Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, Моноидальные преобразования и гипотезы об алгебраических циклах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 3, 197–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im550>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:14:28

УДК 512.6

С. Г. Танкеев

Моноидальные преобразования и гипотезы об алгебраических циклах

Доказано, что гипотезы Hodge(X), Tate(X) (над совершенным конечно-порожденным полем), а также стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности оператора Ходжа $*$, гипотеза $D(X)$ о совпадении численной и гомологической эквивалентностей алгебраических циклов и гипотеза $C(X)$ об алгебраичности компонент Кюннета диагоналей для гладких проективных комплексных многообразий совместимы с моноидальными преобразованиями: если одна из этих гипотез выполняется для гладкого проективного многообразия X и для гладкого замкнутого подмногообразия $Y \hookrightarrow X$, то она верна для X' , где $f: X' \rightarrow X$ – раздутие X вдоль Y . Все эти гипотезы сведены к случаю рациональных многообразий.

Библиография: 27 наименований.

Введение

Пусть $\mathcal{V}(k)$ – категория гладких проективных многообразий над полем k , $\sim$ – адекватное отношение эквивалентности на алгебраических циклах с коэффициентами из поля рациональных чисел (в частности, обратный, прямой образы и пересечение циклов всегда определены по модулю $\sim$), с группами классов циклов $C_{\sim}^j(X)$ по модулю $\sim$. Если X имеет связные компоненты $X_1, \dots, X_n$ размерностей $d_1, \dots, d_n$ и Y – многообразие, то положим $C_{\sim}^{\dim X+r}(X \times Y) = \bigoplus_{i=1}^n C_{\sim}^{d_i+r}(X_i \times Y)$ для $r \in \mathbb{Z}$. Тогда имеется билинейный закон композиции

$$C_{\sim}^{\dim Y_1+r_1}(Y_1 \times Y_2) \times C_{\sim}^{\dim Y_2+r_2}(Y_2 \times Y_3) \rightarrow C_{\sim}^{\dim Y_1+r_1+r_2}(Y_1 \times Y_3),$$

$$f \times g \mapsto g \circ f = \mathrm{pr}_{13*}(\mathrm{pr}_{12}^* f \cdot \mathrm{pr}_{23}^* g),$$

где $\mathrm{pr}_{ij}: Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \rightarrow Y_i \times Y_j$ – проекция. Этот закон ассоциативен, и $C_{\sim}^{\dim X}(X \times X)$ – кольцо.

Объектами категории $\mathcal{M}_k$ мотивов являются тройки (X, p, m) , где X – d -мерное многообразие, $p \in C_{\sim}^d(X \times X)$ – проектор (другими словами, $p \circ p = p$) и $m \in \mathbb{Z}$. Множество морфизмов определено равенством

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_k}((X, p, m), (Y, q, n)) = q \circ C_{\sim}^{\dim X - m + n}(X \times Y) \circ p.$$

Мотив $h(X)$ многообразия X определяется соотношением $h(X) = (X, \mathrm{id}_X, 0)$ (см. [1], [2]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-01-00374).

Если $f: X' \rightarrow X$ – моноидальное преобразование гладкого проективного многообразия X вдоль замкнутого гладкого подмногообразия $Y \hookrightarrow X$ коразмерности $r \geq 2$, то по фундаментальной теореме Манина [3] имеем

$$h(X') = h(X) \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{r-1} h(Y) \otimes \mathbb{L}^i \right],$$

где $\mathbb{L}$ – мотив Тэйта, определенный разложением мотива проективного пространства $h(\mathbb{P}^r) = 1 \oplus \mathbb{L} \oplus \dots \oplus \mathbb{L}^r$.

В настоящей статье мы доказываем, что гипотезы $\text{Hodge}(X)$, $\text{Tate}(X)$ (над совершенным конечнопорожденным полем), а также стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности оператора Ходжа $*$, гипотеза $D(X)$ о совпадении численной и гомологической эквивалентностей алгебраических циклов и гипотеза $C(X)$ об алгебраичности компонент Кюннета диагонали для гладких проективных комплексных многообразий совместимы с моноидальными преобразованиями: если одна из этих гипотез выполняется для гладкого проективного многообразия X и для гладкого замкнутого подмногообразия $Y \hookrightarrow X$, то она верна для X' , где $f: X' \rightarrow X$ – раздутие X вдоль Y . Все эти гипотезы сведены к случаю рациональных многообразий.

Сначала докажем теорему из п. 1.2, которая дает следующий кохомологический вариант разложения $h(X') = h(X) \oplus [\bigoplus_{i=1}^{r-1} h(Y) \otimes \mathbb{L}^i]$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел:

$$H_{\text{alg}}^{2m}(X', \mathbb{Q}) = f^* H_{\text{alg}}^{2m}(X, \mathbb{Q}) \oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} j_* \left[g^* H_{\text{alg}}^{2m-2p-2}(Y, \mathbb{Q}) \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \right],$$

где $H_{\text{alg}}^{2m}(X, \mathbb{Q})$ – $\mathbb{Q}$ -подпространство в $H^{2m}(X, \mathbb{Q})$, порожденное классами алгебраических циклов коразмерности m на X .

Автор благодарит рецензента, предложившего существенные улучшения первоначального текста, а также В. А. Исковских за интересные обсуждения темы.

§ 1. Алгебраические циклы, K -теория и моноидальные преобразования

1.1. Следуя работе [4], напомним некоторые результаты подхода Гротендика к доказательству теоремы Римана–Роха.

Пусть X – гладкое d -мерное проективное многообразие над полем комплексных чисел. Рассмотрим диаграмму моноидального преобразования

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xhookrightarrow{j} & X' \\ \downarrow g & & \downarrow j \\ Y & \xhookrightarrow{i} & X \end{array}$$

где f – моноидальное преобразование X вдоль замкнутого гладкого неприводимого центра Y коразмерности $r \geq 2$ [4, п. 13.3]. Пусть $N = i^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ –

конормальный пучок на Y , где $\mathcal{J}$ – пучок идеалов, отвечающий Y . Обозначим его класс в $K(Y)$ через N .

В терминах K -теории кольцо $K(X')$ допускает следующее описание.

Прежде всего, определим кольцо $K(Y)_N$. Мы сохраняем аддитивную структуру $K(Y)$, но определим новый закон умножения, полагая

$$y_1 * y_2 = y_1 y_2 \lambda_{-1} N.$$

Тогда $K(Y)_N$ – коммутативное ассоциативное кольцо без единицы.

Аналогично определим $K(Y')_{N'}$ с умножением $y'_1 * y'_2 = y'_1 y'_2 \lambda_{-1} N' = y'_1 y'_2 (1 - l)$, где l – класс конормального пучка N' многообразия Y' в X' и $\lambda_{-1} N' = 1 - l$ [4, п. 13.5], потому что N' изоморфен $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1)$ [4, предложение 12.2].

Аддитивная группа кольца $K(X) \oplus K(Y')_{N'}$ является прямой суммой аддитивных групп $K(X)$ и $K(Y')_{N'}$; умножение в $K(X)$ обычное, в $K(Y')_{N'}$ оно определено выше; наконец,

$$(x, 0) \cdot (0, y') = (0, g^* i^*(x) y').$$

Поскольку $Y' = \mathbb{P}(N)$, то имеется канонический сюръективный морфизм

$$g^*(N) \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}(1) \rightarrow 0$$

пучков на Y' (см. [4, предложения 12.2, 4.9]). Пусть F – ядро этого отображения. Это локально свободный пучок на Y' . Обозначим через F его класс в $K(Y')$.

Пусть

$$\alpha(y) = (i_*(y), -g^*(y) \lambda_{-1} F).$$

Отображение $\alpha: K(Y)_N \rightarrow K(X) \oplus K(Y')_{N'}$ является морфизмом колец. Более того:

- (а) образ α – это идеал в $K(X) \oplus K(Y')_{N'}$;
- (б) образ α и $K(Y')_{N'}$ ортогональны относительно умножения, и α – морфизм $K(X)$ -алгебр;
- (с) морфизм групп

$$\alpha': K(X) \oplus K(Y')_{N'} \rightarrow K(Y), \quad \alpha'(x, y') = -g_*(y'),$$

обладает свойством

$$\forall y \in K(Y) \quad \alpha' \circ \alpha(y) = y,$$

поэтому идеал $\alpha(K(Y))$ является прямым слагаемым (как аддитивная подгруппа) [4, § 15].

