Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Саркисян, О дифференциальных инвариантах геометрических структур, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 2, 99–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/im547>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 18:29:00

УДК 514.763

Р. А. Саркисян

О дифференциальных инвариантах геометрических структур

Доказано, что если размерность m слоя расслоения геометрических структур больше размерности n базы этого расслоения, то количество достаточно общих функционально независимых локальных дифференциальных инвариантов такого расслоения неограниченно возрастает с ростом дифференциальной степени этих инвариантов. При $m \leq n$ описаны все, кроме двух, канонические формы, к которым локально можно привести достаточно общую геометрическую структуру подходящей заменой координат на базе. Результаты, полученные в работе, могут быть обобщены.

Библиография: 18 наименований.

§ 1. Введение

В §1–5 настоящей работы все объекты (функции, многообразия и т.д.) и отображения предполагаются вещественными бесконечно дифференцируемыми, если специально не оговорено иное. Расслоения предполагаются локально тривиальными. Термин “гладкий” обозначает “бесконечно дифференцируемый”.

Типичным примером расслоения геометрических величин над многообразием X размерности n является касательное расслоение $T(X)$. Это расслоение можно получить следующим образом. Расслоение кореперов $\text{Rep}_1(X)$ над X является (правым) главным расслоением с группой GL_n всех вещественных невырожденных матриц порядка n . Рассмотрим (левое) тождественное представление группы GL_n в n -мерном вещественном линейном пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда $T(X)$ получается из прямого произведения $\text{Rep}_1(X) \times \mathbb{R}^n$ отождествлением точек $(e, r) \sim (eg, g^{-1}r)$ для всех $g \in G$, $e \in \text{Rep}_1(X)$, $r \in \mathbb{R}^n$. Расслоение геометрических величин обобщает эту конструкцию. Во-первых, вместо $\text{Rep}_1(X)$ рассматривается расслоение $\text{Rep}_q(X)$ кореперов порядка q , являющееся главным расслоением с дифференциальной группой $G^q(n)$ порядка q (и размерности $n = \dim X$). Во-вторых, рассматривается действие α связной компоненты единицы $G^q(n)^0$ группы $G^q(n)$ на каком-нибудь многообразии D . Тогда расслоение P геометрических величин с базой X и типовым слоем D получается из прямого произведения $\text{Rep}_q(X) \times D$ отождествлением точек $(e, r) \sim (eg, g^{-1}r)$ для всех $g \in G$, $e \in \text{Rep}_q(X)$, $r \in \mathbb{R}^n$. Сечения расслоения P называются *геометрическими величинами (структурами)*.

Каждый выбор системы координат F в окрестности точки $b \in X$ фиксирует изоморфизм $t_F: D_b \rightarrow D$ слоя D_b над точкой b расслоения $P \rightarrow X$ и типового слоя D . Если F и G – две одинаково ориентированные системы координат в окрестности точки b , то переход от F к G определяет в точке b элемент

$g \in G^q(n)^0$ и соответствующее преобразование $\alpha(g): D \rightarrow D$ совпадает с $t_F t_G^{-1}$. Обычно расслоение геометрических величин строят по действию группы $G^q(n)$ (а не $G^q(n)^0$). Это соответствует тому, что закон преобразования α геометрической величины задан для всех невырожденных преобразований координат. Данное определение расслоения геометрических величин соответствует случаю, когда база X предполагается ориентированной и закон преобразования определен лишь для сохраняющих ориентацию преобразований координат. Через $\mathcal{V}$ обозначается группа всех сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов X . Каждый диффеоморфизм этой группы индуцирует диффеоморфизм расслоения P геометрических величин над базой X .

Важным примером геометрической величины является риманова метрика, а типичным примером дифференциального инварианта является скалярная кривизна – скалярная функция на римановом многообразии, значение которой в любой локальной системе координат равно одному и тому же выражению от компонент g_{ij} метрического тензора и его первой и второй производных $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}, \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^r}$ по локальным координатам $x^1, x^2, \dots, x^n$ на многообразии. Вообще, *дифференциальным инвариантом степени k* называется такая функция от компонент геометрической величины и их частных производных по координатам до порядка k включительно, вычисление которой в данной точке многообразия дает один и тот же результат независимо от использованной для ее вычисления локальной системы координат. Все рассуждения в настоящей работе проводятся локально, в окрестности заданной точки, и дифференциальные инварианты тоже считаются заданными локально, в окрестности заданных значений аргументов. Естественной областью определения дифференциального инварианта является многообразие струй сечений соответствующего расслоения геометрических величин. Как правило, мы рассматриваем дифференциальные инварианты только в достаточно общих точках соответствующих многообразий струй, определяя понятие достаточно общей точки и доказывая, что множество таких точек образует открытое всюду плотное инвариантное подмножество соответствующего многообразия.

Изучение дифференциальных инвариантов было начато в классических работах [1] и [2] и продолжено в работах [3], [4] (существенная часть работы [4] изложена в § 6 учебника [5]). Дифференциальные инварианты (в том числе и для конечномерных групп Ли) изучались в монографиях [6]–[8] и др.

В § 2 настоящей работы доказано (теорема 1), что если размерность типового слоя D расслоения геометрических величин $P \rightarrow X$ больше размерности базы X , то при росте k количество $t(k)$ функционально независимых дифференциальных инвариантов степени k в любой достаточно общей точке стремится к бесконечности, и приведена асимптотическая оценка снизу для $t(k)$. Отметим, что точное значение функции $t(k)$ для достаточно общих римановых метрик и ряда других (тоже достаточно общих) конкретных геометрических величин содержится в монографии [9]. В конце § 3 настоящей работы приводится теорема 2, обобщающая теорему 1. Теорема 1 также допускает непосредственное обобщение на случай расслоений, присоединенных к плоским G -структурам. Автор надеется вернуться к этому вопросу в дальнейшем.

В § 5 рассматриваются расслоения P геометрических величин, для которых размерность m типового слоя Y не превосходит размерности $n = \dim X$. Такие многообразия Y называются *специальными*, а соответствующие расслоения P – *специальными расслоениями*. Чтобы не загромождать изложение, мы разбираем только случай $n > 2$. Случай $n = 1$ тривиален, а необходимые изменения для случая $n = 2$ легко устанавливаются.

Среди специальных многообразий имеется два исключительных:

а) четырехмерное многообразие $Y_{\text{гр}}$, представляющее собой грассманово многообразие двумерных плоскостей четырехмерного пространства, на котором естественным образом действует группа GL_4 ;

б) трехмерное многообразие $Y_{\text{ф}}$ флагов типа $(1, 2)$ в трехмерном пространстве, на котором естественным образом действует группа GL_3 , а стационарными подгруппами этого действия являются ее борелевские подгруппы.

Среди остальных специальных многообразий мы выделяем 17 типов (неисключительных) эталонных многообразий $Y_1, \dots, Y_{17}$. Им отвечают 17 типов (неисключительных) специальных расслоений $P_1, \dots, P_{17}$, называемых *эталонными расслоениями*. Многообразиям $Y_{\text{гр}}$ и $Y_{\text{ф}}$ отвечают (исключительные) эталонные расслоения $P_{\text{гр}}$ и $P_{\text{ф}}$, определяющие еще два (исключительных) типа эталонных расслоений. Действие (частичное) группы $\mathcal{V}$ в окрестности регулярной точки любого специального расслоения (исключительного или неисключительного) устроено так же, как ее действие в окрестности подходящей точки одного из эталонных расслоений.

Известно, что достаточно общую дифференциальную форму на X можно подходящим выбором системы координат локально привести к каноническому виду (теорема Дарбу). Аналогично можно спрямить ненулевое векторное поле на X . Похожий факт можно доказать для достаточно общего сечения любого специального неисключительного расслоения: в подходящей системе координат на X это сечение приводится к каноническому виду (для каждого типа – к своему). Это доказано в теореме 5. Многообразия $Y_{\text{гр}}$, $Y_{\text{ф}}$ и расслоения $P_{\text{гр}}$, $P_{\text{ф}}$ будут изучены в следующей работе, в которой при использовании результатов настоящей работы будет также показана конечность числа функционально независимых дифференциальных инвариантов в любой достаточно общей точке любого специального многообразия.

В § 4 и § 7 при $n > 2$ перечислены все связные подгруппы Ли коразмерности не более n в группах SL_n и $G^q(n)^0$. Эти результаты используются в § 5.

Результаты работы имеют приложение к теореме Трессе [3], и автор надеется опубликовать их отдельно.

Автор выражает благодарность всем, кто помог советами при написании данной работы, в особенности В. И. Арнольду, А. В. Арутюнову, А. В. Болсинову, А. С. Демидову, Л. Е. Евтушику, А. А. Зайцеву, П. И. Кацыло, А. Л. Оницику, В. Л. Попову, а также участникам семинара И. Р. Шафаревича, на котором докладывались настоящие результаты, и в особенности В. А. Исковских.

§ 2. Предварительные сведения

2.1. Введем обозначения: $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, $\mathbb{R}^n$ – n -мерное арифметическое пространство, $\mathbb{R}^{n*}$ – двойственное к нему, $\mathbf{0}$ – нулевой вектор в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^{n*}$. Стандартные координаты элемента t из $\mathbb{R}^n$ записываются $t^1, \dots, t^i, \dots, t^n$, а сам элемент записывается $t = (t^i)$. Стандартные координаты элемента t из $\mathbb{R}^{n*}$ записываются $t_1, \dots, t_i, \dots, t_n$, а сам элемент записывается $t = (t_i)$. По повторяющимся верхним и нижним индексам в формулах подразумевается суммирование, если специально не оговорено противное. Через $\mathbb{R}^0$ обозначена группа положительных вещественных чисел по умножению.

Далее, $\dim X$ – размерность многообразия (или линейного пространства) X , $\text{codim}(X, Y)$ – коразмерность подмногообразия X в многообразии Y (или линейного подпространства X в линейном пространстве Y). Под окрестностью понимается всегда открытая окрестность. Замыкание множества W обозначается $\overline{W}$.

Под группой Ли мы понимаем вещественную (конечномерную) группу Ли. Через G^0 обозначается связная компонента единицы группы Ли G , через $Z = Z(G)$ – центр группы G . Многообразие X с действием группы Ли G будет называться G -многообразием, и стационарная подгруппа точки b из X будет обозначаться через G_b , ее связная компонента единицы – через G_b^0 . Образ множества U под действием группы G обозначается GU . Алгебра Ли (касательное пространство к единичному элементу) группы Ли G будет обозначаться через $\text{Lie}(G)$. Если H – подгруппа Ли группы G , а $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$ – их алгебры Ли, то $\text{codim}(G, H) = \text{codim}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Коммутатор элементов x и y в алгебре Ли обозначается $[x, y]$. Через G/H обозначается пространство левых классов смежности группы G по подгруппе H . Как обычно, подгруппа Ли H группы Ли G не обязательно предполагается замкнутой в G . Для элемента g группы Ли G через $\text{Ad}(g)$ обозначается внутренний автоморфизм алгебры Ли $\text{Lie}(G)$, индуцированный внутренним автоморфизмом G , определенным формулой $x \rightarrow gxg^{-1}$. Через GL_n , SL_n обозначаются группа вещественных матриц и ее подгруппа унимодулярных матриц порядка n , их алгебры Ли обозначаются через GL_n , SL_n . Связная компонента единицы группы GL_n обозначается через GL_n^0 . В записи $A = (a_j^i)$ верхний индекс – номер строки, а нижний – номер столбца матрицы A . Через A^{-1} и A^T обозначаются соответственно обратная и транспонированная матрицы к матрице A , через E_n – единичная матрица порядка n . Через $\text{diag}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ обозначается диагональная матрица с элементами $a_i = a_i^i$ вдоль главной диагонали; если $a_i = a$ для всех i , эта матрица обозначается через $\text{sk}_n(a)$.

Пусть L – линейное пространство размерности n . Через L^* обозначается двойственное к L пространство. Если в L выбран базис, то вектор $t \in L$ с координатами $(t^1, \dots, t^i, \dots, t^n)$ в этом базисе записывается $t = (t^i)$. Через ST_n обозначается простейшее (тождественное) представление группы GL_n на пространстве $\mathbb{R}^n$: действие матрицы $A = (a_j^i)$ на вектор $t = (t^i) \in \mathbb{R}^n$, понимаемый как вектор-столбец, есть умножение матрицы на этот столбец, что дает вектор-столбец $(a) = A(t) = At$ с координатами

$$a^i = a_j^i t^j$$

(напоминаем, что по индексу j подразумевается суммирование).

Рассмотрим двойственное к простейшему (тождественному) представлению группы GL_n в $\mathbb{R}^{n*}$: действие матрицы $A = (a_j^i)$ на вектор $t = (t_i) \in \mathbb{R}^{n*}$, понимаемый как вектор-строка, есть умножение этой строки на матрицу A^{-1} , что дает вектор-строку $a = A(t) = tA^{-1}$. Если обозначить $A^{-1} = (p_j^i)$, имеем

$$a_j = t_i p_j^i.$$

Это представление мы будем обозначать через ST_n^* .

Прямое произведение групп (многообразий и т. д.) G_1 и G_2 обозначено через $G_1 \times G_2$, элемент $g \in G_1 \times G_2$ отождествляется с парой (g_1, g_2) , где g_i – проекция g на i -й сомножитель, и мы пишем $g = (g_1, g_2)$. Полупрямое произведение нормального делителя G_2 на подгруппу G_1 обозначается через $G_1 \ltimes G_2$, через δ_j^i – индекс Кронекера, через $\text{Sp } A$ и $\det A$ – след и определитель матрицы A .

Струей функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ *порядка* k (или просто *k-струей*) в точке b многообразия X называется класс всех функций, имеющих в точке b касание с f порядка k . Ясно, что понятие струи не зависит от выбора системы координат на X и может быть определено и для отображения многообразия X в многообразии Y . Струя порядка k функции (отображения) f в точке b обозначается $j_k f(b)$ или $f_k(b)$. В выбранной системе координат на X струя $f_k(b)$ определяется начальным отрезком ряда Тейлора функции f в точке b до членов полной степени k включительно. Однородная струя порядка k определяется членами полной степени k ряда Тейлора (это понятие зависит от выбора системы координат на X).

Отображение множества X в множество Y , переводящее точку b из X в точку d из Y , называется *пунктированным* и обозначается $(X, b) \rightarrow (Y, d)$. Струи k -го порядка пунктированных отображений $(\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ образуют группу Ли, которая обозначается $G^q(n)$ и называется *дифференциальной группой размерности n и порядка q* . Связная компонента единицы группы $G^q(n)$ будет обозначаться через $G^q(n)^0$. Ясно, что $G^1(n) = GL_n$. Касательное пространство к многообразию X в точке b обозначается $T_b(X)$, а касательное расслоение к X – через $T(X)$. Если $\varphi: X \rightarrow Y$ – отображение, g – функция на Y , $b \in X$, то функция $g(\varphi(b))$ на X называется *индуцированной* (отображением) φ и обозначается $\varphi^*(g)$.

Пусть b – точка многообразия X . Как обычно, *ростком функции* (отображения и т. д.) в точке b называется (бесконечно дифференцируемая) функция f (отображение и т. д.), определенная в некоторой окрестности U_f точки b , причем функции f и g по определению задают тот же самый росток в точке b , если имеется некоторая окрестность V точки b такая, что $U_f \cap U_g \supset V$ и $f = g$ на V . Кольцо ростков в точке b всех функций на многообразии X обозначается через $O_b(X)$ и называется *локальным кольцом точки b на X* . Отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ индуцирует отображение $\varphi^*: O_b(Y) \rightarrow O_b(X)$.

Карта $F = (U, t^i)$ на многообразии X состоит из окрестности U в X и локальных координат $t^1, \dots, t^i, \dots, t^n$ в U . Через ∂_i обозначается дифференцирование по i -й координате, а через $\frac{\partial}{\partial f^i}$ – соответствующий касательный вектор. Обозначение F для карты всегда подразумевает задание координатной окрестности U_F и локальных координат в ней f^i , т. е. карта, обозначенная просто через F , подробно записывается следующим образом: $F = (U_F, f^i)$, аналогично,

$H = (U_H, h^i)$ и т. д. Мы пишем $\text{or}(F) = \text{or}(H)$ ($\text{or}(F) = \text{or}(X)$), если карты F и H (карта F и многообразие X) одинаково ориентированы. Запись $b \in F$ означает, что $b \in U_F$. Индекс при U не будет записываться, когда ясно, о какой карте на X идет речь. Набор карт, покрывающий X , называется *атласом* на X . Карта F называется *центрированной в точке b* , или *b -картой*, если для ее локальных координат f^i имеем $f^i(b) = 0$. База X расслоения геометрических величин всегда предполагается ориентированной, и в определение b -карты включается условие $\text{or}(F) = \text{or}(X)$.

Часто мы будем называть дифференциальные формы просто *формами*, 1-*формой* называем дифференциальную форму степени 1. Мы будем использовать то, что при сохраняющих ориентацию диффеоморфизмах X невырожденная форма старшей степени на X сохраняет знак. Для расслоения $\pi: P \rightarrow X$ слой $\pi^{-1}(b)$ над точкой b обозначается P_b .

2.2. Мы будем использовать понятие геометрической структуры (см. обзор [10]). С каждым многообразием X размерности n инвариантно связано многообразие кореперов $\text{Rep}_q(X)$ порядка q , которое является (правым) главным расслоенным пространством над X , на слое которого действует дифференциальная группа $G^q(n)$ порядка q . Мы рассматриваем только линейно связные многообразия X . Если задано (левое) действие $\alpha: G^q(n)^0 \times D \rightarrow D$ группы $G^q(n)^0$ на многообразии D , возникает ассоциированное с $\text{Rep}_q(X)$ расслоение $\pi^D: P = P_X(D) \rightarrow X$. Мы будем называть P *расслоением геометрических величин типа D и порядка q* , или просто *D -расслоением*, а D – *типовым слоем расслоения P* . Сечение $s: X \rightarrow P$, определенное в некоторой окрестности многообразия X , называется (локальной) *геометрической структурой*, или (локальной) *геометрической величиной*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для любых натуральных $q \geq s$ определена естественная проекция $g(q, s): G^q(n)^0 \rightarrow G^s(n)^0$, и минимальное s , для которого действие α индуцировано действием $G^s(n)^0$ на D , называется *точным порядком α* .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Там, где это очевидно не влияет на доказательство, для упрощения обозначений (не оговаривая этого каждый раз специально) мы будем при проведении доказательств уменьшать при необходимости X и предполагать, что все заданные локально по X геометрические величины, функции, системы координат и аналогичные объекты заданы глобально на X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть задано действие α группы G на многообразии D . Назовем α -*рангом* (α -*корангом*) точки $d \in D$ размерность (коразмерность в D) проходящей через d орбиты группы G относительно действия α . Будем обозначать α -ранг d через $\text{rk}_\alpha(d)$, коранг – через $\text{cor}_\alpha(d)$. Назовем точку d α -*регулярной*, если функция $\text{rk}_\alpha(d)$ (эквивалентно, $\text{cor}_\alpha(d)$) постоянна в некоторой окрестности точки d . Функция $\text{rk}_\alpha(d)$ ($\text{cor}_\alpha(d)$) полунепрерывна снизу (сверху).

Ясно, что орбита α -регулярной точки состоит только из α -регулярных точек. Такую орбиту будем называть α -*регулярной*. Если многообразие D состоит только из α -регулярных точек, оно называется α -*регулярным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть задано действие α группы Ли G на многообразии D , d – точка на D . Назовем α -инвариантом в точке d (или α -инвариантом, определенным в точке d) росток, заданный функцией f на D с областью определения $U_f \ni d$, такой, что f постоянна на каждой компоненте связности пересечения каждой орбиты группы G с D . Ясно, что множество всех α -инвариантов в точке d образует подкольцо в $O_d(D)$, которое будем обозначать через $I_d(D; \alpha)$ и называть (локальным) кольцом α -инвариантов (точки d). Можно еще сказать, что $I_d(D; \alpha)$ есть локальное кольцо инвариантов точки d относительно индуцированного действия алгебры Ли $\text{Lie}(G)$ на X . Если задано действие β группы G на многообразии Y и отображение $\varphi: D \rightarrow Y$ перестановочно с действием группы G , то φ индуцирует отображение $\varphi^*: I_y(Y; \beta) \rightarrow I_d(D; \alpha)$ (здесь $y = \varphi(d)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Когда ясно, о каком действии α идет речь, мы не будем выписывать α в обозначениях и будем использовать термины “ранг”, “коранг”, “регулярная точка”, “кольцо инвариантов $I_d(D)$ ” и другие вместо “ α -ранг”, “ α -коранг”, “ α -регулярная точка”, “кольцо α -инвариантов $I_d(D; \alpha)$ ” и т. д. Это относится и к вводимым далее обозначениям и определениям, зависящим от действия α группы G на многообразии D .

ЛЕММА 1. Для любого G -многообразия D его регулярные точки образуют открытое, инвариантное относительно действия G , всюду плотное в D подмножество W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (Напомним, что G , D и действие G на D предполагаются бесконечно дифференцируемыми.) Рассмотрим множество W^1 , состоящее из точек, принадлежащих орбитам наибольшей размерности. Размерность орбиты полунепрерывна снизу, т.е. при малом шевелении точки размерность ее орбиты может только увеличиться, поэтому W^1 открыто (и инвариантно). Рассмотрим теперь дополнение $D_1 = D - \overline{W}^1$ в D к замыканию множества W^1 и рассмотрим множество W^2 , состоящее из точек, принадлежащих орбитам наибольшей размерности в D_1 . Открытость множества W^2 доказывается так же, как и открытость W^1 . Взяв $D_2 = D - \overline{W}^2$ и продолжая этот процесс, построим открытое инвариантное всюду плотное в D подмножество $W = W^1 \cup W^2 \cup \dots \cup W^n$. Оно и будет искомым. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для аналитического многообразия D множество W^1 всюду плотно в D . Это следует из того, что локально W^1 задается условием максимальности ранга (прямоугольной) матрицы, состоящей из аналитических функций на D , задающих действие $\text{Lie}(G)$ на касательном расслоении к D . Подробнее мы не приводим.

2.3. Для каждого расслоения $\pi: P \rightarrow X$ определено многообразие k -струй $J^k P$ (это многообразие образовано k -струями локальных сечений $s: X \rightarrow P$). Для расслоения $P = P_X(D) \rightarrow X$ соответствующее многообразие k -струй будет обозначаться через $J_X^k(D)$, или $J^k(D)$, или J^k , причем будем считать, что $J^0 = P$, $J^{-1} = X$. Для каждой пары натуральных чисел $k \geq s \geq -1$ имеются естественные проекции $\pi(k, s)_X^D: J_X^k(D) \rightarrow J_X^s(D)$, удовлетворяющие для

каждой тройки натуральных чисел $k \geq s \geq d \geq -1$ условию

$$\pi(s, d) \pi(k, s)_X^D = \pi(k, d)_X^D.$$

Положим $\pi(k, -1)_X^D = \pi_k^D$, $\pi(k, 0)_X^D = \beta_k^D$. Тогда π_k^D есть проекция J^k на X , β_k^D – проекция J^k на P , а $\pi(0, -1)_X^D$ – проекция $\pi: P \rightarrow X$. Имеем

$$\pi_s^D \pi(k, s)_X^D = \pi_k^D, \quad \beta_s^D \pi(k, s)_X^D = \beta_k^D, \quad \pi \beta_k^D = \pi_k^D.$$

Во введенных обозначениях $\pi(k, s)_X^D$, π_k^D , β_k^D верхний индекс D и нижний индекс X не будут записываться, когда ясно, какие многообразия X и D рассматриваются.

Конструкция многообразия k -струй функториальна. Это означает, что каждому диффеоморфизму $\varphi: X \rightarrow T$ при $k \geq 1$ отвечает отображение $\varphi(k)^D: J_X^k(D) \rightarrow J_T^k(D)$ с обычными функториальными свойствами. Обозначим группу диффеоморфизмов произвольного многообразия T через $\mathscr{W}(T)$. Подгруппа всех сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов группы $\mathscr{W}(T)$ обозначается $\mathscr{V}(T)$, подгруппа всех сохраняющих точку b диффеоморфизмов группы $\mathscr{V}(T)$ – через $\mathscr{V}_b(T)$. Будем записывать $\mathscr{W}$, $\mathscr{V}$, $\mathscr{V}_b$ вместо $\mathscr{W}(X)$, $\mathscr{V}(X)$, $\mathscr{V}_b(X)$ соответственно. Группа $\mathscr{V}$ действует на многообразии $P = P_X(D)$. Элементу $\varphi \in \mathscr{V}$ отвечает диффеоморфизм $\psi = \psi(D, \varphi): P \rightarrow P$, порождающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \psi: P & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi: X & \longrightarrow & X \end{array}$$

Диффеоморфизм φ действует на сечение $s: X \rightarrow P$, переводя его в сечение $s_\varphi: X \rightarrow P$, определенное правилом $\psi s = s_\varphi \varphi$. Это порождает действие $\varphi \rightarrow \varphi(k)^D$ группы $\mathscr{V}$ на многообразиях $J_X^k(D)$, перестановочное с $\pi(k, s)$, π_k , β_k . Полагаем $\varphi(-1)^D = \varphi$, $\varphi(0)^D = \psi(D, \varphi)$.

2.4. Следующие определения аналогичны определениям 1 и 2. Связь между этими определениями будет прояснена далее в п. 3.2. Мы будем рассматривать дифференциальные инварианты (см. определение 4) только локально, в окрестности заданной точки $a \in J_X^k(D)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Точка $a \in J^k = J_X^k(D)$ называется $\mathscr{V}$ -регулярной, если у нее существует окрестность U такая, что для всех точек $a \in U$ размерность $d(a)$ орбиты группы $\mathscr{V}$, проходящей через a , постоянна. Назовем $\mathscr{V}$ -рангом регулярной точки a и обозначим через $\text{rk}_{\mathscr{V}}(a)$ число $\text{rk}_{\mathscr{V}}(a) = d(a) - n$. Назовем $\mathscr{V}$ -корангом регулярной точки a коразмерность орбиты группы $\mathscr{V}$, проходящей через a , и обозначим это число через $\text{cor}_{\mathscr{V}}(a)$. Ясно, что $\text{cor}_{\mathscr{V}}(a) = \dim J^k - d(a)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть a – точка на многообразии $J^k = J_X^k(D)$. Дифференциальным инвариантом (определенным) в точке a , или $\mathscr{V}$ -инвариантом, называется росток, заданный функцией f на J^k с областью определения $U_f \ni a$ такой, что f постоянна на каждой компоненте связности пересечения каждой орбиты группы $\mathscr{V}$ с U_f . Число k называется степенью дифференциального инварианта.

Ясно, что множество всех $\mathcal{V}$ -инвариантов в точке a образует подкольцо кольца $O_a(J^k)$, которое будет обозначаться через $I_a(J^k; \mathcal{V})$ и называться (локальным) *кольцом дифференциальных инвариантов* (степени k) или $\mathcal{V}$ -*инвариантов* (точки a). Поскольку отображения $\pi(k, s): J^k \rightarrow J^s$ перестановочны с действием группы $\mathcal{V}$, они индуцируют отображения $\pi(k, s)^*: I_a(J^k; \mathcal{V}) \rightarrow I_a(J^s; \mathcal{V})$, если $\pi(k, s)(a) = u$. Пусть $f \in I_a(J^k; \mathcal{V})$. Наименьшее s , для которого найдется $g \in I_a(J^s; \mathcal{V})$ такое, что $\pi(k, s)^*(g) = f$, где $\pi(k, s)(a) = u$, называется *точной степенью* дифференциального инварианта f . Символ $\mathcal{V}$ в понятиях и обозначениях, связанных с действием группы $\mathcal{V}$, выписывать, как правило, не будем, когда понятно, какое действие рассматривается. Это относится и к вводимым далее обозначениям и определениям, касающимся действия группы $\mathcal{V}$.

2.5. Пусть a – $\mathcal{V}$ -регулярная точка на J^k , d – натуральное число. Назовем $(a; d; \mathcal{V})$ -*набором* (коротко – *набором*) и обозначим через $F = (F^i)$ набор, состоящий из d определенных в точке a дифференциальных инвариантов F^i . Мы называем *рангом* набора F в точке a и обозначаем через $\text{rk}_F(a)$ ранг якобиевой матрицы $(\frac{\partial F^i}{\partial z^j(a)})$, где через $z^1, \dots, z^s$ обозначена любая локальная система координат в окрестности точки a . Ясно, что $\text{rk}_F(a)$ не зависит от выбора z^i . Набор F называется *функционально независимым в точке a* , если $\text{rk}_F(a) = d$. Для функционально независимого набора всегда $\text{cog}(a) \geq d$. Функционально независимый набор называется *полным в точке a* , если $\text{cog}(a) = d$.

