверхности гладкости C^2 и выше в обычном смысле (это равносильно, например, тому, что поверхность локально имеет представление вида $z = f(x, y)$, где $f(x, y) \in C^n$, $n \geq 2$). Как было упомянуто на с. 199, тогда может случиться, что даже для поверхностей класса C^∞ ни в одной асимптотической параметризации направления образующих не имеют гладкости C^1 . Однако они всегда принадлежат классу Липшица $C^{0,1}$ (см. с. 210). Соответственно, в этом случае в теореме 4 надо предполагать, что μ и ν являются ограниченными интегрируемыми функциями. Но вопрос о том, как определить по “плохой” гладкости развортывающейся поверхности в асимптотической параметризации ее “истинную” гладкость, остается открытым и в общем случае (даже в локальной постановке).

Дополнительно отметим, что наличие большой свободы выбора функций μ и ν означает, что по данной кривой в общем случае можно построить бесконечное множество поверхностей Мёбиуса, для которых эта кривая будет средней линией, но точная формулировка этого утверждения требует специальных исследований. Тем не менее укажем один прием построения новых поверхностей, если уже известна одна поверхность с данной средней линией. Для этого достаточно слегка “пошевелить” имеющиеся функции μ и ν с сохранением их свойств (периодичности и антипериодичности соответственно); при достаточной малости “шевеления” вектор $\mathbf{l}$ сохранит свойство не быть касательным к средней линии, что и достаточно для существования новой ленты Мёбиуса. Таким путем можно построить, например, новые ленты Мёбиуса, имеющие общую среднюю линию со стандартной лентой Мёбиуса (для которой $\mu = -(\ln \sqrt{1 + h^2})'$,

$\nu = h'/\sqrt{1+h^2}$ в обозначениях из п. 1), но на этих новых лентах Мёбиуса средняя линия уже не будет, конечно, геодезической; аналогичная конструкция нам встретится далее в п. 5.

К сожалению, автору не известны никакие сколько-нибудь общие условия на кривую $\Gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi)$, которые гарантировали бы существование функций μ и ν таких, чтобы формула (13) давала требуемые векторы $\mathbf{l}(\varphi)$.

Для получения некоторой конкретной плоской ленты Мёбиуса, рассмотрим частный случай, когда в (11) коэффициент $\mu = 0$. Выберем направляющую кривую Γ такой, чтобы ее проекция на плоскость (x, y) была единичной окружностью и чтобы она сама лежала на поверхности $z = xy$. Такая кривая имеет радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}(\varphi) = \{\cos \varphi, \sin \varphi, z = \sin \varphi \cos \varphi\}$. Далее, выберем в качестве ν функцию $\sin(\varphi/2)$ – простейшую функцию с требуемым свойством 2π -антипериодичности. Используя формулу (13), получаем

$$\mathbf{l} = \left\{ \frac{1}{3} \sin \frac{3}{2}\varphi - \sin \frac{\varphi}{2}, \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3}{2}\varphi, \frac{1}{3} \cos \frac{3}{2}\varphi - \frac{1}{5} \cos \frac{5}{2}\varphi \right\}.$$

Прямая проверка показывает, что $[\mathbf{l}, \mathbf{r}'] \neq 0$, т. е. образующие нигде не касаются кривой Γ , что и требуется по условию построения ленты. Представление о виде поверхности $S: \mathbf{r}(\varphi, t) = \boldsymbol{\rho}(\varphi) + t\mathbf{l}(\varphi)$ можно получить из рис. 3. Эта лента Мёбиуса лежит на алгебраической поверхности 7-го порядка с не более чем

Рис. 3

трехзначной проекцией на плоскость (x, y) . По идее автора ее уравнение найдено студентом МГУ А. Словесновым с помощью компьютерных вычислений, и оно имеет следующий вид⁹:

$$\begin{aligned} &125(x^2 + y^2)^2 \mathbf{z}^3 + 25y[4x - 16(x^2 + y^2) + 18x(x^2 + y^2) - 3(x^2 + y^2)^2] \mathbf{z}^2 \\ &+ 5(1 - 16x + 105x^2 + 41y^2 - 360x^3 - 292xy^2 + 675x^4 + 779x^2y^2 + 131y^4 \\ &- 270xy^4 - 918y^2x^3 - 648x^5 + 141x^2y^4 + 381y^2x^4 + 243x^6 + 3y^6) \mathbf{z} + 5y \\ &- 80xy + 525y^2x^2 + 165y^3 - 1160xy^3 - 1800yx^3 + 2855x^2y^3 + 3375yx^4 - 169y^5 \\ &+ 360xy^5 - 2880x^3y^3 - 191x^2y^5 - 3240yx^5 + 1025y^3x^4 + 1215yx^6 - y^7 = 0. \end{aligned}$$

В некотором смысле эта поверхность – самая простая, так как ее средняя линия является пересечением двух поверхностей 2-го порядка $z = xy$ и $x^2 + y^2 = 1$

⁹Автор благодарен С. Полетаеву, заметившему в первоначальном тексте несколько ошибок в знаках коэффициентов.

(меньший порядок хотя бы для одной поверхности исключен, поскольку средняя линия не может быть плоской), а направления образующих выбраны с использованием тригонометрических многочленов наименьших допустимых степеней. Но эта поверхность S не является изометрическим вложением в $\mathbb{R}^3$ прямоугольного листа Мёбиуса. Чтобы “увидеть” ту плоскую область D , которой поверхность S изометрична, найдем прообраз ее средней линии Γ . Для этого воспользуемся тем, что геодезическая кривизна средней линии является обычной кривизной ее прообраза γ в D . Вычисляя геодезическую кривизну $k_g(\Gamma)$ и затем находя по кривизне $k(\gamma) = k_g(\Gamma)$ уравнение кривой γ на плоскости (ξ, η) , мы по известным формулам получаем параметрическое представление $\xi(\varphi)$, $\eta(\varphi)$ кривой γ в квадратурах (которые, к сожалению, не допускают вычисления в элементарных функциях). Численное интегрирование, проведенное Д. Сабитовым, дает для γ вид кривой, изображенной на рис. 4, тем самым изометричная S область является некоторой полосой вдоль γ , см. рис. 5 (важно заметить, что в концевых точках кривой γ образующая AB ортогональна к кривой и к краю полосы, иначе при отождествлении не получится гладкой поверхности).