Пусть $\beta(x, y') = f^*(x) + j_*(y')$. Тогда $\beta: K(X) \oplus K(Y')_{N'} \rightarrow K(X')$ – морфизм колец и имеется точная последовательность колец [4, теорема 15.2]

$$0 \rightarrow K(Y)_N \xrightarrow{\alpha} K(X) \oplus K(Y')_{N'} \xrightarrow{\beta} K(X') \rightarrow 0.$$

Пусть $GK(X)$ – градуированное кольцо, ассоциированное с γ -фильтрацией $F^k K(X) \hookrightarrow K(X)$ [4, п. 8.3], $GK_{\mathbb{Q}}(X) = GK(X) \otimes \mathbb{Q}$, $r = \text{rank } N$. Аддитивная группа кольца $GK_{\mathbb{Q}}(Y)(r)_{c_r(N)}$ градуирована:

$$(GK_{\mathbb{Q}}(Y)(r)_{c_r(N)})^{(i)} = F^{i-r} K_{\mathbb{Q}}(Y) / F^{i-r+1} K_{\mathbb{Q}}(Y) = G^{i-r} K_{\mathbb{Q}}(Y).$$

Умножение определено умножением “начальных форм” и корректирующим множителем

$$(-1)^r c_r(N) = (-1)^r \gamma^r(N - r) \bmod F^{r+1} K_{\mathbb{Q}}(Y) \in G^r K_{\mathbb{Q}}(Y)$$

(см. [4, п. 16.13]). Наше определение отличается от определения корректирующего множителя в [4, п. 16.13] коэффициентом $(-1)^r$.

Заметим, что соотношение

$$\lambda_{-1} N = (-1)^r \gamma^r(N - r) \quad (1.1)$$

следует из доказательства леммы 8.9 в [4]. Действительно,

$$\begin{aligned} \gamma_t(N - r) &= \frac{\gamma_t(N)}{\gamma_t(r)} = (1 - t)^r \lambda_{\frac{t}{1-t}}(N) = (1 - t)^r \sum_{i=0}^r \lambda^i(N) (t + t^2 + \dots)^i \\ &= (1 - t)^r \sum_{i=0}^r \lambda^i(N) \left(\frac{t}{1-t} \right)^i = \sum_{i=0}^r \lambda^i(N) t^i (1 - t)^{r-i} \end{aligned}$$

– полином степени не больше r . Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^r \gamma^i(N - r) t^{r-i} &= t^r \sum_{i=0}^r \gamma^i(N - r) t^{-i} = t^r \gamma_{\frac{1}{t}}(N - r) \\ &= t^r \sum_{i=0}^r \lambda^i(N) t^{-i} \left(1 - \frac{1}{t} \right)^{r-i} = \sum_{i=0}^r \lambda^i(N) (t - 1)^{r-i} \end{aligned}$$

(см. [5, гл. III, § 1, предложение 1.1]). Полагая $t = 0$, получим

$$\gamma^r(N - r) = \sum_{i=0}^r \lambda^i(N) (-1)^{r-i} = (-1)^r \sum_{i=0}^r \lambda^i(N) (-1)^i = (-1)^r \lambda_{-1}(N).$$

Аналогично имеем соотношение $\gamma^{r-1}(F - r + 1) = (-1)^{r-1} \lambda_{-1}(F)$ для локально свободного пучка F ранга $r - 1$.

Определение кольца $GK_{\mathbb{Q}}(Y')(1)_{c_1(N')}$ совершенно аналогично определению кольца $GK_{\mathbb{Q}}(Y)(r)_{c_r(N)}$.

Гомоморфизм $G\alpha$ (соответственно, $G\beta$) получается из α (соответственно, β) тензорным умножением на $\mathbb{Q}$ и рассмотрением “начальных форм”. Поэтому

$$\begin{aligned} G\alpha(y) &= (Gi_*(y), -Gg^*(y)(\lambda_{-1}F \bmod F^r K_{\mathbb{Q}}(Y'))) \\ &= (Gi_*(y), (-1)^r Gg^*(y)(\gamma^{r-1}(F - r + 1) \bmod F^r K_{\mathbb{Q}}(Y'))) \\ &= (Gi_*(y), (-1)^r Gg^*(y)c_{r-1}(F)), \end{aligned}$$

где $Gi_*(G^k K_{\mathbb{Q}}(Y)) \hookrightarrow G^{k+r} K_{\mathbb{Q}}(X)$ (см. [4, предложение 16.12]). С другой стороны, $G\beta(x, y') = Gf^*(x) + Gj_*(y')$, где $Gj_*(G^k K_{\mathbb{Q}}(Y')) \hookrightarrow G^{k+1} K_{\mathbb{Q}}(X')$ [4, предложение 16.12].

Имеется точная последовательность градуированных колец

$$0 \rightarrow GK_{\mathbb{Q}}(Y)(r)_{c_r(N)} \xrightarrow{G\alpha} GK_{\mathbb{Q}}(X) \oplus GK_{\mathbb{Q}}(Y')(1)_{c_1(N')} \xrightarrow{G\beta} GK_{\mathbb{Q}}(X') \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

(см. [4, теорема 16.14]).

С другой стороны, имеется канонический изоморфизм колец

$$GK_{\mathbb{Q}}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}},$$

где $\mathrm{CH}^*(X)$ – кольцо Чжоу алгебраических циклов по модулю рациональной эквивалентности, градуированное коразмерностью [6, пример 15.2.16]. Выбор $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ определяет изоморфизм $\mathbb{Q}(1) \simeq \mathbb{Q}$. Обозначим через $\mathrm{cl}_X(Z) \in H^{2m}(X, \mathbb{Q})$ класс алгебраического цикла Z коразмерности m на X . Тогда определен канонический морфизм градуированных колец

$$\mathrm{cl}_X: GK_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow H^{2*}(X, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{m=0}^d H^{2m}(X, \mathbb{Q}).$$

В частности, cl_X переводит произведение в градуированном кольце $GK_{\mathbb{Q}}(X)$ в $\cup$ -произведение в когомологиях. Образ cl_X – это кольцо $H_{\mathrm{alg}}^{2*}(X, \mathbb{Q})$ алгебраических классов когомологий.

1.2. ТЕОРЕМА. Пусть X – гладкое комплексное проективное многообразие, $f: X' \rightarrow X$ – моноидальное преобразование вдоль замкнутого гладкого неприводимого подмногообразия $Y \hookrightarrow X$ коразмерности $r \geq 2$. Тогда для всех натуральных m имеется каноническое разложение

$$H_{\mathrm{alg}}^{2m}(X', \mathbb{Q}) = f^* H_{\mathrm{alg}}^{2m}(X, \mathbb{Q}) \oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} j_* \left[g^* H_{\mathrm{alg}}^{2m-2p-2}(Y, \mathbb{Q}) \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех натуральных m и для любого $p \in \{0, \dots, r-2\}$ имеются канонический изоморфизм $\mathbb{Q}$ -пространств

$$\begin{aligned} H^{2m-2p-2}(Y, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} j_* \left[g^* H^{2m-2p-2}(Y, \mathbb{Q}) \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right], \\ y &\mapsto j_* \left[g^*(y) \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

и разложение $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$H^{2m}(X', \mathbb{Q}) = f^* H^{2m}(X, \mathbb{Q}) \oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} j_* \left[g^* H^{2m-2p-2}(Y, \mathbb{Q}) \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \right] \quad (1.4)$$

(см. [7, предложение 13.1]).