Если задано действие α группы Ли G на многообразии D и точка a есть α -регулярная точка D , то для набора F , называемого $(a; d; \alpha)$ -*набором*, или просто *набором*, состоящего из d определенных в точке a инвариантов относительно действия G на D , можно дословно так же ввести понятия ранга, функциональной независимости и полноты в точке a . Ясно, что и для $\mathcal{V}$ -регулярной точки на J^k , и для α -регулярной точки на D можно найти полный функционально независимый набор инвариантов, определенный в этой точке.

§ 3. Инварианты неспециальных структур

3.1. Как обычно, $k! = 1 \cdot 2 \dots n$, $C_n^k = n! / (k!(n-k)!)$ – число сочетаний из n элементов по k . Из треугольника Паскаля следует соотношение

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + \dots + C_{n+i}^i = C_{n+i+1}^i.$$

Теперь мы можем сформулировать первый основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $P \rightarrow X$ – расслоение геометрических величин типа D и порядка q , $\dim D = m$, $\dim X = n$ и $m > n$. Тогда для любой $\mathcal{V}$ -регулярной точки $a \in J_X^k(D)$ существует не менее $t(k) = mC_{n+k}^k - n(C_{n+k+q}^{k+q} - 1)$ функционально независимых дифференциальных инвариантов степени k , определенных в точке a . При $k \rightarrow \infty$ можно записать

$$t(k) = (m - n)C_{n+k}^k - \varepsilon(k)C_{n+k}^k,$$

где $\varepsilon(k)$ стремится к нулю при росте k . Таким образом, $t(k)$ стремится к бесконечности при росте k . Величина $\varepsilon(k)$ зависит только от m, n, q, k .

Прежде чем доказывать теорему, напомним (см. далее пп. 3.2–3.6) ряд известных фактов [10], [11].

3.2. По действию $\alpha: G^q(n)^0 \times D \rightarrow D$ группы $G^q(n)^0$ на многообразии D для каждого натурального k канонически определяются подходящее многообразие D^k (k -продолжение многообразия D) и действие α_k (k -продолжение действия α) группы $G^{q+k}(n)^0$ на этом многообразии, для которых имеются канонические отождествления

$$\gamma(k)_X^D: J_X^k(D) \approx P_X(D^k).$$

Напомним, что согласно п. 2.2 $P_X(D^k)$ есть расслоение, ассоциированное с главным расслоением кореперов Rep_{q+k} порядка $q+k$ с помощью действия α_k . Полагаем $D^0 = D$. Таким образом, слой J_b^k над любой точкой $b \in X$ неканонически отождествляется с D^k . При этом данная конструкция функториальна. Это означает следующее.

1. Для любых натуральных $k \geq s \geq 0$ естественная проекция групп $g(k, s): G^k(n)^0 \rightarrow G^s(n)^0$ коммутирует с действиями α_k, α_s этих групп на D^k, D^s соответственно при естественной проекции $\mu^D(k, s): D^k \rightarrow D^s$. Положим $\mu^D(k, 0) = \mu_k^D$.

2. Естественная проекция пространств кореперов $r(k+q, s+q): \text{Rep}_{k+q}(X) \rightarrow \text{Rep}_{s+q}(X)$ индуцирует проекцию присоединенных расслоений $p_X^D(k, s): P_X(D^{k+q}) \rightarrow P_X(D^{s+q})$, которая при отождествлениях $\gamma(k)_X^D, \gamma(s)_X^D$ переходит в проекцию $\pi(k, s)_X^D$. Далее в этих обозначениях верхний индекс D и нижний индекс X не будут выписываться, когда понятно, какие многообразия X и D имеются в виду.

3. Любой диффеоморфизм $\varphi: X \rightarrow T$ индуцирует диффеоморфизмы $\varphi(R, k): \text{Rep}_k(X) \rightarrow \text{Rep}_k(T)$, $\varphi(k)^D: J_X^k(D) \rightarrow J_T^k(D)$, $\psi(D^k, \varphi): P_X(D^k) \rightarrow P_T(D^k)$, перестановочные с отождествлениями $\gamma(k)$ и проекциями $r(k, s)$, $\pi^D(k, s)$, $\mu^D(k, s)$ с подходящими значениями индексов, например

$$\gamma(k)_T^D \varphi(k)^D = \psi(D^k, \varphi) \gamma(k)_X^D.$$

3.3. Пусть D -расслоение $P = P_X(D)$ задается действием дифференциальной группы $G^q(n)^0$ на типовой слой D . Рассмотрим точку $a \in J^k = J_X^k(D)$ и обозначим $b = \pi_k(a) \in X$, $G = G^{q+k}(n)^0$. Как известно, любой выбор карты $F = (U, f^i)$ на X задает тривиализацию

$$\text{tr}_F: J_U^k \rightarrow D^k \times U.$$

Здесь J_U^k рассматривается как открытое подмножество $\pi_k^{-1}(U)$ в J^k . Теперь выберем b -карту F на X со следующим свойством: функции f^i карты F осуществляют диффеоморфизм, обозначаемый через f , окрестности U на окрестность в $\mathbb{R}^n$. Через E^1 обозначим открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1 и потребуем, чтобы $f(U) = E^1$. Обозначим через ν_i проекцию прямого произведения $D^k \times U$ на i -й сомножитель и положим $\text{tr}_F(a) = t$, $w = \nu_1(t) \in D^k$. Ясно, что $b = \nu_2(t)$, $t = (w, b)$, $f(b) = \mathbf{0}$. Обозначим через $O(a)$ и $O_1(a)$ орбиты точки a в J^k относительно действия групп $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}_b$ соответственно. Орбита $O_1(a)$ лежит в слое J_b^k

расслоения J^k над точкой b . Обозначим $\pi_k^{-1}(U) \cap O(a) = O_U(a)$. Положим $\text{tr}_F(O_U(a)) = O(a)^*$, $\text{tr}_F(O_1(a)) = O_1(a)^*$. Для любого вектора $r \in E^1$ легко построить сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $E^1 \rightarrow E^1$, который является тождественным отображением в окрестности границы E^1 и сдвигом на r в окрестности точки 0 . Построенный диффеоморфизм индуцирует с помощью отображения f^{-1} диффеоморфизм U , который продолжается на X . Отсюда легко видеть, что:

- 1) $O(a)^* = O_1(a)^* \times U$, поэтому $O_U(a)$ – тривиальное расслоение над U ;
- 2) орбита $O(a)$ – локально тривиальное расслоение над X ;
- 3) действие группы $\mathcal{V}_b$ на слой J_b^k при тривиализации tr_F переходит в действие α_k группы $G = G^{q+k}(n)^0$ на k -продолжении D^k типового слоя D ;
- 4) $\mathcal{V}$ -регулярность точки $a \in J^k$ эквивалентна α_k -регулярности точки w , и для $\mathcal{V}$ -регулярной точки a имеем $\text{rk}(a) = \text{rk}(w)$, $\text{cog}(a) = \text{cog}(w)$, следовательно, α_k -регулярность точки w не зависит от выбора тривиализации, хотя сама точка w зависит (далее $\mathcal{V}$ -регулярность и α_k -регулярность будут часто называться регулярностью);

5) если R' – множество α_k -регулярных точек D^k , то множество R_U $\mathcal{V}$ -регулярных точек на J_U^k имеет вид $R_U = \text{tr}_F^{-1}(R' \times U)$; поскольку R' открыто и всюду плотно в D^k , то R_U открыто и всюду плотно в J_U^k , значит, множество всех $\mathcal{V}$ -регулярных точек многообразия J^k открыто и всюду плотно в нем.

Теперь предположим, что точка a $\mathcal{V}$ -регулярна. Отсюда легко видеть, что:

1') отображение tr_F индуцирует изоморфизм i^* кольца $\mathcal{V}$ -инвариантов $I_a(J^k; \mathcal{V})$ с подкольцом кольца $O_t(D^k \times U)$, обозначаемым через I_t , элемент из I_t задается ростком в точке t функции $S(y, x)$, где $y \in D^k$, $x \in X$, постоянной на орбитах группы $\mathcal{V}_0$, но легко видеть, что S зависит только от точки $y \in D^k$, т.е. на самом деле $S = S(y)$, поэтому S определяется своим ограничением s на слой D^k ; функция s определена в подходящей окрестности T точки $w \in D^k$ и постоянна на связных компонентах пересечения T с орбитами группы G на этом многообразии, поэтому ясно, что отображение $S \rightarrow s$ определяет изоморфизм $i^*: I_a(J^k; \mathcal{V}) \rightarrow I_t \approx I_w(D^k; \alpha_k)$ кольца дифференциальных инвариантов в точке a и кольца α_k -инвариантов для действия группы G на D^k в точке w ;

2') если имеется $(a; d; \mathcal{V})$ -набор $F = (F^i)$ (см. п. 2.5), $i^*(F^i) = S^i$ и s^i – ограничения S^i на слой D^k , то ростки s^i являются α_k -инвариантами в точке w ; если обозначим через s состоящий из них $(w; d; \alpha_k)$ -набор, то $\text{rk}_F(a) = \text{rk}_s(w)$, поэтому набор F тогда и только тогда будет функционально независимым (полным) в точке t , когда будет функционально независимым (полным) в точке w набор s ;

3') если в начале настоящего пункта выбрать другую b -карту H на X , то $\text{tr}_H(w) = (w_H, b)$ определяет другую точку w_H на D^k , тогда $w_H = gw$, где $g \in G$ – элемент, определенный $(k+q)$ -струей функции перехода от F к H в точке b ; множество всех элементов w_H для всевозможных b -карт H представляет собой орбиту $Gw = O_1(a)^*$ действия α_k группы G на многообразии D^k , эта орбита не зависит от выбора F и зависит только от точки a ; при любом выборе F тривиализация tr_F переводит $O_1(a)$ в $O_1(a)^*$, таким образом, имеется естественное взаимно однозначное соответствие между множеством M орбит действия α_k группы G на многообразии D^k и множеством M_b орбит группы $\mathcal{V}_b$

на слое J_b^k расслоения J^k над любой точкой $b \in X$; соответствие $M \rightarrow M_b$ далее мы будем обозначать λ_b , более того, если X связно, то, сопоставив каждой орбите из множества MJ всех орбит группы $\mathcal{V}$ на многообразии J^k ее ограничение на слой J_b^k , мы получим биекцию MJ на M_b над любой точкой $b \in X$.

Итак, для описания дифференциальных инвариантов в регулярных точках многообразия $J_X^k(D)$ согласно сказанному выше достаточно описать α_k -инварианты в регулярных точках многообразия D^k . Эту задачу мы и рассмотрим.

3.4. Пусть F – произвольная карта на X , содержащая точку b . Сохраним обозначения, введенные в начале п. 3.3. Многообразие D^k допускает каноническое разложение в прямое произведение:

$$D^k = D \times D_1 \times \cdots \times D_k. \quad (1)$$

Соответствующее разложение элемента $d \in D^k$ записывается в виде $d = (d_0, d_1, \dots, d_k)$. Разложение (1) отвечает разложению струи $f: \mathbb{R}^n \rightarrow D$ на однородные слагаемые. Это разложение совместимо с проекциями $\mu(k, s)$, т. е. $\mu(k, s)(d) = (d_0, d_1, \dots, d_s)$. Пространства D_s есть линейные пространства размерности $m_{C_{n+s-1}^s}$.

Рассмотрим проекцию $\mu_k: D^k \rightarrow D$ и обозначим $\mu_k(w_F) = w_F^0$. Выберем какую-нибудь карту $Q = (N, y^c)$, $1 \leq c \leq m$, на D такую, что $N \ni w_F^0$. Тогда прообраз $\mu_k^{-1}(N) = N^k$ окрестности N представляется в виде прямого произведения:

$$N^k = N \times D_1 \times \cdots \times D_k. \quad (2)$$

На окрестности N^k возникает система координат (y) , связанная с этим разложением:

$$(y) = (y^c, y_{j_1}^c, \dots, y_{j_1, \dots, j_k}^c), \quad 1 \leq c \leq m, \quad 1 \leq j_s \leq n, \quad 1 \leq s \leq k.$$

При $s > 0$ координаты $y_{j_1, \dots, j_s}^c$ являются глобальными координатами на D_s .

Обозначим $N^k(F) = \text{tr}_F^{-1}(N^k \times U) \subset J^k$. Координаты f^i карты F на X и координаты (y) на N^k посредством тривиализации tr_F порождают в $N^k(F)$ систему координат $\pi_k^*(f^i)$, (y_F) , где

$$(y_F) = (y_F^c, y_{F j_1}^c, \dots, y_{F j_1, \dots, j_k}^c), \quad 1 \leq c \leq m, \quad 1 \leq j_s \leq n, \quad 1 \leq s \leq k.$$

Мы обозначили $y_{F j_1, \dots, j_s}^c = y_{j_1, \dots, j_s}^c \text{tr}_F$. Здесь индекс F указывает на зависимость от выбора карты F ; если эта карта фиксирована или зависимость от нее несущественна, этот индекс не будет записываться. Чтобы не загромождать обозначения, вместо $\pi_k^*(f^i)$ будем записывать f^i . Припишем координатам (y_F^c) вес 0 и символически обозначим $y_{F 0} = (y_F^c)$. Координате $y_{F j_1, \dots, j_s}^c$ приписывается вес s , и совокупность всех координат веса s символически обозначается $y_{F s} = (y_{F j_1, \dots, j_s}^c)$. Будем символически записывать $(y_F) = (y_{F 0}, \dots, y_{F k})$. Для координат (y) на N^k понятие веса и символическая запись определяются аналогично. Через $Q^k(F)$ обозначим карту на J^k , состоящую из окрестности $N^k(F)$ и системы координат (f^i) , (y_F) в ней, через Q^k – карту на Y^k , состоящую из окрестности N^k и системы координат (y) в ней.

3.5. При $k = 0$ вместо N^0 , Q^0 , $Q^0(F)$, $N^0(F)$ пишем N , Q , $Q(F)$, $N(F) = (N, F)$. Для любой точки $a \in J^k$ ее координаты в карте $Q^k(F)$ будут обозначаться $(a_{-1}^i, a^c, a_{j_1}^c, \dots, a_{j_1, \dots, j_k}^c)$ и будет использоваться запись $a = (a_{-1}^i, a^c, a_{j_1}^c, \dots, a_{j_1, \dots, j_k}^c)$. Здесь обозначено $f^i(\pi_k(a)) = a_{-1}^i$. Также символически будем записывать $a = (a_{-1}, a_0, \dots, a_k)$. Аналогичный смысл для точки $d \in N^k$ имеет запись $d = (d^c, d_{j_1}^c, \dots, d_{j_1, \dots, j_k}^c) = (d_0, d_1, \dots, d_k)$.

3.6. Напомним, что элементы дифференциальной группы $G = G^{q+k}(n)^0$ есть $(k+q)$ -струи в точке $\mathbf{0}$ сохраняющих ориентацию пунктированных диффеоморфизмов $(\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$. Произведение $\varphi_{k+q}(\mathbf{0})\psi_{k+q}(\mathbf{0})$ струй отображений φ и ψ есть по определению струя $\theta_{k+q}(\mathbf{0})$ отображения $\theta = \varphi(\psi)$. Пространство группы G разлагается в прямое произведение многообразий

$$G^{k+q}(n)^0 = G_1 \times \dots \times G_{k+q}, \quad (3)$$

отвечающих разложению струи на однородные слагаемые. На G_1 координатами является линейная часть струи, поэтому G_1 отождествляется с GL_n^0 . Отметим, что при $s > 1$ G_s не являются подгруппами в G , но $G_s \times \dots \times G_{k+q}$ – нормальные подгруппы в G для любого s . Обозначим $N = N(k+q) = G_2 \times \dots \times G_{k+q}$ (далее мы увидим, что N нильпотентна). Группа G допускает полупрямое разложение:

$$G = G^{q+k}(n)^0 = \mathrm{GL}_n^0 \ltimes N. \quad (4)$$

Это разложение называется *алгебраическим разложением Леви*. Настоящее разложение Леви на полупростой сомножитель S и разрешимый радикал R получается следующим образом. Пусть

$$\mathrm{GL}_n^0 = \mathrm{SL}_n \times Z^0 \quad (5)$$

– стандартное разложение GL_n^0 в прямое произведение группы SL_n и связной компоненты центра Z^0 (состоящей из скалярных матриц с положительными элементами). Тогда разрешимый радикал $R = R(k+q)$ группы G есть полупрямое произведение подгруппы Z^0 группы $\mathrm{GL}_n^0 = G_1$ и нормального делителя N :

$$R = Z^0 \ltimes N. \quad (6)$$

Полупростой сомножитель S разложения Леви группы G есть подгруппа SL_n группы G_1 . Итак, разложение Леви группы G имеет вид

$$G = G^{q+k}(n)^0 = \mathrm{SL}_n \ltimes R. \quad (7)$$

На G_s координатами являются коэффициенты Тейлора $g_{j_1, \dots, j_s}^i$ степени s , что отождествляет G_s с линейным пространством размерности $\lambda(i) = nC_{n+s-1}^s$. Полученная координатная система на G символически обозначается $(g_1, \dots, g_{k+q})$. Соответствующая координатная система на алгебре Ли $\mathcal{G}(k+q) = \mathcal{G}$ группы $G^{q+k}(n)^0$ будет обозначаться $(b_{j_1}^i, \dots, b_{j_1, \dots, j_{q+k}}^i)$ или символически $(b_1, \dots, b_{k+q})$. Разложение (3) индуцирует следующее разложение:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \dots \times \mathcal{G}_{k+q} \quad (8)$$

($\mathcal{G}_i$ – касательное пространство в единице к многообразию G_i). При $i > 1$ $\mathcal{G}_i$ не являются подалгебрами, но $\mathcal{G}_i \times \cdots \times \mathcal{G}_{k+q}$ являются нормальными подалгебрами в $\mathcal{G}$. Обозначим $\mathcal{N} = \mathcal{N}(k+q) = \mathcal{G}_2 \times \cdots \times \mathcal{G}_{k+q}$. Положим $\mathcal{Z} = \text{Lie}(Z^0)$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(k+q) = \text{Lie}(R)$. Из сказанного ясно, что $\mathcal{G}_1 = GL_n$ и имеют место разложения алгебр Ли, соответствующие разложению групп:

$$GL_n = SL_n \times \mathcal{Z}, \quad (9)$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{Z} \ltimes \mathcal{N}, \quad (10)$$

и имеет место разложение Леви

$$\mathcal{G} = SL_n \ltimes \mathcal{R}, \quad (11)$$

отвечающее разложению (7), а также алгебраическое разложение Леви, отвечающее разложению (4):

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(k+q) = GL_n \ltimes \mathcal{N}. \quad (12)$$

Структура группы $G^s(n)^0$ и ее алгебры Ли $\mathcal{G}(s)$ будет уточнена далее, а сейчас мы вычислим размерности группы $G^k(n)$ и пространства D^k .

ЛЕММА 2. Если $\dim D = m$, $\dim X = n$, то $\dim G^k(n) = n(C_{n+k}^k - 1)$, $\dim D^k = mC_{n+k}^k$.

Поскольку размерности G_s и D_s известны (см. выше), доказательство немедленно следует из (1), (3) и треугольника Паскаля (см. п. 3.1).

ЛЕММА 3. Для любых фиксированных q и n отношение C_{n+k}^k к C_{n+k+q}^{k+q} стремится к 1 при $k \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\frac{C_{n+k}^k}{C_{n+k+q}^{k+q}} = \frac{(n+k)!(k+q)!n!}{n!k!(n+k+q)!} = \frac{(k+1)\dots(k+n)}{(q+k+1)\dots(q+k+n)}.$$

Мы видим, что каждое из n отношений $(k+i)/(q+k+i)$ стремится к 1 при $k \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Замечание 1') п. 3.3 сводит рассмотрение вопроса о величине $t(k)$ к аналогичному вопросу для действия α_k . В окрестности регулярной точки $w \in D^k$ количество $t(k)$ функционально независимых α_k -инвариантов оценивается следующим образом. В окрестности w все орбиты имеют одинаковую размерность d (всегда $d \leq \dim G^{k+q}(n)$). Инварианты определяются ростками функций, постоянными на орбитах. Если взять подмногообразие S , проходящее через w и трансверсальное в окрестности w к орбитам, то инварианты определяются ограничением на S , откуда получим

$$t(k) \geq \dim D^k - \dim G^{k+q}(n).$$

Обозначим $C_{n+k+q}^{k+q}/C_{n+k}^k = p(k)$. Тогда

$$\begin{aligned} t(k) &\geq mC_{n+k}^k - n(C_{n+k+q}^{k+q} - 1) \geq mC_{n+k}^k - nC_{n+k}^k p(k) \\ &= C_{n+k}^k(m - np(k)) = (m - n)C_{n+k}^k + nC_{n+k}^k(1 - p(k)). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

3.7. Теорема 1 допускает обобщение на случай, когда рассматриваются скалярные инварианты не одной, а нескольких геометрических величин. Точнее, предположим, что дифференциальная группа $G = G^q(n)^0$ действует на нескольких многообразиях $D_1, \dots, D_r$. Зафиксируем набор натуральных чисел $K = (k(1), \dots, k(r))$ и рассмотрим расслоенное произведение $J_K = J^{k(1)}(D_1) \times \dots \times J^{k(r)}(D_r)$ над X . Группа $\mathcal{V}$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов X действует на все сомножители этого расслоенного произведения, и тем самым определено ее диагональное действие на J_K . Дифференциальные инварианты и $\mathcal{V}$ -регулярные точки для этого случая определяются так же, как в определениях 3 и 4. Величину $k = \max(k(j), 1 \leq j \leq r)$ назовем *степенью дифференциального инварианта*. Обозначим $m_j = \dim D_j$, $s = \dim Z$, $m = \sum_{j=1}^r m_j$.

ТЕОРЕМА 2. Для любой $\mathcal{V}$ -регулярной точки $a \in J_K(D)$ существует не менее

$$t(K) = \sum_{j=1}^r m_j C_{n+k(j)}^{k(j)} - n(C_{n+k+q}^{k+q} - 1)$$

функционально независимых дифференциальных инвариантов степени k , определенных в точке a .

Отсюда, в частности, следует, что для набора $K = (k, k, \dots, k)$ имеем

$$t(K) = (m - n)C_{n+k}^k - \varepsilon(K)C_{n+k}^k,$$

где $\varepsilon(K)$ стремится к нулю при росте k , $t(K)$ стремится к бесконечности при росте k . Величина $\varepsilon(K)$ зависит только от m, n, q, k для указанного набора K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многообразие $D_K = D^{k(1)} \times \dots \times D^{k(r)}$, полученное как прямое произведение $k(j)$ -продолжений многообразий D_j . Выберем на X какую-нибудь систему координат (уменьшая X при необходимости). Тогда возникнет тривиализация $J_K \approx D_K \times X$. Поскольку $\dim D^{k(j)} = m_j C_{n+k(j)}^{k(j)}$, доказательство, аналогичное доказательству теоремы 1, проводится подсчетом размерностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $G = G^k(n)^0$. Назовем G -многообразие D *неспециальным* (соответственно, *специальным*), если $\dim D > n$ (соответственно, $\dim D \leq n$). Расслоение геометрических величин $P = P_X(D)$, размерность типового слоя которого $m = \dim D$ больше размерности базового многообразия $n = \dim X$, называется *неспециальным*. При $m \leq n$ расслоение P называется *специальным*.

§ 4. Подгруппы малой коразмерности в $G^q(n)$

4.1. В настоящем параграфе перечислим все связные подгруппы Ли коразмерности не более n в группе GL_n^0 . Как отмечалось в § 1, мы разбираем только случай $n > 2$.

Обозначим через σ внешний автоморфизм группы GL_n^0 , который преобразует матрицы по формуле $A \rightarrow (A^T)^{-1}$. Считаем, что в $\mathbb{R}^n$ выбран стандартный

базис e_i , а GL_n^0 действует на $\mathbb{R}^n$ с помощью представления ST_n . Нам понадобятся следующие четыре связные подгруппы в SL_n :

- 1) подгруппа T_1 , состоящая из всех матриц, умножающих вектор e_1 на положительное число (зависящее от матрицы);
- 2) подгруппа $T_2 = \sigma(T_1)$, которая состоит из всех матриц, умножающих форму x_1 на положительное число (зависящее от матрицы); коразмерности подгрупп T_1 и T_2 в SL_n равны $n - 1$;
- 3) подгруппа T_3 , состоящая из всех матриц, сохраняющих вектор e_1 ;
- 4) подгруппа $T_4 = \sigma(T_3)$, которая состоит из всех матриц, сохраняющих форму x_1 ; коразмерности подгрупп T_3 и T_4 в SL_n равны n .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Каждая из подгрупп T_i содержит подгруппу SL_{n-1} , сохраняющую вектор e_1 и дополнительное подпространство, натянутое на векторы $e_2, \dots, e_n$. Хорошо известно, что при $n > 2$ подгруппы T_i попарно не сопряжены. При $n = 2$ подгруппа T_1 сопряжена T_2 , а T_3 сопряжена T_4 . Ясно, что подгруппы T_i связны, замкнуты, T_3 нормальна в T_1 , а T_4 нормальна в T_2 .

Нам понадобится следующий факт, доказательство которого мы приведем в § 6.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Любая собственная связная подгруппа Ли H группы SL_n коразмерности не более n в SL_n подходящим внутренним автоморфизмом сопряжена либо одной из подгрупп T_i , $1 \leq i \leq 4$, либо при $n = 4$ – подгруппе P_{24} , состоящей из всех матриц, оставляющих инвариантной плоскость с образующими векторами e_1, e_2 , либо при $n = 3$ – борелевской подгруппе B_3 (верхних или нижних треугольных матриц) этой группы.

Дальше считаем, что $n > 2$. Обозначим $\mathrm{Lie}(T_i) = T_i$.

ЛЕММА 4. При $n > 3$ группа T_3 является единственной подгруппой Ли в T_1 коразмерности 1. При $n = 3$ в T_1 с точностью до сопряженности имеется еще одна (ненормальная) подгруппа B_3 коразмерности 1, состоящая из верхних треугольных матриц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство в терминах алгебр Ли. Матрицы из T_1 имеют вид блочных матриц $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где λ – число, a – строка длины n , B – квадратная матрица порядка $n - 1$, $\mathrm{sp} B + \lambda = 0$. Рассмотрим разложение Леви $T_1 = \mathrm{SL}_{n-1} \ltimes \mathcal{R}$, где сомножитель SL_{n-1} определен условиями $a = 0$, $\lambda = 0$, а идеал $\mathcal{R}$ порожден идеалом $\mathcal{R}'$, заданным условиями $\lambda = 0$, $B = 0$, и одномерной подалгеброй, порожденной матрицей $\mathrm{diag}(1 - n, 1, \dots, 1)$. Пусть $\mathcal{H}$ – подалгебра коразмерности 1 в T_1 , $\mathcal{H} = \mathcal{S} \ltimes \mathcal{B}$ – ее разложение Леви. Согласно теореме Мальцева [12, с. 297] подалгебра $\mathcal{S}$ сопряжена элементом группы T_1 подалгебре из SL_{n-1} , поэтому мы будем считать, что $\mathcal{S} \subset \mathrm{SL}_{n-1}$. Рассмотрим проекцию θ подалгебры T_1 на свою подалгебру SL_n , индуцированную разложением Леви. Обозначим $\theta(\mathcal{H}) = \mathcal{H}'$, $\theta(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$. Ясно, что $\mathcal{H}' = \mathcal{S} \ltimes \mathcal{B}'$ – разложение Леви для $\mathcal{H}'$.

Случай 1. Пусть $\mathcal{H}' = \mathrm{SL}_{n-1}$. Значит, $\mathcal{S} = \mathrm{SL}_{n-1} \subset \mathcal{H}$. Подалгебра $\mathcal{H} \cap \mathcal{R}'$ имеет коразмерность не более 1 и поэтому содержит ненулевой вектор h . Поскольку действие группы SL_{n-1} на $\mathcal{R}'$ сопряжениями изоморфно действию

ST_{n-1} , т. е. обычному действию SL_{n-1} на $\mathbb{R}_{n-1}$, ясно, что сопряжениями с помощью элементов подгруппы SL_{n-1} из любого ненулевого вектора h можно получить всю подалгебру $\mathcal{R}'$. Значит, $\mathcal{H}$ содержит подалгебру $SL_{n-1} \ltimes \mathcal{R}' = \mathcal{T}_3$.

Случай 2. Пусть $\mathcal{H}'$ имеет в SL_{n-1} коразмерность 1. Этот случай возможен только при $n = 3$, $\mathcal{H}'$ сопряжена элементом группы SL_{n-1} подалгебре верхних треугольных матриц и $\mathcal{H} = \theta^{-1}(\mathcal{H}')$ сопряжена борелевской подалгебре $\mathcal{B}_3$ верхних треугольных матриц. Лемма доказана.