Рис. 4

Рис. 5

Проведенные вычисления дают повод поставить следующий *вопрос*: как по известному алгебраическому уравнению $F(x, y, z) = 0$ развертывающейся поверхности с известным алгебраическим уравнением некоторой ее направляющей Γ найти алгебраическое или, в общем случае, аналитическое уравнение $f(\xi, \eta) = 0$ прообраза γ этой направляющей в соответствующей области на евклидовой плоскости (ξ, η) ?

5. Ленты Мёбиуса с ортогональными к средней линии образующими. Продолжим исследование возможных видов плоской ленты Мёбиуса с некасательными к средней линии образующими. Так как в этом случае произведение $(1 \cdot \mathbf{r}')^2$ является антипериодическим, то оно обязательно обращается в нуль хотя бы в одной точке. Это значит, что на любой такой плоской ленте Мёбиуса существует образующая, ортогональная к средней линии поверхности.

На известной неориентируемой поверхности

$$x = \cos \varphi + t \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi + t \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi, \quad z = t \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad (15)$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{3},$$

найденной Машке [12], все образующие являются ортогональными к средней линии, однако эта поверхность имеет отрицательную кривизну. Оказывается, на стандартной плоской ленте Мёбиуса ситуация противоположная. Это подтверждается следующим свойством плоских лент Мёбиуса.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Не существует C^2 -гладкой стандартной ленты Мёбиуса, на которой образующие были бы всюду ортогональны к ее средней линии.*

Доказательство очень простое. Действительно, если такая лента $S: \mathbf{r}(s) + t\mathbf{l}(s)$, $|\mathbf{l}| = 1$, существует, то на ней координатные линии $t = \text{const}$ и $s = \text{const}$ являются геодезическими, длины дуг на которых равны длинам соответствующих отрезков, образующих на прообразе (т.е. на прямоугольном листе Мёбиуса) некоторый прямоугольник. При этом прообразы образующих будут параллельными отрезками прямых, ортогональными к средней линии прямоугольника, поэтому их образы – образующие на поверхности – тоже будут параллельными, значит, S является цилиндрической поверхностью. А это, согласно замечанию 6, невозможно даже в классе C^2 .

Посмотрим, будет ли существовать какая-либо лента Мёбиуса с ортогональными к средней линии образующими.

Все рассуждения мы сейчас будем проводить в предположении, что средняя линия Γ задана своим натуральным уравнением, поэтому параметр кривой – длину ее дуги – будем обозначать через s , $0 \leq s \leq L$, где L – длина средней линии. Мы знаем, что на регулярной аналитической кривой можно ввести аналитические поля главной нормали $\mathbf{N}(s)$ и бинормали $\mathbf{B}(s)$ и аналитические функции кривизны $k(s) = k_A(s)$ и кручения $\kappa(s)$. Случаи обращения в нуль функции кривизны не исключаются, но нормаль к поверхности не обязана быть параллельной главной нормали, так как сейчас средняя линия не является геодезической. Пусть все образующие ортогональны к Γ . Мы можем выбрать их направляющие как единичные векторы $\mathbf{l}(s)$. Умножая уравнение (11b) скалярно на $\mathbf{l}$, получаем $0 = \mu$. Значит, теперь $\mathbf{l}(s)$ и $\mathbf{r}(s)$ связаны уравнением

$$\mathbf{l}'(s) = \nu(s)\mathbf{r}'(s). \quad (16)$$

Так как $(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}') = 0$, то имеет место представление

$$\mathbf{l} = \mathbf{N} \cos \alpha + \mathbf{B} \sin \alpha, \quad (17)$$

где $\mathbf{N}$ и $\mathbf{B}$ – соответственно главная нормаль и бинормаль кривой Γ . Подставим производную от $\mathbf{l}$ в уравнение (16). С учетом уравнений Френе получим

$$\mathbf{l}' = -\mathbf{N}\alpha' \sin \alpha + (\kappa\mathbf{B} - k\mathbf{r}') \cos \alpha + \mathbf{B}\alpha' \cos \alpha + (-\kappa\mathbf{N}) \sin \alpha = \nu\mathbf{r}',$$

откуда имеем $\nu = -k \cos \alpha$, $\alpha' = -\kappa$. Следовательно,

$$\alpha(s) = -\int_0^s \kappa(\sigma) d\sigma + C. \quad (18)$$

Вектор $\mathbf{l}(s)$ должен быть антипериодическим. В зависимости от периодичности или антипериодичности векторов $\mathbf{N}$ и $\mathbf{B}$ возможны два случая.

1) $\mathbf{N}$ и $\mathbf{B}$ – периодические, тогда для антипериодичности $\mathbf{l}(s)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\alpha(s + L) = \alpha(s) + \pi + 2\pi p$, где p – некоторое целое число. Это условие приводит к равенству вида

$$\int_0^L \kappa(s) ds = \pm\pi + 2\pi p, \quad (19)$$

при выполнении которого соотношения (18) и (17) определяют векторное поле направлений $\mathbf{l}(s)$, задающих плоскую ленту Мёбиуса с ортогональными к средней линии образующими.

2) $\mathbf{N}$ и $\mathbf{B}$ – антипериодические, тогда для антипериодичности $\mathbf{l}(s)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\alpha(s + L) = \alpha(s) + 2\pi p$, где p – некоторое целое число. Это условие эквивалентно требованию, чтобы выполнялось равенство вида

$$\int_0^L \kappa(s) ds = 2\pi p, \quad (20)$$

при котором соотношения (18) и (17) определяют векторное поле направлений $\mathbf{l}(s)$, задающих плоскую ленту Мёбиуса с ортогональными к средней линии образующими.