Последовательность (1.2) дает точную последовательность

$$0 \rightarrow G^{m-r} K_{\mathbb{Q}}(Y) \xrightarrow{G\alpha} G^m K_{\mathbb{Q}}(X) \oplus G^{m-1} K_{\mathbb{Q}}(Y') \xrightarrow{G\beta} G^m K_{\mathbb{Q}}(X') \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

Имеются соотношения $Y' = \mathbb{P}(N)$, $N' = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1)$ (см. [4, предложение 12.2]), поэтому $GK_{\mathbb{Q}}(Y') = GK_{\mathbb{Q}}(Y)[\bar{y}]$, где

$$\bar{y} = \mathrm{cl}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1)) - 1 \pmod{F^2 K_{\mathbb{Q}}(\mathbb{P}(N))} = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))$$

и

$$\bar{y}^r - c_1(N) \bar{y}^{r-1} + \dots + (-1)^r c_r(N) = 0$$

(см. [4, теорема 8.8, лемма 8.9, (11.2.4)], [8, добавление А, § 3]). Мы получаем равенства

$$\begin{aligned} GK_{\mathbb{Q}}(Y') &= GK_{\mathbb{Q}}(Y)[\bar{y}]/(\bar{y}^r - c_1(N)\bar{y}^{r-1} + \cdots + (-1)^r c_r(N)) \\ &= GK_{\mathbb{Q}}(Y)[c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))], \end{aligned} \quad (1.6)$$

и легко видеть, что теорема следует из соотношений (1.3)–(1.6).

1.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим когомологии Вейля $X \mapsto H^*(X, \mathbb{Q})$. Тогда $\sim$ совпадает с гомологической эквивалентностью алгебраических циклов, $C_{\sim}^m(X) \simeq H_{\text{alg}}^{2m}(X, \mathbb{Q})$. Непосредственным следствием определения мотивов является то, что группы классов циклов $C_{\sim}^*(X)$ интерпретируются в терминах категории $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$. Действительно,

$$C_{\sim}^m(X) = \text{Hom}_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{L}^m, h(X))$$

(см. [2, п. 2.1]). Следовательно, изоморфизм аддитивных групп

$$H_{\text{alg}}^{2m}(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^{2m}(X, \mathbb{Q}) \oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} H_{\text{alg}}^{2m-2p-2}(Y, \mathbb{Q}) \right]$$

теоремы 1.2 является когомологическим вариантом мотивного разложения $h(X') = h(X) \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{r-1} h(Y) \otimes \mathbb{L}^i \right]$, так как

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{L}^m, h(Y) \otimes \mathbb{L}^i) = \text{Hom}_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{L}^{m-i}, h(Y)) = C_{\sim}^{m-i}(Y) \simeq H_{\text{alg}}^{2m-2i}(Y, \mathbb{Q}).$$

1.4. Гипотеза Ходжа $\text{Hodge}(X)$ для комплексного гладкого проективного многообразия X утверждает [9], что для всех натуральных m имеется равенство $H_{\text{alg}}^{2m}(X, \mathbb{Q}) = H^{2m}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{m,m}(X, \mathbb{C})$, где $H^{m,m}(X, \mathbb{C})$ – компонента типа (m, m) в разложении Ходжа

$$H^{2m}(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=2m} H^{p,q}(X, \mathbb{C}).$$

1.5. ТЕОРЕМА. Пусть $f: X' \rightarrow X$ – моноидальное преобразование гладкого проективного многообразия X вдоль замкнутого гладкого неприводимого подмногообразия $Y \hookrightarrow X$ коразмерности $r \geq 2$. Тогда

$$\text{Hodge}(X') \Leftrightarrow [\text{Hodge}(X) \ \& \ \text{Hodge}(Y)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме из п. 1.2 имеется разложение

$$H_{\text{alg}}^{2m}(X', \mathbb{Q}) = f^* H_{\text{alg}}^{2m}(X, \mathbb{Q}) \oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} j_* \left[g^* H_{\text{alg}}^{2m-2p-2}(Y, \mathbb{Q}) \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \right]. \quad (1.7)$$

В силу теоремы Лефшеца [10, гл. 1, § 2] выполнено

$$c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1)) \in H^2(Y', \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(Y', \mathbb{C}) = H_{\text{alg}}^2(Y', \mathbb{Q}).$$

Если гипотеза Ходжа верна для X' , то

$$\begin{aligned}
 H_{\text{alg}}^{2m}(X', \mathbb{Q}) &= H^{2m}(X', \mathbb{Q}) \cap H^{m,m}(X', \mathbb{C}) = [f^* H^{2m}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{m,m}(X', \mathbb{C})] \\
 &\oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} \left[j_* \left[g^* H^{2m-2p-2}(Y, \mathbb{Q}) \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \cap H^{m,m}(X', \mathbb{C}) \right] \right] \\
 &= f^* [H^{2m}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{m,m}(X, \mathbb{C})] \\
 &\oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} \left[j_* \left[g^* [H^{2m-2p-2}(Y, \mathbb{Q}) \cap H^{m-p-1, m-p-1}(Y, \mathbb{C})] \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \right] \right].
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Сравнивая (1.8) с разложением (1.7), получаем соотношения

$$H^{2m}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{m,m}(X, \mathbb{C}) = H_{\text{alg}}^{2m}(X, \mathbb{Q}), \tag{1.9}$$

$$H^{2m-2p-2}(Y, \mathbb{Q}) \cap H^{m-p-1, m-p-1}(Y, \mathbb{C}) = H_{\text{alg}}^{2m-2p-2}(Y, \mathbb{Q}) \quad \forall p \in \{0, 1, \dots, r-2\}. \tag{1.10}$$

В частности, гипотеза Ходжа верна для X и Y .

Наоборот, если гипотеза Ходжа верна для X и Y , то выполняются соотношения (1.9), (1.10). Поэтому

$$\begin{aligned}
 H^{2m}(X', \mathbb{Q}) \cap H^{m,m}(X', \mathbb{C}) &= [f^* H^{2m}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{m,m}(X', \mathbb{C})] \\
 &\oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} \left[j_* \left[g^* H^{2m-2p-2}(Y, \mathbb{Q}) \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \cap H^{m,m}(X', \mathbb{C}) \right] \right] \\
 &= f^* [H^{2m}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{m,m}(X, \mathbb{C})] \\
 &\oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} \left[j_* \left[g^* [H^{2m-2p-2}(Y, \mathbb{Q}) \cap H^{m-p-1, m-p-1}(Y, \mathbb{C})] \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \right] \right] \\
 &= f^* H_{\text{alg}}^{2m}(X, \mathbb{Q}) \oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} \left[j_* \left[g^* [H_{\text{alg}}^{2m-2p-2}(Y, \mathbb{Q})] \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \right] \right] \\
 &= H_{\text{alg}}^{2m}(X', \mathbb{Q})
 \end{aligned}$$

в силу (1.7). Следовательно, гипотеза Ходжа верна для X' . Теорема доказана.

1.6. ТЕОРЕМА. *Если гипотеза Ходжа верна для всех гладких проективных рациональных многообразий, то она верна для всех гладких проективных многообразий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого гладкого проективного многообразия Y существуют целое число $n \geq 2$ и вложение $i: Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ такие, что $\text{codim}_{\mathbb{P}^n}(Y) \geq 2$. Пусть $X' \rightarrow \mathbb{P}^n$ – моноидальное преобразование $\mathbb{P}^n$ вдоль Y . Поскольку X' – рациональное многообразие, то гипотеза Ходжа верна для X' по условию теоремы. В силу теоремы из п. 1.5 гипотеза Ходжа верна для Y . Теорема доказана.

1.7. СЛЕДСТВИЕ. *Гипотеза Ходжа верна для всех гладких проективных рациональных многообразий размерности $d \leq 5$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X рационально, то существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X' & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathbb{P}^d & \dashrightarrow & X \end{array}$$

в которой $X' \rightarrow \mathbb{P}^d$ – конечная последовательность моноидальных преобразований вдоль гладких неприводимых центров размерности не больше 3 и $\pi: X' \rightarrow X$ – сюръективный бирациональный морфизм (см. [11, основная теорема I*], [12, теорема 11.14]). Поскольку гипотеза Ходжа верна для всех гладких проективных многообразий размерности не больше 3 и для $\mathbb{P}^d$, то она верна для X' по теореме из п. 1.5. Поэтому она верна для X в силу соотношения $\pi_*\pi^* = 1$. Следствие доказано.

Аналогично, имеем следующий результат.

1.8. СЛЕДСТВИЕ. *Если X и X' – бирационально эквивалентные гладкие проективные многообразия размерности $d \leq 5$, то гипотезы Ходжа для X и X' эквивалентны. В частности, если X бирационально эквивалентно простому пятимерному абелеву многообразию, то гипотеза Ходжа верна для X .*

Действительно, гипотеза Ходжа верна для всех простых абелевых многообразий простой размерности [13].