4.2. Пусть $GL_n^0 = SL_n \times Z^0$ и $GL_n = SL_n + \mathcal{Z}$ – разложения (5) и (9). Обозначим через ν_1 и ν_2 проекции GL_n^0 на SL_n и Z^0 соответственно, так же будем обозначать и проекции GL_n на SL_n и $\mathcal{Z}$. Пусть H – связная собственная подгруппа Ли коразмерности не более n в GL_n^0 , $\mathcal{H}$ – ее алгебра Ли. Рассмотрим $\mathcal{H}_1 = \nu_1(\mathcal{H}) \subset SL_n$. Могут быть три случая.

1°. Ядро проекции $\nu_1: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_1$ содержит $\mathcal{Z}$. Тогда коразмерность подалгебры $\mathcal{H}_1$ в SL_n равна коразмерности $\mathcal{H}$ в GL_n .

2°. Проекция $\nu_1: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_1$ – изоморфизм, причем $\mathcal{H}$ содержится в SL_n .

3°. Проекция $\nu_1: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_1$ – изоморфизм, причем $\mathcal{H}$ не содержится в SL_n .

Тогда обозначим $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \cap SL_n$. Ясно, что $\mathcal{H}_2$ – нормальная подалгебра в $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}$ коразмерности 1, отвечающая подгруппе $H_2 = H \cap SL_n$.

В случаях 2° и 3° $\text{codim}(\mathcal{H}, GL_n) = \text{codim}(\mathcal{H}_1, SL_n) + 1$.

В случае 1° подгруппа H либо сопряжена подгруппе $T_i \times Z^0$ для подходящего i , $1 \leq i \leq 4$, либо при $n = 4$ – подгруппе $P_{24} \times Z^0$, либо при $n = 3$ – подгруппе $B_3 \times Z^0$. Следовательно, подгруппа H замкнута.

В случае 2° либо $H = SL_n$, либо H сопряжена подгруппе T_1 или T_2 . Следовательно, подгруппа H замкнута.

В случае 3° ясно, что $\mathcal{H}_1$ не может совпадать с SL_n , так как тогда подалгебра $\mathcal{H}_1$, изоморфная SL_n , имела бы нетривиальный гомоморфизм на одномерную подалгебру $\mathcal{Z}$, что невозможно. Тогда $\text{codim}(\mathcal{H}, GL_n) = n$ (случай $\text{codim}(\mathcal{H}, GL_n) \leq n - 1$ невозможен, так как тогда $\text{codim}(\mathcal{H}_1, SL_n) \leq n - 2$, что противоречит п. 4.1). Из того же п. 4.1 следует, что после сопряжения подходящим внутренним автоморфизмом группы SL_n можно считать, что:

- (i) либо $H_1 = T_1$,
- (ii) либо $H_1 = T_2$.

Отсюда легко вывести замкнутость подгруппы H (это мы доказывать не будем).

4.3. Разберем случай (i). Поскольку H_2 нормальна в H_1 , по лемме 4 в этом случае имеем $H_2 = \mathcal{T}_3$, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{T}_1$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{T}_3$. Так как $\text{codim}(H, GL_n) = \text{codim}(\mathcal{T}_3, SL_n) = n$, то вложение $SL_n \rightarrow GL_n^0$ индуцирует диффеоморфизм $i: \mathbb{R}^n - \mathbf{0} = SL_n / \mathcal{T}_3 \approx GL_n^0 / H$ однородных пространств, совместимый с действием SL_n (на $\mathbb{R}^n$ подразумевается стандартное действие ST_n). Выясним, в какое действие на $\mathbb{R}^n$ переходит при этом действие Z^0 на GL_n^0 / H . Для этого рассмотрим в группе T_1 однопараметрическую подгруппу t , состоящую из элементов $t(s) = \text{diag}(s^{-1}, s, 1, \dots, 1)$, где $s \in \mathbb{R}^0$. Так как $\nu_1: H \rightarrow H_1$ – изоморфизм, в H найдется однопараметрическая подгруппа h такая, что ν_1 – изоморфизм h на t . Поскольку t не лежит в $\mathcal{T}_3$, то h не лежит в SL_n , и поэтому ν_2 изоморфно

отображает h на Z^0 . Таким образом, отображение $\nu_2\nu_1^{-1}: t \rightarrow Z^0$ есть изоморфизм, и ясно, что он задается формулой $\text{diag}(s^{-1}, s, 1, \dots, 1) \rightarrow \text{sk}_n(s^a)$ для подходящего вещественного числа $a = a(h) \neq 0$.

Рассмотрим такой элемент $h(s)$ группы h , что $\nu_1[h(s)] = t(s)$, и обозначим $\nu_2[h(s)] = z(s) = \text{sk}_n(s^a)$. Тогда имеем $h(s) = t(s)z(s)$. Произвольный вектор $x \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0}$ отвечает смежному классу gT_3 , представитель которого есть матрица $g \in \text{SL}_n$, определенная условием $ge_1 = x$. Смежному классу gT_3 при соответствии i отвечает смежный класс gH , который под действием $z(s)$ переходит в

$$z(s)gH = gz(s)H = gt^{-1}(s)h(s)H = gt^{-1}(s)H.$$

Поскольку $gt^{-1}(s) \in \text{SL}_n$, то $z(s)gH$ есть образ при диффеоморфизме i смежного класса $gt^{-1}(s)T_3$, отвечающего вектору $sx \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0}$. Итак, матрица $\text{sk}_n(s)$ действует на вектор x умножением на s^d , где $d = 1/a$. Отметим, что построенное соответствие $h \rightarrow d$ между однопараметрическими подгруппами h в T_1Z^0 со свойством $\nu_1h = t$ и вещественными числами $d \neq 0$ взаимно однозначно. Ясно также, что $H = hT_3$. Поэтому каждому вещественному числу $d \neq 0$ можно сопоставить соответствующую подгруппу h_d и $H_{1d} = h_dT_3$. Положим еще $H_{10} = T_3 \times Z^0$. Эта подгруппа уже встречалась в случае 1° п. 4.2.

Обозначим через $\mathbb{R}_d^n$ однородное пространство GL_n^0/H_{1d} . При разных d пространства $\mathbb{R}_d^n$ попарно неэквивалентны как GL_n^0 -пространства. (Эквивалентность $r: D_1 \rightarrow D_2$ двух GL_n^0 -пространств понимается как диффеоморфизм, перестановочный с действием GL_n^0 .) Действительно, рассмотрим эквивалентность $r: \mathbb{R}_d^n \rightarrow \mathbb{R}_b^n$ как отображение SL_n -пространств, а $\mathbb{R}_d^n$ отождествим с $\mathbb{R}^n - \mathbf{0}$ с помощью введенного выше диффеоморфизма i . Тогда r переводит $\mathbb{R}^n = (\text{SL}_n/T_3) \cup \mathbf{0}$ в себя, если доопределить $r(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Всякое G -отображение в себя однородного пространства G/H переводит смежный класс gH в смежный класс gnH , где n – фиксированный элемент нормализатора подгруппы H . В нашем случае вектор $x \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0} = \text{SL}_n/T_3$ представляется матрицей g , а вектор $r(x)$ представляется матрицей gn . Так как координаты x равны элементам первого столбца матрицы g , а нормализатор T_3 (он равен T_1) состоит из матриц, все элементы первого столбца которых, кроме первого элемента, равны нулю, то вектор $r(x)$ есть просто произведение x на этот ненулевой элемент. Следовательно, r есть умножение на скаляр в $\mathbb{R}^n$. Ясно, что при $b \neq d$ это отображение не коммутирует с действием Z^0 . Итак, в случае (i) подгруппа H сопряжена одной из подгрупп вида H_{1d} (при $d \neq 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Действие GL_n^0 на $\mathbb{R}_d^n$ описано далее в § 5 (см. тип XII). Подгруппа H_{1d} есть стационарная подгруппа вектор-столбца $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ в этом действии.

4.4. Случай (ii) сводится к случаю (i) применением внешнего автоморфизма σ . При этом получаем, что подгруппа H сопряжена одной из подгрупп вида H_{2d} (при $d \neq 0$), где $H_{2d} = \sigma(H_{1d})$. В случае $d = 0$ получаем одну из подгрупп случая 1° из п. 4.2. Соответствующее действие GL_n^0 описано далее, в § 5. Подгруппа H_{2d} есть стационарная подгруппа вектор-строки $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ в этом действии.

Итак, мы получили следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. При $n > 2$ каждая связная подгруппа Ли коразмерности не более n в группе GL_n замкнута и сопряжена внутренним автоморфизмом одной и только одной из подгрупп Ли следующего списка:

- 1) группе GL_n^0 коразмерности 0;
- 2) группе SL_n коразмерности 1;
- 3) группе $H_1 = T_1 \times Z^0$ коразмерности $n - 1$;
- 4) группе $H_2 = T_2 \times Z^0$ коразмерности $n - 1$;
- 5) группе T_1 коразмерности n ;
- 6) группе T_2 коразмерности n ;
- 7) группе H_{1d} коразмерности n , d – любое вещественное число;
- 8) группе H_{2d} коразмерности n , d – любое вещественное число;
- 9) группе $P_{24} \times Z^0$ коразмерности 4, $n = 4$;
- 10) группе $B_3 \times Z^0$ коразмерности 3, $n = 3$.

(Напомним, что Z^0 есть связная компонента единицы центра группы GL_n , подгруппы T_i были введены в п. 4.1, а подгруппы H_{1d} и H_{2d} – в пп. 4.3 и 4.4 соответственно. Все коразмерности указаны относительно группы GL_n .)

4.5. Опишем все связные подгруппы коразмерности не более n в группах $G^q(n)$ при $q \geq 2$, $n > 2$.

ТЕОРЕМА 4. 1) При $n > 2$ в группе $G^2(n)$ имеются две несопряженные связные замкнутые подгруппы коразмерности n . Любая связная подгруппа коразмерности не более n либо сопряжена одной из этих подгрупп, либо является полным прообразом относительно естественной проекции $g(2, 1): G^2(n) \rightarrow G^1(n) = GL_n$ такой же подгруппы из GL_n (т. е. связной замкнутой подгруппы коразмерности не более n в GL_n).

2) Любая связная подгруппа коразмерности не более n в группе $G^q(n)$ при $q \geq 3$, $n > 2$ есть полный прообраз относительно проекции $g(q, 2): G^q(n) \rightarrow G^2(n)$ такой же подгруппы из $G^2(n)$.

Связные подгруппы коразмерности не более n в группе $G^1(n) = GL_n$ мы описали в теореме 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим представление ρ'_i группы GL_n на пространстве вещественных тензоров $T_i^{1'}$ с одним верхним и i нижними индексами, которое переводит тензор $t = (t_{j_1, \dots, j_i}^u)$ в тензор $\rho'_i(h)t = f = (f_{j_1, \dots, j_i}^u)$, определенный формулой

$$f_{j_1, \dots, j_i}^u = h_s^u t_{a_1, \dots, a_i}^s g_{j_1}^{a_1} g_{j_2}^{a_2} \dots g_{j_i}^{a_i}. \quad (13)$$

Здесь $g = (g_j^a)$, $h = (h_s^u)$, $gh = E$. Обозначим через G'_i подпространство пространства $T_i^{1'}$, состоящее из симметрических по нижним индексам тензоров. Ограничение представления ρ_i на G'_i будем обозначать через ρ'_i .

ЛЕММА 5. Представление ρ'_i разлагается в сумму двух неприводимых инвариантных подпространств:

$$G'_i = V_i^{1'} + V_i^{2'}. \quad (14)$$

Пространство $V_i^{1'}$ состоит из всех тензоров $(t_{j_1, \dots, j_i}^u)$, для которых свертка верхнего индекса с последним (а тогда и любым – вследствие симметричности по нижним индексам) нижним индексом дает нулевой тензор:

$$V_i^{1'} = \{(t_{j_1, \dots, j_i}^u) \mid (t_{j_1, \dots, j_{i-1}, u}^u) = 0\}.$$

Подпространство $V_i^{2'}$ есть однозначно определенное инвариантное дополнение к $V_i^{1'}$. Существование $V_i^{2'}$ следует из редуцируемости GL_n , а единственность – из неприводимости и неэквивалентности $V_i^{1'}$ и $V_i^{2'}$. Ограничение ρ'_i на $V_i^{2'}$ изоморфно представлению GL_n на пространстве симметрических тензоров $T_{i-1} = (t_{j_1, \dots, j_{i-1}}^u)$ с $i-1$ нижним индексом, и имеется отображение проекции $\lambda'_i: G'_i \rightarrow T_{i-1}$, перестановочное с действием GL_n . Оно задается сверткой: если $t = (t_{j_1, \dots, j_i}^u)$, $g = \lambda'_i(t) = (g_{j_1, \dots, j_{i-1}})$, то $g_{j_1, \dots, j_{i-1}} = t_{j_1, \dots, j_{i-1}, u}^u$. Ядро отображения λ'_i равно $V_i^{1'}$, а на $V_i^{2'}$ отображение λ'_i есть изоморфизм на T_{i-1} . Размерность пространства $V_i^{2'}$ равна C_{n+i-2}^{i-1} . Размерность пространства $V_i^{1'}$ равна $nC_{n+i-1}^i - C_{n+i-2}^{i-1}$.

Лемма 5 остается верной, если вместо группы GL_n взять группу SL_n .

Доказательство леммы 5 не приводится, так как оно стандартно. Этот результат отмечен в работе [12, табл. 5, с. 312].

4.6. Рассмотрим разложение Леви группы $G = G^q(n)^0$ и ее алгебры $\mathcal{G}$, построенные в п. 3.6 (полагаем $k = 0$ в формулах (4)–(12)):

$$\begin{aligned} G &= \mathrm{GL}_n \ltimes N, & G &= \mathrm{SL}_n \ltimes R, & R &= R(q) = Z^0 \ltimes N, \\ \mathcal{G} &= \mathrm{GL}_n \ltimes \mathcal{N}, & \mathcal{G} &= \mathrm{SL}_n \ltimes \mathcal{R}, & \mathcal{R} &= \mathcal{R}(q) = \mathcal{Z} \ltimes \mathcal{N}, \\ N &= N(q) = G_2 \times \dots \times G_q, & \mathcal{N} &= \mathcal{N}(q) = \mathcal{G}_2 \times \dots \times \mathcal{G}_q. \end{aligned} \quad (15)$$

Из определения умножения в группе G вытекает, что элемент $h \in \mathrm{GL}_n^0$ представлен линейным отображением $h(x) = h_j^s x^j$ с постоянными коэффициентами h_j^s , а элемент $t = (t_{j_1, \dots, j_i}^u) \in G_i$ при сопряжении элементом h переходит в элемент $f = hth^{-1}$ с координатами $f_{j_1, \dots, j_i}^u$, заданными формулой (13). Это означает, что и многообразие G_i , и его касательное пространство в единице $\mathcal{G}_i$ инвариантны относительно сопряжения посредством GL_n^0 , и элемент $b = (b_{j_1, \dots, j_i}^u) \in \mathcal{G}_i$ под действием внутреннего автоморфизма $\mathrm{Ad}(h)$ переходит в элемент $d = d_{j_1, \dots, j_i}^u$, заданный аналогичной формулой

$$d_{j_1, \dots, j_i}^u = h_s^u b_{a_1, \dots, a_i}^s g_{j_1}^{a_1} g_{j_2}^{a_2} \dots g_{j_i}^{a_i}.$$

Значит, если мы сопоставим элементу $b \in \mathcal{G}_i$ набор его координат $b_{j_1, \dots, j_i}^u$ и рассмотрим тензор $b' \in G'_i$ с этими координатами, мы построим отождествление $\chi: \mathcal{G}_i \approx G'_i$, при котором действие ρ_i группы GL_n^0 на $\mathcal{G}_i$ внутренними автоморфизмами перейдет в действие ρ'_i на G'_i и возникнет разложение

$$\mathcal{G}_i = \mathcal{V}_i^1 + \mathcal{V}_i^2, \quad (16)$$

индуцированное разложением (14).

Обозначим $\lambda_i = \lambda'_i \chi$. Известно, что любой элемент $b \in \mathcal{G}_i$ может быть представлен ростком векторного поля $\mathcal{B}$ в окрестности начала координат $\mathbf{0}$ в $\mathbb{R}^n$

с условием $\mathcal{B}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Именно, элемент $b = (b_j^u, \dots, b_{j_1, \dots, j_i}^u)$ является касательным к однопараметрическому семейству ростков преобразований, заданному формулой

$$y^u(\varepsilon) = x^u + \varepsilon(b_j^u x^j + b_{j_1, j_2}^u x^{j_1} x^{j_2} + \dots + b_{j_1, \dots, j_q}^u x^{j_1} \dots x^{j_q}).$$

Здесь ε – параметр семейства преобразований и $dy/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ – росток векторного поля $\mathcal{B}$ в $\mathbf{0}$, отвечающего элементу b . Мы видим, что однородные элементы b_s отвечают росткам $\mathcal{B}_s$, задаваемым однородными многочленами степени s :

$$\mathcal{B}_s^u = b_{j_1, \dots, j_s}^u x^{j_1} \dots x^{j_s}.$$

При этом можно проверить, что скобка Ли в $\mathcal{G}$ переходит в коммутатор векторных полей. Отсюда ясно, что $[\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_i] \subseteq \mathcal{G}_{i+k-1}$ и $\mathcal{G}_i$ при $i \geq 2$, $k \geq 2$ таким образом образуют градуировку алгебры Ли $\mathcal{N} = \mathcal{G}_2 \times \dots \times \mathcal{G}_q$. Отсюда, кроме всего, следует нильпотентность алгебры $\mathcal{N}$.

Следующая лемма используется только в случае $i = 2$.

ЛЕММА 6. *При $i \geq 2$, $k \geq 2$ имеем $[\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_i] = \mathcal{G}_{i+k-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разложение (16) пространства $\mathcal{G}_{i+k-1}$ и обозначим для простоты $\mathcal{V}_{i+k-1}^1 = \mathcal{V}^1$, $\mathcal{V}_{i+k-1}^2 = \mathcal{V}^2$, $\mathcal{W} = [\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_i]$. Поскольку $\mathcal{W}$ инвариантно относительно $\text{Ad}(\text{GL}_n)$, достаточно доказать, что проекции $\mathcal{W}^1$ и $\mathcal{W}^2$ подпространства $\mathcal{W}$ на $\mathcal{V}^1$ и $\mathcal{V}^2$ ненулевые.

Вычислим коммутатор векторных полей $X_1 = (x^1)^i \frac{\partial}{\partial x^1}$ и $Y_1 = x^1 (x^2)^{k-1} \frac{\partial}{\partial x^1}$. По определению коммутатор векторных полей $X = \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ и $Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ имеет вид

$$Z = [X, Y] = \sum_{j,p} \left(\frac{\partial X^p}{\partial x^j} Y^j - \frac{\partial Y^p}{\partial x^j} X^j \right) \frac{\partial}{\partial x^p}.$$

Поэтому $Z_1 = [X_1, Y_1] = (i-1)(x^1)^i (x^2)^{k-1} \frac{\partial}{\partial x^1}$. Векторное поле Z_1 отвечает симметрическому по нижним индексам тензору $b = b_{j_1, \dots, j_{i+k-1}}^u \in \mathcal{G}_{i+k-1}$, заданному условием

$$b_{j_1, \dots, j_{i+k-1}}^1 = \frac{(i-1)! (k-1)!}{(i+k-1)!},$$

если среди индексов $j_1, \dots, j_{i+k-1}$ ровно i индексов равны 1, а остальные $k-1$ индексов равны 2, $b_{j_1, \dots, j_{i+k-1}}^u = 0$ в противном случае. Ясно, что при свертке $\lambda_{i+k-1}: \mathcal{G}_{i+k-1} \rightarrow T_{i+k-2}$ образ $\lambda_{i+k-1}(b)$ не равен нулю. Значит, $\mathcal{W}^2$ отлично от нуля.

Рассмотрим теперь $X_2 = (x^2)^i \frac{\partial}{\partial x^1}$ и $Y_2 = (x^2)^k \frac{\partial}{\partial x^2}$. Тогда $Z_2 = [X_2, Y_2] = i(x^2)^{i+k-1} \frac{\partial}{\partial x^1}$. Векторному полю Z_2 отвечает тензор $d = d_{j_1, \dots, j_{i+k-1}}^u \in \mathcal{G}_{i+k-1}$, заданный условием $d_{2, \dots, 2}^1 = i$, а все остальные компоненты d равны нулю. Ясно, что $\lambda_{i+k-1}(d) = 0$. Значит, d принадлежит $\mathcal{W}^1$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 4. Для доказательства утверждения 1) теоремы положим $G = G^2(n)^0$ и опишем умножение в этой группе в координатах $(g_j^u, g_{j_k}^u)$, введенных в п. 3.6. Элемент g , отвечающий 2-струе сохраняющего

ориентацию пунктированного диффеоморфизма $\psi: (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$, определяется набором коэффициентов Тейлора отображения $\psi = (\psi^u)$ до порядка 2:

$$y^u = \psi^u(x) = g_j^u x^j + g_{jk}^u x^j x^k + o(x^2).$$

В этой записи мы считаем, что ψ – отображение из пространства $\mathbb{R}_x^n$ стандартных переменных (x^u) в пространство $\mathbb{R}_y^n$ стандартных переменных (y^u) .

Пусть $\varphi: (\mathbb{R}_y^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}_z^n, \mathbf{0})$ – отображение из $\mathbb{R}_y^n$ в пространство стандартных переменных (z^u) :

$$z^u = \varphi^u(y) = h_j^u y^j + h_{jk}^u y^j y^k + o(y^2),$$

где $h \in G$ – отвечающий отображению φ элемент. Произведение $t = hg$ является по определению 2-струей отображения $\theta = \varphi(\psi)$ в точке $\mathbf{0}$. Имеем

$$\begin{aligned} z^u(x) &= h_s^u (g_j^s x^j + g_{jk}^s x^j x^k) + h_{sk}^u (g_j^s x^j) (g_r^k x^r) + o(x^2) \\ &= (h_s^u g_j^s) x^j + (h_s^u g_{jk}^s + h_{sr}^u g_j^s g_r^k) x^j x^k + o(x^2). \end{aligned}$$

Итак, $t = (t_j^u, t_{jk}^u)$, где

$$t_j^u = h_s^u g_j^s, \quad t_{jk}^u = h_s^u g_{jk}^s + h_{sr}^u g_j^s g_r^k. \quad (17)$$

Иногда элемент $h = (h_j^u, h_{jk}^u) \in G$ мы будем записывать также в виде $h = (H, h_{jk}^u)$, подразумевая под H невырожденную матрицу (h_j^u) .

Легко видеть, что подгруппы GL_n^0 и R алгебраического разложения Леви группы G отождествляются с множеством элементов вида $(H, 0)$ и (E, h_{jk}^u) соответственно. Мы будем записывать (h_{jk}^u) вместо (E, h_{jk}^u) и для $H = (h_j^u)$ вместо $(H, 0)$ записывать H или (h_j^u) . Нормальная подгруппа R и соответствующая ей подалгебра $\mathcal{R}$ абелевы. Поэтому экспоненциальное отображение $\exp$ осуществляет изоморфизм векторного пространства $\mathcal{R}$ и группы R . Ясно, что если $b = (b_{jk}^u) \in \mathcal{R}$, то $\exp(b) = h$ дает элемент $h = (h_{jk}^u)$, для которого $h_{jk}^u = b_{jk}^u$. Действие GL_n^0 на R с помощью сопряжения переходит в действие Ad на $\mathcal{R}$. Поэтому, положив в разложении (16) $\exp(\mathcal{V}_2^1) = V^1$, $\exp(\mathcal{V}_2^2) = V^2$, мы получим разложение группы R в сумму двух нормальных в G подгрупп V^1 и V^2 . Из леммы 5 следует, что $\dim V^1 = n^2(n+1)/2 - n$, $\dim V^2 = n$.

Обозначим через $\phi: G \rightarrow \mathrm{Af}_n$ естественную проекцию G на $\mathrm{Af}_n = G/V^1$. Группа Af_n имеет размерность $n^2 + n$ и является расширением векторного пространства $T_1 = R/V^1$ размерности n с помощью группы GL_n^0 . Каждый элемент $p \in \mathrm{Af}_n$ допускает однозначное представление в виде

$$p = Aa, \quad (18)$$

где $A \in \mathrm{GL}_n^0$, $a \in T_1$. Из формулы (17) для $H = (h_j^u) \in \mathrm{GL}_n^0$, $t = (t_{jk}^u) \in R$ получаем

$$H^{-1}tH = (f_p^u t_{sr}^p h_i^s h_k^r), \quad (19)$$

где $H^{-1} = (f_p^u)$. Для $t = (t_{jk}^u) \in R$ примем в качестве координат элемента $\phi(t)$ в T_1 функции $a_j = t_{ju}^u$. Тогда из (19) следует, что в этих координатах действие $H = (h_j^u) \in \mathrm{GL}_n^0$ на $a = (a_j) \in T_1$ задается формулой

$$H^{-1}aH = c = (c_j), \quad c_j = a_u h_j^u.$$

4.7. Введем координаты в Af_n следующим образом: для элемента $p \in \text{Af}_n$ построим разложение (18) и возьмем в качестве координат элемента p набор (A, a) . Здесь $A = (h_j^u)$ – невырожденная матрица, а элемент $a \in T_1$ будем понимать как вектор-строку длиной n , используя введенные выше координаты в T_1 . Будем отождествлять элементы группы Af_n с парами (A, a) указанного вида. Образ $\phi(h)$ элемента $h = (h_j^u, h_{jk}^u) \in G$ вычисляется следующим образом:

1) из (17) следует, что алгебраическое разложение Леви элемента h имеет вид $h = At$, где $A = (h_j^u) \in \text{GL}_n^0$, матрица $D = (d_j^u)$ обратна матрице A , $t = (t_{jk}^u) \in R$, $t_{jk}^u = d_s^u h_{jk}^s$;

2) элемент $\phi(h)$ отвечает набору (A, a) , где

$$a = (a_j) = t_{ju}^u = d_s^u h_{ju}^s. \quad (20)$$

Операция в группе Af_n имеет вид

$$(A_1, a_1)(A_2, a_2) = (A_1 A_2, a_1 A_2 + a_2).$$

Здесь и далее $a_1 A_2$ означает произведение строки на матрицу. Группа Af_n есть аффинная группа n -мерного векторного пространства.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{n*}$ и правое действие группы Af_n на нем, которое, если строка $t = (t_i)$ принадлежит $\mathbb{R}^{n*}$, а $p = (A, a) \in \text{Af}_n$, задано формулой

$$tp = tA + a. \quad (21)$$

Левое действие η' группы Af_n на $\mathbb{R}^{n*}$, отвечающее этому действию, получается заменой p на $p^{-1} = (A^{-1}, -aA^{-1})$ и задается формулой

$$pt = tp^{-1} = tA^{-1} - aA^{-1}. \quad (22)$$

Это действие индуцирует посредством проекции ϕ действие η группы G на $\mathbb{R}^{n*}$.

4.8. Стационарная подгруппа H'_1 любого вектора из $\mathbb{R}^{n*}$ при действии η' имеет в группе Af_n коразмерность n , и поэтому ее полный прообраз H_1 в G также имеет коразмерность n . Для любой гиперплоскости L размерности $n - 1$ в $\mathbb{R}^{n*}$ все преобразования из Af_n , оставляющие L инвариантной, образуют подгруппу H'_2 коразмерности n , поэтому ее полный прообраз H_2 в G также имеет коразмерность n в G .

Итак, для $q = 2$ мы нашли в $G = G^2(n)^0$ две связные замкнутые подгруппы H_1 и H_2 коразмерности n .

Пусть теперь $q \geq 2$ произвольно и H – связная подгруппа в $G = G^q(n)^0$, не содержащая G_q (см. п. 4.6), $\mathcal{H} = \text{Lie}(H)$ – ее подалгебра Ли, (15) – разложение Леви алгебры $\mathcal{G}$. Тогда:

1) пересечение $\mathcal{W} = \mathcal{H} \cap \mathcal{G}_q$ есть линейное подпространство коразмерности не более n в $\mathcal{G}_q$;

2) в разложении Леви $\mathcal{H} = \mathcal{S} \ltimes \mathcal{B}$ алгебры $\mathcal{H}$ согласно теореме Мальцева [12, с. 297] подалгебра $\mathcal{S}$ сопряжена элементом группы G подалгебре из SL_n , поэтому мы будем считать, что $\mathcal{S} \subset SL_n$.

Рассмотрим проекцию θ алгебры $\mathcal{G}$ на свою подалгебру GL_n вдоль $\mathcal{N}$, индуцированную алгебраическим разложением Леви (15). Обозначим $\theta(\mathcal{H}) = \mathcal{H}'$,

алгебры $\theta(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$. Ясно, что $\mathcal{H}' = \mathcal{S} \ltimes \mathcal{B}'$ – разложение Леви для $\mathcal{H}'$ и что коразмерность $\mathcal{H}'$ в GL_n не более n .