В обоих случаях выбор таких образующих неоднозначен, а определяется свободой в выборе постоянной C в формуле (18). В частности, если при выборе $C = 0$ имеем поверхность S_0 , то при $C = \pi/2$ соответствующие образующие будут нормальными к S_0 , следовательно, на S_0 кривая Γ будет линией кривизны, и она останется линией кривизны на всех поверхностях S_C , только с разной нормальной кривизной. Тем самым получаем, что на основе одной направляющей Γ можно построить непрерывное семейство лент Мёбиуса с параметром C , на которых образующие ортогональны к направляющей.

Реальное существование таких лент Мёбиуса показывается следующим образом. Для второго случая проще всего воспользоваться линией (1), взятой из работы Шварца [1], так как уже известно, что на ней главная нормаль и бинормаль антипериодические. Вычисляя ее интегральное кручение, получаем, что оно равно приблизительно (-3) . Рассмотрим семейство кривых $\Gamma_\lambda: x = \sin \varphi$, $y = \lambda(1 - \cos \varphi)^3$, $z = (1 - \cos \varphi) \sin \varphi$. Эти кривые без самопересечения, их кривизны и кручения имеют те же нули с теми же порядками, что и исходная кривая Шварца, и при непрерывной гомотопии в аналитическом классе кривых их главные нормали и бинормали остаются антипериодическими. Как показывают вычисления, проведенные А. Словесновым, при $\lambda \approx 0.08$ интегральное кручение деформируемой кривой становится положительным, следовательно, существует значение λ между 1 и 0.08, для которого интегральное кручение равно нулю, и эта кривая может служить средней линией для ленты Мёбиуса с ортогональными к этой линии образующими.

Для нахождения искомых кривых в первом случае мы воспользуемся приведенной в [13, 3.1.13] идеей построения кривых с заранее заданным значением интегрального кручения. Рассмотрим две винтовые линии

$$L_1: x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi, \quad z = h\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq (2n - 1)\pi,$$

и

$$L_2: x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi, \quad z = (2n - 1)h(2n\pi - \varphi), \quad (2n - 1)\pi \leq \varphi \leq 2n\pi,$$

где положительное h и натуральное n – некоторые параметры. Кривые L_1 и L_2 встречаются в точках $M_1(0, 0, 0)$ и $M_2(-1, 0, (2n - 1)h\pi)$, имея в этих точках

совпадающие главные нормали $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_2 = \{\cos \varphi, \sin \varphi, 0\}$. Их кривизны постоянны и отрицательны, а кручения тоже постоянны, но разного знака. Подберем значения параметров h и n таким образом, чтобы было выполнено неравенство

$$\frac{(2n-1)h\pi}{\sqrt{1+h^2}} - \frac{(2n-1)\pi}{\sqrt{1+(2n-1)^2h^2}} > (2m+1)\pi, \quad (21)$$

где $m < n$ – некоторое фиксированное неотрицательное целое число (это неравенство означает, что суммарное интегральное кручение кривых L_1 и L_2 больше $(2m+1)\pi$). Элементарными вычислениями проверяется, что неравенство (21) выполнимо при фиксированных $h > 0$ и m и достаточно большом n . Кусочно аналитическая кривая $L = L_1 + L_2$ замкнутая, негладкая в точках M_1 и M_2 и самопересекающаяся, но сколь угодно малым изменением ее участков около точек M_1 и M_2 кривую можно сгладить до регулярной кривой класса C^∞ , а самопересечение убрать перенесением основной части L_2 (т. е. вне малых окрестностей точек M_1 и M_2) на цилиндр некоторого радиуса $1 + \varepsilon$ со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$. Эти аппроксимации можно провести без изменения знака кривизны и с малым изменением интегрального кручения (так как нам не нужно учитывать производную от кручения), поэтому оно останется большим, чем $(2m+1)\pi$. Обозначим полученную таким образом кривую гладкости C^∞ через $\tilde{L}$. Заменим теперь периодические компоненты радиус-вектора этой кривой частичными суммами их рядов Фурье так, чтобы интегральное кручение полученной аналитической кривой L_* осталось больше $(2m+1)\pi$ (это возможно, так как ряды Фурье сходятся вместе с производными любого порядка). Пусть

$$x_*(s), y_*(s), z_*(s)$$

– компоненты радиус-вектора аналитической кривой L_* , причем кривизна этой кривой не обращается в нуль. Рассмотрим семейство кривых L_λ с уравнением $x = x_*(s)$, $y = y_*(s)$, $z = \lambda z_*(s)$. Из формулы для кручения с учетом необращения кривизны в нуль видно, что интегральное кручение кривых L_λ при $\lambda \rightarrow 0$ стремится к нулю, значит, найдутся значения параметра, при которых интегральное кручение равно заданному значению вида $(2k+1)\pi$ с любым натуральным $k \leq m$, что и доказывает существование искомых лент Мёбиуса и в случае периодических нормалей к средней линии.

6. Некоторые нерешенные задачи (продолжение п. 3). В работе [4] ставится вопрос о соотношении длины l и высоты h прямоугольного листа Мёбиуса, допускающего изометрическое вложение в $\mathbb{R}^3$, а в [3] доказывается существование такого $\varepsilon > 0$, что вложение возможно лишь при $l > (\pi/2 + \varepsilon)h$, и высказывается гипотеза, что при $l \leq \sqrt{3}h$ вложение не существует. Тем самым ожидается, что $\varepsilon = \sqrt{3} - \pi/2$, и это ожидание подкрепляется тем фактом, что если рассматривать гладкие вложения, содержащие плоские куски, то при $l > \sqrt{3}h$ такие вложения существуют¹⁰. Если же искать не гладкие, а

¹⁰Представим прямоугольный лист Мёбиуса с $l = \sqrt{3}h$ в виде равнобокой трапеции $ABCD$, где большее основание $|AD| = 2|BC|$, угол $\angle BAD = 60^\circ$, а стороны AB и CD подлежат отождествлению: $A = C$, $B = D$. Затем разобьем трапецию на три правильных треугольника ABK , BKC , CKD , где K – середина стороны AD . Перегибая трапециальную полосу бумаги вдоль отрезка KB на 180° , совместим вершину C с вершиной A , а затем, поворачивая треугольник DKC вокруг отрезка CK , совместим вершины D и B . Теперь ясно, что если выполнено неравенство $l > \sqrt{3}h$, то сгибы вдоль отрезков BK и KC можно заменить узкими цилиндрическими полосками, гладко переходящими в плоские треугольники, и получить вложение в $\mathbb{R}^3$.