§ 2. Гипотеза $D(X)$ и моноидальные преобразования

2.1. Для комплексного гладкого проективного d -мерного многообразия X обозначим через $A^k(X)$ следующую гипотезу Гротендика [14]:

$$\dim H_{\text{alg}}^{2k}(X, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-2k}(X, \mathbb{Q}).$$

Хорошо известно, что в характеристике нуль гипотеза $D(X)$ о совпадении численной и гомологической эквивалентностей алгебраических циклов эквивалентна гипотезе $A(X)$, которая утверждает, что гипотеза $A^k(X)$ верна для любого k [15, теорема 1].

2.2. ТЕОРЕМА. *Пусть X – гладкое комплексное проективное многообразие и $f: X' \rightarrow X$ – моноидальное преобразование вдоль замкнутого гладкого неприводимого подмногообразия $Y \hookrightarrow X$ коразмерности $r \geq 2$. Тогда*

$$D(X') \Leftrightarrow [D(X) \& D(Y)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d = \dim X$. Тогда $\dim Y = d - r$. Из (1.3) и теоремы из п. 1.2 следует, что имеются соотношения

$$\begin{aligned} H_{\text{alg}}^{2m}(X', \mathbb{Q}) &= f^* H_{\text{alg}}^{2m}(X, \mathbb{Q}) \oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} j_* \left[g^* H_{\text{alg}}^{2m-2p-2}(Y, \mathbb{Q}) \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \right] \\ &\simeq H_{\text{alg}}^{2m}(X, \mathbb{Q}) \oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} H_{\text{alg}}^{2m-2p-2}(Y, \mathbb{Q}) \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Можно считать, что $d \geq 5$, потому что $D(X)$ верна для всех гладких проективных многообразий размерности не более 4 (см. [15, следствие 1]).

Предположим, что $r = 2$. Тогда $\dim Y = d - r \geq 3$. Согласно (2.1) имеем

$$H_{\text{alg}}^2(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^2(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^0(Y, \mathbb{Q}), \quad (2.2)$$

$$H_{\text{alg}}^{2d-2}(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^{2d-2}(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-4}(Y, \mathbb{Q}). \quad (2.3)$$

Из сравнения соотношений (2.2), (2.3) (учитывая равенства $\dim H_{\text{alg}}^0(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-4}(Y, \mathbb{Q}) = 1$) мы видим, что $A^1(X')$ и $A^1(X)$ эквивалентны. Более того, $A^1(Y)$ всегда выполняется [15, следствие 1]. Аналогично имеем

$$H_{\text{alg}}^4(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^4(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^2(Y, \mathbb{Q}), \quad (2.4)$$

$$H_{\text{alg}}^{2d-4}(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^{2d-4}(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-6}(Y, \mathbb{Q}). \quad (2.5)$$

Поскольку $A^1(Y)$ верна для $(d-2)$ -мерного многообразия Y (см. [15, следствие 1]), то мы имеем соотношение $\dim H_{\text{alg}}^2(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-6}(Y, \mathbb{Q})$. Поэтому (2.4), (2.5) дают эквивалентность $A^2(X')$ и $A^2(X)$. Более того, если $d = 5$, то $A(X')$ эквивалентна $A(X)$ и $A(Y)$ верна, потому что $\dim Y = 3$ (см. [15, следствие 1]).

Можно считать, что $d \geq 6$. Согласно (2.1) имеем

$$H_{\text{alg}}^6(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^6(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^4(Y, \mathbb{Q}), \quad (2.6)$$

$$H_{\text{alg}}^{2d-6}(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^{2d-6}(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-8}(Y, \mathbb{Q}). \quad (2.7)$$

Если $A^2(Y)$ верна для $(d-2)$ -мерного многообразия Y , то $\dim H_{\text{alg}}^4(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-8}(Y, \mathbb{Q})$ и $A^3(X')$ эквивалентна $A^3(X)$ согласно (2.6), (2.7); более того, если $d = 6$, то $A(X')$ эквивалентна $A(X)$, потому что $A(Y)$ верна для четырехмерного многообразия Y (см. [15, следствие 1]).

С другой стороны, если $A(X')$ верна, то и $A(X)$ верна [16, теорема 1.5]. Следовательно, $A^2(Y)$ верна в силу (2.6), (2.7). Поэтому можно считать, что $d \geq 7$. Используя указанный алгоритм, можно доказать теорему для $r = 2$ и для произвольного d .

Предположим, что $r = 3$. Согласно (2.1) имеем

$$H_{\text{alg}}^2(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^2(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^0(Y, \mathbb{Q}), \quad (2.8)$$

$$H_{\text{alg}}^{2d-2}(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^{2d-2}(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-6}(Y, \mathbb{Q}). \quad (2.9)$$

Из сравнения соотношений (2.8), (2.9) и равенств

$$\dim H_{\text{alg}}^0(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-6}(Y, \mathbb{Q}) = 1 \quad (2.10)$$

следует, что $A^1(X')$ и $A^1(X)$ эквивалентны. Более того, $A^1(Y)$ всегда верна (см. [15, следствие 1]). Аналогично имеем

$$H_{\text{alg}}^4(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^4(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^2(Y, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^0(Y, \mathbb{Q}), \quad (2.11)$$

$$H_{\text{alg}}^{2d-4}(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^{2d-4}(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-6}(Y, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-8}(Y, \mathbb{Q}). \quad (2.12)$$

Поскольку $A^1(Y)$ верна для $(d-3)$ -мерного многообразия Y (см. [15, следствие 1]), то мы имеем соотношение

$$\dim H_{\text{alg}}^2(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-8}(Y, \mathbb{Q}). \quad (2.13)$$

Из (2.10)–(2.13) следует, что $A^2(X')$ эквивалентна $A^2(X)$. Более того, если $d = 5$, то $A(X')$ эквивалентна $A(X)$, и $A(Y)$ верна, потому что $\dim Y = 2$ (см. [15, следствие 1]).

Можно считать, что $d \geq 6$. Согласно (2.1) имеем

$$H_{\text{alg}}^6(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^6(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^4(Y, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^2(Y, \mathbb{Q}), \quad (2.14)$$

$$H_{\text{alg}}^{2d-6}(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^{2d-6}(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-8}(Y, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-10}(Y, \mathbb{Q}). \quad (2.15)$$

Если $A^2(Y)$ верна, то $\dim H_{\text{alg}}^4(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-10}(Y, \mathbb{Q})$ и из (2.13)–(2.15) следует, что $A^3(X')$ эквивалентна $A^3(X)$.

С другой стороны, если $A(X')$ верна, то и $A(X)$ верна [16, теорема 1.5]. Поэтому в силу (2.13)–(2.15) имеем соотношение $\dim H_{\text{alg}}^4(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-10}(Y, \mathbb{Q})$ и выполнено

$$A(X') \Rightarrow A^2(Y). \quad (2.16)$$

Более того, если $d = 6$, то $A(X')$ эквивалентна $A(X)$, потому что $A(Y)$ верна для трехмерного многообразия Y (см. [15, следствие 1]).

Можно считать, что $d \geq 7$. Тогда

$$H_{\text{alg}}^8(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^8(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^6(Y, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^4(Y, \mathbb{Q}), \quad (2.17)$$

$$H_{\text{alg}}^{2d-8}(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^{2d-8}(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-10}(Y, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-12}(Y, \mathbb{Q}). \quad (2.18)$$

Если $A^2(Y)$ и $A^3(Y)$ верны, то выполнено $\dim H_{\text{alg}}^4(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-10}(Y, \mathbb{Q})$, $\dim H_{\text{alg}}^6(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-12}(Y, \mathbb{Q})$ и из (2.17), (2.18) следует, что $A^4(X')$ эквивалентна $A^4(X)$.

С другой стороны, если $A(X')$ верна, то и $A(X)$ верна (см. [16, теорема 1.5]). Согласно (2.16) имеем $\dim H_{\text{alg}}^4(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-10}(Y, \mathbb{Q})$. Поэтому $\dim H_{\text{alg}}^6(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-12}(Y, \mathbb{Q})$ в силу соотношений (2.17), (2.18). Следовательно, $A^3(Y)$ верна. Более того, если $d = 7$, то $A(X')$ эквивалентна $A(X)$, потому что $A(Y)$ верна для четырехмерного многообразия Y (см. [15, следствие 1]). Можно считать, что $d \geq 8$. Используя указанный алгоритм, можно доказать теорему для $r = 3$ и произвольного d .