Согласно теореме 3 для $\mathcal{H}'$ имеются следующие случаи.

1. Пусть $\mathcal{H}' = SL_n$ или $\mathcal{H}' = GL_n$. Тогда $S = SL_n$ и внутренние автоморфизмы из SL_n оставляют $\mathcal{W}$ инвариантным. Согласно (16) $\mathcal{G}_q = \mathcal{V}_q^1 + \mathcal{V}_q^2$. Если $\mathcal{W} \neq 0$, то $\mathcal{W}$ по лемме 5 должно совпадать или с $\mathcal{V}_q^1$, или с $\mathcal{V}_q^2$. По той же лемме $\text{codim}(\mathcal{V}_q^1, \mathcal{G}_q) > n$, а $\text{codim}(\mathcal{V}_q^2, \mathcal{G}_q) \geq n$, причем равенство достигается только при $q = 2$. Поэтому этот случай может осуществиться только при $q = 2$, $S = SL_n$, $\mathcal{W} = \mathcal{V}_q^2$. В этом случае H сопряжена подгруппе H_1 .

2. Пусть $\mathcal{H}' \neq SL_n$ и $\mathcal{H}' \neq GL_n$. Тогда из списка теоремы 3 вытекает, что величина $\text{codim}(\mathcal{H}', GL_n)$ равна n или $n - 1$. Поскольку мы предположили, что $\mathcal{G}_q \neq \mathcal{W}$, отсюда следует, что $\text{codim}(\mathcal{H}', GL_n) = n - 1$ и $\text{codim}(\mathcal{W}, \mathcal{G}_q) = \text{codim}(\mathcal{W}, \mathcal{N}) = 1$. Поэтому из списка теоремы 3 вытекает, что после подходящего сопряжения группы H элементом из GL_n^0 либо $H' = T_1 \times Z^0$, либо $H' = T_2 \times Z^0$. И в том, и в другом случаях S содержит подгруппу SL_{n-1} , оставляющую в представлении ST_n координату x^1 неизменной и преобразующую координаты $x^2, \dots, x^n$ между собой.

Запишем соответствующее разложение $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 + \mathbb{R}^{n-1}$ пространства $\mathbb{R}^n$ на инвариантные относительно указанной подгруппы SL_{n-1} подпространства.

Подгруппа $T = H \cap SL_n$ содержится в $T_i = H' \cap SL_n$, $i = 1, 2$. Поскольку $\text{codim}(T, SL_n) \leq n$, ясно, что $\text{codim}(T, T_i) \leq 1$. Из доказательства леммы 4 следует, что при $n > 3$ либо T содержит T_3 (при $i = 1$), либо T содержит T_4 (при $i = 2$). При $n = 3$, помимо упомянутой возможности, после подходящего сопряжения элементом из подгруппы $SL_2 \subseteq S \subseteq H$ либо T содержит группу верхних треугольных матриц (при $i = 1$), либо T содержит группу нижних треугольных матриц (при $i = 2$). При любом n в случае $i = 1$ подгруппа T содержит элемент s_1 , а в случае $i = 2$ подгруппа T содержит элемент s_2 :

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-2} \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Это мы используем далее.

1. Разберем сначала случай $q = 2$. В этом случае $\mathcal{N} = \mathcal{G}_2$. Поскольку представление ρ_2 группы GL_n на $\mathcal{G}_2$ равно $\text{Sym}^2[ST_n^*] \otimes ST_n$, где Sym^i означает i -симметрическую степень (представления или линейного пространства) и где

$$\text{Sym}^2[ST_n^*] = \text{Sym}^2(\mathbb{R}^{1*}) + (\mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^{n-1})^* + \text{Sym}^2(\mathbb{R}^{n-1*}),$$

то можно записать:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2 = & \text{Sym}^2(\mathbb{R}^{1*}) \otimes \mathbb{R}^1 + \text{Sym}^2(\mathbb{R}^{1*}) \otimes \mathbb{R}^{n-1} + (\mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^{n-1})^* \otimes \mathbb{R}^1 \\ & + (\mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^{n-1})^* \otimes \mathbb{R}^{n-1} + \text{Sym}^2(\mathbb{R}^{n-1*}) \otimes \mathbb{R}^1 + \text{Sym}^2(\mathbb{R}^{n-1*}) \otimes \mathbb{R}^{n-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Обозначим через $\mathcal{V}_i$ i -е слагаемое полученного разложения. Все $\mathcal{V}_i$ инвариантны относительно подгруппы SL_{n-1} группы S . Слагаемое $\mathcal{V}_1$ одномерно, слагаемые $\mathcal{V}_2$ и $\mathcal{V}_3$ неприводимы (здесь имеем в виду неприводимость относительно SL_{n-1}) и $(n - 1)$ -мерны. По лемме 5 пространство $\mathcal{V}_6$ разлагается

в прямую сумму двух неприводимых инвариантных слагаемых размерностей, равных соответственно $n - 1$ и $(n - 1)^2 n / 2 - n + 1$. Хорошо известно и легко доказывается, что размерность пространства $\mathcal{V}_5$ равна $n(n - 1)/2$ и оно неприводимо, а $\mathcal{V}_4$ разлагается в сумму двух неприводимых подпространств $\mathcal{V}_4^1$ и $\mathcal{V}_4^2$. Пространство $\mathcal{V}_4$ состоит из тензоров $t = (t_{jk}^u) \in \mathcal{G}_2$, у которых отличны от нуля только компоненты t_{1k}^u , $2 \leq u \leq n$, $2 \leq k \leq n$. Подпространство $\mathcal{V}_4^1$ имеет размерность $(n - 1)^2 - 1$ и задается дополнительным условием

$$\sum_{u=2}^n t_{1u}^u = 0. \quad (24)$$

Подпространство $\mathcal{V}_4^2$ имеет размерность 1 и порождено тензором t , у которого $t_{12}^2 = t_{13}^3 = \dots = t_{1n}^n$, а все остальные компоненты равны нулю. Поскольку $\text{codim}(\mathcal{W}, \mathcal{G}_2) = 1$ и $\mathcal{W}$ инвариантно, могут представиться только две возможности (напомним, предполагается $n > 2$):

1) $\mathcal{W} = \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4 + \mathcal{V}_5 + \mathcal{V}_6$; легко проверить, что этот случай реализуется для $H = H_2$ (см. 4.8);

2) $\mathcal{W} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4^2 + \mathcal{V}_5 + \mathcal{V}_6$; тогда $\mathcal{W}$ задается в $\mathcal{G}_2$ одним уравнением (24).

Докажем, что случай 2) невозможен.

Покажем, что уравнение (24) не инвариантно относительно действий s_1 и s_2 . Если $t = (t_{jk}^u) \in \mathcal{G}_2$, обозначим

$$\rho_2(s_1)[t] = f, \quad \rho_2(s_2)[t] = g.$$

Имеем $f_{12}^2 = t_{12}^2 - t_{11}^2$, $f_{1i}^i = t_{1i}^i$ при $i \geq 3$ и $g_{12}^2 = t_{12}^1 - t_{22}^1 + t_{12}^2 - t_{22}^2$, $g_{1i}^i = t_{1i}^i - t_{2i}^i$ при $i \geq 3$. Поскольку условие (24) при этих преобразованиях не сохраняется, это доказывает утверждение 1) теоремы 4.

2. Разберем случай $q > 2$. Вспомним, что $\mathcal{N} = \mathcal{N}(q) = \mathcal{G}_2 \times \dots \times \mathcal{G}_q$. Если проекция $\mathcal{W}$ на $\mathcal{G}_2$ вдоль $\mathcal{G}_3 \times \dots \times \mathcal{G}_q$ не совпадает с $\mathcal{G}_2$, то $\mathcal{W}$ содержит $\mathcal{G}_3 \times \dots \times \mathcal{G}_q$, так как $\text{codim}(\mathcal{W}, \mathcal{N}) = 1$. Поэтому эта проекция совпадает с $\mathcal{G}_2$ (вспомним, что $\mathcal{W}$ не содержит $\mathcal{G}_q$). Рассмотрим

$$\mathcal{W} \cap (\mathcal{G}_{q-1} \times \mathcal{G}_q) = \mathcal{W}_1.$$

Ясно, что коразмерность $\mathcal{W}_1$ в $(\mathcal{G}_{q-1} \times \mathcal{G}_q)$ равна 1. Проекция $\mathcal{W}_1$ на $\mathcal{G}_{q-1}$ вдоль $\mathcal{G}_q$ совпадает с $\mathcal{G}_{q-1}$, иначе ядро этой проекции содержит $\mathcal{G}_q$, что противоречит предположению, сделанному в п. 4.8. Согласно лемме 6, $[\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_{q-1}] = \mathcal{G}_q$. Но тогда $[\mathcal{W}_1, \mathcal{W}] = \mathcal{G}_q$, так как для $w \in \mathcal{W}_1$, $u \in \mathcal{W}$ значение коммутатора $[w, u]$ определяется значениями $w \bmod \mathcal{G}_q$ и $u \bmod \mathcal{G}_3 \times \dots \times \mathcal{G}_q$ соответственно. Поскольку $\mathcal{W}$ – подалгебра, получаем $\mathcal{G}_q \subset \mathcal{W}$, что противоречит предположению, сделанному в п. 4.8. Теорема доказана.

§ 5. Локальная классификация специальных структур

5.1. Обозначим $G = G^q(n)^0$. Напомним, что G -многообразие D с условием $\dim D \leq n$ называется *специальным*.

Пусть D – произвольное G -многообразие, w – регулярная точка на D . Обозначим через L_w касательное подпространство к орбите группы G , проходящей

через w . Известно, что семейство L_w образует инволютивное распределение в подходящей окрестности W точки w . Это означает, что размерность подпространства L_w постоянна в W и коммутатор любых двух векторных полей со значениями в семействе L_w принимает значения в этом семействе. Поэтому по теореме Фробениуса можно показать, уменьшая при необходимости W , что W диффеоморфно прямому произведению $S \times A$ двух своих подмногообразий S и A , проходящих через точку w , причем для каждой точки $z \in S$ многообразие $z \times A$ равно образу точки z при действии подходящей окрестности единицы группы G . Рассмотрим в прямом произведении $S \times G$ подмножество $M = \bigcup_{z \in S} (z, G_z^0)$. Напомним, что G_z^0 – связная компонента единицы стационарной подгруппы точки z .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Мы говорим, что G_z^0 *гладко зависит от z* , если от z гладко зависит подалгебра Ли $\mathcal{G}_z = \text{Lie}(G_z)$. В свою очередь, это означает, что для любой регулярной точки на D существует окрестность W такая, что можно выбрать базис $X_1(z), \dots, X_t(z)$ подалгебры $\text{Lie}(G_z)$, гладко зависящий от $z \in W$.

ЛЕММА 7. Для $z \in S$ группа G_z^0 *гладко зависит от точки z* . Подмножество M является гладким подмногообразием в $S \times G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из гладкой зависимости подалгебры Ли $\mathcal{G}_z = \text{Lie}(G_z)$ от z , что доказывается следующим образом.

Пусть $e_1, \dots, e_f$ – касательные векторы к единице группы G , образующие базис ее алгебры Ли $\mathcal{G} = \text{Lie}(G)$. Тогда образы этих векторов при действии G на D определяют f векторных полей на W : $X_1(z), \dots, X_f(z)$, $z \in W$. Можно считать, что ранг точки $z \in W$ постоянен и равен r . Тогда между $X_j(z)$ имеется $f - r$ независимых соотношений. При $z \in S$ каждое соотношение

$$a_1(z)X_1(z) + \dots + a_f(z)X_f(z) = 0$$

определяет вектор $a_1(z)e_1 + \dots + a_f(z)e_f$ алгебры $\mathcal{G}_z$. Поскольку $X_i(z)$ гладко зависят от z , можно, уменьшая при необходимости W , выбрать $f - r$ независимых соотношений, гладко зависящих от z . Это завершает доказательство.

5.2. Рассмотрим расслоение $\theta: Y = G \times S/M \rightarrow S$, полученное из прямого произведения $G \times S \rightarrow S$ факторизацией слоя $G \times z$ над точкой $z \in S$ по G_z^0 . На Y естественно возникает структура дифференцируемого многообразия, относительно которой θ превращается в гладкое отображение, эпиморфное на касательных пространствах, а на Y послойно действует G гладким образом. Обосновать это можно следующим образом. Имеется гладкое отображение $\nu: G \times S \rightarrow D$, которое переводит точку (g, z) в $gz \in D$. Для любой точки $z \in S \subset D$ ограничение ν на слой $G \times z$ есть отображение G на однородное пространство G/G_z , заданное формулой $g \rightarrow gz$. Это отображение имеет гладкое локальное сечение $G/G_z \rightarrow G$ в окрестности точки z (известный факт). Поэтому в G имеется гладкое подмногообразие L (зависящее от z), проходящее через единичный элемент e , которое диффеоморфно отображается на свой образ в G/G_z . Тогда дифференциал в точке $e \times z$ ограничения отображения ν на $L \times S$ есть изоморфизм касательных пространств $T_{e \times z}(L \times S)$ и $T_z(D)$; здесь $T_{e \times z}(L \times S)$ – касательное пространство к $L \times S$ в точке $e \times z \in L \times S$, а $T_z(D)$ –

касательное пространство к D в точке z . Значит, уменьшая L до L_1 и S до S_1 (но сохраняя условия $e \in L_1$, $z \in S_1$), можно добиться того, что $S_1 \times L_1$ отображением ν диффеоморфно (значит, биективно) переводится на свой образ в D .

Обозначим через $\mu: G \times S \rightarrow Y$ отображение, которое переводит точку (g, z) в точку Y , отвечающую смежному классу gG_z^0 в слое $G \times z$ над точкой z . Умножение слева на элемент группы G определяет действие G на $G \times S$ и Y , согласованное с μ . Имеется отображение ε из Y в D , которое переводит смежный класс gG_z^0 слоя $G \times z$ над точкой z в точку $gz \in D$. Это отображение корректно определено, перестановочно с действием G , и $\nu = \varepsilon\mu$. Значит, отображение μ переводит биективно $L_1 \times S_1$ на образ $\mu(L_1 \times S_1) = W'$, а ε биективно отображает W' на образ $\nu(S_1 \times L_1) = W$. По определению гладкая структура на W' есть перенос гладкой структуры с $L_1 \times S_1$. Объединение сдвигов gW' множеств W' для всевозможных $z \in S$ и $g \in G$ совпадает с Y . Гладкая структура на gW' есть перенос гладкой структуры с W' . Это задает гладкую структуру на Y , в которой $\theta: Y \rightarrow S$ – гладкая проекция, действие G на Y гладко, а образ $\varepsilon(Y)$ – открытое инвариантное относительно действия G множество в D , содержащее орбиту, проходящую через точку w .

Имеется сечение $\gamma: S \rightarrow Y$ проекции $\theta: Y \rightarrow S$, которое определяется следующим образом: $z \in S$ переходит в $\gamma(z) = \mu(e \times z) \in Y$. Из построения Y следует, что для любой точки $z \in \varepsilon(Y) \subset D$ существуют точка $\gamma(z) \in Y$ и ее окрестность $U \subset Y$ такие, что ε – диффеоморфизм U на свой образ, а так как ε коммутирует с действием G на Y и D , то это дает локальный изоморфизм действия G на Y в окрестности точки $\gamma(z)$ и действия G на D в окрестности точки z .

Построенное указанным образом накрытие $\varepsilon: Y \rightarrow \varepsilon(Y) \subset D$ называется *разверткой* (или *S-разверткой*) многообразия D . Ясно, что накрытие ε индуцирует накрытия $\varepsilon^k: Y^k \rightarrow D^k$ такие, что для любой пары точек $y \in Y^k$ и $d \in D^k$ такой, что $\varepsilon^k(y) = d$, найдутся окрестности U и V этих точек, для которых ε^k является диффеоморфизмом.

ЛЕММА 8. Пусть $\varepsilon_1: Y_1 \rightarrow D_1 \subset D$ и $\varepsilon_2: Y_2 \rightarrow D_2 \subset D$ – две развертки регулярного G -многообразия D . Рассмотрим точки $c_1 \in Y_1$ и $c_2 \in Y_2$ такие, что $\varepsilon_1(c_1) = \varepsilon_2(c_2) = c$. Тогда существует открытое G -инвариантное множество $D_3 \subset D_1 \cap D_2$, содержащее точку c , такое, что между накрытиями $Y'_1 = \varepsilon_1^{-1}(D_3)$ и $Y'_2 = \varepsilon_2^{-1}(D_3)$ существует G -изоморфизм χ , удовлетворяющий условию $\chi(c_1) = c_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим открытые окрестности U_1 , U_2 и U точек c_1 , c_2 и c соответственно такие, что ограничения $\bar{\varepsilon}_1$ и $\bar{\varepsilon}_2$ отображений ε_1 и ε_2 соответственно на U_1 и U_2 являются диффеоморфизмами на U . Отображение $\bar{\chi} = \bar{\varepsilon}_2^{-1}\bar{\varepsilon}_1$ является диффеоморфизмом U_1 на U_2 . Пусть u_1 – произвольная точка из U_1 , $u_2 = \bar{\chi}(u_1)$ – ее образ, $\varepsilon_1(u_1) = \varepsilon_2(u_2) = u$. Из построения Y_i ясно, что $G_{u_i} = G_u^0$. Но это означает, что $\bar{\chi}$ может быть продолжено как G -инвариантное отображение $\chi: Y'_1 \rightarrow Y'_2$, где $Y'_1 = GU_1$, $Y'_2 = GU_2$. Ясно, что χ – изоморфизм, $Y'_i = \varepsilon_i(D_3)$, где $D_3 = GU$. Это доказывает лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. По пространству Y развертки $\varepsilon: Y \rightarrow D$ мы можем построить расслоение геометрических структур $\pi^Y: P = P_X(Y) \rightarrow X$ со стандартным

слоем Y . Накрытие ε определяет накрытие $\varepsilon_X: P_X(Y) \rightarrow P_X(D)$ расслоений геометрических структур и отображение $\varepsilon_X^k: J^k(Y) \rightarrow J^k(D)$ соответствующих пространств струй. Расслоение $P_X(Y)$ мы будем называть *разверткой* расслоения $P_X(D)$. Ясно, что для любой регулярной точки $d \in P_X(D)$ найдется развертка $\varepsilon: Y \rightarrow D$ такая, что d лежит в образе $\varepsilon_X: P_X(Y) \rightarrow P_X(D)$. Также ясно, что для любой пары точек $y \in P_X(Y)$ и $d \in P_X(D)$ такой, что $\varepsilon_X(y) = d$, найдутся окрестности U и V этих точек, для которых ε_X является диффеоморфизмом, перестановочным с действием группы $\mathcal{V}$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов. Аналогично, для любой пары точек $y \in J^k(Y)$ и $d \in J^k(D)$ такой, что $\varepsilon_X^k(y) = d$, найдутся окрестности U и V этих точек, для которых ε_X^k является диффеоморфизмом, перестановочным с действием группы $\mathcal{V}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Пример иррациональной обмотки тора показывает, что в многообразии D могут быть орбиты, пересекающие S по всюду плотному множеству. В S -развертке этого многообразия через каждую точку S проходит ровно одна орбита.

ЛЕММА 9. Если в условиях п. 5.1 все подгруппы G_z^0 семейства M сопряжены фиксированной подгруппе K группы G , то сопрягающий элемент можно выбрать локально гладко зависящим от $z \in S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подгруппа K , очевидно, замкнута. Множество всех подгрупп группы G , сопряженных подгруппе K , образует однородное многообразие $T = G/N(K)$ смежных классов группы G по нормализатору $N(K)$ подгруппы K . Семейство G_z^0 определяет гладкий путь в T . Известно, что расслоение $G \rightarrow G/H$ для любой группы Ли G и любой ее замкнутой подгруппы H всегда локально тривиально. Это доказывает лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Пусть выполнены условия п. 5.1 и леммы 9 и $g(z): S \rightarrow G$ — гладкая функция, сопрягающая G_z^0 и K в окрестности точки w , т. е. $g(z)G_z^0 \times g^{-1}(z) = K$. Тогда, заменив многообразие S многообразием S_0 , состоящим из точек вида $(z, g^{-1}(w)g(z)z)$, где $z \in S$, мы можем считать, что семейство G_z^0 постоянно в подходящей окрестности точки $w \in S$. Более точно, имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 10. Пусть заданы отображение $\theta: Y \rightarrow S$, имеющее сечение $\gamma: S \rightarrow Y$, и действие группы Ли G на Y , при котором каждый слой проекции θ есть в точности одна орбита действия G . Пусть стационарная подгруппа G_y любой точки $y \in Y$ сопряжена одной и той же связной подгруппе K группы G . Пусть $w \in \gamma(S)$ — произвольная точка. Тогда имеется окрестность $S_0 \subset S$ точки $\theta(w)$ такая, что многообразие $Y_1 = \theta^{-1}(S_0)$ допускает изоморфизм $\nu: Y_1 \rightarrow S_0 \times Y_0$ на прямое произведение S_0 и $Y_0 = G/G_w$, перестановочный с действием группы G . Здесь Y_0 — однородное пространство группы G по стационарной подгруппе G_w точки w .

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Поскольку мы можем изначально брать сколь угодно малое S , далее мы будем считать, что ν — изоморфизм между Y и $S \times Y_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 10. Согласно лемме 9 существует такая окрестность S_0 точки $\theta(w)$, что в $S_1 = \gamma(S_0)$ имеется гладкая функция $g(z): S_1 \rightarrow G$,

сопрягающая G_z и K , т. е.

$$g(z)G_zg^{-1}(z) = K. \quad (25)$$

Тогда для многообразия S_2 , которое является образом S_0 при отображении $u \in S_0 \rightarrow g^{-1}(w)g(\gamma(u))\gamma(u)$, стационарные подгруппы G_p для всех точек $p \in S_2$ одинаковы и равны G_w . Действительно, $p = g^{-1}(w)g(\gamma(u))\gamma(u)$ для некоторой точки $u \in S_0$. Применяя формулу $G_{ax} = aG_xa^{-1}$ для $x = \gamma(u)$, $a = g^{-1}(w)g(\gamma(u))$ имеем

$$G_p = g^{-1}(w)g(\gamma(u))G_{\gamma(u)}g^{-1}(\gamma(u))g(w).$$

Так как $K = g(\gamma(u))G_{\gamma(u)}g^{-1}(\gamma(u))$ по формуле (25), имеем $G_p = g^{-1}(w)Kg(w) = G_w$ по той же формуле. Зададим теперь отображение $S_0 \times Y_0 \rightarrow Y_1$ формулой $(p, gG_w) \rightarrow gp$. Это отображение корректно определено. Легко проверить, что обратное к нему и является требуемым отображением ν .

5.3. Зафиксируем до конца данного параграфа ориентированное многообразие X , а также какую-нибудь точку b и ориентацию на X . Наличие ориентации на X позволяет говорить о знаке невырожденной формы старшей степени на X . Также до конца параграфа мы будем рассматривать расслоения геометрических структур $\pi^Y: P = P_X(Y) \rightarrow X$, стандартный слой Y которых является S -разверткой в окрестности регулярной точки какого-нибудь специального G -многообразия D .

Пусть $\theta: Y \rightarrow S$ и $\gamma: S \rightarrow Y$ – соответствующие проекция и сечение (см. п. 5.2). Мы определим “достаточно общие” в некоторой окрестности точки $b \in X$ сечения $s: X \rightarrow P$, определим понятие канонической формы для таких сечений и покажем, как привести достаточно общее сечение к канонической форме.

Введем следующие обозначения. Пусть $F = (U_F, f^i)$ и $H = (U_H, h^i)$ – две карты на X . Якобиева матрица $(\partial h^i / \partial f^j)$ перехода от F к H будет обозначаться $J(H/F)$. Выберем какую-нибудь карту $Q = (T, y^c)$ на Y . Геометрическая величина (сечение) $s: X \rightarrow P$ в карте (Q, F) задается отображением $s_F: X \rightarrow Y$, т. е. m , $m = \dim Y$, вещественными функциями $y^c = s_F^c(f^i)$ от $f^1, \dots, f^n$. Функции s_F^c называются *компонентами* s в карте (Q, F) . Мы говорим, что сечение $s: X \rightarrow P$, определенное в окрестности точки b , представлено в карте V атласа на Y , если $s_F(b) \in V$. В этих обозначениях не отражена зависимость от выбора Q , так как по определению приведение сечения s к канонической форме осуществляется за счет выбора на X подходящей зависящей от s карты F с условием $\text{or}(F) = \text{or}(X)$, в то время как карта Q на Y фиксируется заранее независимо от s . Карта на X называется *канонической* (для сечения s), если в ней сечение s имеет канонический вид. Через $s_F^c(b)$ обозначается значение функции s_F^c в точке $b \in X$, т. е. $s_F^c(f^i)$ для $f^i = f^i(b)$. Векторное поле e и дифференциальная форма ω в карте F на X записываются как $e_F = e_F^i(\partial/\partial f^i)$, $\omega_F = \omega_{Fi} df^i$.

Итак, пусть $s: X \rightarrow P$ – сечение, определенное в некоторой окрестности точки $b \in X$. Рассмотрим вначале случай $q = 1$ (структуры первого порядка).

В этом случае G – просто связная компонента единицы группы GL_n^0 вещественных матриц порядка $n = \dim X$. Теорема 3 дает список всех возможных стационарных подгрупп при действии G на многообразии Y с условием $m = \dim Y \leq n$. Будем разбирать случаи из этого списка по порядку, за исключением случаев 9) и 10), которые будут разобраны в следующей статье. Каждому случаю соответствует один или несколько приведенных ниже типов.

Тип I (действие G на Y тривиально). В этом случае $D = Y$, а $w = s(b)$ определяет точку на Y , не зависящую от выбора системы координат на X . Заменяя Y подходящей окрестностью точки w , можем считать, что Y покрывается атласом, состоящим из единственной карты $Q = (Y, y^c)$. Выберем на X карту $F \ni b$ с условием $\mathrm{or}(F) = \mathrm{or}(X)$. Сечение s в карте (Q, F) определяет набор из m функций $y^c = s_F^c(f^i)$, где $1 \leq c \leq m$, $1 \leq i \leq n$. Можно записать $s_F^c(f^i) = s^c(f^i)$, так как для данного типа компоненты s_F^c не зависят от выбора карты F на X . Условие достаточной общности сечения s для данного типа состоит в том, что ранг якобиевой матрицы $(\partial s^c / \partial f^i)$, $1 \leq c \leq m$, $1 \leq i \leq n$, в точке b равен m . При $m < n$ мы можем без потери общности считать, что $\det(\partial s^c / \partial f^i)(b) \neq 0$ при $1 \leq c \leq m$, $1 \leq i \leq m$. Из теоремы о неявной функции в этом случае вытекает, что на X можно выбрать такую b -карту H , что $s^i = \lambda^i + h^i$ при $1 \leq i \leq m$, $f^i = h^i$ при $m + 1 \leq i \leq n$. Здесь $\lambda^i = s^i(b)$ – не зависящие от h^i постоянные. Это дает каноническую форму при $m < n$. В случае $m = n$ помимо этой формы возможна еще одна каноническая форма $s^i = \lambda^i + h^i$ при $i < n$, $s^n = \lambda^n - h^n$. Эти две канонические формы неэквивалентны, так как дифференциальные формы $dh^1 \wedge \dots \wedge dh^n$ и $-dh^1 \wedge \dots \wedge dh^n$ не переводятся друг в друга сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом.

В дальнейшем достаточно общие в точке b сечения будут для краткости называться b -сечениями.