кусочно-линейные вложения, то они существуют при любом соотношении длины и высоты прямоугольника, см. [14]–[16] (но описанная в [2] реализация по Гарднеру произвольного листа Мёбиуса не является вложением и даже погружением).

7. Полные плоские поверхности Мёбиуса в $\mathbb{R}^4$. Как мы знаем из п. 3, метрически полный лист Мёбиуса не может существовать в $\mathbb{R}^3$. Но уже в $\mathbb{R}^4$ такие поверхности существуют. В работе Б. Блануши [17] найдена формула для изометрического вложения в $\mathbb{R}^4$ листа Мёбиуса с полной метрикой в аналитическом классе поверхностей. Запишем наиболее общую форму таких вложений S , получаемых по идее работы [17]:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos\left(\frac{u}{2} + h(\rho)\right), & x_2 &= \rho \sin\left(\frac{u}{2} + h(\rho)\right), \\ x_3 &= \frac{\sqrt{4-\rho^2}}{2} \cos(u + H(\rho)), & x_4 &= \frac{\sqrt{4-\rho^2}}{2} \sin(u + H(\rho)), \end{aligned} \quad (22)$$

где $0 \leq u \leq 2\pi$, а $h(\rho)$ и $H(\rho)$ – аналитические четные функции, определенные в некотором интервале $-R < \rho < R \leq 2$. Непосредственно проверяется, что полученные поверхности являются гомеоморфным образом прямоугольника $[0, 2\pi] \times (-R, R)$ с отождествлением точек $(0, \rho)$ и $(2\pi, -\rho)$. Вычисляя метрику, имеем

$$ds^2 = (1 + \Phi(\rho)) d\rho^2 + (du + \Psi(\rho) d\rho)^2,$$

где

$$\Phi(\rho) = \frac{\rho^2}{4(4-\rho^2)} + \frac{\rho^2(4-\rho^2)}{16} (H' - 2h')^2, \quad \Psi(\rho) = \frac{1}{4} (4H' - (H' - 2h')\rho^2).$$

Для полноты метрики необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$\int_0^R |(2-\tau)(H'(\tau) - 2h'(\tau))| d\tau$$

был расходящимся. Предположим, что это так. После замены переменных

$$t = t(\rho) = \int_0^\rho \sqrt{1 + \Phi(\tau)} d\tau, \quad v = u + g(\rho), \quad g(\rho) = \int_0^\rho \Psi(\tau) d\tau,$$

видно, что поверхности S имеют локально-евклидову метрику $ds^2 = dt^2 + dv^2$, где новые переменные (t, v) изменяются на евклидовой плоскости (v, t) в бесконечной полосе между кривыми $\Gamma_1: t = t(\rho), v = g(\rho)$ и $\Gamma_2: t = t(\rho), v = 2\pi + g(\rho)$, с отождествлением точек $(t(\rho), g(\rho))$ и $(t(-\rho), 2\pi + g(-\rho))$ на этих кривых, при этом средняя линия $t = 0$ переходит в E^4 в окружность $x_1 = x_2 = 0, x_3^2 + x_4^2 = 1$. При выборе $g(\rho) = 0$ получаем изометрическое вложение бесконечной полосы Мёбиуса ширины 2π с прямолинейными краями, а при $g(\rho) \neq 0$ имеем изометрическое вложение бесконечной полосы с криволинейными конгруэнтными краями. Работе [17] соответствует случай $g(\rho) = 0$, при котором $h'(\rho) = \frac{\rho^2-4}{2\rho^2} H'(\rho)$. В [17] функции h и H выбраны с соблюдением равенства $H(\rho) = \ln(R^2 - \rho^2) + \frac{R^2}{R^2 - \rho^2}$, однако при таком выборе функций $h(\rho)$ и $H(\rho)$ переход к стандартной метрике $dt^2 + dv^2$ в прямолинейной полосе явно выписать не удастся. Но при $R = 2$ можно взять функции

$$H(\rho) = \frac{1}{2\sqrt{4-\rho^2}} + \frac{\sqrt{4-\rho^2}}{8}, \quad h(\rho) = \frac{\sqrt{4-\rho^2}}{16},$$

для которых переход к стандартным координатам (t, v) можно найти в явном виде:

$$t = \frac{7}{8}\rho + \frac{1}{8}\ln \frac{2-\rho}{2+\rho}, \quad v = u, \quad -2 < \rho < 2.$$

Далее, нетрудно убедиться, что при любом выборе функции $g(\rho)$ поверхности S лежат в трехмерном эллипсоиде, задаваемом уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + 4(x_3^2 + x_4^2) = 4,$$

и поэтому на них нет прямолинейных образующих. Предложенная в [17] поверхность, а также только что указанная другая поверхность не являются алгебраическими, но если взять $h = H$, причем с расходящимся интегралом $\int_0^R |H'(\tau)| d\tau$ (например, достаточно взять функцию $H(\rho)$ как в примере Блануши), тогда для любого такого выбора с четной функцией H получится алгебраическая поверхность, дающая неориентируемое изометрическое вложение в $\mathbb{R}^4$ бесконечной плоской полосы с конгруэнтными *криволинейными* краями. Действительно, при $H = h$ из уравнений поверхности имеем

$$x_1x_3 + x_2x_4 = \frac{\rho\sqrt{4-\rho^2}}{2} \cos \frac{u}{2}, \quad x_1x_4 - x_2x_3 = \frac{\rho\sqrt{4-\rho^2}}{2} \sin \frac{u}{2}. \quad (23)$$

После этого из пар уравнений для (x_1, x_2) и (x_3, x_4) в (22) получаем

$$\begin{aligned} \cos h &= \frac{x_1}{\rho} \cos \frac{u}{2} + \frac{x_2}{\rho} \sin \frac{u}{2}, \\ \cos h &= \frac{2x_3}{\sqrt{4-\rho^2}} \cos u + \frac{2x_4}{\sqrt{4-\rho^2}} \sin u. \end{aligned}$$

Приравнивая эти выражения для $\cos h$ и подставляя в полученное равенство найденные в (23) значения $\cos(u/2)$ и $\sin(u/2)$, видим, что координаты (x_1, x_2, x_3, x_4) точек поверхности удовлетворяют, кроме уравнения эллипсоида, еще некоторому уравнению 5-й степени.