Предположим, что $r = 4$. Тогда

$$H_{\text{alg}}^2(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^2(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^0(Y, \mathbb{Q}), \quad (2.19)$$

$$H_{\text{alg}}^{2d-2}(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^{2d-2}(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-8}(Y, \mathbb{Q}), \quad (2.20)$$

потому что $\dim Y = d - 4$, и мы имеем $H_{\text{alg}}^{2d-4}(Y, \mathbb{Q}) = 0$, $H_{\text{alg}}^{2d-6}(Y, \mathbb{Q}) = 0$. Разложения (2.19), (2.20) показывают, что $A^1(X)$ и $A^1(X')$ эквивалентны. Этот факт хорошо известен (см. [15, следствие 1]). Согласно (2.1) имеем

$$H_{\text{alg}}^4(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^4(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^2(Y, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^0(Y, \mathbb{Q}), \quad (2.21)$$

$$H_{\text{alg}}^{2d-4}(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^{2d-4}(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-8}(Y, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-10}(Y, \mathbb{Q}). \quad (2.22)$$

Поскольку $A^1(Y)$ верна для $(d - 4)$ -мерного многообразия Y (см. [15, следствие 1]), то мы имеем соотношение

$$\dim H_{\text{alg}}^2(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-10}(Y, \mathbb{Q}). \quad (2.23)$$

С другой стороны,

$$\dim H_{\text{alg}}^0(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-8}(Y, \mathbb{Q}) = 1. \quad (2.24)$$

Поэтому (2.21)–(2.24) показывают, что $A^2(X')$ эквивалентна $A^2(X)$. Более того, если $d = 5$, то $A(X')$ эквивалентна $A(X)$ и $A(Y)$ верна, потому что $\dim Y = 1$ (см. [15, следствие 1]).

Можно считать, что $d \geq 6$. Тогда

$$H_{\text{alg}}^6(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^6(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^4(Y, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^2(Y, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^0(Y, \mathbb{Q}), \quad (2.25)$$

$$H_{\text{alg}}^{2d-6}(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^{2d-6}(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-8}(Y, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-10}(Y, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-12}(Y, \mathbb{Q}). \quad (2.26)$$

Если $A^2(Y)$ верна, то $\dim H_{\text{alg}}^4(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-12}(Y, \mathbb{Q})$ и из (2.23)–(2.26) следует, что $A^3(X')$ эквивалентна $A^3(X)$.

С другой стороны, если $A(X')$ верна, то и $A(X)$ верна (см. [16, теорема 1.5]). Поэтому

$$A(X') \Rightarrow [\dim H_{\text{alg}}^4(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-12}(Y, \mathbb{Q})] \quad (2.27)$$

в силу соотношений (2.23)–(2.26). Другими словами, $A^2(Y)$ верна. Более того, если $d = 6$, то $A(X')$ эквивалентна $A(X)$, потому что $A(Y)$ верна для двумерного многообразия Y (см. [15, следствие 1]).

Можно считать, что $d \geq 7$. Тогда

$$H_{\text{alg}}^8(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^8(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^6(Y, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^4(Y, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^2(Y, \mathbb{Q}), \quad (2.28)$$

$$H_{\text{alg}}^{2d-8}(X', \mathbb{Q}) \simeq H_{\text{alg}}^{2d-8}(X, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-10}(Y, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-12}(Y, \mathbb{Q}) \oplus H_{\text{alg}}^{2d-14}(Y, \mathbb{Q}). \quad (2.29)$$

Если гипотезы $A^2(Y)$ и $A^3(Y)$ верны, то $\dim H_{\text{alg}}^4(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-12}(Y, \mathbb{Q})$, $\dim H_{\text{alg}}^6(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-14}(Y, \mathbb{Q})$ и из (2.23), (2.27), (2.28) следует, что $A^4(X')$ эквивалентна $A^4(X)$.

С другой стороны, если $A(X')$ верна, то и $A(X)$ верна (см. [16, теорема 1.5]). Имеем $\dim H_{\text{alg}}^4(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-12}(Y, \mathbb{Q})$ в силу соотношения (2.27). Более того, $\dim H_{\text{alg}}^6(Y, \mathbb{Q}) = \dim H_{\text{alg}}^{2d-14}(Y, \mathbb{Q})$ в силу (2.28), (2.29). Другими словами, $A^3(Y)$ верна. Если $d = 7$, то $A(X')$ эквивалентна $A(X)$, потому что $A(Y)$ верна для одномерного многообразия Y (см. [15, следствие 1]).

Можно считать, что $d \geq 8$. Очевидно, что этот алгоритм позволяет доказать утверждение теоремы для $r = 4$ и любых значений d . Случай $r \geq 5$ можно исследовать с помощью аналогичного алгоритма. Теорема доказана.

2.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X – гладкое комплексное проективное многообразие размерности $d \leq 6$ и $f: X' \rightarrow X$ – моноидальное преобразование вдоль замкнутого гладкого неприводимого центра. Тогда $D(X') \Leftrightarrow D(X)$.

Доказательство этого результата содержится в доказательстве теоремы из п. 2.2.

2.4. СЛЕДСТВИЕ. Если X, X' – бирационально эквивалентные гладкие комплексные проективные многообразия размерности $d \leq 6$, то $D(X') \Leftrightarrow D(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: X' \dashrightarrow X$ – бирациональное отображение. Из результатов Хиронаки следует существование коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X'' & & \\ \downarrow & \searrow & \\ X' & \dashrightarrow & X \end{array}$$

в которой $X'' \rightarrow X'$ – конечная последовательность моноидальных преобразований вдоль замкнутых гладких неприводимых центров и $X'' \rightarrow X$ – морфизм (см. [11, основная теорема I*], [12, теорема 11.14]). Согласно следствию из п. 2.3 имеем $D(X'') \Leftrightarrow D(X')$. С другой стороны, $D(X'') \Rightarrow D(X)$ (см. [16, теорема 1.5]). Следствие доказано.

2.5. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X – гладкое комплексное проективное многообразие размерности $d \leq 6$ и выполнено одно из следующих условий:

- а) X унирационально;
- б) X бирационально эквивалентно абелеву многообразию.

Тогда гипотеза $D(X)$ верна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X унирационально, то имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X' & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathbb{P}^d & \dashrightarrow & X \end{array}$$

в которой $X' \rightarrow \mathbb{P}^d$ – конечная последовательность моноидальных преобразований вдоль гладких неприводимых центров и $X' \rightarrow X$ – сюръективный морфизм. Согласно следствию из п. 2.3 имеем $D(X') \Leftrightarrow D(\mathbb{P}^d)$. С другой стороны, $D(X') \Rightarrow D(X)$ (см. [16, теорема 1.5]). Остается заметить, что $D(\mathbb{P}^d)$ верна.

Если X бирационально эквивалентно абелеву многообразию, то $D(X)$ верна согласно следствию из п. 2.4, потому что численная эквивалентность алгебраических циклов на абелевом многообразии совпадает с гомологической эквивалентностью [15, теорема 4]. Следствие доказано.

2.6. ТЕОРЕМА. Если $D(X)$ верна для всех гладких проективных рациональных многообразий над полем комплексных чисел, то:

- 1) $D(Y)$ верна для всех гладких проективных многообразий;
- 2) стандартная гипотеза Гротендика $B(Y)$ типа Лефшеца об алгебраичности оператора Ходжа $*$ верна для всех гладких проективных многообразий;
- 3) гипотеза Ходжа верна для всех абелевых многообразий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого гладкого проективного многообразия Y существуют целое число $n \geq 2$ и вложение $i: Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ такие, что $\text{codim}_{\mathbb{P}^n}(Y) \geq 2$. Пусть $X' \rightarrow \mathbb{P}^n$ – моноидальное преобразование $\mathbb{P}^n$ вдоль Y . По теореме из п. 2.2 имеем $D(X') \Rightarrow D(Y)$. Поскольку X' – рациональное многообразие, то $D(X')$ верна по предположению теоремы. Поэтому $D(Y)$ верна.

Поскольку $B(Y)$ эквивалентна $D(Y \times Y)$ над полем характеристики нуль (см. [16, (1.11)]), то $B(Y)$ верна.