Тип II (размерность орбит группы G в Y равна 1). Стационарная подгруппа G_w^0 любой точки $w \in Y$ равна SL_n . Согласно лемме 10 имеем G -изоморфизм

$$\nu: Y \rightarrow S \times \mathbb{R}^0. \quad (26)$$

Следует только заметить, что $\mathrm{GL}_n^0 / \mathrm{SL}_n = \mathbb{R}^0$. Здесь $\dim S = m - 1$. На $\mathbb{R}^0$ имеется каноническая координата y^0 , определенная условием

$$y^0(g \bmod \mathrm{SL}_n) = \det g. \quad (27)$$

Выберем на X карту $F \ni b$ с условием $\mathrm{or}(F) = \mathrm{or}(X)$ и для сечения $s: X \rightarrow P$ рассмотрим отвечающую карте F тривиализацию tr_F и рассмотрим $\nu(\mathrm{tr}_F[s(b)]) = w_F \in S \times \mathbb{R}^0$. Проекция w_S элемента w_F на сомножитель S не зависит от произвольного выбора F . Заменяя S подходящей окрестностью точки w_S , можем считать, что S покрывается атласом, состоящим из единственной карты с координатами $(y^1, \dots, y^{m-1})$. Тогда Y покрывается единственной картой Q с системой координат $y^0, y^1, \dots, y^{m-1}$ в ней. Полученную указанным способом карту на Y будем называть *адаптированной*. Для адаптированной карты Q на Y карту (Q, F) на P будем называть *адаптированной* κF , или просто *адаптированной*. Легко видеть, что компонента $s_F^0(f^i)$ сечения s в карте (Q, F) удовлетворяет условию $s_F^0 > 0$ и при изменении карты F

преобразуется как дифференциальная форма степени n на X , а компоненты $s_F^1(f^i), \dots, s_F^{m-1}(f^i)$ являются функциями на X . Поэтому будем записывать $s_F = (\omega_F, \Psi^1, \dots, \Psi^{m-1})$, где $\omega_F = a_F df^1 \wedge \dots \wedge df^n$, $a_F > 0$, $\Psi^i = \Psi^i(f^1, \dots, f^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Сечение s называется *b-сечением* (т. е. достаточно общим в точке b), если $\text{rang}(\partial\Psi^c/\partial f^i)(b) = m - 1$, $1 \leq c \leq m - 1$, $1 \leq i \leq n$. Легко видеть, что это определение не зависит от произвольного выбора адаптированной карты Q на Y и карты F на X .

Приведем b -сечение s к каноническому виду. Можно без потери общности считать, что $\det(\partial\Psi^c/\partial f^i)(b) \neq 0$ при $1 \leq c \leq m - 1$, $1 \leq i \leq m - 1$. Тогда на X можно выбрать такую карту H , что $\Psi^i = h^i$ при $1 \leq i \leq m - 1$, $h^i = f^i$ при $m - 1 \leq i \leq n - 1$, $h^n = \pm f^n$, а знак f^n выбирается так, чтобы выполнялось еще условие $\text{or}(H) = \text{or}(X)$. Запишем

$$\omega_H = a_H dh^1 \wedge \dots \wedge dh^n.$$

Ясно, что $a_H > 0$. Рассмотрим теперь b -карту G на X такую, что $g^i = h^i - \lambda^i$ при $i < n$, $g^n = \Psi(h^1, \dots, h^n)$. Здесь функция Ψ подлежит определению, а $\lambda^i = \Psi^i(b)$ – константы. Ясно, что $J(G/H) = \partial\Psi/\partial h^n$. Выберем Ψ из условия $\partial\Psi/\partial h^n = a_H$. Это даст каноническую форму $s^i = g^i + \lambda^i$ при $i < m$, $s^0 = 1$.

При рассмотрении каждого следующего типа многообразия Y мы будем строить координаты по той же схеме, что и для типа II, с той разницей, что в общем случае на Y придется строить атлас (так как некоторые типы эталонных многообразий не допускают глобальной системы координат). Именно, сначала на Y мы будем определять подходящий класс атласов, которые будут называться *адаптированными* (для данного типа) *атласами*. Затем, зафиксировав любой адаптированный атлас $\mathcal{Q}$ на Y , мы опять получим, что выбор любой карты F на X определяет тривиализацию $\text{tr}_F: P = P_U(Y) \rightarrow Y \times U$ и тем самым атлас на P , который будем называть адаптированным к F , или просто адаптированным, и будем обозначать $(\mathcal{Q}, F)$. Соответственно, адаптированными называются координаты, определенные адаптированным атласом.

Рассмотрим случай, когда размерность орбит группы G в Y равна $n - 1$. Могут представиться два подслучая: $\dim Y = n$ и $\dim Y = n - 1$. Разберем сначала случай $\dim Y = n$.

Возьмем какую-нибудь точку $w \in Y$. В нашем случае $\dim S = 1$. Докажем, что для любой точки y многообразия Y все подгруппы G_y^0 сопряжены одной и той же подгруппе K группы G , которая является подгруппой H_1 или H_2 из теоремы 3. Ясно, что достаточно ограничиться точками $y \in \gamma(S)$. Рассмотрим грассманово многообразие Γ всех линейных подпространств коразмерности $n - 1$ в GL_n . В многообразии Γ есть связное подмножество Γ_1 , состоящее из всех подалгебр, сопряженных подалгебре $\mathcal{H}_1$ группы H_1 , и аналогичное подмножество Γ_2 , состоящее из всех подалгебр, сопряженных подалгебре $\mathcal{H}_2$ группы H_2 . Пересечение Γ_1 и Γ_2 пусто. Если теперь каждой точке $z \in S$ мы сопоставим подгруппу Ли $G_{\gamma(z)}^0$, то алгебры Ли семейства $G_{\gamma(z)}^0$ определяют связную кривую в Γ и семейство $G_{\gamma(z)}^0$ определяется этой кривой. Но всякая связная кривая, которая содержится в объединении $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, содержится на самом деле

в одном из Γ_i . Поэтому возникают два случая: $K = H_1$ и $K = H_2$. В обоих случаях согласно замечанию 10 можно считать, что $Y = S \times \mathrm{GL}_n^0/K$.

Тип III ($K = H_1$). В этом случае $S_{n-1} = \mathrm{GL}_n^0/K$ – множество рассматриваемых с точностью до положительного коэффициента пропорциональности ненулевых векторов в пространстве представления ST_n , т.е. $\mathbb{R}^n$ (см. п. 2.1). Множество S_{n-1} отождествляется со сферой. Естественная проекция $\mathbb{R}^n - \mathbf{0} \rightarrow S_{n-1}$, переводящая каждый ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$ в определяемый этим вектором луч, коммутирует с действием G и обозначается через μ . Элементы множества S_{n-1} называются *сферическими векторами*. Рассмотрим G -пространство $M = S \times (\mathbb{R}^n - \mathbf{0})$ с тривиальным действием G на S . Отображение $\theta: M \rightarrow Y = S \times S_{n-1}$, которое тождественно на S и равно μ на $\mathbb{R}^n - \mathbf{0}$, перестановочно с действием G . Поэтому оно индуцирует эпиморфизм

$$\theta_X: L = P_X(M) \rightarrow P = P_X(Y)$$

соответствующих расслоений над базой X .

Обозначим через $t^1, \dots, t^i, \dots, t^n$ стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$. Подходящим образом уменьшая S , мы можем считать, что на S имеется глобальная координата v (поскольку $\dim S = 1$). Рассмотрим (v, t^i) в качестве адаптированной системы координат на M и обозначим через Q определенную ими глобальную карту. Теперь легко видеть, что любое сечение $s: X \rightarrow L$ можно отождествить с парой $s = (\Psi, e)$, где Ψ – скалярная функция на X , e – нигде не обращающееся в нуль векторное поле на том же многообразии. Отсюда следует, что для любой карты $F = (f^i)$ на X в адаптированной к F карте (Q, F) на L сечение s задается функциями $v = \Psi(f)$, $t^i = e^i(f)$, где $e^i(f)$ – координаты векторного поля e в базисе $\partial/\partial f^i$.

Пусть $\bar{s}$ – сечение расслоения $P \rightarrow X$. Поскольку θ_X – эпиморфизм, найдется сечение $s: X \rightarrow L$ такое, что $\theta_X(s) = \bar{s}$; будем говорить, что $\bar{s}$ *представляет* s . В отождествлении $s = (\Psi, e)$ функция Ψ определена однозначно по $\bar{s}$, а векторное поле e определено с точностью до умножения на любую положительную функцию. Назовем *сферическим векторным полем* и обозначим через $\bar{e}$ множество векторных полей, получающихся из e умножением на произвольную положительную функцию, и скажем, что e *представляет* $\bar{e}$.

Итак, сечение $\bar{s}: X \rightarrow P$ можно отождествить с парой $\bar{s} = (\Psi, \bar{e})$, где Ψ – скалярная функция, а $\bar{e}$ – сферическое поле на X . Пусть еще e – векторное поле, представляющее $\bar{e}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Сечение $\bar{s} = (\Psi, \bar{e}): X \rightarrow P$ называется *b-сечением*, если

$$\frac{\partial \Psi}{\partial e(b)} \neq 0, \quad (28)$$

т.е. в точке b отлична от нуля производная функции Ψ по направлению поля e (что, в частности, влечет условие $e(b) \neq 0$).

Легко видеть, что условие достаточной общности сечения $\bar{s}$ в точке b не зависит ни от произвольного выбора адаптированной карты Q на L , ни от произвольного выбора карты F на X , ни от произвольного выбора поля e , представляющего $\bar{e}$.

Пусть $\bar{s} = (\Psi, \bar{e})$ является b -сечением. Как известно, на X существует карта $H \ni b$, спрямляющая поле e . Это означает, что запись e_H поля e в карте H имеет компоненты $e_H^1 = 1$, $e_H^i = 0$ при $i > 1$. При этом, заменяя при необходимости h^n на $-h^n$, мы также считаем, что $\text{ог}(H) = \text{ог}(X)$.

Перейдем теперь к карте G на X , заданной следующим образом. При $2 \leq i \leq n-1$ пусть $g^i = h^i - h^i(b)$; если $\partial\Psi/\partial e(b) > 0$, то $g^1 = \Psi - \Psi(b)$, если $\partial\Psi/\partial e(b) < 0$, то $g^1 = -\Psi + \Psi(b)$. Наконец, положим $g^n = \pm(h^n - h^n(b))$ и выберем знак в этой формуле так, чтобы $\text{ог}(H) = \text{ог}(G)$. Тогда H является канонической b -картой (см. определение b -карты в п. 2.1) для сечения $\bar{s}$, а сечение s в атласе $(\mathcal{Q}, H)$ имеет следующий вид. Если $\partial\Psi/\partial e(b) > 0$, то $v = g^1 + \lambda^1$, где $\lambda^1 = \Psi(b)$, если $\partial\Psi/\partial e(b) < 0$, то $v = -g^1 + \lambda^1$; $t^2 = \dots = t^n = 0$, $t^1 > 0$. Далее, в § 6, будет проведено построение адаптированного атласа на Y и указан канонический вид сечения $\bar{s}$ для данного и последующих типов эталонных пространств до типа XI включительно.

Пусть $K = H_2$. В этом случае рассмотрим пространство представления ST_n^* , т. е. $\mathbb{R}^{n*}$. Ненулевые элементы $\mathbb{R}^{n*}$ называются *линейными формами*; линейную форму, рассматриваемую с точностью до умножения на положительное число, будем называть *сферической линейной формой*. Множество сферических линейных форм обозначается S_{n-1}^* и отождествляется со сферой, и мы имеем $S_{n-1}^* = \text{GL}_n^0/K$. Определим, как и ранее, $M^* = S \times (\mathbb{R}^{n*} - \mathbf{0})$, $\mu^*: \mathbb{R}^{n*} - \mathbf{0} \rightarrow S_{n-1}^*$, $\theta^*: M^* \rightarrow Y$ и эпиморфизм $\theta_X^*: L^* = P_X(M^*) \rightarrow P = P_X(Y)$. Определим адаптированную карту Q^* на Y^* , включающую координату v на S и стандартные координаты $u^1, \dots, u^i, \dots, u^n$ в $\mathbb{R}^{n*}$. Легко видеть, что любое сечение $s: X \rightarrow L^*$ может быть отождествлено с парой $s = (\Psi, \omega)$, где Ψ – скалярная функция, а ω – нигде не обращающаяся в нуль дифференциальная форма степени 1 на X . Сечение $\bar{s}: X \rightarrow P$ может быть отождествлено с парой $\bar{s} = (\Psi, \bar{\omega})$, где Ψ – скалярная функция, а $\bar{\omega}$ – нигде не обращающаяся в нуль форма степени 1, определенная с точностью до умножения на любую положительную функцию. Назовем *сферической формой* и обозначим через $\bar{\omega}$ множество 1-форм, получающихся из ω умножением на произвольную положительную функцию, и скажем, что ω *представляет* $\bar{\omega}$. Скажем, что сечение $s: X \rightarrow L^*$ *представляет сечение* $\bar{s}: X \rightarrow L^*$, если $\theta_X^*(s) = \bar{s}$. Тогда если $s = (\Psi, \omega)$, $\bar{s} = (\Psi_1, \bar{\omega})$, то $\Psi_1 = \Psi$ и ω представляет $\bar{\omega}$.

Напомним ряд понятий, введенных в работе [13, с. 194–199].

Пусть ω – 1-форма на многообразии X размерности n . Для любого натурального $k \leq n$ введем форму

$$\omega^{(k)} = \begin{cases} \underbrace{d\omega \wedge \dots \wedge d\omega}_c & \text{при } k = 2c, \\ \omega \wedge \underbrace{d\omega \wedge \dots \wedge d\omega}_c & \text{при } k = 2c + 1. \end{cases}$$

Здесь знак $\wedge$ обозначает внешнее произведение дифференциальных форм.

Рассмотрим форму $\lambda\omega$, где λ – скалярная функция. Легко видеть, что $d(\lambda\omega) = d\lambda \wedge \omega + \lambda d\omega$, откуда имеем

$$(\lambda\omega)^{(k)} = \begin{cases} \lambda^c \omega^{(k)} + c\lambda^{c-1} d\lambda \wedge \omega^{(k-1)} & \text{при } k = 2c, \\ \lambda^{c+1} \omega^{(k)} & \text{при } k = 2c + 1. \end{cases} \quad (29)$$

ЛЕММА 11. Пусть $n = 2a$ (четно) и 1-форма ω имеет вид $\omega = \sum_{i=1}^a u^i dv^i$ в подходящей системе координат u^i, v^i , определенной в окрестности U точки $b \in X$. Если $\omega(b) \neq 0$, то существует новая система координат r^i, s^i , определенная в окрестности V точки b , $V \subseteq U$, такая, что:

1) запись формы ω в новых координатах также имеет вид

$$\omega = \sum_{i=1}^a r^i ds^i;$$

2) значения $r^i(b), s^i(b)$ новых координат в точке b имеют заранее предписанные значения, при этом все $r^i(b)$ не могут быть одновременно равны нулю;

3) якобиан перехода к новой системе координат равен 1.

Пусть теперь $n = 2a+1$ (нечетно) и 1-форма ω имеет вид $\omega = \sum_{i=1}^a u^i dv^i + dw$ в подходящей системе координат u^i, v^i, w , определенной в окрестности U точки $b \in X$. Всегда существует новая система координат r^i, s^i, z , определенная в окрестности V точки b , $V \subseteq U$, такая, что:

1) запись формы ω в новых координатах также имеет вид

$$\omega = \sum_{i=1}^a r^i ds^i + dz;$$

2) значения $r^i(b), s^i(b), z(b)$ новых координат в точке b имеют заранее предписанные значения;

3) якобиан перехода к новой системе координат равен 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 2a$ (четно). Поскольку $\omega(b) \neq 0$, существует $1 \leq j \leq a$ такое, что $u^j(b) \neq 0$. Сделаем линейное преобразование $v^i = b_k^i t^k$, $1 \leq i \leq a$, $1 \leq k \leq a$. Тогда в переменных u, t запись формы ω имеет вид

$$\omega = \sum_{k=1}^a \left(\sum_{i=1}^a b_k^i u^i \right) dt^k.$$

Обозначим $\sum_i b_k^i u^i = r^k$. Ясно, что матрицу $B = (b_k^i)$ можно взять невырожденной и такой, чтобы $r^i(b)$ имели предписанные значения, не все одновременно равные нулю. В переменных r, t форма ω имеет канонический вид: $\omega = \sum_{i=1}^a r^i dt^i$. Если переменные u, v, r, t записать в виде столбцов, то преобразование координат в матричном виде запишется так: $v = Bt$, $r = B^T u$. Отсюда ясно, что якобиан перехода от u, v к r, t равен 1. Переменные s^i будем искать в виде $s^i = t^i + q^i$, где q^i – константы. Ввиду произвольности выбора q^i случай $n = 2a$ разобран.

Пусть теперь $n = 2a+1$ (нечетно). Положим $r^i = u^i - p^i$, $s^i = v^i - q^i$ для $1 \leq i \leq a$, $z = w + \sum_{i=1}^a p^i s^i + d$. Тогда будем иметь

$$\omega = \sum_{i=1}^a r^i ds^i + dz.$$

Ввиду произвольности выбора констант p^i, q^i, d лемма доказана.

Из теоремы Дарбу (см. [13]) следует, что 1-форма μ на X такая, что $\mu^{(n)}(b) \neq 0$, $\mu(b) \neq 0$ (при нечетном n второе неравенство вытекает из первого), приводится локально в подходящей карте $F \in b$ к каноническому виду:

$$\mu_F = \begin{cases} \sum_{i=1}^a f^{2i-1} df^{2i} & \text{при } n = 2a, \\ \sum_{i=1}^a f^{2i-1} df^{2i} + df^{2a+1} & \text{при } n = 2a + 1. \end{cases} \quad (31)$$

Для ориентированного многообразия X необходимо знать канонический вид μ для карт F с условием $\text{or}(F) = \text{or}(X)$. Из сказанного легко вытекает, что при условии $\text{or}(F) = \text{or}(X)$ помимо приведенной возникает еще одна каноническая форма:

$$\mu_F = \begin{cases} -f^1 df^2 + \sum_{i=2}^a f^{2i-1} df^{2i} & \text{при } n = 2a, \\ \sum_{i=1}^a f^{2i-1} df^{2i} - df^{2a+1} & \text{при } n = 2a + 1. \end{cases} \quad (32)$$

Эти случаи различаются знаком формы $\mu^{(n)}$.

Из леммы 11 следует, что можно выбрать центрированную в точке b карту V на X так, чтобы якобиан перехода от F к V был равен 1 и форма μ в карте V имела вид

$$\mu_V = \begin{cases} (1 + v^1) dv^2 + \sum_{i=2}^a v^{2i-1} dv^{2i} & \text{в случае (31),} \\ (1 - v^1) dv^2 + \sum_{i=2}^a v^{2i-1} dv^{2i} & \text{в случае (33),} \end{cases} \quad (35)$$

$$\mu_V = \begin{cases} \sum_{i=1}^a v^{2i-1} dv^{2i} + dv^{2a+1} & \text{в случае (32),} \\ \sum_{i=1}^a v^{2i-1} dv^{2i} - dv^{2a+1} & \text{в случае (34).} \end{cases} \quad (36)$$

Пусть теперь задано сечение $\bar{s}: X \rightarrow P = P_X(Y)$, и пусть сечение $s: X \rightarrow L^* = P_X(M^*)$ представляет $\bar{s}$. отождествим s с парой $s = (\Psi, \omega)$.

Тип IV. Здесь $K = H_2$ (случай $n = 2a$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Сечение $\bar{s}$ называется b -сечением, если в точке b

$$d\Psi \wedge \omega^{(n-1)} \neq 0. \quad (39)$$

Легко видеть, что данное условие не зависит от выбора ω .

Пусть сечение s удовлетворяет (39). Тогда $\omega^{(n-1)}(b) \neq 0$, $\omega(b) \neq 0$. Поэтому, умножая при необходимости ω на подходящую положительную функцию λ , ввиду (29) мы всегда можем добиться выполнения в точке b условия

$$0 < (\lambda\omega)^{(n)} = \lambda^a \omega^{(n)} + a\lambda^{a-1} d\lambda \wedge \omega^{(n-1)}.$$

Обозначим $\varepsilon = \lambda\omega$ и будем считать $\varepsilon^{(n)}(b) > 0$. Тогда найдется такая одинаково ориентированная с X карта F , в которой ε имеет вид

$$\varepsilon_F = \sum_{i=1}^a f^{2i-1} df^{2i}. \quad (40)$$

Согласно лемме 11 можем считать

$$f^1(b) > 0, \quad f^i(b) = 0 \quad \text{при} \quad i > 1. \quad (41)$$

Теперь определим на X новую карту G формулами $g^1 = \Psi(f^1, \dots, f^n)$, $g^{2i-1} = f^{2i-1}/f^1$ при $2 \leq i \leq a$, $g^{2i} = f^{2i}$ при $1 \leq i \leq a$. Условие (39) обеспечит невырожденность перехода от F к G . Действительно, легко видеть, что определитель j матрицы $J = J(G/F)$ перехода от F к G не изменится, если из нее вычеркнуть все четные строки и столбцы. Оставшаяся после этого матрица J' имеет вид

$$J' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial f^1} & \frac{\partial \Psi}{\partial f^3} & \frac{\partial \Psi}{\partial f^5} & \frac{\partial \Psi}{\partial f^7} & \cdots & \frac{\partial \Psi}{\partial f^{2a-1}} \\ -\frac{f^3}{(f^1)^2} & \frac{1}{f^1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{f^5}{(f^1)^2} & 0 & \frac{1}{f^1} & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{f^{2a-1}}{(f^1)^2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{f^1} \end{pmatrix}.$$

Несложно подсчитать, что определитель матрицы J есть

$$j = \frac{1}{(f^1)^a} \left(f^1 \frac{\partial \Psi}{\partial f^1} + f^3 \frac{\partial \Psi}{\partial f^3} + \cdots + f^{2a-1} \frac{\partial \Psi}{\partial f^{2a-1}} \right).$$

С другой стороны, по формуле (30) $\varepsilon^{(n-1)} = \lambda^a \omega^{(n-1)}$, и поэтому из (39) следует $(\varepsilon^{(n-1)} \wedge d\Psi)(b) \neq 0$. Ясно, что ввиду (40) запись $(\varepsilon^{(n-1)} \wedge d\Psi)_F$ формы $\varepsilon^{(n-1)} \wedge d\Psi$ в карте F явно находится и имеет вид

$$(\varepsilon^{(n-1)} \wedge d\Psi)_F = (a-1)! \left(f^1 \frac{\partial \Psi}{\partial f^1} + f^3 \frac{\partial \Psi}{\partial f^3} + \cdots + f^{2a-1} \frac{\partial \Psi}{\partial f^{2a-1}} \right) df^1 \wedge df^2 \wedge \cdots \wedge df^n.$$

Отсюда следует $j(b) \neq 0$, что и доказывает невырожденность перехода к G . Форма ε записывается в карте G следующим образом:

$$\varepsilon_G = f^1 dg^2 + \sum_{i=2}^a f^1 g^{2i-1} dg^{2i}.$$

Обозначим $\lambda^1 = g^1(b) = \Psi(b)$. Если $\text{or}(G) = \text{or}(X)$, перейдем к карте H на X , заданной формулами $h^i = g^i - g^i(b)$. Тогда $\text{or}(H) = \text{or}(X)$, H является канонической b -картой для сечения $\bar{s}$. Сечение s в карте H имеет вид

$$s_H = \left(\lambda^1 + h^1, f^1 dh^2 + \sum_{i=2}^a f^1 h^{2i-1} dh^{2i} \right).$$

Если G и X ориентированы противоположно, положим $h^1 = g^1(b) - g^1$, $h^i = g^i - g^i(b)$ при $i > 1$. В этом случае опять $\text{or}(H) = \text{or}(X)$, H является канонической b -картой для сечения $\bar{s}$, и сечение s в карте H имеет вид

$$s_H = \left(\lambda^1 - h^1, f^1 dh^2 + \sum_{i=2}^a f^1 h^{2i-1} dh^{2i} \right).$$

Канонический вид $\bar{s}$ приведен в § 6.

Тип V. Здесь $K = H_2$ ($n = 2a + 1$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Сечение $\bar{s}: X \rightarrow P$ называется b -сечением, если в точке $b \in X$:

- 1) $\omega^{(2a+1)}(b) \neq 0$;
- 2) $(d\omega^{(2a-1)} \wedge d\Psi)(b) \neq 0$.

Из формулы (30) легко вытекает, что данные условия не зависят от выбора ω .

Всюду далее свойство сечения быть достаточно общим в данной точке не зависит от выбора системы координат и вспомогательных построений в конструкции, используемой для формулировки этого свойства. Этот факт не будет в дальнейшем каждый раз специально отмечаться.

Пусть задано b -сечение $\bar{s}$ в исходной карте G , одинаково ориентированной с X . Для приведения $\bar{s}$ к канонической форме нам придется напомнить доказательство теоремы Дарбу [13]. Из него следует, что при нахождении канонической карты F для 1-формы ε , заданной первоначально в карте G , сначала находится вторая координатная функция $f^2 = f(g^i)$ этой карты как решение линейного уравнения первого порядка в частных производных:

$$df \wedge \varepsilon^{(2a)} = 0. \quad (42)$$

В паре (Ψ, ω) , представляющей сечение $\bar{s}$, форма ω может быть заменена на $\varepsilon = \lambda\omega$ с произвольной функцией $\lambda(g^i) > 0$. Согласно (29) уравнение (42) для ε имеет вид

$$\lambda^a df \wedge \omega^{(2a)} + a df \wedge d\lambda \wedge \omega^{(2a-1)} = 0. \quad (43)$$

Теперь положим $f = \Psi$ и рассмотрим (43) как уравнение относительно неизвестной функции λ . Ясно, что это квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка и условие 2) определения 10 влечет, что это уравнение нетривиально содержит хотя бы одну частную производную $\partial\lambda/\partial g^i$ искомой функции λ . Поэтому локально в окрестности точки b это уравнение имеет решение λ с условием $\lambda(b) > 0$.

Итак, если мы начнем доказательство теоремы Дарбу для формы ε , то можно взять $f^2 = \Psi$.

Дальше доказательство продолжается без изменений, строятся остальные координатные функции f^i и в итоге получается система координат канонической карты F для формы ε , для которой

$$\varepsilon_F = \sum_{i=1}^a f^{2i-1} df^{2i} + df^{2a+1}.$$

При этом можно считать (используя, например, доказательство леммы 11), что $f^i(b) = 0$ при $i \neq 2$. Положим теперь $\lambda^i = f^i(b)$ и, если форма $\omega^{(n)}$ положительна, зададим карту H формулами $h^i = f^i - \lambda^i$. Тогда H и X одинаково ориентированы, H является канонической b -картой для сечения $\bar{s}$ и сечение s в карте H имеет вид

$$s_H = \left(\lambda^2 + h^2, \sum_{i=1}^a h^{2i-1} dh^{2i} + dh^{2a+1} \right).$$

Если форма $\omega^{(n)}$ отрицательна, зададим карту H формулами $h^i = f^i - \lambda^i$ при $i < n$, $h^{2a+1} = -f^{2a+1}$. Тогда H и X одинаково ориентированы, H является канонической b -картой для сечения $\bar{s}$ и сечение s в карте H имеет вид

$$s_H = \left(\lambda^2 + h^2, \sum_{i=1}^a h^{2i-1} dh^{2i} - dh^{2a+1} \right).$$

Ясно, что две полученные канонические формы неэквивалентны, т. е. не переводятся друг в друга сохраняющей ориентацию заменой координат. Канонический вид $\bar{s}$ приведен в § 6.

Теперь необходимо разобрать случай, когда Y – орбита группы GL_n^0 размерности $n - 1$.

Тип VI ($K = H_1$). Имеем $Y = S_{n-1} = \mathrm{GL}_n^0 / K$, и этот случай разбирается даже проще, чем тип III, так как отсутствует S и роль M играет $\mathbb{R}^n - \mathbf{0}$.

Обозначим $T(X) = P_X(\mathbb{R}^n - \mathbf{0})$, и пусть μ_X – естественный эпиморфизм $T(X) - \mathbf{0} \rightarrow P = P_X(Y)$, индуцированный эпиморфизмом μ . В качестве адаптированных координат в пространстве представления ST_n выбираем стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$. Сечение $\bar{e}: X \rightarrow P$ есть сферическое векторное поле на X ; оно называется b -сечением, если $e(b) \neq 0$ для настоящего векторного поля e , представляющего $\bar{e}$. В карте F , спрямляющей e , т. е. такой, что $e = \partial/\partial f^1$ и $\mathrm{or}(F) = \mathrm{or}(X)$, сечение $\bar{e}$ приводится к каноническому виду (см. § 6).

Пусть $K = H_2$. Имеем $Y = \mathrm{GL}_n^0 / K$. Обозначим $T^*X = P_X(\mathbb{R}^n - \mathbf{0})$, $\mu_X^*: T^*X - \mathbf{0} \rightarrow P = P_X(Y)$. В качестве адаптированных координат в пространстве представления ST_n^* выбираем стандартные координаты в $\mathbb{R}^{n*}$. Сечение $\bar{\omega}: X \rightarrow P$ есть сферическая форма на X ; пусть ω – 1-форма, представляющая $\bar{\omega}$.

Тип VII ($n = 2a$). В этом случае $\bar{\omega}$ называется b -сечением, если $\omega^{(n-1)}(b) \neq 0$. Тогда, рассуждая, как и ранее, найдем одинаково ориентированную с X карту F , в которой форма $\varepsilon = \lambda\omega$ имеет вид (40), при этом выполнено (41). Перейдем на X к b -карте H , заданной формулами $h^1 = f^1 - f^1(b)$, $h^{2i-1} = f^{2i-1}/f^1$ при $2 \leq i \leq a$, $h^{2i} = f^{2i}$ при $1 \leq i \leq a$. Карта H будет канонической для $\bar{\omega}$, и

$$\varepsilon_H = f^1 \left(dh^2 + \sum_{i=2}^a h^{2i-1} dh^{2i} \right)$$

(см. далее § 6).