8. Другое изометрическое вложение в $\mathbb{R}^4$ бесконечной полосы Мёбиуса. В работе [18] дано другое решение задачи об изометрическом вложении в $\mathbb{R}^4$ обычной прямолинейной полосы Π : $-A \leq s \leq A$, $-\infty < t < \infty$, определяющей по отождествлению $(-A, t) \rightarrow (A, -t)$ бесконечный лист Мёбиуса. Вложение дано в классе C^∞ и очень геометрично по идее построения. Но необходимо сказать, что сами формулы работы [18] неверны, хотя они оказались легко исправимыми. Автор работы, по-видимому, или ошибся в вычислениях, или просмотрел опечатку в значении одного параметра (но есть и другие ошибки), и поэтому ниже мы излагаем построение искомой поверхности в исправленном варианте, тем более, что оно в [18] дано в очень сжатом виде.

Введем в рассмотрение отображение $h: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определяемое формулой

$$h(x) = (h_1(x), h_2(x)) = \begin{cases} \left(\frac{l}{2} + x, 0\right) & \text{при } x \in \left(-\infty, -\frac{l}{2}\right], \\ (g_1(x), g_2(x)) & \text{при } x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right], \\ \left(\frac{l}{2} - x, 0\right) & \text{при } x \in \left[\frac{l}{2}, +\infty\right), \end{cases}$$

где l – произвольная положительная постоянная, а функции $g_i(x)$, $i = 1, 2$, таковы, что в целом $h(x) \in C^\infty$, и компонента $h_1(x)$ четная, $h_2(x)$ нечетная, а аргумент x является натуральным параметром кривой $h(x)$. Кроме того, будем предполагать, что $h_1(x)$ монотонна на каждом из участков $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, а вся кривая $h(x)$ имеет самопересечение только в точках с $|x| \geq l/2$ (см. рис. 6).

Рис. 6

Пусть теперь нам дана кривая $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, $t \in [-a, a]$, $0 < a \leq \infty$, удовлетворяющая условиям: $f(t)$ принадлежит классу C^∞ , параметр t для нее натуральный, компонента $f_1(t)$ нечетна и ограничена, а компонента $f_2(t)$ является четной. Рассмотрим поверхность S_1 в $\mathbb{R}^4$, заданную отображением $X_1(s, t): \mathbb{R} \times [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^4$ по формуле

$$X_1(s, t) = \begin{cases} x_1 = h_1(s \cos \theta + f_1(t) \sin \theta), \\ x_2 = h_2(s \cos \theta + f_1(t) \sin \theta), \\ x_3 = -s \sin \theta + f_1(t) \cos \theta, \\ x_4 = f_2(t), \end{cases} \quad (24)$$

где параметр $\theta \in (0, \pi/2)$, а аргументы $s \in \mathbb{R}$, $t \in [-a, a]$. Прямым вычислением проверяется, что $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = ds^2 + dt^2$, так что поверхность S_1 является изометрическим погружением в $\mathbb{R}^4$ области $-\infty < s < +\infty$, $-a \leq t \leq a$, причем если кривая $f(t)$ замкнута, то S_1 будет образом цилиндра. В дальнейшем считаем, что кривая $f(t)$ незамкнута и не имеет самопересечений, ограниченная компонента f_1 удовлетворяет неравенству $|f_1(t)| < (l/2) \sin \theta$ для всех t , а компонента $f_2(t)$ на каждом из участков $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ является монотонной. В этих предположениях докажем, что поверхность S_1 является вложенной (в соответствующих рассуждениях в [18] рассмотрены не все возможности и, более того, без наших условий на кривую $f(t)$ утверждение о вложенности S_1 может оказаться неверным).

Действительно, если в точках $M_1(s_1, t_1)$ и $M_2(s_2, t_2)$ значения отображения X_1 равны, то кривая $h(x)$, состоящая из точек $(x_1, x_2, 0, 0)$, имеет самопересечение, следовательно, в точке самопересечения выполнено неравенство $|s \cos \theta + f_1(t) \sin \theta| \geq l/2$. Рассмотрим два из возможных вариантов значений аргумента у $h_1(x)$: а) $s_1 \cos \theta + f_1(t_1) \sin \theta \geq l/2$, $s_2 \cos \theta + f_1(t_2) \sin \theta \geq l/2$ и б) $s_1 \cos \theta + f_1(t_1) \sin \theta \geq l/2$, $s_2 \cos \theta + f_1(t_2) \sin \theta \leq -l/2$ (еще два возможных варианта исследуются аналогично). В первом случае из равенств двух значений h_1 имеем $(s_1 - s_2) \cos \theta + (f_1(t_1) - f_1(t_2)) \sin \theta = 0$. Добавляя сюда уравнение