В частности, $B(Y)$ верна для всех абелевых схем $\pi: Y \rightarrow C$ над гладкими проективными кривыми. Следовательно, гипотеза Ходжа верна для всех абелевых многообразий по теореме Андре (см. [17, теорема 0.6.2; с. 33, замечание 2]). Теорема доказана.

§ 3. Некоторые замечания об абстрактном случае

3.1. Пусть X – гладкое проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем k , $d = \dim_k X$. Фиксируем когомологии Вейля $X \mapsto H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)$ для $l \neq \text{char}(k)$.

По формуле Кюннета и двойственности Пуанкаре имеются канонические $\mathbb{Q}_l$ -линейные изоморфизмы

$$\begin{aligned} H^*([X \times X]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) &\simeq H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) \\ &\simeq H_*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Q}_l}(H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l), H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)). \end{aligned}$$

Подробнее, элемент $u = a \otimes b \in H^*([X \times X]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)$ отвечает $\mathbb{Q}_l$ -линейному отображению

$$u^*: H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) \rightarrow H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l),$$

определенному формулой $u^*(c) = \langle c \cup a \rangle b$, где $\langle \cdot \rangle: H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) \rightarrow \mathbb{Q}_l$ – отображение степени, совпадающее с изоморфизмом ориентации $H^{2d}(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_l$ на $H^{2d}(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)$ и равное нулю на $H^i(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)$ для $i < 2d$.

Произвольный элемент $u \in H^*([X \times X]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)$ отвечает композиции

$$\begin{aligned} u^*: H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) &\xrightarrow{\text{pr}_1^*} H^*([X \times X]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) \xrightarrow{w \mapsto w \cup u} H^*([X \times X]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) \\ &\xrightarrow{\text{pr}_{2*}} H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l). \end{aligned}$$

В частности, $H^*([X \times X]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)$ можно отождествить с $\text{End}_{\mathbb{Q}_l} H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)$.

Пусть $\sim_{\text{num}}$ – численная эквивалентность алгебраических циклов с коэффициентами из поля рациональных чисел, с группами циклов $C_{\text{num}}^j(X)$ по модулю $\sim_{\text{num}}$. Обозначим гомологическую эквивалентность алгебраических циклов

с коэффициентами из поля рациональных чисел через $\sim_{\text{hom}}$ и группы циклов по модулю $\sim_{\text{hom}}$ через $C_{\text{hom}}^j(X)$.

Заметим, что градуировка

$$H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) = H^0(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) \oplus H^1(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) \oplus \cdots \oplus H^{2d}(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)$$

индуцирует конечную $\mathbb{Z}$ -градуировку на $R = \text{End}_{\mathbb{Q}_l} H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)$ следующим образом:

$$R_k = [\text{End}_{\mathbb{Q}_l} H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)]_k = \{f \in \text{End}_{\mathbb{Q}_l} H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) \mid f(H^p(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)) \hookrightarrow H^{k+p}(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l), p = 0, 1, \dots, 2d\}.$$

Она также индуцирует конечную $\mathbb{Z}$ -градуировку на $\mathbb{Q}$ -алгебре $\mathcal{A}(X) = C_{\text{hom}}^*(X \times X)$ алгебраических соответствий с билинейным законом композиции

$$C_{\text{hom}}^*(X \times X) \times C_{\text{hom}}^*(X \times X) \rightarrow C_{\text{hom}}^*(X \times X), \\ (f, g) \mapsto g \circ f = \text{pr}_{13*}(\text{pr}_{12}^* f \cup \text{pr}_{23}^* g),$$

где $\text{pr}_{ij}: X \times X \times X \rightarrow X \times X$ – каноническая проекция. По определению

$$\mathcal{A}_{2j-2d}(X) = C_{\text{hom}}^j(X \times X)$$

– $\mathbb{Q}$ -пространство алгебраических соответствий степени $2j - 2d$.

Следующая теорема, по-видимому, известна специалистам и подсказана результатами, полученными в работе [1].

3.2. ТЕОРЕМА. Пусть X – гладкое d -мерное проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем k . Предположим, что численная и гомологическая эквивалентности алгебраических циклов на $X \times X$ совпадают. Тогда $\mathbb{Q}$ -алгебра $\mathcal{A}(X)$ всех алгебраических соответствий полупроста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что $C_{\text{hom}}^j(X \times X)$ – конечномерное $\mathbb{Q}$ -векторное пространство для всех X и j . В частности, $\mathcal{A}(X)$ – правое артиново кольцо (см. [18, гл. 3, § 3.5, упражнение 3]), и радикал Джекобсона J кольца $\mathcal{A}(X)$ (пересечение всех максимальных правых идеалов) является наибольшим нильпотентным двусторонним идеалом (см. [18, гл. 3, § 3.5, следствие 1]). Поэтому достаточно показать, что J тривиален (другими словами, $\mathcal{A}(X)$ – полупрimitives кольцо (полупростое кольцо в смысле Джекобсона [18, гл. 3, § 3.2]).

Пусть

$$C_{\text{hom}}^{2d-j}(X \times X) \rightarrow C_{\text{hom}}^{2d-j}(X \times X), \quad g \mapsto {}^t g$$

– транспозиция, индуцированная перестановкой множителей в $X \times X$ (напомним, что для $u = a \otimes b \in H^\alpha(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) \otimes H^\beta(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) \hookrightarrow H^{\alpha+\beta}([X \times X]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)$ имеем ${}^t u = (-1)^{\alpha\beta} b \otimes a \in H^{\alpha+\beta}([X \times X]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)$ [19, п. 1.3.2]).

С другой стороны, элемент $f \in C_{\text{hom}}^j(X \times X) \hookrightarrow H^{2j}([X \times X]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)$ отвечает $\mathbb{Q}_l$ -линейному отображению $f^*: H^*(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l) \rightarrow H^{*+2j-2d}(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)$ степени $2j - 2d$ (см. [19, п. 1.3, с. 364]). Мы говорим, что f – соответствие степени $2j - 2d$.

Аналогично, $g \in C_{\text{hom}}^{2d-j}(X \times X)$ – соответствие степени $2(2d-j) - 2d = 2d - 2j$. Поэтому $g \circ f$ – соответствие степени нуль и

$$\langle f \cdot {}^t g \rangle = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \text{tr}_i(g \circ f),$$

где $\text{tr}_i(g \circ f)$ – след оператора $g \circ f$, действующего на $H^i(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l)$ [19, п. 1.3.6].

Поскольку численная эквивалентность алгебраических циклов на $X \times X$ совпадает с гомологической эквивалентностью, то мы имеем равенство $C_{\text{hom}}^*(X \times X) = C_{\text{num}}^*(X \times X)$.

Согласно хорошо известной теореме Бергмана радикал Джекобсона $\mathbb{Z}$ -градуированного кольца $\mathcal{A}(X)$ является градуированным идеалом [20]:

$$J = \bigoplus_{k=-d}^d J \cap \mathcal{A}_{2k}(X).$$

Пусть $f \in J \cap \mathcal{A}_{2j-2d}(X)$. Для любого $g \in C_{\text{hom}}^{2d-j}(X \times X) = \mathcal{A}_{2d-2j}(X)$ оператор $g \circ f$ лежит в J и поэтому нильпотентен. Это же верно для его образа в кольце $\text{End}_{\mathbb{Q}_l}(H^i(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l))$, так что мы имеем равенство $\text{tr}_i(g \circ f) = 0$. Поскольку это выполнено для всех $i \geq 0$, то мы заключаем, что $\langle f \cdot {}^t g \rangle = 0$ для всех $g \in C_{\text{hom}}^{2d-j}(X \times X) = C_{\text{num}}^{2d-j}(X \times X) = \mathcal{A}_{2d-2j}(X)$. По определению это означает, что f численно эквивалентно нулю. Следовательно, $f = 0$. Теорема доказана.

3.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X – гладкое d -мерное проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем k . Предположим, что численная и гомологическая эквивалентности алгебраических циклов на $X \times X$ совпадают. Тогда стандартная гипотеза $B(X)$ типа Леффшеца верна для X .

Действительно, $\mathbb{Q}$ -алгебра $\mathcal{A}(X)$ всех алгебраических соответствий полупроста по теореме из п. 3.2, поэтому данное следствие получается из исправленной версии [21, следствие 1.3] результата Смирнова [22].