Тип VIII ($n = 2a + 1$). В этом случае $\bar{\omega}$ называется *b-сечением*, если $\omega^{(n)}(b) \neq 0$. Из разбора типа V ясно, что, заменяя ω на пропорциональную форму, ее можно привести к каноническому виду

$$\omega = \sum_{i=1}^a f^{2i-1} df^{2i} + df^{2a+1} \quad \text{или} \quad \omega = \sum_{i=1}^a f^{2i-1} df^{2i} - df^{2a+1}$$

в подходящей b -карте F (напоминаем, что b -карта по определению одинаково ориентирована с X). Ясно, что эти две канонические формы не переводятся друг в друга, так как для них формы $\omega^{(n)}$ имеют разный знак. Это дает две канонические формы для сечения $\bar{\omega}$ (см. § 6).

Осталось разобрать случай $\dim \mathrm{GL}_n^0/K = n$, когда Y однородно, K – стационарная подгруппа точки $p \in Y$.

Тип IX. Пусть $K = T_1$, $Y = \mathrm{GL}_n^0/K = Z^0 \times \mathrm{SL}_n/T_1 = Z^0 \times S_{n-1}$, где $Z^0 \cong \mathbb{R}^0$ (см. п. 3.6). Рассмотрим G -многообразие $B = \mathbb{R}^0 \times (\mathbb{R}^n - \mathbf{0})$, где матрица $g \in G$ действует на $\mathbb{R}^0$ умножением на определитель, а на $\mathbb{R}^n$ – по представлению ST_n . Обозначим через ξ отображение $B \rightarrow Y$, которое тождественно на $\mathbb{R}^0$ и равно μ на $\mathbb{R}^n - \mathbf{0}$. Отображение ξ индуцирует эпиморфизм $\xi_X: E = E_X(B) \rightarrow P = P_X(Y)$. Возьмем на $\mathbb{R}^0$ координату y^0 , заданную формулой (27). По определению адаптированными координатами на B будем считать координаты $(y^0, t^1, \dots, t^n)$, где t^i – стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$. Легко видеть, что любое сечение $s: X \rightarrow E$ можно отождествить с парой (π, e) , где π – форма степени n на X , а e – нигде не равное нулю векторное поле на X . Аналогично, сечение $\bar{s}: X \rightarrow P$ можно отождествить с парой $(\pi, \bar{e})$, где π – форма степени n на X , а $\bar{e}$ – сферическое поле на X . Скажем, что сечение $s = (\pi, e)$ представляет $\bar{s} = (\pi, \bar{e})$, если $\xi_X(s) = \bar{s}$. Это эквивалентно тому, что e представляет $\bar{e}$.

Пусть $(\omega, \bar{e}) = \bar{s}: X \rightarrow P$ – сечение, а $s = (\pi, e)$ представляет $\bar{s}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Назовем $\bar{s}$ *b-сечением*, если $e(b) \neq 0$.

Пусть s есть b -сечение. Выберем карту H на X такую, что $\mathrm{or}(H) = \mathrm{or}(X)$ и $e_H = \partial/\partial h^n$ (спрямляющая карта для e). Пусть $\pi_H = a_H dh^1 \wedge \dots \wedge dh^n$. Ясно, что $a_H > 0$. Перейдем теперь к такой же карте G , как при разборе типа II; в этой карте $s_G = (dg^1 \wedge \dots \wedge dg^n, c(g)\partial/\partial g^n)$, причем $c(g) > 0$. Это дает канонический вид сечения $\bar{s}$ (см. § 6).

Пусть $K = T_2$, $Y = \mathrm{GL}_n^0/K = Z^0 \times \mathrm{SL}_n/T_2 = Z^0 \times S_{n-1}^*$. Определим $B^* = \mathbb{R}^0 \times (\mathbb{R}^{n*} - \mathbf{0})$, $\xi: B^* \rightarrow Y$, $\xi_X: E^* = E_X(B^*) \rightarrow P = P_X(Y)$. Адаптированными координатами на E^* назовем координаты $(y^0, t^1, \dots, t^n)$, где t^i – стандартные координаты в пространстве $\mathbb{R}^{n*}$, на котором действует представление ST_n^* . Легко видеть, что сечение $s: X \rightarrow E^*$ можно отождествить с парой (π, ω) , где π и ω – формы соответственно степени n и 1 на X , $\pi > 0$, а ω нигде не обращается в нуль на X . Аналогично, сечение $\bar{s}: X \rightarrow P$ можно отождествить с парой $(\pi, \bar{\omega})$, где π – положительная форма степени n на X , а $\bar{\omega}$ – сферическая форма на X . Скажем, что сечение $s = (\pi, \omega)$ представляет $\bar{s} = (\pi, \bar{\omega})$, если $\xi_X^*(s) = \bar{s}$. Это эквивалентно тому, что ω представляет $\bar{\omega}$.

Тип X ($n = 2a$). Пусть $(\pi, \bar{\omega}) = \bar{s}: X \rightarrow P$ – сечение, а $s = (\pi, \omega)$ представляет $\bar{s}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Сечение $\bar{s}$ называется *b-сечением*, если

$$\omega^{(n-1)}(b) \neq 0. \quad (44)$$

Пусть условие (44) выполнено. Тогда, рассуждая, как и ранее, при разборе типа IV, найдем одинаково ориентированную с X карту F , в которой форма $\varepsilon = \lambda\omega$ имеет вид (40), причем выполнено (41). Запишем

$$\pi_F = \Phi_F df^1 \wedge df^2 \wedge \cdots \wedge df^n;$$

здесь $\Phi_F > 0$. Теперь определим на X новую карту G формулами $g^1 = \Psi(f^1, \dots, f^n)$, $g^{2i-1} = f^{2i-1}/f^1$ при $2 \leq i \leq a$, $g^{2i} = f^{2i}$ при $1 \leq i \leq a$. Определитель j матрицы $J(G/F)$ вычисляется по формуле

$$j = \frac{1}{(f^1)^a} \left(f^1 \frac{\partial \Psi}{\partial f^1} + f^3 \frac{\partial \Psi}{\partial f^3} + \cdots + f^{2a-1} \frac{\partial \Psi}{\partial f^{2a-1}} \right).$$

Найдем функцию Ψ из уравнения $\Phi_F = (f^1 \partial \Psi / \partial f^1 + f^3 \partial \Psi / \partial f^3 + \cdots + f^{2a-1} \partial \Psi / \partial f^{2a-1}) / (f^1)^a$. Форма ω записывается в карте G следующим образом:

$$\omega_G = f^1 \left[dg^2 + \sum_{i=2}^a g^{2i-1} dg^{2i} \right],$$

а $\pi_G = dg^1 \wedge dg^2 \wedge \cdots \wedge dg^n$. Это дает канонический вид сечения $\bar{s}$ (см. § 6).

Тип XI ($n = 2a + 1$). Пусть $(\pi, \bar{\omega}) = \bar{s}: X \rightarrow P$ – сечение, а $s = (\pi, \omega)$ представляет $\bar{s}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Сечение $\bar{s}$ называется *b-сечением*, если

$$\omega^{(n)}(b) \neq 0. \quad (45)$$

Пусть условие (45) выполнено. Из формулы (30) следует, что при любой функции $\lambda > 0$ для $\varepsilon = \lambda\omega$ выполнено условие теоремы Дарбу, и всегда можно выбрать λ так, чтобы либо $\varepsilon^{(n)} = a! \pi$, либо $\varepsilon^{(n)} = -a! \pi$. Заметим, что всегда $\pi > 0$. Тогда при $\varepsilon^{(n)} = a! \pi$ найдется каноническая b -карта H для ε , в которой

$$\varepsilon_H = \sum_{i=1}^a h^{2i-1} dh^{2i} + dh^{2a+1},$$

а при $\varepsilon^{(n)} = -a! \pi$ найдется каноническая b -карта H для ε , в которой

$$\varepsilon_H = \sum_{i=1}^a h^{2i-1} dh^{2i} - dh^{2a+1}.$$

В обоих случаях $\pi_H = dh^1 \wedge dh^2 \wedge \cdots \wedge dh^n$. Это дает две канонические формы для $\bar{s}$ (см. § 6).

Тип XII. Здесь $K = H_{1d}$; в этом случае $Y = \text{GL}_n^0 / K = \mathbb{R}_d^n$ (см. п. 4.3). Действие матрицы g группы $\text{GL}_n^0 = G$ на вектор-столбец $x \in \mathbb{R}^n - \mathbf{0} \cong \mathbb{R}_d^n$ задается формулой $g(x) = v$, где $v = \det(g_j^i)^{(d-1)/n} gx$. Адаптированная система координат на Y есть стандартная система координат в $\mathbb{R}^n$. Легко понять, что при

таким выборе адаптированной системы координат сечение $s: X \rightarrow P = P_X(Y)$ можно отождествить с ненулевым векторным полем e' , имеющим модифицированный закон преобразования при изменении координатной системы: при переходе от карты F к карте H с якобиевой матрицей перехода $J = J(H/F)$ и определителем $j = \det J > 0$ мы имеем

$$e'_H = j^{(d-1)/n} J e'_F. \quad (46)$$

Геометрическую структуру e' будем называть *квазиполем*. Выберем на X какую-нибудь карту F и рассмотрим на X настоящее векторное поле e такое, что $e_F = e'_F$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Для $d \neq 1 - n$ квазиполе e' назовем *b-квазиполем*, если $e(b) \neq 0$.

Пусть e' является *b-квазиполем*. Выберем одинаково ориентированную с X карту $V \ni b$ такую, что $e = \partial/\partial v^1$. Ясно, что запись e' в карте V имеет вид $e'_V = (R, 0, \dots, 0)$, причем $R = R(v) > 0$. Зададим карту H условиями $h^1 = \Psi(v)$, $h^i = v^i$ при $i > 1$. Пусть $J = J(H/V)$, $j = \det J$; тогда ясно, что $j = \partial\Psi/\partial v^1$ и $J e'_V = \partial\Psi/\partial v^1 (e'_V)$, поэтому $e'_H = (\partial\Psi/\partial v^1)^{(n+d-1)/n} R$. Отсюда при $d \neq 1 - n$ выбором функции Ψ всегда можно добиться того, чтобы $e'_H = (1, 0, \dots, 0)$; для этого достаточно, чтобы Ψ удовлетворяло уравнению $(\partial\Psi/\partial v^1) = R^{n/(n+d-1)}$. Это дает канонический вид сечения e' .

Пусть $d = 1 - n$. Тогда из равенства (46) имеем

$$e'_H = j^{-1} J e'_F. \quad (47)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть $d = 1 - n$. Фиксируем квазиполе e' с условием $e'(b) \neq 0$. Назовем карту W *специальной* (для квазиполя e'), если $\text{or}(W) = \text{or}(X)$, $W \ni b$, в карте W отлична от нуля только первая компонента e'_W , т.е. $e'_W = (S, 0, \dots, 0)$, и, кроме того, $S > 0$. Ясно, что специальные карты существуют. Первую компоненту квазиполя e' в любой специальной карте F вместо e'_F будем обозначать через S_F . Квазиполе e' называется *b-квазиполем*, если $e'(b) \neq 0$ и существует такая специальная карта V , что выполнено условие $[\partial S_V/\partial v^1](b) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Если e' является *b-квазиполем*, то условие $[\partial S_F/\partial f^1](b) \neq 0$ выполнено для любой специальной карты F .

Действительно, для такой карты F якобиева матрица $J = J(F/V)$ удовлетворяет условиям $\partial f^2/\partial v^1 = 0, \dots, \partial f^n/\partial v^1 = 0$. Поэтому $j = \det J = (\partial f^1/\partial v^1)t$, где $t = \det(\partial f^i/\partial v^j)$, $2 \leq i, j \leq n$, и из формулы (47) следует $S_F = t^{-1} S_V$. Поскольку t не зависит от v^1 , дифференцируя последнее равенство по v^1 , получим

$$\frac{\partial S_F}{\partial f^1} \frac{\partial f^1}{\partial v^1} = t^{-1} \frac{\partial S_V}{\partial v^1},$$

что доказывает замечание.

Пусть e' является *b-квазиполем*, а V — специальная карта. Выберем специальную *b*-карту F , положив $f^2 = S_V(b)(v^2 - v^2(b))$, $f^i = v^i - v^i(b)$ для $3 \leq i \leq n$.

Теперь для случая $[\partial S_V/\partial v^1](b) > 0$ возьмем $f^1 = S_V(v)/S_V(b) - 1$, а для случая $[\partial S_V/\partial v^1](b) < 0$ возьмем $f^1 = 1 - S_V(v)/S_V(b)$. Таким образом получаем две неэквивалентные канонические формы: $e'_F = (1 \pm f^1, 0, \dots, 0)$.

Пусть $K = H_{2d}$; в этом случае $Y = \text{GL}_n^0/K$. Мы будем обозначать $Y = \mathbb{R}_d^{n*}$ (см. п. 4.4). Можно считать, что $\mathbb{R}_d^{n*}$ есть пространство $\mathbb{R}^{n*} - \mathbf{0}$, а действие матрицы g группы $\text{GL}_n^0 = G$ на вектор-строку $x \in \mathbb{R}^{n*}$ задается формулой $g(x) = v$, где $v = xg^{-1} \det(g_j^i)^{(d-1)/n}$. Адаптированная система координат на Y есть стандартная система координат в $\mathbb{R}^{n*}$. Отсюда легко выводится, что сечение $s: X \rightarrow P = P_X(Y)$ можно отождествить с ненулевой дифференциальной 1-формой μ на X с модифицированным законом преобразования при изменении координатной системы: при переходе от карты F к карте H с якобиевой матрицей перехода $J = J(H/F)$ и определителем $j = \det J > 0$ мы имеем

$$\mu_H = j^{(d-1)/n} (J^T)^{-1} \mu_F. \quad (48)$$

1. Пусть $d = 1$. В этом случае μ – обычная 1-форма, каноническая форма которой при условии $\mu^{(n)}(b) \neq 0$, $\mu(b) \neq 0$, являющемся условием достаточной общности формы μ в точке b , приведена ранее. Именно, при $n = 2a$ в подходящей b -карте V форма μ приводится к одной из двух неэквивалентных канонических форм: (35) или (36). Если $n = 2a + 1$, то в подходящей b -карте V форма μ приводится к одной из двух неэквивалентных канонических форм: (37) или (38). Эти случаи различаются знаком формы $\mu^{(n)}$.

2. Пусть $d \neq 1$. Обозначим $(d-1)/n = u \neq 0$. Геометрическую структуру μ будем называть *квазиформой*. Пусть $F \ni b$ – одинаково ориентированная с X карта и ω – обыкновенная 1-форма на X такая, что $\omega_F = \mu_F$. Обозначим $\mu_{(F)}^{(k)} = \omega^{(k)}$. Будем считать, что $\mu_{(F)}^{(k)}$ – обыкновенная k -форма, но она зависит от карты F , использованной для ее определения: при замене F картой H с якобиевой матрицей перехода $J = J(H/F)$, определителем $j = \det J > 0$ и $\lambda = j^u$ мы имеем

$$\mu_{(H)}^{(k)} = \begin{cases} \lambda^c \mu_{(F)}^{(k)} + c \lambda^{c-1} d\lambda \wedge \mu_{(F)}^{(k-1)} & \text{при } k = 2c, \\ \lambda^{c+1} \mu_{(F)}^{(k)} & \text{при } k = 2c + 1. \end{cases} \quad (49)$$

Несмотря на то, что определение $\mu_{(F)}^{(k)}$ зависит от выбора F , свойство $\mu_{(F)}^{(k)}(b) \neq 0$ при нечетных k от этого не зависит. Поскольку X ориентировано, для нечетного $n = \dim X$ форма $\mu_{(F)}^{(n)}(b)$ имеет знак, также не зависящий от F и сохраняющийся при сохраняющих ориентацию заменах координат. Поэтому при нечетных k , n имеет смысл запись $\mu^{(k)}(b) \neq 0$, $\mu^{(n)}(b) > 0$.

Тип XIII ($n = 2a$). Рассмотрение этого типа начнем с определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Сечение μ называется *b-сечением*, если $\mu^{(n-1)}(b) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Поскольку $n-1$ нечетно, условие $\mu^{(n-1)}(b) \neq 0$ влечет условие $\mu(b) \neq 0$.

Пусть μ является b -сечением. Выберем какую-нибудь одинаково ориентированную с X карту $F \ni b$ и построим по ней $\mu_{(F)}^{(k)}$. Покажем, что можно найти одинаково ориентированную с X карту H такую, что $\mu_{(H)}^{(n)}(b) > 0$. Будем искать

карту H в виде $h^1 = \Phi(f)$, $h^i = f^i$ при $i > 1$. Тогда $j = \det[J(H/F)] = \partial\Phi/\partial f^1$. Из формулы (49) при $k = n$ следует

$$\mu_{(H)}^{(n)} = \lambda^{a-1} (\lambda \mu_{(F)}^{(n)} + a d\lambda \wedge \mu_{(F)}^{(n-1)}).$$

Так как $\mu_{(F)}^{(n-1)}(b) \neq 0$, можно выбрать функцию $\lambda > 0$ такую, что $[\lambda \mu_{(F)}^{(n)} + a d\lambda \wedge \mu_{(F)}^{(n-1)}](b) > 0$, а затем найти Φ из соотношения $\partial\Phi/\partial f^1 = \lambda^{1/u}$. Это обеспечит выполнение условия $\mu_{(H)}^{(n)}(b) > 0$.

Обозначим $\varepsilon = \mu_{(H)}$. Поскольку $\varepsilon^{(n)}(b) > 0$, $\varepsilon(b) \neq 0$, по теореме Дарбу перейдем к одинаково ориентированной с X карте V , в которой ε имеет канонический вид $\varepsilon_V = \sum_{i=1}^a v^{2i-1} dv^{2i}$. Согласно (48) $\mu_V = \Psi \varepsilon_V$, где Ψ – скалярная функция, $\Psi(b) > 0$, а конкретный вид Ψ нам неважен. Будем искать карту W в виде $w^{2i-1} = \Theta(v)v^{2i-1}$, $w^{2i} = v^{2i}$ при $1 \leq i \leq a$. Несложно найти прямым вычислением определитель j якобиевой матрицы $J = J(W/V)$:

$$j = \Theta^{a-1} \left(\Theta + v^1 \frac{\partial \Theta}{\partial v^1} + \dots + v^{2a-1} \frac{\partial \Theta}{\partial v^{2a-1}} \right).$$

Непосредственно выполняя замену переменных, получаем

$$\varepsilon_W = \Theta^{-1} \left(\sum_{i=1}^a w^{2i-1} dw^{2i} \right).$$

Поэтому $\mu_W = j^u J \mu_V = j^u \Psi J \varepsilon_V = j^u \Psi \varepsilon_W$. Найдем Θ из условия $j^u \Psi = \Theta$, эквивалентного квазилинейному уравнению в частных производных:

$$\Theta^{a-1} \left(\Theta + v^1 \frac{\partial \Theta}{\partial v^1} + \dots + v^{2a-1} \frac{\partial \Theta}{\partial v^{2a-1}} \right) = \left(\frac{\Theta}{\Psi} \right)^{1/u}$$

при условии $\Theta > 0$. Это уравнение имеет решение Θ с условием $\Theta(b) > 0$. Поэтому $\text{or}(W) = \text{or}(X)$ и квазиформа μ имеет в карте W канонический вид $\mu_W = \sum_{i=1}^a w^{2i-1} dw^{2i}$.

Для нахождения канонического вида μ рассмотрим дифференциальную 1-форму, которая в карте W имеет вид $\sum_{i=1}^a w^{2i-1} dw^{2i}$. По лемме 11 найдем такую b -карту Z , в которой эта форма имеет вид $(1 + z^1) dz^2 + \sum_{i=2}^a z^{2i-1} dz^{2i}$, причем якобиан перехода $J(Z/W)$ имеет определитель, равный 1. Очевидно,

$$\mu_Z = (1 + z^1) dz^2 + \sum_{i=2}^a z^{2i-1} dz^{2i}.$$

Это дает канонический вид сечения μ .

Тип XIV ($n = 2a + 1$). Рассмотрение этого типа начнем с определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. При условии $u(a+1) \neq 1$ квазиформа $\mu: X \rightarrow P = P_X(Y)$ будет называться b -сечением, если $\mu^{(n)}(b) \neq 0$.

Пусть μ является b -сечением. Выберем какую-нибудь одинаково ориентированную с X карту $F \ni b$. Пусть ε – 1-форма такая, что $\varepsilon_F = \mu_F$. Запишем

$\varepsilon^{(n)} = \Phi df^1 \wedge df^2 \wedge \dots \wedge df^n$. Предположим, что $\Phi(b) > 0$. Пусть Ψ – произвольная (пока) функция на X такая, что $\Psi(b) > 0$. По теореме Дарбу найдется одинаково ориентированная с X карта V , в которой форма $\Psi\varepsilon$ имеет канонический вид:

$$(\Psi\varepsilon)_V = \sum_{i=1}^a v^{2i-1} dv^{2i} + dv^{2a+1}.$$

Тогда имеем

$$(\Psi\varepsilon)_V^{(n)} = a! dv^1 \wedge dv^2 \wedge \dots \wedge dv^{2a+1}. \quad (50)$$

Ясно, что

$$(\Psi\varepsilon)_F^{(n)} = \Psi^{a+1} \varepsilon_F^{(n)} = \Psi^{a+1} \Phi df^1 \wedge df^2 \wedge \dots \wedge df^{2a+1}. \quad (51)$$

Обозначим $J = J(V/F)$, $j = \det J$. Сравнивая формулы (51) и (50), получаем $a!j = \Psi^{a+1}\Phi$. Имеем

$$\begin{aligned} \mu_V &= j^u (J^T)^{-1} \varepsilon_F = \Psi^{-1} [(\Psi^{a+1}\Phi)(a!)^{-1}]^u (J^T)^{-1} (\Psi\varepsilon)_F \\ &= (a!)^{-u} \Psi^{u(a+1)-1} \Phi^u (\Psi\varepsilon)_V. \end{aligned}$$

Найдем функцию $\Psi > 0$ из условия $\Psi^{u(a+1)-1} = \Phi^{-u}(a!)^u$. Это можно сделать, если $u(a+1) - 1 \neq 0$. В этом случае обязательно $\text{or}(V) = \text{or}(X)$ и в карте V квазиформа μ имеет канонический вид $\mu_V = \sum_{i=1}^a v^{2i-1} dv^{2i} + dv^{2a+1}$. Предположим теперь, что $\Phi(b) < 0$. Снова по теореме Дарбу найдем одинаково ориентированную с X карту V , для которой $(\Psi\varepsilon)_V = \sum_{i=1}^a v^{2i-1} dv^{2i} - dv^{2a+1}$. Тогда

$$(\Psi\varepsilon)_V^{(n)} = -a! dv^1 \wedge dv^2 \wedge \dots \wedge dv^{2a+1}.$$

Так же, как и выше, получим $a!j = -\Psi^{a+1}\Phi$ и найдем функцию $\Psi > 0$ из условия $\Psi^{u(a+1)-1} = (-\Phi)^{-u}(a!)^u$; тогда $\text{or}(V) = \text{or}(F)$ и в карте V квазиформа μ имеет канонический вид $\mu_V = \sum_{i=1}^a v^{2i-1} dv^{2i} - dv^{2a+1}$. Две полученные канонические формы не переводятся одна в другую, так как $\mu^{(n)}$ имеет для них разные знаки. Так же, как и ранее, применяя лемму 11, мы можем считать, что каноническая карта V центрирована в точке b .

Остается разобрать случай $u(a+1) - 1 = 0$. Тогда формула (48) имеет вид

$$\mu_H = j^{1/(a+1)} (J^T)^{-1} \mu_F. \quad (52)$$

Пусть квазиформа $\mu: X \rightarrow P = P_X(Y)$ удовлетворяет условию $\mu^{(n)}(b) \neq 0$. Выберем какую-нибудь одинаково ориентированную с X карту $F \ni b$ и рассмотрим 1-форму ω такую, что $\omega_F = \mu_F$. Запишем:

$$\omega^{(n)} = \Omega(f^1, \dots, f^n) df^1 \wedge df^2 \wedge \dots \wedge df^{2a+1}. \quad (53)$$

Мы утверждаем, что при условии $u(a+1) = 1$ скалярная функция $\Omega = \Omega(f^1, \dots, f^n)$ является дифференциальным инвариантом (порядка 1). Действительно, рассмотрим другую одинаково ориентированную с X карту H и 1-форму α такую, что $\alpha_H = \mu_H$. Из (52) получаем $\alpha_H = \mu_H = j^{1/(1+a)} \omega_H$, поэтому из (30) имеем $\alpha^{(n)} = j\omega^{(n)}$. Однако из (53) следует

$$\omega^{(n)} = \Omega j^{-1} dh^1 \wedge dh^2 \wedge \dots \wedge dh^{2a+1}.$$

Значит, $\alpha^{(n)} = \Omega dh^1 \wedge dh^2 \wedge \dots \wedge dh^{2a+1}$, что и требовалось доказать.

Дифференциальный инвариант, построенный по квазиформе μ , будем обозначать Ω_μ или просто Ω , когда ясно, по какой квазиформе μ построено Ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. При условии $u(a+1) = 1$ сечение μ будем называть b -сечением, если:

- 1) $\mu^{(n)}(b) \neq 0$;
- 2) $\Omega(b) \neq 0$;
- 3) $[d\Omega \wedge \mu^{(n-2)}](b) \neq 0$.

Пусть μ является b -сечением. Выберем какую-нибудь одинаково ориентированную с X карту $V \ni b$ и рассмотрим 1-форму ω такую, что $\omega_V = \mu_V$. На X найдется b -карта F , в которой ω имеет канонический вид; предположим, что

$$\mu_F = \beta \omega_F = \beta \left(\sum_{i=1}^a f^{2i-1} df^{2i} + df^{2a+1} \right),$$

где $\beta > 0$ – скалярная функция. Тогда

$$[\beta\omega]_F^{(n)} = \beta^{a+1} a! df^1 \wedge df^2 \wedge \dots \wedge df^{2a+1},$$

и поэтому $\Omega = a! \beta^{a+1}$. Пусть $\beta\omega = \varepsilon$. Рассмотрим произвольную (пока) скалярную функцию $\alpha > 0$ и будем искать каноническую карту H на X для 1-формы $\alpha\varepsilon$. Вторая координатная функция h^2 карты H находится из соотношения $dh^2 \wedge (\alpha\varepsilon)^{(2a)} = 0$, которое переписывается в виде

$$\alpha dh^2 \wedge \varepsilon^{(2a)} - a dh^2 \wedge d\alpha \wedge \varepsilon^{(2a-1)} = 0.$$

Будем искать такую функцию α , для которой $h^2 = \beta$. Искомая функция α является решением уравнения

$$\alpha d\beta \wedge \varepsilon^{(2a)} - a d\beta \wedge d\alpha \wedge \varepsilon^{(2a-1)} = 0. \quad (54)$$

Это квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка относительно α . Тривиальное вычисление показывает, что условие 3) определения 18 влечет $d\beta \wedge \varepsilon^{(2a-1)} \neq 0$, поэтому уравнение (54) нетривиально содержит хотя бы одну частную производную $\partial\alpha/\partial f^i$. Итак, искомая функция $\alpha > 0$ существует. Далее, следуя доказательству теоремы Дарбу (см. [13]), мы строим координатную систему $H = (h^1, \dots, h^n)$ такую, что:

- 1) $h^2 = \beta$;
- 2) $(\alpha\varepsilon)_H = (\alpha\beta\omega)_H = \sum_{i=1}^a h^{2i-1} dh^{2i} + dh^{2a+1}$.

Обозначим $J = J(H/F)$, $j = \det J$. Имеем

$$(\alpha\beta\omega)_F^{(n)} = a! \alpha^{a+1} \beta^{a+1} \omega_F^{(n)} = a! \alpha^{a+1} \beta^{a+1} df^1 \wedge df^2 \wedge \dots \wedge df^{2a+1}.$$

Поскольку запись $(\alpha\beta\omega)_H$ каноническая, то

$$(\alpha\beta\omega)_H^{(n)} = a! dh^1 \wedge dh^2 \wedge \dots \wedge dh^{2a+1}.$$

Отсюда $j = \alpha^{a+1} \beta^{a+1}$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \mu_H &= j^{1/(a+1)} (J^T)^{-1} \mu_F = j^{1/(a+1)} (J^T)^{-1} \varepsilon_F \\ &= \alpha^{-1} j^{1/(a+1)} (J^T)^{-1} (\alpha\varepsilon)_F = \alpha^{-1} j^{1/(a+1)} (\alpha\varepsilon)_H. \end{aligned}$$

Подставляя сюда значения $j = \alpha^{a+1}\beta^{a+1}$ и $(\alpha\varepsilon)_H = \sum_{i=1}^a h^{2i-1} dh^{2i} + dh^{2a+1}$, получаем

$$\mu_H = \alpha^{-1}\alpha\beta \left(\sum_{i=1}^a h^{2i-1} dh^{2i} + dh^{2a+1} \right).$$

Ясно, что $\text{or}(H) = \text{or}(X)$. С учетом $\beta = h^2$ это дает первый канонический вид

$$\mu_H = h^2 \left(\sum_{i=1}^a h^{2i-1} dh^{2i} + dh^{2a+1} \right)$$

сечения μ .