$$(s_1 - s_2) \sin \theta - (f_1(t_1) - f_1(t_2)) \cos \theta = 0, \quad (25)$$

вытекающее из равенства двух значений x_3 , имеем $s_1 - s_2 = 0$, $f_1(t_1) - f_1(t_2) = 0$. Последнее соотношение вместе с $x_4 = f_2(t_1) = f_2(t_2)$ означает, что у незамкнутой кривой $f(t)$ есть самопересечение, что исключено по условию; значит, $s_1 = s_2$, $t_1 = t_2$. Во втором случае с учетом вида $h_1(x)$ при $x \leq -l/2$ и $x \geq l/2$ получаем, что $(s_1 + s_2) \cos \theta + (f_1(t_2) + f_1(t_1)) \sin \theta = 0$. Вспоминая условия на $f_2(t)$, из равенства двух значений x_4 имеем, что $t_2 = -t_1$. Из равенства двух значений x_1 с учетом нечетности $f_1(t)$ получаем $s_1 + s_2 = 0$, а тогда из (25) имеем $s_1 \sin \theta - f_1(t_1) \cos \theta = 0$. Из ограничения на $|f_1(t)|$ следует, что $|s_1| < (l/2) \cos \theta$. Но в таком случае имеем $s_1 \cos \theta + f_1(t_1) \sin \theta < l/2$, $s_2 \cos \theta + f_1(t_2) \sin \theta = -s_1 \cos \theta - f_1(t_1) \sin \theta > -l/2$, что противоречит рассматриваемому варианту. Утверждение об отсутствии самопересечений доказано.

Используем теперь поверхность S_1 для построения вложения в $\mathbb{R}^4$ бесконечного листа Мёбиуса, заданного в виде бесконечной полосы между двумя прямыми с соответствующим отождествлением точек граничных прямых. Пусть S_1 является вложением в $\mathbb{R}^4$ прямоугольника $\Pi_A: -A \leq s \leq A$, $-\infty = -a < t < a = +\infty$, задаваемым отображением (24), в котором $\theta = \pi/6$ (в работе [18] взято значение $\pi/3$, что в дальнейшем дает ошибочное утверждения об отображении $X_0(s, t)$). Покажем, что параметр A можно выбрать так, чтобы проекция поверхности S_1 на плоскость (x_1, x_3) лежала между лучами, исходящими из точки $(l/2 - 2\sqrt{3}A/3, 0, 0, 0)$ в направлении векторов $e_1 = \{1, 0, \sqrt{3}, 0\}$ и $e_2 = \{1, 0, -\sqrt{3}, 0\}$ и образующими между собой угол в $2\pi/3$. Для этого найдем сначала образы прямых $L_1: s = -A$ и $L_2: s = A$ на плоскости (x_1, x_3) , предполагая, что параметр A выбран с условиями $\sqrt{3}A + f_1(t) \geq l$ и $-\sqrt{3}A + f_1(t) \leq -l$ (эти условия дают нам аргументы в h_1 , по абсолютной величине не меньшие, чем $l/2$, и поэтому позволяющие использовать явный вид функции $h_1(x)$ при таких значениях аргумента). Учитывая, что мы уже имеем требование $|f_1(t)| < (l/2) \sin \theta = l/4$, получаем, что для одновременного удовлетворения всех условий достаточно выбрать значения A из следующего диапазона:

$$\frac{4\sqrt{3}}{12} l < A < \frac{5\sqrt{3}}{12} l.$$

При этих условиях имеем

$$\begin{aligned} x_1(-A, t) &= h_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} A + \frac{1}{2} f_1(t)\right) = \frac{l}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} A + \frac{1}{2} f_1(t), \\ x_3(-A, t) &= \frac{1}{2} A + \frac{\sqrt{3}}{2} f_1(t), \end{aligned}$$

что нам дает уравнение прямой $l_1: \sqrt{3}x_1 - x_3 + 2A - \frac{\sqrt{3}}{2}l = 0$. Аналогично можно показать, что точки прямой L_2 отображаются в точки прямой $l_2: \sqrt{3}x_1 + x_3 + 2A - \frac{\sqrt{3}}{2}l = 0$. Эти прямые пересекаются в точке $M_0(l/2 - 2\sqrt{3}A/3, 0)$ и разбивают плоскость (x_1, x_3) на четыре части. Убедимся, что точки, соответствующие поверхности S_1 , лежат внутри угла, содержащего начало координат. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} F_1(s, t) &= \sqrt{3}x_1(s, t) - x_3(s, t) + 2A - \frac{\sqrt{3}}{2}l, \\ F_2(s, t) &= \sqrt{3}x_1(s, t) + x_3(s, t) + 2A - \frac{\sqrt{3}}{2}l. \end{aligned}$$

На прямой $L_1: s = -A$ имеем $F_1(s, t) = 0$, на прямой $L_2: s = A$ имеем $F_1(A, t) > \sqrt{3}l > 0$. В точках (s, t) , где $C \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{1}{2}f_1(t) \leq \frac{l}{2}$, имеем $F_1(s, t) > 0$.

Действительно, $F_1(s, t) = \sqrt{3}h_1(C) + \frac{s}{2} + 2A - (l + f_1(t))\frac{\sqrt{3}}{2}$. В этом выражении слагаемые $\frac{s}{2} + 2A - (l + f_1(t))\frac{\sqrt{3}}{2}$ при данных ограничениях на A и $f_1(t)$ всегда дают положительную сумму. При значениях аргумента, по модулю не превосходящих $l/2$, функция $h_1(x)$ неотрицательна, следовательно, если $|C| \leq l/2$, то $F_1(s, t) > 0$. Если же $C < -(l/2)$, то мы можем вычислить $F_1(s, t)$ по определению функции $h_1(C)$. Получим

$$F_1(s, t) = \sqrt{3}\left(\frac{l}{2} + C\right) + \frac{s}{2} + 2A - (l + 2C - \sqrt{3}s)\frac{\sqrt{3}}{2} = 2A + 2s > 0.$$