3.4. Пусть k – совершенное поле. Тогда его сепарабельное замыкание k^s совпадает с алгебраическим замыканием $\bar{k}$. Предположим, что k – конечно порожденное расширение простого поля, X – гладкое проективное многообразие над k и l – простое число, отличное от $\text{char}(k)$. Группа Галуа $\text{Gal}(k^s/k) = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ канонически действует на группе μ_{l^n} корней степени l^n из единицы и на модуле Тэйта

$$\mathbb{Z}_l(1) = \varprojlim_n \mu_{l^n}.$$

Гипотеза Тэйта $\text{Tate}^m(X)$ утверждает, что для натурального числа m существует такое конечное алгебраическое расширение k'/k , что $\mathbb{Q}_l$ -пространство

$$H^{2m}([X \otimes_k \bar{k}]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l(m))^{\text{Gal}(\bar{k}/k')}$$

порождается классами алгебраических циклов коразмерности m на $X \otimes_k \bar{k}$ (см. [23], [24]). Если $\text{Tate}^m(X)$ верна для любого натурального числа m , то мы говорим, что гипотеза Тэйта $\text{Tate}(X)$ верна для X .

3.5. ТЕОРЕМА. Пусть $f: X' \rightarrow X$ – моноидальное преобразование гладкого проективного многообразия X над совершенным конечно порожденным полем k вдоль замкнутого гладкого неприводимого k -подмногообразия $Y \hookrightarrow X$ коразмерности $r \geq 2$. Тогда

$$\mathrm{Tate}(X') \Leftrightarrow [\mathrm{Tate}(X) \& \mathrm{Tate}(Y)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого натурального числа m имеется разложение $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей [25, теорема 2.2]:

$$\begin{aligned} H^{2m}([X' \otimes_k \bar{k}]_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l(m)) &= f^* H^{2m}([X \otimes_k \bar{k}]_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l(m)) \\ &\oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} j_* \left[g^* H^{2m-2p-2}([Y \otimes_k \bar{k}]_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l(m-p-1)) \cup_{c_1} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

являющееся абстрактным аналогом разложения (1.4); более того, легко доказывается абстрактный аналог теоремы из п. 1.2:

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{alg}}^{2m}([X' \otimes_k \bar{k}]_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l(m)) &= f^* H_{\mathrm{alg}}^{2m}([X \otimes_k \bar{k}]_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l(m)) \\ &\oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} j_* \left[g^* H_{\mathrm{alg}}^{2m-2p-2}([Y \otimes_k \bar{k}]_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l(m-p-1)) \cup_{c_1} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

С другой стороны,

$$c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1)) \in H^2([Y' \otimes_k \bar{k}]_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l(1))^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}.$$

Если гипотеза Тэйта верна для X' , то можно считать k настолько большим, что

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{alg}}^{2m}([X' \otimes_k \bar{k}]_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l(m)) &= H^{2m}([X' \otimes_k \bar{k}]_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l(m))^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \\ &= f^* H^{2m}([X \otimes_k \bar{k}]_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l(m))^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} \left[j_* \left[g^* H^{2m-2p-2} \right. \right. \right. \\ &\quad \times ([Y \otimes_k \bar{k}]_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l(m-p-1)) \cup_{c_1} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \left. \right] \left. \right]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \\ &= f^* H^{2m}([X \otimes_k \bar{k}]_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l(m))^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} \left[j_* \left[g^* \left[H^{2m-2p-2} \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \times ([Y \otimes_k \bar{k}]_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l(m-p-1))^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \left. \right] \cup_{c_1} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \left. \right] \left. \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Сравнивая (3.3) с разложением (3.2), получаем соотношения

$$H^{2m}([X \otimes_k \bar{k}]_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l(m))^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} = H_{\mathrm{alg}}^{2m}([X \otimes_k \bar{k}]_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l(m)), \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
& H^{2m-2p-2}([Y \otimes_k \bar{k}]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l(m-p-1))^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \\
& = H_{\text{alg}}^{2m-2p-2}([Y \otimes_k \bar{k}]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l(m-p-1)). \quad \forall p \in \{0, 1, \dots, r-2\} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

В частности, гипотеза Тэйта верна для Y .

Наоборот, если гипотеза Тэйта верна для X и для Y , то можно считать, что выполнены соотношения (3.4), (3.5). Следовательно,

$$\begin{aligned}
& H^{2m}([X' \otimes_k \bar{k}]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l(m))^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} = [f^* H^{2m}([X \otimes_k \bar{k}]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l(m))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \\
& \oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} \left[j_* \left[g^* H^{2m-2p-2}([Y \otimes_k \bar{k}]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l(m-p-1)) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \right]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \right] = f^* \left[H^{2m}([X \otimes_k \bar{k}]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l(m))^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \right] \\
& \oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} \left[j_* \left[g^* \left[H^{2m-2p-2}([Y \otimes_k \bar{k}]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l(m-p-1))^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \right] \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \right] \right] = f^* H_{\text{alg}}^{2m}([X \otimes_k \bar{k}]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l(m)) \\
& \oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} \left[j_* \left[g^* \left[H_{\text{alg}}^{2m-2p-2}([Y \otimes_k \bar{k}]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l(m)) \right] \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \right] \right] \\
& = H_{\text{alg}}^{2m}([X' \otimes_k \bar{k}]_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l(m))
\end{aligned}$$

в силу (3.2). Поэтому гипотеза Тэйта верна для X' . Теорема доказана.

3.6. СЛЕДСТВИЕ. Если гипотеза Тэйта верна для всех гладких проективных рациональных многообразий над совершенным конечно порожденным полем k , то она верна для всех гладких проективных многообразий над k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого гладкого проективного многообразия Y над k существуют целое число $n \geq 2$ и вложение $i: Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ над k такие, что $\text{codim}_{\mathbb{P}^n}(Y) \geq 2$. Пусть $X' \rightarrow \mathbb{P}^n$ – моноидальное преобразование $\mathbb{P}^n$ вдоль Y . Поскольку X' – рациональное многообразие над k , то гипотеза Тэйта верна для X' по условию следствия. В силу теоремы из п. 3.5 гипотеза Тэйта верна для Y . Следствие доказано.

§ 4. Моноидальные преобразования комплексных проективных многообразий и стандартная гипотеза $B(X)$ типа Лефшеца

4.1. ТЕОРЕМА. Если стандартная гипотеза $B(X)$ типа Лефшеца верна для любого гладкого проективного рационального многообразия X над полем комплексных чисел, то $B(Y)$ верна для любого гладкого проективного многообразия Y над $\mathbb{C}$.

Действительно, для любого гладкого проективного многообразия X над полем комплексных чисел имеет место $B(X) \Rightarrow A(X)$ (см. [19, следствие 2.2])

и $A(X)$ эквивалентна $D(X)$ [15, теорема 1]. По условию теоремы гипотеза $B(X)$ верна для любого гладкого проективного рационального многообразия X . Следовательно, $D(X)$ верна для любого гладкого проективного рационального многообразия X . Поэтому $B(Y)$ верна для любого гладкого проективного многообразия Y по теореме из п. 2.6. Теорема доказана.

4.2. ЛЕММА. Пусть X – гладкое проективное многообразие над полем k , $f: X' \rightarrow X$ – моноидальное преобразование X вдоль замкнутого гладкого неприводимого k -подмногообразия $Y \hookrightarrow X$ коразмерности $r \geq 2$. Тогда для любого гладкого проективного k -многообразия Z морфизм $f \times \text{id}_Z: X' \times_k Z \rightarrow X \times_k Z$ является моноидальным преобразованием $X \times_k Z$ вдоль $Y \times_k Z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{J} \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ – пучок идеалов, определяющий Y в X . Поскольку структурный морфизм $Z \rightarrow \text{Spec } k$ плоский и $\mathcal{O}_X \otimes_k \mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_{X \times_k Z}$ (см. [8, гл. II, теорема 3.3]), то мы видим, что $\mathcal{J} \otimes_k \mathcal{O}_Z \hookrightarrow \mathcal{O}_X \otimes_k \mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_{X \times_k Z}$ – пучок идеалов, определяющий $Y \times_k Z$ в $X \times_k Z$.