Остается разобрать случай, когда при переходе к карте F (см. выше)

$$\mu_F = \beta\omega_F = \beta \left(\sum_{i=1}^a f^{2i-1} df^{2i} - df^{2a+1} \right), \quad \beta > 0.$$

В этом случае $\Omega = -a!\beta^{a+1}$. Снова обозначим $\beta\omega = \varepsilon$ и будем искать координатную систему $H = (h^1, \dots, h^n)$ такую, что $\text{or}(H) = \text{or}(X)$ и:

1) $h^2 = \beta$;

2) $(\alpha\varepsilon)_H = (\alpha\beta\omega)_H = \sum_{i=1}^a h^{2i-1} dh^{2i} - dh^{2a+1}$.

Далее рассуждения аналогичны предыдущим. Таким образом получается вторая канонический форма

$$\mu_H = h^2 \left(\sum_{i=1}^a h^{2i-1} dh^{2i} - dh^{2a+1} \right)$$

сечения μ . Ясно, что эти канонические формы неэквивалентны, так как инвариант Ω в первом случае равен $a!(h^2)^{a+1}$, а во втором он равен $-a!(h^2)^{a+1}$. Мы можем перейти к центрированной карте V , полагая $\lambda^i = h^i(b)$ для $1 \leq i \leq 2a+1$ и задавая координаты формулами:

1) в случае $\mu_H = h^2(\sum_{i=1}^a h^{2i-1} dh^{2i} + dh^{2a+1})$ полагаем $v^i = h^i - \lambda^i$ для $1 \leq i \leq 2a$,

$$v^{2a+1} = h^{2a+1} + \sum_{i=1}^a \lambda^{2i-1} h^{2i} - \lambda^{2a+1} - \sum_{i=1}^a \lambda^{2i-1} \lambda^{2i};$$

2) в случае $\mu_H = h^2(\sum_{i=1}^a h^{2i-1} dh^{2i} - dh^{2a+1})$ полагаем $v^i = h^i - \lambda^i$ для $1 \leq i \leq 2a$,

$$v^{2a+1} = h^{2a+1} - \sum_{i=1}^a \lambda^{2i-1} h^{2i} - \lambda^{2a+1} + \sum_{i=1}^a \lambda^{2i-1} \lambda^{2i}.$$

В карте V канонические формы имеют вид

$$\mu_V = (v^2 + \lambda^2) \left(\sum_{i=1}^a v^{2i-1} dv^{2i} \pm dv^{2a+1} \right),$$

а инварианты соответственно равны $\Omega = \pm a!(v^2 + \lambda^2)^{a+1}$.

После того как мы нашли канонические формы специальных структур первого порядка, перейдем к структурам высшего порядка. Согласно теореме 4 не существует специальных расслоений геометрических структур порядка, большего двух, и существует два неизоморфных специальных расслоения геометрических структур порядка два. Оба эти расслоения задаются подгруппами H'_1 и H'_2 группы Af_n (см. п. 4.8). Опишем их. Обозначим теперь $G = G^2(n)^0$.

Определим гомоморфизм $\varepsilon: \text{Af}_n \rightarrow \text{GL}_{n+1}$. Сопоставим набору $p = (A, a) \in \text{Af}_n$ матрицу

$$\varepsilon(p) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad (55)$$

порядка $n + 1$. Вложение ε есть изоморфизм Af_n на подгруппу B_n группы GL_{n+1} , состоящую из матриц, последний столбец которых равен нулю, кроме нижнего элемента главной диагонали, который равен 1 (остальные элементы матриц произвольны). Группа GL_{n+1} действует на $\mathbb{R}^{n+1}$ с помощью тождественного представления ST_{n+1} .

Тип XV. Сфера S_n в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ отождествляется с множеством лучей в $\mathbb{R}^{n+1}$, и поэтому ограничение представления ST_{n+1} на B_n индуцирует с помощью вложения ε действие Af_n на S_n . При этом действии точки $Q_1 = (0, \dots, 1)$ и $Q_2 = (0, \dots, -1)$ неподвижны, а на дополнении $Y = S_n - Q_1 - Q_2$ группа Af_n действует транзитивно. Стационарная подгруппа K точки $(1, \dots, 0)$ для этого действия переходит при вложении ε в подгруппу группы B_n , состоящую из матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ таких, что A сохраняет плоскость $x^1 = 0$, т.е. все элементы первого столбца матрицы A , кроме a_1^1 , равны нулю, и первая координата a_1 вектора $a = (a_i)$ также равна нулю. Значит, K сохраняет плоскость $x^1 = 0$ при действии Af_n на $\mathbb{R}^{n*}$, заданном формулой (22) и поэтому согласно п. 4.8 совпадает с подгруппой H'_2 . Итак, $Y = \text{Af}_n/H'_2$ – эталонное пространство типа XV, причем эпиморфизм $\phi: G \rightarrow \text{Af}_n$ из п. 4.6 индуцирует совместимый с ϕ изоморфизм однородных пространств $\text{Af}_n/H'_2 \approx G/H_2$.

Опишем действие G на Y . Отождествим S_n со сферой единичного радиуса в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $t^1, \dots, t^{n+1}$ – стандартные координаты в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тем самым каждая точка $y \in Y$, рассматриваемая как точка S_n , снабжается $n + 1$ координатами $z^1, \dots, z^{n+1}$. Введем на множестве Y координаты $y^i = z^i/(1 - z^{n+1})$ при $1 \leq i \leq n$ (стереографическая проекция сферы из точки Q_1). Это и будут адаптированные координаты на Y . Элемент $p = (A, a) \in \text{Af}_n$ переводит точку $y \in Y$ с координатами $(y^1, \dots, y^n)$ в точку $py = v \in Y$, адаптированные координаты v^i которой определяются следующим образом. Пусть z – та же точка y , снова рассматриваемая как точка единичной сферы S_n в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, с координатами $z^1, \dots, z^{n+1}$. Образ $w = pz = (w^1, \dots, w^{n+1})$ точки z под действием элемента $p \in \text{Af}_n$ имеет координаты $w^i = h_j^i z^j$ при $1 \leq i \leq n$, $w^{n+1} = z^{n+1} + a_j z^j$, где $A = (h_j^i)$. Пусть луч, проходящий через точку w , пересекает сферу S_n в точке $u = (u^i)$. Тогда $u^i = w^i/r$, $r = \sqrt{(w^1)^2 + \dots + (w^{n+1})^2}$ и $v^i = u^i/(1 - u^{n+1})$ при $1 \leq i \leq n$. Таким образом видно, что координаты v^i образа v точки y выражаются по формуле

$$v^i = (h_j^i y^j) R(y^1, \dots, y^n; p). \quad (56)$$

Здесь R – функция от y^i и p , вид которой нам пока неважен.

Итак, мы видим, что адаптированные координаты любой точки $y \in Y$:

- 1) имеют конечные значения, не все одновременно равные нулю;
- 2) преобразуются при действии группы G как координаты вектора с точностью до скалярного множителя.

Поэтому сечение $s: X \rightarrow P = P_X(Y)$ можно рассматривать как векторное поле на X с модифицированным законом преобразования при изменении координат, задаваемым формулой (56). Назовем такую геометрическую величину *псевдополем*.

Пусть $s: X \rightarrow P$ – любое псевдополе, заданное в окрестности точки $b \in X$. Выберем какую-нибудь одинаково ориентированную с X карту $N \ni b$ и рассмотрим векторное поле e на X такое, что $e_N = s_N$. Как уже отмечалось, $s_N \neq 0$, поэтому $e_N \neq 0$. Значит, можно выбрать карту Q такую, что $\text{or}(Q) = \text{or}(X)$ и $e_Q = \partial/\partial q^1$. Поэтому $s_Q = (\Psi(q), 0, \dots, 0)$, $\Psi(q) \neq 0$. Перейдем к карте F , заданной условиями $\text{or}(F) = \text{or}(X)$, $f^1 = \Phi(q)$, $f^i = q^i$ при $i > 1$. Функция Φ будет вскоре задана.

Переход от карты Q к карте F определяет элемент h группы G по формуле $h = (h_j^i, h_{jk}^i)$, где

$$(h_j^i) = \begin{pmatrix} h_1^1 & h_2^1 & h_3^1 & \dots & h_{n-1}^1 & h_n^1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$h_j^1 = \frac{\partial \Phi}{\partial q^j}, \quad h_{jk}^1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^j \partial q^k}, \quad (57)$$

$h_j^i = \delta_j^i$ при $i > 1$, $h_{jk}^i = 0$ при $i > 1$.

Матрица $D = (d_j^i)$, обратная к матрице $A = (h_j^i)$, имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} d_1^1 & \dots & d_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ d_1^n & \dots & d_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h_1^1)^{-1} & -(h_1^1)^{-1}h_2^1 & -(h_1^1)^{-1}h_3^1 & \dots & -(h_1^1)^{-1}h_n^1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления $p = (A, a) = \phi(h) \in \text{Af}_n$ необходимо по формуле (20) найти $a = (a_j) = (\sum_{s,u} d_s^u h_{ju}^s)$. Ясно, что $a_j = d_1^1 h_{j1}^1 = (h_1^1)^{-1} h_{j1}^1$. Теперь необходимо найти координаты v^i элемента $v = py$ для $y = (y^i)$, где $y^1 = \Psi(q)$, $y^i = 0$ при $i > 1$. Для этого сначала найдем $z = (z^i)$. Ясно, что $z^i = 0$ для $i > 1$. Из условия $(z^1)^2 + (z^{n+1})^2 = 1$, $z^1 = y^1(1 - z^{n+1})$, имеем

$$z^1 = \frac{2y^1}{(y^1)^2 + 1}, \quad z^{n+1} = 1 - \frac{2}{(y^1)^2 + 1}. \quad (58)$$

Получим теперь координаты элемента $w = pz = (w^i)$. Ясно, что $w^1 = z^1 h_1^1$, $w^i = v^i = 0$ при $2 \leq i \leq n$,

$$w^{n+1} = z^{n+1} + a_1 z^1 = z^{n+1} + z^1 (h_1^1)^{-1} h_{11}^1. \quad (59)$$

Определим теперь функцию $\Phi(q)$ из условия $w^{n+1} \equiv 0$. Подставив (57) и (58) в формулу (59), получим

$$1 - 2[(y^1)^2 + 1]^{-1} + (h_1^1)^{-1} h_{11}^1 \cdot 2y^1 [(y^1)^2 + 1]^{-1} = 0,$$

откуда имеем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $h_1^1(q) = \frac{\partial \Phi}{\partial q^1}$:

$$h_1^1 [(\Psi(q))^2 - 1] + 2\Psi(q) \frac{\partial h_1^1}{\partial q^1} = 0.$$

Поскольку $\Psi(q) \neq 0$, можно найти решение $h_1^1(q)$ этого уравнения с условием $h_1^1(b) > 0$. Получив это решение, найдем функцию $\Phi(q)$ из условия $h_1^1(q) = \frac{\partial \Phi}{\partial q^1}$. Тогда переход к карте F сохраняет ориентацию. Легко видеть, что условие $w^{n+1} \equiv 0$ влечет $u^{n+1} \equiv 0$ и $v^1(q) \equiv 1$. Таким образом, в построенной карте сечение s имеет канонический вид $s = (1, 0, \dots, 0)$. Разбор типа XV закончен.

Для рассмотрения следующих типов отметим, что второе необходимое нам однородное пространство $Y = G/H_2 = \text{Af}_n/H_1^1$ уже было построено в п. 4.8. Действительно, пространство $\mathbb{R}^{n*}$, на котором Af_n действует по формуле (22), и есть Y , поскольку это действие транзитивно и стационарная подгруппа точки $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n*}$ совпадает с $H_1^1 = (\text{GL}_n^0, 0)$. В качестве адаптированной системы координат на Y берем стандартную систему координат в $\mathbb{R}^{n*}$.

Будем называть сечения $s: X \rightarrow P = P_X(Y)$ *псевдоформами*. Пусть $F \ni b$ и $V \ni b$ – какие-нибудь одинаково ориентированные с X карты. Из формулы (22) следует, что для нахождения закона преобразования от $s_F = (s_{F1}, \dots, s_{Fn})$ к $s_V = (s_{V1}, \dots, s_{Vn})$ следует найти элемент $h \in G$, отвечающий переходу от F к V , затем взять элемент $p = (A, a) = \phi(h) \in \text{Af}_n$, а затем – элемент $w = p^{-1} = (A^{-1}, -aA^{-1})$; тогда получим

$$s_V = s_F w = s_F D + d, \quad D = A^{-1}, \quad d = -aA^{-1}. \quad (60)$$

Обозначим $h^{-1} = f$; ясно, что $\phi(f) = w$. Пусть $f = (f_j^i, f_{jk}^i) \in G$. Здесь $f_j^i = \frac{\partial f^i}{\partial v^j}$, $f_{jk}^i = \frac{\partial^2 f^i}{\partial v^j \partial v^k}$. Если $A = (v_j^i)$ – матрица, обратная к $D = (f_j^i)$, то согласно формуле (20) имеем $w = (D, d)$, где $d = (d_j)$, а

$$d_j = \sum_{s,u} v_s^u f_{ju}^s. \quad (61)$$

ЛЕММА 12. Пусть $\Psi(v) = \ln[\det(D)]$. Тогда $d_j = \frac{\partial \Psi}{\partial v^j}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $R = \det(D)$. Тогда $\frac{\partial \Psi}{\partial v^j} = (R^{-1}) \frac{\partial R}{\partial v^j}$. Пользуясь правилом дифференцирования определителя, запишем

$$\frac{\partial R}{\partial v^j} = \begin{vmatrix} f_{1j}^1 & \dots & f_{nj}^1 \\ f_1^2 & \dots & f_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^n & \dots & f_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1^1 & \dots & f_n^1 \\ f_{1j}^2 & \dots & f_{nj}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^n & \dots & f_n^n \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} f_1^1 & \dots & f_n^1 \\ f_1^2 & \dots & f_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{1j}^n & \dots & f_{nj}^n \end{vmatrix}.$$

Разложив s -е слагаемое по s -й строке и учитывая, что алгебраическое дополнение D_u^s к элементу f_u^s равно Rv_s^u , получим

$$\frac{\partial R}{\partial v^j} = R \sum_{s,u} v_s^u f_{ju}^s.$$

Лемма доказана.

Пусть $s: X \rightarrow P = P_X(Y)$ – псевдоформа, $F \ni b$ – произвольная одинаково ориентированная с X карта. Обозначим через ω 1-форму на X такую, что $s_F = \omega_F$. Как обычно, мы понимаем s_F и ω_F как вектор-строки; напомним, что $\omega_V = \omega_F D$. Тогда из леммы 12 с учетом формул (60) следует, что

$$s_V = \omega_V + d\Psi. \quad (62)$$

Тип XVI ($n = 2a$). Пусть s , F и ω такие, как только что определенные. Обозначим $s^{(n)} = \omega^{(n)}$. Заметим, что $s^{(n)}$ – корректно определенная n -форма на X . Действительно, взяв на X другую карту V и 1-форму ε с условием $s_V = \varepsilon_V$, согласно (62) получим $\varepsilon_V = \omega_V + d\Psi$, откуда имеем $\varepsilon^{(n)} = \omega^{(n)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Псевдоформу s будем называть b -сечением, если $s^{(n)}(b) \neq 0$ и выполняется дополнительное требование, которое будет сформулировано далее.

Пусть s – b -сечение, F и ω такие, как определенные выше. Перейдем к канонической для ω одинаково ориентированной с X карте V ; тогда $s_V = \omega_V + d\Psi$. Пусть сначала $\omega_V = \sum_{i=1}^a v^{2i-1} dv^{2i}$. Обозначим 1-форму $\omega + d\Psi$ через ε . Ясно, что $\omega^{(n)}(b) = \varepsilon^{(n)}(b) \neq 0$, поэтому по теореме Дарбу существует карта H , в которой ε имеет канонический вид $\varepsilon_H = \sum_{i=1}^a h^{2i-1} dh^{2i}$. Определитель j матрицы Якоби $J(H/V)$ равен 1. Действительно,

$$\varepsilon_V^{(n)} = (a!) dv^1 \wedge \cdots \wedge dv^{2a}, \quad \varepsilon_H^{(n)} = (a!) dh^1 \wedge \cdots \wedge dh^{2a},$$

поэтому $j = 1$. Из леммы 12 теперь имеем, что $s_H = \varepsilon_H = \sum_{i=1}^a h^{2i-1} dh^{2i}$ тоже имеет канонический вид.

Осталось разобрать случай, когда $\omega_V = -v^1 dv^2 + \sum_{i=2}^a v^{2i-1} dv^{2i}$. Опять полагаем $\varepsilon = \omega + d\Psi$ и переходим к карте H , в которой ε имеет канонический вид $\varepsilon_H = -h^1 dh^2 + \sum_{i=2}^a h^{2i-1} dh^{2i}$, и так же получаем канонический вид $s_H = -h^1 dh^2 + \sum_{i=2}^a h^{2i-1} dh^{2i}$. Ясно, что полученные канонические формы сечения s неэквивалентны, так как отличаются знаком $s^{(n)}$.

Теперь мы можем сформулировать дополнительное требование, входящее в определение b -сечения, о котором шла речь выше. Оно состоит в том, что в какой-нибудь канонической карте F выполняется условие $s_F(b) \neq 0$. Тогда оно выполнено в любой другой канонической карте W , поскольку определитель j матрицы перехода от W к F тождественно равен 1. Действительно, $s_F^{(n)} = a_F df^1 \wedge \cdots \wedge df^{2a}$, $s_W^{(n)} = a_W dw^1 \wedge \cdots \wedge dw^{2a}$, и $ja_F = a_W$. Поскольку для канонической карты $a_F = a_W = \pm 1$, очевидно, что $j = 1$. Но это значит, что при преобразовании от F к W псевдоформа s преобразуется как дифференциальная 1-форма, поэтому условие $s_F(b) \neq 0$ при переходе к W влечет $s_W(b) \neq 0$.

Итак, для b -сечения существует каноническая карта F с условием $s_F(b) \neq 0$. Значит, существует такая каноническая b -карта H (в силу того, что определитель перехода от F к H тождественно равен 1), в которой канонические формы сечения s равны $(1 \pm h^1)dh^2 + \sum_{i=2}^a h^{2i-1}dh^{2i}$.

Тип XVII ($n = 2a + 1$). Пусть $s: X \rightarrow P = P_X(Y)$ – псевдоформа, $F \ni b$ – произвольная одинаково ориентированная с X карта. Обозначим через ω 1-форму на X такую, что $s_F = \omega_F$. Так же, как и при разборе типа XVI, мы видим, что $s^{(n-1)} = \omega^{(n-1)}$ – корректно определенная форма степени $n - 1 = 2a$ на X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Псевдоформу s назовем b -сечением, если $s^{(n-1)}(b) \neq 0$.

Пусть s – b -сечение, F и ω такие, как определенные выше. Мы всегда можем считать, что $\omega_F^{(n)}(b) > 0$. В противном случае пусть V – карта, имеющая в точке b касание с F порядка 2, μ – дифференциальная 1-форма на X такая, что $\mu_V = s_V$. Из равенства (62) следует, что $\mu = \omega + d\Psi$ для

$$\Psi(v) = \ln[\det(f_j^i)], \quad f_j^i = \frac{\partial f^i}{\partial v^j}.$$

Очевидно, $\mu^{(n)} = \mu^{(n-1)} \wedge \mu = \omega^{(n-1)} \wedge (\omega + d\Psi)$.

Запишем:

$$\omega_V^{(n-1)} = \sum_{i=1}^n w_i dv^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dv}^i \wedge \cdots \wedge dv^n, \quad d\Psi = \sum_{i=1}^n d_i dv^i, \quad \omega_V = \sum_{i=1}^n t_i dv^i.$$

Здесь и далее знак $\hat{}$ над членом выражения означает, что этот член пропускается. Заметим, что значения в точке b компонент $w_i(b)$ и $t_i(b)$ форм $\omega^{(n-1)}$ и ω в карте V совпадают со значениями соответствующих компонент в карте F . Тогда

$$\omega_V^{(n)} = \mu_V^{(n)} = m dv^1 \wedge \cdots \wedge dv^i \wedge \cdots \wedge dv^n, \quad m = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-n} w_i (d_i + t_i).$$

Поскольку $\omega^{(n-1)}(b) = s^{(n-1)}(b) \neq 0$, не все w_i равны нулю одновременно. Из явного вида d_j (61) очень легко, изменяя $f_{ju}^s(b) = [\frac{\partial^2 f^s}{\partial v^j \partial v^u}](b)$, найти карту V такую, чтобы $m(b)$ имело любой нужный знак. Поэтому мы вправе поменять обозначения и считать, что $\omega_F^{(n)}(b) > 0$ в исходной карте F . По теореме Дарбу найдется карта H такая, что $\omega_H = \sum_{i=1}^a h^{2i-1} dh^{2i} + dh^{2a+1}$. Ясно, что переход от F к H сохраняет ориентацию. Мы знаем, что $s_H = \omega_H + d\Psi_H$. Будем искать каноническую карту V в виде $v^i = h^i$ при $1 \leq i \leq 2a$, $v^{2a+1} = h^{2a+1} + \Phi(h)$. Тогда $s_V = \omega_V + d\Psi_V + d\Theta_V$, где $\Theta = -\ln[\det J]$, а $J = J(V/H)$ – матрица Якоби перехода от H к V . Имеем

$$J = \begin{pmatrix} & E_{n-1} & & 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial h^1} & \frac{\partial \Phi}{\partial h^2} & \cdots & \frac{\partial \Phi}{\partial h^{n-1}} \\ & & & 1 + \frac{\partial \Phi}{\partial h^n} \end{pmatrix},$$

и поэтому $\Theta = -\ln\left(1 + \frac{\partial\Phi}{\partial h^n}\right)$. Ясно также, что $\omega_V = \sum_{i=1}^a v^{2i-1} dv^{2i} + dv^{2a+1} - d\Phi_V$. Поэтому, если функция Θ удовлетворяет соотношению

$$d\Psi - d\ln\left(1 + \frac{\partial\Phi}{\partial h^n}\right) - d\Phi = 0,$$

то сечение s имеет в карте V канонический вид $\omega_V = \sum_{i=1}^a v^{2i-1} dv^{2i} + dv^{2a+1}$.

Итак, нам достаточно найти функцию Φ из соотношения $\Psi - \ln\left(1 + \frac{\partial\Phi}{\partial h^n}\right) - \Phi = 0$. Ясно, что это уравнение эквивалентно уравнению $e^{\Psi-\Phi} = 1 + \frac{\partial\Phi}{\partial h^n}$, которое, очевидно, имеет решения. Ясно, что карта V ориентирована одинаково с X . Наконец, из леммы 11, 3) следует, что карту V можно заменить центрированной в точке b картой.

5.4. Выше в этом параграфе мы для любой регулярной точки w специального многообразия D определили понятие *S-развертки* (так называется многообразие Y , полученное конструкцией из п. 5.2). Мы показали, что при подходящем уменьшении S имеется только 19 типов неизоморфных многообразий Y . В § 6 для удобства читателя мы приводим список этих G -многообразий. Они будут называться *эталонными многообразиями*. Соответствующие им расслоения геометрических структур будут называться *эталонными расслоениями*. Напомним, все объекты (функции, многообразия и т. д.) и отображения предполагаются вещественными бесконечно дифференцируемыми, а специальное расслоение – это расслоение геометрических величин со стандартным слоем размерности не более $n = \dim X$.

Если $\mathcal{Q}$ – какой-нибудь атлас на G -многообразии Y , то любой выбор карты F на X определяет естественную тривиализацию $\text{tr}_F: P = P(Y) \rightarrow Y \times X$ и тем самым атлас на P , который обозначается $(\mathcal{Q}, F)$. Для каждого из типов I–XVII эталонных многообразий Y_i в списке (см. § 6) указаны атлас $\mathcal{Q}_i$ (называемый *адаптированным атласом*), для которого справедливо утверждение теоремы 5, и канонические формы, к которым приводится b -сечение (см. теорему 5).

§ 6. Список эталонных многообразий и соответствующих канонических форм

6.1. Рассмотрим случай, когда $q = 1$. Обозначим $G = G^1(n)^0$. Сопоставим 1-струе ростка сохраняющего ориентацию отображения $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, переводящего $\mathbf{0}$ в $\mathbf{0}$ и задаваемого формулами $y^i = \varphi^i(x^1, \dots, x^n)$, матрицу $g(\Phi) = (g_j^i) = \partial\varphi^i/\partial x^j|_{x=0}$, где индекс i – номер строки, а j – номер столбца матрицы $g(\Phi)$. Это дает отождествление $G = \text{GL}_n^0$, которое будет постоянно использоваться.

Тип I. Действие G на Y_1 тривиально. Можно считать, что Y_1 – открытый шар радиуса 1 с центром в точке $\mathbf{0}$ в m -мерном линейном пространстве $\mathbb{R}^m$ и стандартные координаты $y^1, \dots, y^m$ этого пространства определяют адаптированный атлас $\mathcal{Q}_1$ на Y_1 . Для b -сечения s имеется b -карта F такая, что в атласе $(\mathcal{Q}_1, F)$ оно имеет вид $y^1 = f^1 + \lambda^1, \dots, y^m = f^m + \lambda^m$. При $m = n$ имеется еще одна каноническая форма $y^1 = f^1 + \lambda^1, \dots, y^{m-1} = f^{m-1} + \lambda^{m-1}, y^m = \lambda^m - f^m$.

Функции y^i являются инвариантами. (Здесь и далее под инвариантами понимаются локальные инварианты относительно действия на $P_i = P(Y_i)$ группы $\mathcal{V}$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов многообразия X .)

Тип II. Эталонным многообразием для этого типа является $Y_2 = S \times \mathbb{R}^0$. Действие G на S тривиально, а $\mathbb{R}^0$ – множество положительных чисел, на котором $g \in G = \text{GL}_n^0$ действует умножением на $\det g$. Обозначим через y^0 естественную координату на $\mathbb{R}^0$, определенную условием $y^0(g \bmod \text{SL}_n) = \det g$. Можно считать, что S – открытый шар радиуса 1 с центром в точке 0 линейного пространства $\mathbb{R}^{m-1}$ размерности $m-1$ со стандартными координатами $y^1, \dots, y^{m-1}$, а адаптированный атлас $\mathcal{Q}_2$ на Y_2 определяется координатами $y^0, y^1, \dots, y^{m-1}$. Канонический вид b -сечения таков: $y^i = f^i + \lambda^i$ при $1 \leq i \leq m-1$, $y^0 = 1$. Функции $y^1, \dots, y^{m-1}$ являются инвариантами.

Для рассмотрения типов III–XI эталонных многообразий используем тождественное представление ST_n группы G и двойственное к нему. Напомним, что ST_n действует в пространстве $\mathbb{R}^n$ и множество лучей в этом пространстве отождествляется со сферой S_{n-1} , на которой возникает, таким образом, действие группы G . Рассмотрим стандартную систему координат $t^1, \dots, t^i, \dots, t^n$ в $\mathbb{R}^n$, введенную ранее, и построим с ее помощью атлас на S_{n-1} . Обозначим через $S_{(i)+}$ (соответственно, $S_{(i)-}$) полусферу в S_{n-1} , определенную условием $t^i > 0$ (соответственно, $t^i < 0$). На полусферах $S_{(i)\pm}$ определим координаты $y^1, \dots, \hat{y}^i, \dots, y^n$ формулой $y^j = t^j/t^i$. Получим систему карт $S_{(i)\pm}$, образующую атлас $\mathcal{S}$ на S_{n-1} . Аналогично, ST_n^* действует в пространстве $\mathbb{R}^{n*}$ и множество лучей в этом пространстве отождествляется со сферой S_{n-1}^* , на которой возникает индуцированное действие группы G . По системе координат $u^1, \dots, u^i, \dots, u^n$ в $\mathbb{R}^{n*}$ строится атлас на S_{n-1}^* . Обозначим через $S_{(i)+}^*$ (соответственно, $S_{(i)-}^*$) полусферу в S_{n-1}^* , определенную условием $u^i > 0$ (соответственно, $u^i < 0$). На полусферах $S_{(i)\pm}^*$ определим координаты $y^1, \dots, \hat{y}^i, \dots, y^n$ формулой $y^j = u^j/u^i$. Система карт $S_{(i)\pm}^*$ образует атлас $\mathcal{S}^*$ на S_{n-1}^* .