На прямой $s = A$ выполнено $C = \frac{\sqrt{3}}{2}A + \frac{1}{2}f_1(t) > \frac{l}{2}$ (в самом деле, при $t = 0$ имеем $C = \sqrt{3}A/2 > l/2$, и если где-нибудь $C = \frac{\sqrt{3}}{2}A + \frac{1}{2}f_1(t) = \frac{l}{2}$, получим противоречие с условием $f_1(t) > l - \sqrt{3}A$). На прямой $s = -A$ выполнено $C = -\frac{\sqrt{3}}{2}A + \frac{1}{2}f_1(t) < 0$, следовательно, график Γ кривой $\frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{1}{2}f_1(t) = \frac{l}{2}$ проходит внутри полосы, нигде не пересекая ее граничные прямые и имея однозначную проекцию на вертикальную ось t . Он разбивает всю полосу на две части – слева от Γ , где заведомо $F_1(s, t) > 0$, и справа от Γ ; обозначим эту “правую” область через D^+ . В D^+ рассмотрим отрезки $t = \text{const}$. Они начинаются на кривой Γ и идут направо до прямой $s = A$. Вдоль этих отрезков производная $\frac{\partial F_1(s, t)}{\partial s} = \frac{3}{2}h'_1(C) + \frac{1}{2}$ равна -1 (так как $h'_1(C) = -1$ при $C > l/2$). Следовательно, функция F_1 вдоль этих отрезков монотонно убывает, и так как на концах отрезков она положительна, то $F_1(s, t) > 0$ в D^+ , значит, и всюду в полосе она положительна. А положительные значения функции F_1 как функции от (x_1, x_3) расположены в той полуплоскости, где находится начало координат.

Аналогично доказывается, что и функция $F_2(s, t)$ всюду в полосе положительна, и этот знак на плоскости (x_1, x_3) соответствует полуплоскости, содержащей начало координат. В итоге мы показали, что полоса Π_A при отображении X_1 переходит в область, определяемую неравенствами

$$\sqrt{3}x_1 - x_3 + 2A - \frac{\sqrt{3}}{2}l > 0, \quad \sqrt{3}x_1 + x_3 + 2A - \frac{\sqrt{3}}{2}l > 0,$$

т. е. в угол между указанными выше лучами.

Теперь построим два отображения $X_2(s, t)$ и $X_3(s, t)$ в $\mathbb{R}^4$ той же полосы Π_A , которым будут соответствовать поверхности S_2 и S_3 , получаемые из S_1 вращением на угол $\pm(2\pi/3)$ плоскости (x_1, x_3) вокруг точки $M_0(l/2 - 2\sqrt{3}A/3, 0)$, являющейся вершиной того угла раствором $2\pi/3$, в котором расположена область для отображения X_1 . Соответствующие формулы имеют следующий вид:

$$X_2(s, t): \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}h_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{f_1(t)}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}s - \frac{3}{4}f_1(t) + \frac{3}{4}l - \sqrt{3}A, \\ x_2 = h_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{f_1(t)}{2}\right), \\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}h_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{f_1(t)}{2}\right) + \frac{s}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}f_1(t) - \frac{\sqrt{3}}{4}l + A, \\ x_4 = f_2(t), \end{cases}$$

и

$$X_3(s, t): \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} h_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{f_1(t)}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} s + \frac{3}{4} f_1(t) + \frac{3}{4} l - \sqrt{3} A, \\ x_2 = h_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} s + \frac{f_1(t)}{2} \right), \\ x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} h_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} s + \frac{f_1(t)}{2} \right) + \frac{s}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} f_1(t) + \frac{\sqrt{3}}{4} l - A, \\ x_4 = f_2(t). \end{cases}$$

Поскольку вся область для $X_1(s, t)$ на плоскости (x_1, x_3) располагается внутри угла в 120° между двумя лучами, то после поворота на $\pm 120^\circ$ области для $X_2(s, t)$ и $X_3(s, t)$ пересекаться не будут, располагаясь каждая в своем секторе (рис. 7), и поэтому объединенная поверхность $S_0 = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ не будет иметь самопересечений. Прямыми вычислениями находим, что $X_1(-A, -t) = X_2(A, t)$,

Рис. 7

$X_1(A, t) = X_3(-A, -t)$, $X_2(-A, -t) = X_3(A, t)$. Эти равенства позволяют утверждать, что отображение $X_0(s, t)$ в $\mathbb{R}^4$ полосы Π : $-3A \leq s \leq 3A$, $-\infty < t < +\infty$, определенное формулами

$$X_0(s, t) = \begin{cases} X_2(2A + s, t), & -3A \leq s \leq -A, \\ X_1(s, -t), & -A \leq s \leq A, \\ X_3(-2A + s, t), & A \leq s \leq 3A, \end{cases}$$

будет непрерывным в целом. Более того, слева и справа от линий склейки $s = -A$, $s = A$ и $s = -3A$, $s = 3A$ оно задается одинаковыми по виду формулами. Например, в окрестности линии $s = -A$ оно имеет следующее представление: при $x < 0$

$$X_0(x - A, t) = X_2(x + A, t): \begin{cases} x_1 = (x - A) \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{l}{2} - \frac{f(t)}{2}, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = \frac{A - x}{2} + \frac{A}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} f(t), \\ x_4 = f_2(t) \end{cases}$$

и при $x > 0$

$$X_0(x - A, t) = X_1(x - A, -t): \begin{cases} x_1 = (x - A) \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{l}{2} - \frac{f_1(t)}{2}, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = \frac{A - x}{2} + \frac{A}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} f(t), \\ x_4 = f_2(t), \end{cases}$$

т. е. около линий склейки оно имеет такую же гладкость, как и кривая $f(t)$ (которую можно задать и как аналитическую кривую). Так как для точек граничных прямых $s = -3A$, $s = 3A$ полосы Π на поверхности S_0 происходит отождествление по закону $X_0(-3A, -t) = X_0(3A, t)$ (а внутри полосы при переходе через линии склейки ориентация не изменяется), то построенная поверхность действительно является изометрическим вложением в $\mathbb{R}^4$ бесконечного листа Мёбиуса, причем гладкость вложения совпадает с минимальной гладкостью кривых $h(s)$ и $f(t)$. Отметим также, что образом граничных прямых $s = -3A$ и $s = 3A$ является кривая $f(t)$, расположенная на плоскости (x_1, x_4) (со сдвигом на $l/2 - A\sqrt{3}$ по оси x_1).