Обозначим еще через S интервал $(-1, +1)$, на котором G действует тривиально, и через v – естественную координату на S .

Тип III. Эталонным многообразием для этого типа является $Y_3 = S \times S_{n-1}$. На многообразии Y_3 адаптированным атласом $\mathcal{Q}_3$ является атлас, состоящий из карт вида $S \times S_{(i)\pm}$, с локальными координатами $(v, y^1, \dots, \hat{y}^i, \dots, y^n)$. Для любого b -сечения $s: X \rightarrow P_3$ найдется b -карта F на X такая, что сечение s представлено в карте $S \times S_{(1)+}$ атласа $\mathcal{Q}_3$ на Y_3 и имеет (в карте $(F, S \times S_{(1)+})$ атласа $(F, \mathcal{Q}_3)$ на P_3) канонический вид $v = \lambda \pm f^1$, $y^2 \equiv \dots \equiv y^n \equiv 0$. Функция v является инвариантом.

Для типов IV и V имеем $Y_{4,5} = S \times S_{n-1}^*$ и адаптированным атласом $\mathcal{Q}_{4,5}^*$ является атлас, состоящий из карт вида $S \times S_{(i)\pm}^*$, с локальными координатами $(v, y^1, \dots, \hat{y}^i, \dots, y^n)$.

Тип IV ($n = 2a$). Для любого b -сечения $s: X \rightarrow P_4$ найдется b -карта F такая, что сечение s представлено в карте $S \times S_{(2)+}^*$ и имеет канонический вид $v = \lambda \pm f^1$, $y^{2i-1} \equiv 0$ при $1 \leq i \leq a$, $y^{2i} = f^{2i-1}$ при $2 \leq i \leq a$. Функция v является инвариантом.

Тип V ($n = 2a + 1$). В этом случае b -сечение s в канонической b -карте F либо представлено в карте $S \times S_{(1+2a)+}^*$ и имеет канонический вид $v = \lambda + f^2$, $y^{2i-1} \equiv 0$, $y^{2i} = f^{2i-1}$ при $1 \leq i \leq a$, либо представлено в карте $S \times S_{(1+2a)-}^*$ и имеет канонический вид $v = \lambda + f^2$, $y^{2i-1} \equiv 0$, $y^{2i} = -f^{2i-1}$ при $1 \leq i \leq a$. Функция v является инвариантом.

Тип VI. Эталонным многообразием для этого типа является $Y_6 = S_{n-1}$. Адаптированным атласом $\mathcal{Q}_6$ является атлас $\mathcal{S}$. Любое b -сечение $s: X \rightarrow P_6$ в канонической b -карте F представлено в карте $S_{(1)+}$ и имеет вид $y^2 \equiv \dots \equiv y^n \equiv 0$.

Для типов VII и VIII $Y_{7,8} = S_{n-1}^*$ и адаптированным атласом $\mathcal{Q}_{7,8}$ является атлас $\mathcal{S}^*$.

Тип VII ($n = 2a$). Для любого b -сечения $s: X \rightarrow P_7$ найдется b -карта F такая, что сечение s представлено в карте $S_{(2)+}^*$ и имеет канонический вид $y^{2i-1} \equiv 0$ при $1 \leq i \leq a$, $y^{2i} = f^{2i-1}$ при $2 \leq i \leq a$.

Тип VIII ($n = 2a + 1$). В этом случае b -сечение s в канонической b -карте F либо представлено в карте $S_{(1+2a)+}^*$ и имеет канонический вид $y^{2i-1} \equiv 0$, $y^{2i} = f^{2i-1}$ при $1 \leq i \leq a$, либо представлено в карте $S_{(1+2a)-}^*$ и имеет канонический вид $y^{2i-1} \equiv 0$, $y^{2i} = -f^{2i-1}$ при $1 \leq i \leq a$.

Тип IX. Эталонным многообразием для этого типа является $Y_9 = \mathbb{R}^0 \times S_{n-1}$. На многообразии Y_9 адаптированным атласом $\mathcal{Q}_9$ является атлас, состоящий из карт вида $\mathbb{R}^0 \times S_{(i)\pm}$ с локальными координатами $(y, y^1, \dots, \hat{y}^i, \dots, y^n)$. В этом случае b -сечение s в канонической b -карте F представлено в карте $\mathbb{R}^0 \times S_{(n)+}$ и имеет канонический вид $y \equiv 1$, $y^1 \equiv \dots \equiv y^{n-1} \equiv 0$.

Для типов X и XI имеем $Y_{10,11} = \mathbb{R}^0 \times S_{n-1}^*$ и адаптированным атласом $\mathcal{Q}_{10,11}$ является атлас, состоящий из карт вида $\mathbb{R}^0 \times S_{(i)\pm}^*$ с локальными координатами $(y, y^1, \dots, \hat{y}^i, \dots, y^n)$.

Тип X ($n = 2a$). Для любого b -сечения $s: X \rightarrow P_{10}$ найдется b -карта F такая, что сечение s представлено в карте $\mathbb{R}^0 \times S_{(2)+}^*$ и имеет канонический вид $y = 1$, $y^{2i-1} \equiv 0$ при $1 \leq i \leq a$, $y^{2i} = f^{2i-1}$ при $2 \leq i \leq a$.

Тип XI ($n = 2a + 1$). В этом случае b -сечение s в канонической b -карте F либо представлено в карте $\mathbb{R}^0 \times S_{(1+2a)+}^*$ и имеет канонический вид $y \equiv 1$, $y^{2i-1} \equiv 0$, $y^{2i} = f^i$ при $1 \leq i \leq a$, либо представлено в карте $\mathbb{R}^0 \times S_{(1+2a)-}^*$ и имеет канонический вид $y \equiv 1$, $y^{2i-1} \equiv 0$, $y^{2i} = -f^{2i-1}$ при $1 \leq i \leq a$.

Тип XII. В этом случае Y_{12} есть $\mathbb{R}^n - \mathbf{0}$ и адаптированной системой координат в Y_{12} является стандартная система координат в $\mathbb{R}^n$, но действие G на $\mathbb{R}^n$ зависит от вещественного параметра d , и поэтому $Y_{12} = \mathbb{R}_d^n$. Действие матрицы $g \in G$ на вектор-столбец $x \in \mathbb{R}^n$ задается формулой $g(x) = \det(g)^{(d-1)/n} gx$.

а) Пусть $d \neq 1 - n$. В этом случае b -сечение s приводится в подходящей b -карте F к каноническому виду $y_1 \equiv 1$, $y_i \equiv 0$ при $i \geq 2$.

б) Пусть $d = 1 - n$. В этом случае b -сечение s приводится в подходящей b -карте F к каноническому виду $y_1 \equiv 1 \pm f^1$, $y_i \equiv 0$ при $i \geq 2$.

Для типов XIII и XIV эталонные многообразия $Y_{13,14}$ совпадают с $\mathbb{R}^{n*} - \mathbf{0}$ и адаптированной системой координат является стандартная система координат в $\mathbb{R}^{n*}$. Действие матрицы $g \in G$ на вектор-строку $x \in \mathbb{R}^{n*}$ задается формулой $g(x) = \det(g)^{(d-1)/n} x g^{-1}$. Это действие также зависит от вещественного параметра d , и поэтому $Y_{13,14} = \mathbb{R}_d^{n*}$.

Тип XIII ($n = 2a$). Возможны два случая:

а) $d \neq 1$, тогда всякое b -сечение s в подходящей b -карте F приводится к каноническому виду $y^{2i-1} \equiv 0$ при $1 \leq i \leq a$, $y^2 = 1 + f^1$, $y^{2i} = f^{2i-1}$ при $2 \leq i \leq a$;

б) $d = 1$, тогда всякое b -сечение s в подходящей b -карте F приводится к каноническому виду $y^{2i-1} \equiv 0$ при $1 \leq i \leq a$, $y^2 = 1 \pm f^1$, $y^{2i} = f^{2i-1}$ при $2 \leq i \leq a$.

Тип XIV ($n = 2a + 1$). Возможны два случая:

а) $(d - 1)/n \neq 1/(1 + a)$, тогда всякое b -сечение s в подходящей b -карте F приводится к каноническому виду $y^{2i-1} \equiv 0$, $y^{2i} = f^{2i-1}$ при $1 \leq i \leq a$, $y^{2a+1} = \pm 1$;

б) $(d - 1)/n = 1/(1 + a)$, тогда b -сечение s приводится в подходящей b -карте F к каноническому виду $y^{2i-1} \equiv 0$, $y^{2i} = (\lambda + f^2)f^{2i-1}$ при $1 \leq i \leq a$, $y^{2a+1} = \pm(\lambda + f^2)$; имеется дифференциальный инвариант Ω 1-го порядка, т. е. выражающийся через компоненты сечения s и их первые производные; в карте F имеем $\Omega = \pm(\lambda + f^2)^{a+1}$.

Мы перечислили все неисключительные типы эталонных многообразий для $q = 1$.

6.2. При $q = 2$ имеются три типа эталонных многообразий. Опишем их. Положим $G = G^2(n)^0$. Пусть $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, удовлетворяющий условию $\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ и задаваемый формулами $y^i = \psi^i(x^1, \dots, x^n)$. Его 2-струя в точке $x = \mathbf{0}$ определяется набором, состоящим из матрицы $g = (g_j^i)$, отвечающей 1-струе, и тензора $g_{jk}^i = \partial^2 \psi^i / \partial x^k \partial x^j|_{x=0}$. Элементы группы G отождествляются с множеством пар (g_j^i, g_{jk}^i) , а закон умножения индуцирован правилом $(\varphi\psi)(x) = \varphi(\psi(x))$, если φ и ψ — отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ с условием $\varphi(\mathbf{0}) = \psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Отсюда следует $(h_{jk}^i, h_{jk}^i)(g_j^i, g_{jk}^i) = (t_j^i, t_{jk}^i)$, где $t_j^i = h_s^i g_j^s$, $t_{jk}^i = h_s^i g_{jk}^s + h_{sr}^i g_j^s g_k^r$.

Напомним, что через Af_n обозначается аффинная группа в $\mathbb{R}^n$. Она отождествляется с множеством пар (A, a) , где A — невырожденная матрица порядка n , a — вектор-строка из $\mathbb{R}^{n*}$. Операция в группе Af_n определяется следующим образом: $(A_1, a_1)(A_2, a_2) = (A_1 A_2, a_1 A_2 + a_2)$. Группа Af_n действует справа на $\mathbb{R}^{n*}$: вектор-строка $t = (t_i) \in \mathbb{R}^{n*}$ под действием $p = (A, a) \in \text{Af}_n$ переходит в $tp = tA + a$ (см. (21)). Мы используем соответствующее левое действие, которое задается формулой $pt = tp^{-1} = tA^{-1} - aA^{-1}$ (см. (22)). Имеется эпиморфизм $\phi: G \rightarrow \text{Af}_n$, определенный следующим образом. Если $(A, g_{jk}^i) = g \in G$, $D = (d_j^i)$ — обратная матрица к A , $t_{jk}^i = d_s^i g_{jk}^s$, $a_j = t_{ju}^u$, то $a = (a_j)$, $\phi(g) = (A, a) \in \text{Af}_n$ (см. (20)). Имеется вложение $\varepsilon: \text{Af}_n \rightarrow \text{GL}_{n+1}$, заданное формулой (55). Образ ε есть подгруппа группы GL_{n+1} , которую мы обозначаем B_n . Группа GL_{n+1} действует на $\mathbb{R}^{n+1}$ с помощью тождественного представления ST_{n+1} .

Многообразия $Y_{15}-Y_{17}$ и их адаптированные атласы описаны ранее.

Тип XV. Любое сечение s в подходящей b -карте F приводится к каноническому виду $s_F = (1, 0, \dots, 0)$.

Тип XVI ($n = 2a$). Всякое b -сечение s в подходящей b -карте F приводится к каноническому виду $y^{2i-1} \equiv 0$ при $1 \leq i \leq a$, $y^2 = 1 \pm f^1$, $y^{2i} = f^{2i-1}$ при $2 \leq i \leq a$.

Тип XVII ($n = 2a + 1$). Всякое b -сечение s в подходящей b -карте F приводится к каноническому виду $y^{2i-1} \equiv 0$, $y^{2i} = f^{2i-1}$ при $1 \leq i \leq a$, $y^{2a+1} \equiv 1$.

Тип XVIII ($n = 4$). Эталонным многообразием для этого типа является $Y_{18} = Y_{\text{gr}}$, где Y_{gr} – грассманово многообразие двумерных плоскостей четырехмерного пространства, на котором естественным образом действует группа GL_4 .

Тип XIX ($n = 3$). Эталонным многообразием для этого типа является $Y_{19} = Y_{\text{fl}}$, где Y_{fl} – трехмерное многообразие флагов типа $(1, 2)$ в трехмерном пространстве, на котором естественным образом действует группа GL_3 , а стационарными подгруппами этого действия являются ее борелевские подгруппы.

6.3. Сформулируем полученные выше результаты в виде теоремы. Мы предполагаем, что $n > 2$. Необходимые изменения формулировок при $n \leq 2$ легко устанавливаются (поэтому мы их не приводим).

ТЕОРЕМА 5. Пусть X – ориентированное n -мерное многообразие, $G = G^q(n)^0$ – связная компонента единицы дифференциальной группы порядка q и размерности n , D – специальное G -многообразие, т. е. многообразие размерности не более n , на котором действует группа Ли G , $n > 2$. Тогда имеется 19 типов специальных G -многообразий Y_i , список которых приведен выше, называемых эталонными многообразиями. Для любой регулярной точки w любого специального G -многообразия существует локальный G -изоморфизм ε (т. е. изоморфизм, перестановочный с локальным действием группы G) подходящей окрестности точки w на подходящее открытое множество эталонного многообразия Y_i одного из 19 упомянутых типов. Соответствующее эталонное многообразие Y_i определяется при этом однозначно. Пусть $\mathcal{Q}_i$ – адаптированный атлас на многообразии Y_i . Точный порядок q эталонных многообразий равен 1 или 2.

Зафиксируем на X произвольную точку b и рассмотрим достаточно общее в точке b сечение $s: X \rightarrow P_i = P(Y_i)$, определенное в окрестности точки b . Напомним, такое сечение называется b -сечением и понятие b -сечения определяется отдельно для каждого типа Y_i . Тогда для типов I–XVII можно таким образом выбрать по сечению s одинаково ориентированную с X центрированную в точке b карту F (коротко – b -карту) с координатными функциями $f^1, \dots, f^n$ на X , что запись s в атласе $(\mathcal{Q}_i, F)$ многообразия P_i будет иметь указанный в списке канонический вид. Все приводимые в списке канонические формы попарно неэквивалентны.

Для типов XVIII и XIX также можно определить понятие b -сечения и найти его каноническую форму. Это будет сделано в следующей работе. Типы XVIII и XIX мы называем *исключительными*, типы I–XVII – *неисключительными*.

Доказательство теоремы 5 следует из предыдущего содержания работы. Действительно, применение конструкции из п. 5.2 показывает, как построить

S -развертку Y и точку $y \in Y$, чтобы действия в окрестностях точек w и y были локально изоморфны. По построению Y все точки Y регулярны и стационарная подгруппа G_s любой точки $s \in Y$ связна, замкнута, коразмерность ее не зависит от s и не превосходит n . Список возможных стационарных подгрупп G_s задается теоремой 3 для $q = 1$ и теоремой 4 для $q \geq 2$. Если $q = 1$, то $G^q(n)^0 = \mathrm{GL}_n^0$, и поэтому G_y – подгруппа в GL_n^0 . Все возможные случаи разбирались ранее. Например, если $G_y = \mathrm{GL}_n^0$, то для всех $s \in Y$ также $G_s = \mathrm{GL}_n^0$. Значит, действие на Y тривиально, это тип I, который разбирался в п. 5.3. Если $G_y = \mathrm{SL}_n$, то для всех $s \in Y$ также $G_s = \mathrm{SL}_n$. Значит, все орбиты одномерны. Это тип II, который также разбирался ранее. Остальные случаи разбираются аналогично.

§ 7. Подгруппы малой коразмерности в SL_n

Докажем утверждение 1 из п. 4.1. Изложение следует плану, предложенному А.Л. Онищиком, и мы применяем рассуждения, использованные в [14, предложение 5], где решается аналогичная задача. Мы будем использовать известные результаты из теории групп Ли (см., например, [14]–[18]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. Пусть H – собственная связная подгруппа группы SL_n коразмерности не более $n > 2$. Будем рассматривать вложение H в SL_n как точное представление ρ группы H в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если мы покажем, что представление ρ приводимо над $\mathbb{R}$, это докажет утверждение. Действительно, подгруппа группы SL_n , оставляющая инвариантным линейное подпространство размерности m в $\mathbb{R}^n$, имеет в SL_n коразмерность не менее $m(n - m)$. Если такая подгруппа имеет коразмерность не более n , выполнено условие $n \geq m(n - m)$. Легко видеть, что при всех $n \geq 2$ этому неравенству удовлетворяют только значения $m = 1$ и $m = n - 1$, за исключением случая $n = 4$, $m = 2$. При $m = 1$ подгруппа H сопряжена подгруппе группы T_1 , при $m = n - 1$ подгруппа H сопряжена подгруппе группы T_2 , при $n = 4$, $m = 2$ подгруппа H сопряжена группе P_{24} . Используя лемму 4, докажем утверждение.

Итак, предположим, что представление ρ неприводимо над $\mathbb{R}$, и приведем это предположение к противоречию.

ЛЕММА 13. *Представление ρ неприводимо над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L \subset \mathbb{C}^n$ – собственное ненулевое инвариантное подпространство представления ρ . Обозначим через L_1 комплексно-сопряженное к L подпространство. Оно также инвариантно относительно ρ . Обозначим $\dim L_1 = \dim L = m$. Если $m < n$, то пространство $L_2 = L + L_1$ определено над $\mathbb{R}$ и инвариантно относительно ρ . Противоречие. Если $m \geq n$, то или $L_3 = L \cap L_1$ отлично от нуля, или L_3 равно нулю. В первом случае L_3 определено над $\mathbb{R}$ и инвариантно относительно ρ . Противоречие. Во втором случае $n = 2m$, $\mathbb{C}^n = L + L_1$ и проекция $\mathbb{C}^n$ на L вдоль L_1 осуществляет вложение H в группу $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ всех комплексных невырожденных матриц. Вещественная размерность последней группы равна $2m^2$. Однако $\dim H \geq n^2 - n - 1 > 2m^2$ при $n > 2$. Лемма доказана.

Обозначим $\mathcal{H} = \text{Lie}(H)$ и будем дальше рассуждать в терминах алгебр Ли. Расширим поле скаляров алгебры Ли $\mathcal{H}$ до $\mathbb{C}$ и обозначим полученную алгебру через $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Представление ρ определяет обозначаемое той же буквой представление алгебры $\mathcal{H}$ в SL_n . Далее основным полем будет поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ и все алгебры, разложения, размерности и другие аналогичные объекты по умолчанию будут определены над этим полем. Обозначим через $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$ соответственно алгебру Ли всех комплексных матриц порядка n и ее подалгебру матриц со следом 0. Продолжение представления ρ на $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ обозначим через $\rho_{\mathbb{C}}: \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \rightarrow SL_n(\mathbb{C})$. Ясно, что (комплексная) коразмерность $\rho_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ в $SL_n(\mathbb{C})$ не превосходит n .

ЛЕММА 14. *Алгебра $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ полупроста.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{R}$ – разрешимый радикал алгебры Ли $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Если $\mathcal{R}$ не сводится к единичной подалгебре, по теореме Ли в представлении ρ этой алгебры имеется ненулевой собственный вектор. Рассмотрим весовое подпространство L этого вектора. Из того, что $\mathcal{R}$ является идеалом в $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, легко вытекает, что L является собственным подпространством для ρ . Следовательно, $L = \mathbb{C}^n$ и каждый элемент $\mathcal{R}$ действует на $\mathbb{C}^n$ умножением на скалярную матрицу. Поскольку $\rho(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) \subseteq SL_n(\mathbb{C})$, отсюда следует, что $\mathcal{R}$ – единичная подалгебра. Лемма доказана.

Пусть $m = \dim \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Пусть $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}_1 + \dots + \mathcal{H}_r$ – разложение алгебры Ли $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ в прямую сумму простых комплексных алгебр. Представление $\rho_{\mathbb{C}}$, как любое неприводимое комплексное представление полупростой алгебры, разлагается в тензорное произведение над полем $\mathbb{C}$ соответствующих неприводимых комплексных представлений ρ_j слагаемых $\mathcal{H}_j$. Будем обозначать размерность представления π через $\dim \pi$. Заметим, что $\dim \rho_{\mathbb{C}} = n$, $\dim \mathcal{H}_{\mathbb{C}} = m$, причем $m \geq n^2 - n - 1$.

ЛЕММА 15. *Алгебра $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ проста.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ – полупростые алгебры Ли, $m_1 = \dim \mathcal{H}_1$, $m_2 = \dim \mathcal{H}_2$, ρ_1 и ρ_2 – их точные неприводимые представления, $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, $\rho_{\mathbb{C}} = \rho_1 \otimes \rho_2$, $n_1 = \dim \rho_1$, $n_2 = \dim \rho_2$. Тогда $n = n_1 n_2$, $m = m_1 + m_2$. Имеем

$$m_1 + m_2 \geq (n_1 n_2)^2 - (n_1 n_2) - 1.$$

Но, очевидно, $n_1^2 \geq m_1$, $n_2^2 \geq m_2$. Отсюда получаем

$$n_1^2 + n_2^2 \geq (n_1 n_2)^2 - (n_1 n_2) - 1.$$

При $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$ это невозможно. Лемма доказана.

Итак, мы можем считать, что $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – простая алгебра Ли, $\rho_{\mathbb{C}}$ – ее неприводимое представление. Как известно, каждое неприводимое представление полупростой (следовательно, и простой) алгебры Ли однозначно задается доминантным характером, который является старшим весом этого представления. Обозначим через $\rho(\Lambda)$ представление, отвечающее старшему весу Λ .

ЛЕММА 16. *Если для двух доминантных характеров Λ и M выполнено неравенство $M > \Lambda$, то $\dim \rho(M) > \dim \rho(\Lambda)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в работе [14, предложение 4, с. 74].

Завершим доказательство утверждения 1 перебором всех типов простых алгебр Ли. Все следующие утверждения о размерности фундаментальных представлений для каждого типа простых алгебр Ли основаны на табл. 2 из книги [17, с. 272].

Сначала рассмотрим исключительные типы алгебр Ли. Минимальная размерность k фундаментальных представлений алгебр типа E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 равна соответственно 27, 56, 248, 26 и 7, а размерности m алгебр равны соответственно 78, 133, 248, 52 и 14. Для всех этих алгебр величина $k^2 - k - 1$ больше размерности m соответствующей алгебры.

Теперь рассмотрим классические алгебры Ли.

Серия D_s , $s \geq 4$. Размерность алгебры ранга s типа D_s равна $m = s(2s - 1)$. Минимальная размерность фундаментального представления алгебры ранга s типа D_s есть $k = 2s$. Поэтому всегда $k^2 - k - 1$ больше m .

Серия B_s , $s \geq 2$. Размерность алгебры ранга s типа B_s равна $m = s(2s + 1)$. Минимальная размерность фундаментального представления алгебры ранга s типа B_s есть $k = 2s + 1$ при $s \geq 3$ и $k = 4$ при $s = 2$. Поэтому всегда $k^2 - k - 1$ больше m .

Серия C_s , $s \geq 3$. Размерность алгебры ранга s типа C_s равна $m = s(2s + 1)$. Размерности фундаментальных представлений алгебры ранга s типа C_s равны $\dim \rho(\pi_k) = C_{2s}^k - C_{2s}^{k-2}$, $1 \leq k \leq s$. В работе [14, предложение 5] при $s \geq k \geq 3$ доказана оценка

$$\dim \rho(\pi_k) > r(s) = \frac{4s(2s - 1)(s - 1)}{3(s + 2)}.$$

Размерности фундаментальных представлений $\dim \rho(\pi_1)$ и $\dim \rho(\pi_2)$ равны соответственно $2s$ и $s(2s - 1) - 1$. Легко проверить, что $r(s) \geq 2s$ и $s(2s - 1) - 1 \geq 2s$. Поэтому наименьшая размерность фундаментального представления есть $k = 2s$. Легко видеть, что всегда $k^2 - k - 1$ больше m .

Итак, для алгебр всех разобранных типов наименьшая размерность фундаментального представления k и размерность самой алгебры m связаны соотношением $k^2 - k - 1 > m$. Любой доминантный вес доминирует над каким-нибудь фундаментальным весом, поэтому по лемме 15 для размерности n любого неприводимого представления выполнено неравенство $n \geq k$. Поскольку $k > 1$, это влечет $n^2 - n - 1 \geq k^2 - k - 1$, что позволяет исключить все типы, кроме A_s .

Серия A_s , $s \geq 1$. Размерность алгебры ранга s типа A_s равна $m = s(s + 2)$. Размерности фундаментальных представлений $\rho(\pi_1)$ и $\rho(\pi_s)$ равны $s + 1$, и образ алгебры A_s при этих представлениях совпадает со всей подалгеброй $SL_n(\mathbb{C})$, поэтому будем считать далее, что представление ρ задается старшим весом Λ , отличным от π_1 и π_s . В работе [14] вычислены при $s \geq 2$ размерности представлений

$$\begin{aligned} n_1 = \dim \rho(2\pi_s) = \dim \rho(2\pi_1) &= \frac{(s + 1)(s - 2)}{2} + 2(s + 1), \\ n_2 = \dim \rho(\pi_1 + \pi_s) &= s^2 + 2s. \end{aligned}$$

Если $s > 2$, то алгебра A_s имеет еще фундаментальные представления $\rho(\pi_2), \dots, \rho(\pi_{s-1})$ размерностей $\dim \rho(\pi_j) = C_{s+1}^j$. Минимальная из этих размерностей равна $n_3 = C_{s+1}^2$. Ясно, что старший вес Λ доминирует либо над $2\pi_1$, либо над $2\pi_s$, либо над $\pi_1 + \pi_s$, либо над π_j при $1 < j < s$. Поэтому всегда $n = \dim \rho(\Lambda)$ удовлетворяет неравенству $n \geq n_4 = \min(n_1, n_2) > 1$ при $s = 2$ и неравенству $n \geq n_4 = \min(n_1, n_2, n_3) > 1$ при $s > 2$.

Непосредственной проверкой получим, что $n_4^2 - n_4 - 1 > m$, откуда по лемме 15 следует $n^2 - n - 1 > m$, что исключает случай $s \geq 2$.

Последний оставшийся случай алгебры ранга $s = 1$ типа A_1 исключается без всякого труда, так как хорошо известно, что для каждого натурального k она имеет ровно одно неприводимое представление размерности $k + 1$, отвечающее старшему весу $k\pi_1$. Поэтому при $k \geq 2$ эти размерности всегда не меньше 3. Поскольку $3^2 - 3 - 1 > 3$, утверждение доказано.

Список литературы

1. Lie S., *Gesammelte Abhandlungen*, Teubner, Leipzig, 1922–1937.
2. Cartan E., *Œuvres Complètes*, Gauthier-Villars, Paris, 1952–1955.
3. Tresse A., “Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations”, *Acta Math.*, **18** (1894), 1–88.
4. Tresse A., *Determination des invariants punctuels de l’équation différentielle ordinaire de second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$* , Hirzel, Leipzig, 1896.
5. Арнольд В. И., *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
6. Овсянников Л. В., *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
7. Ибрагимов Н. Х., *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.
8. Kumpera A., “Invariants différentiels d’un pseudogroupe de Lie”, *J. Diff. Geom.*, **10** (1975), 289–416.
9. Thomas T. Y., *The differential invariants of generalized spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.
10. Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В., “Геометрия. 1. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии”, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.*, **28**, ВИНТИ, М., 1988.
11. Помаре Ж., *Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли*, Мир, М., 1983.
12. Винберг Э. Б., Онищик А. Л., *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988.
13. Кобаяси Ш., *Группы преобразований в дифференциальной геометрии*, Наука, М., 1986.
14. Онищик А. Л., *Топология транзитивных групп преобразований*, Физматлит, М., 1995.
15. Бурбаки Н., *Группы и алгебры Ли*, **1**, Мир, М., 1972.
16. Бурбаки Н., *Группы и алгебры Ли*, **2**, Мир, М., 1976.
17. Бурбаки Н., *Группы и алгебры Ли*, **3**, Мир, М., 1978.
18. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., *Современная геометрия*, Наука, М., 1979.