Мне приятно воспользоваться случаем и поблагодарить моих австрийских коллег Х. Штахеля (H. Stachel) и Й. Вальнера (J. Wallner), а также российских коллег В. А. Александрова и С. В. Маркелова за их помощь по поиску и нахождению необходимой литературы. Особую благодарность мне бы хотелось выразить рецензенту, замечания которого позволили существенно улучшить не только изложение, но и содержание работы.

Заключительное замечание. Когда эта работа уже была представлена в редакцию, автор на конференции в Банаховском центре в Бедлево (26–30 сентября 2005 г.) из публикации [19] участников конференции Х. Галвеса и П. Мира узнал о статье [20], а из нее – о работе [21], в которых исследованы вопросы, аналогичные рассмотренным у нас. Оказалось, что наши результаты пересекаются с результатами этих работ (например, в [21] тоже на основании анализа метода из статьи [1] даются необходимые и достаточные условия на средние линии стандартных лент Мёбиуса с несколько другой концепцией описания допустимых линий, а также рассматриваются некоторые “наиболее простые” реализации листа Мёбиуса), но не покрываются ими полностью (например, в значительной части результатов работы [20] предполагается, что кривизна средней линии нигде не обращается в нуль). Замечание 8 в нашей работе добавлено под влиянием соответствующего рисунка из [20].

Список литературы

1. G. Schwarz, “A pretender to the title “canonical Moebius strip”, *Pacific J. Math.*, **143**:1 (1990), 195–200.
2. G. E. Schwarz, “The dark side of the Moebius strip”, *Amer. Math. Monthly*, **97**:10 (1990), 890–897.
3. B. Halperin, C. Weaver, “Inverting a cylinder through isometric immersions and isometric embeddings”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **230** (1977), 41–70.
4. W. Wunderlich, “Über ein abwickelbares Möbiusband”, *Monatsh. Math.*, **66**:3 (1962), 276–289.

5. M. Sadowsky, “Ein elementarer Beweis für die Existenz eines abwickelbaren Möbius-Bandes und Zurückführung des geometrischen Problems auf ein Variationproblem”, *Sitzungsber. Akad. Berlin*, **22** (1930), 412–415.
6. W. Klingenberg, *A course in differential geometry*, Grad. Texts in Math., **51**, Springer, New York–Heidelberg–Berlin, 1978.
7. V. Ushakov, “Parametrisation of developable surfaces by asymptotic lines”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **54**:3 (1996), 411–421.
8. M. Sadowsky, “Theorie der elastisch biegsamen undeformbaren Bänder mit Anwendungen auf das Möbiussche Band”, *Verh. 3. Intern. Kongr. Techn. Mechanik* (Stockholm), **II**, 1930, 444–451.
9. А. В. Погорелов, *Внешняя геометрия выпуклых поверхностей*, Наука, М., 1969; англ. пер.: A. V. Pogorelov, *Extrinsic geometry of convex surfaces*, Transl. Math. Monogr., **35**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973.
10. Ю. Д. Бурого, “Геометрия поверхностей в евклидовых пространствах”, *Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундам. напр.*, **48**, ВИНТИ, М., 1989, 5–97; англ. пер.: Yu. D. Burago, S. Z. Shefel’, “Geometry of surfaces in Euclidean spaces”, *Geometry*, III, Encyclopaedia Math. Sci., **48**, Springer, Berlin, 1992, 1–85.
11. Ph. Hartman, L. Nirenberg, “On spherical image maps whose Jacobian do not change sign”, *Amer. J. Math.*, **81**:4 (1959), 901–920.
12. H. Mashke, “Note on the unilateral surface of Moebius”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **1**:1 (1900), 39.
13. C.-C. Hsiung, *A first course in differential geometry*, Pure Appl. Math., Wiley, New York, 1981.
14. Ю. Д. Бурого, В. А. Залгаллер, “Реализация разверток в виде многогранников”, *Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астрон.*, **15**:7 (1960), 66–80.
15. Ю. Д. Бурого, В. А. Залгаллер, “Изометрические кусочно-линейные погружения двумерных многообразий с полиэдральной метрикой в R^3 ”, *Алгебра и анализ*, **7**:3 (1995), 76–95; англ. пер.: Ju. D. Burago, V. A. Zalgaller, “Isometric piecewise-linear embeddings of two-dimensional manifolds with a polyhedral metric into R^3 ”, *St. Petersburg Math. J.*, **7**:3 (1996), 369–385.
16. С. Барр, “Топологические эксперименты”, *Россыпи головоломок*, Мир, М., 1987, 259–413; пер. с англ.: S. Barr, *Experiments in topology*, Crowell, New York, 1964.
17. B. Blanuša, “Le plongement isométrique de la bande de Möbius infiniment large euclidienne dans un espace sphérique, parabolique ou hyperbolique à quatre dimensions”, *Bull. Internat. Acad. Yugoslave. Cl. Sci. Math. Phys. Tech. (N.S.)*, **12** (1954), 19–23.
18. А. В. Бушмелев, “Изометрические вложения бесконечного плоского листа Мебиуса и плоской бутылки Клейна в R^4 ”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1988, № 3, 38–41; англ. пер.: A. V. Bushmelev, “Isometric embeddings of an infinite flat Möbius strip and a flat Klein bottle in R^4 ”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **43**:3 (1988), 30–33.
19. J. A. Gálvez, P. Mira, *Isometric immersions of R^2 into R^4 and perturbation of Hopf tori*, [arXiv:math.DG/0301075](https://arxiv.org/abs/math.DG/0301075).
20. C. Chicone, N. J. Kalton, “Flat embeddings of the Möbius strip in R^3 ”, *Comm. Appl. Nonlinear Anal.*, **9**:2 (2002), 31–50.
21. T. Randrup, P. Rogen, “Sides of the Möbius strip”, *Arch. Math. (Basel)*, **66**:6 (1996), 511–521.

И. Х. САБИТОВ (I. Kh. SABITOV)
 МГУ им. М. В. Ломоносова,
 механико-математический факультет
 E-mail: isabitov@mail.ru

Поступило в редакцию
 01.09.2005
 и 12.08.2006