Пусть $\text{pr}_X: X \times_k Z \rightarrow X$ – каноническая проекция. Тогда для квазикогерентного градуированного пучка $\mathcal{O}_X$ -алгебр $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{J}^i$ имеем

$$\text{Proj} \left(\text{pr}_X^* \left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{J}^i \right) \right) \simeq \text{Proj} \left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{J}^i \right) \times_X (X \times_k Z)$$

(см. [26, добавление к лекции 5]). Поскольку $X' = \text{Proj}(\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{J}^i)$, то мы получаем соотношения

$$\text{Proj} \left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} (\mathcal{J} \otimes_k \mathcal{O}_Z)^i \right) \simeq \text{Proj} \left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{J}^i \right) \times_k Z = X' \times_k Z.$$

Лемма доказана.

4.3. ТЕОРЕМА. Пусть X – гладкое комплексное проективное многообразие и $f: X' \rightarrow X$ – моноидальное преобразование вдоль замкнутого гладкого неприводимого центра $Y \hookrightarrow X$ коразмерности $r \geq 2$. Тогда

$$B(X') \Leftrightarrow [B(X) \& B(Y)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что гипотеза $B(X')$ верна. Поскольку $B(X')$ эквивалентна гипотезе $A(X' \times X')$ [16, (1.11)], которая, в свою очередь, эквивалентна $D(X' \times X')$ [15, теорема 1], то гипотеза $D(X' \times X')$ верна. Согласно лемме из п. 4.2 $f \times \text{id}_{X'}: X' \times X' \rightarrow X \times X'$ является моноидальным преобразованием $X \times X'$ вдоль $Y \times X'$. По теореме из п. 2.2 имеем $D(X' \times X') \Rightarrow D(Y \times X')$. В частности, $D(Y \times X')$ верна. По лемме из п. 4.2 получаем, что $\text{id}_Y \times f: Y \times X' \rightarrow Y \times X$ – моноидальное преобразование $Y \times X$ вдоль $Y \times Y$. Согласно теореме из п. 2.2 имеем $D(Y \times X') \Rightarrow D(Y \times Y)$. Следовательно, $D(Y \times Y)$ верна. Поскольку $D(Y \times Y)$ эквивалентна $B(Y)$, то мы доказали соотношение $B(X') \Rightarrow B(Y)$. С другой стороны, $B(X') \Rightarrow B(X)$ вследствие [16, теорема 1.6].

Наоборот, если $B(X)$ и $B(Y)$ верны, то $B(X \times Y)$ верна [19, следствие 2.5]. Поскольку $B(X \times Y) \Rightarrow A(X \times Y)$ [19, следствие 2.2] и $A(X \times Y)$ эквивалентна

$D(X \times Y)$ [15, теорема 1], то гипотеза $D(X \times Y)$ верна. Согласно лемме из п. 4.2 получаем, что $\text{id}_X \times f: X \times X' \rightarrow X \times X$ – моноидальное преобразование $X \times X$ вдоль $X \times Y$. По теореме из п. 2.2 имеем

$$D(X \times X) \& D(X \times Y) \Rightarrow D(X \times X').$$

Поскольку $B(X) \Leftrightarrow D(X \times X)$, то гипотеза $D(X \times X')$ верна. Согласно лемме из п. 4.2 получаем, что $\text{id}_Y \times f: Y \times X' \rightarrow Y \times X$ – моноидальное преобразование $Y \times X$ вдоль $Y \times Y$. По теореме из п. 2.2 имеем $D(Y \times X) \& D(Y \times Y) \Rightarrow D(Y \times X')$. С другой стороны, $D(Y \times Y) \Leftrightarrow B(Y)$, поэтому $D(Y \times X')$ верна. Согласно лемме из п. 4.2 получаем, что $f \times \text{id}_{X'}: X' \times X' \rightarrow X \times X'$ – моноидальное преобразование $X \times X'$ вдоль $Y \times X'$. По теореме из п. 2.2 имеем

$$D(X \times X') \& D(Y \times X') \Rightarrow D(X' \times X').$$

Поэтому $D(X' \times X')$ верна. Поскольку $D(X' \times X')$ эквивалентна $B(X')$, то мы видим, что $B(Y) \& B(X) \Rightarrow B(X')$. Теорема доказана.

4.4. СЛЕДСТВИЕ. *Стандартная гипотеза $B(X)$ типа Лефшеца верна для любого гладкого проективного унирационального или униабелева четырехмерного многообразия X над полем комплексных чисел.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X унирационально, то существует коммутативная диаграмма (домик Хиронаки)

$$\begin{array}{ccc} X' & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathbb{P}^4 & \text{---} & X \end{array}$$

в которой $X' \rightarrow \mathbb{P}^4$ – конечная последовательность моноидальных преобразований вдоль гладких неприводимых центров размерности не больше 2 и $X' \rightarrow X$ – сюръективный морфизм. По теореме из п. 4.3 имеем $B(X') \Leftrightarrow B(\mathbb{P}^4)$, потому что $B(Y)$ верна для любого гладкого проективного многообразия Y размерности не больше 2. Действительно, $B(Y)$ эквивалентна $D(Y \times Y)$, и $D(Z)$ верна для любого гладкого проективного многообразия Z размерности не больше 4 [15, следствие 1]. С другой стороны, $B(X') \Rightarrow B(X)$ [16, теорема 1.6]. Остается заметить, что $B(\mathbb{P}^4)$ верна.

Если X бирационально эквивалентно абелеву четырехмерному многообразию, то $B(X)$ верна по той же причине, поскольку стандартная гипотеза типа Лефшеца верна для всех абелевых многообразий [15, теорема 4]. Следствие доказано.

4.5. СЛЕДСТВИЕ. *Стандартная гипотеза $B(X)$ типа Лефшеца верна для любого гладкого проективного трехмерного многообразия Фано X над полем комплексных чисел.*

Действительно, X является унилинейчатым по теореме Коллара (см. [27, (11.2.4)]). В частности, существуют гладкая проективная поверхность S и доминантное рациональное отображение $S \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$. С другой стороны, $B(S)$

и $B(\mathbb{P}^1)$ верны (см. [15, следствие 1]), и $B(S) \& B(\mathbb{P}^1) \Rightarrow B(S \times \mathbb{P}^1)$ (см. [19, следствие 2.5]). Более того, существует домик Хиронаки

$$\begin{array}{ccc} X' & & \\ \downarrow & \searrow & \\ S \times \mathbb{P}^1 & \dashrightarrow & X \end{array}$$

в котором $X' \rightarrow S \times \mathbb{P}^1$ – конечная последовательность моноидальных преобразований вдоль гладких неприводимых центров размерности не больше 1 и $X' \rightarrow X$ – сюръективный морфизм. По теореме из п. 4.3 стандартная гипотеза верна для X' , потому что $B(Y)$ верна для точек и кривых (см. [15, следствие 1]). Остается заметить, что $B(X') \Rightarrow B(X)$ [16, теорема 1.6]. Следствие доказано.

4.6. Для гладкого проективного многообразия X над полем комплексных чисел рассмотрим $\mathbb{Q}$ -алгебру $\mathcal{A}(X) = H_{\text{alg}}^*(X \times X, \mathbb{Q})$ алгебраических соответствий с билинейным законом композиции

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(X) &\rightarrow \mathcal{A}(X), \\ (f, g) &\mapsto g \circ f = \text{pr}_{13*}(\text{pr}_{12}^* f \cup \text{pr}_{23}^* g), \end{aligned}$$

где $\text{pr}_{ij}: X \times X \times X \rightarrow X \times X$ – каноническая проекция. В силу результатов, полученных в работе [22], стандартная гипотеза $B(X)$ эквивалентна полупростоте $\mathcal{A}(X)$ (см. [21, предложение 1.7]). Поскольку $B(X') \Rightarrow B(X)$ [16, теорема 1.6], то теорема из п. 4.3 принимает следующий вид.

4.7. ТЕОРЕМА. Пусть X – гладкое комплексное проективное многообразие, $f: X' \rightarrow X$ – моноидальное преобразование вдоль замкнутого гладкого неприводимого центра $Y \hookrightarrow X$ коразмерности $r \geq 2$. Тогда $\mathbb{Q}$ -алгебра $\mathcal{A}(X')$ алгебраически соответствий полупроста, если и только если $\mathbb{Q}$ -алгебры $\mathcal{A}(Y)$ и $\mathcal{A}(X)$ полупросты.

§ 5. Гипотеза $C(X)$ и моноидальные преобразования

5.1. Пусть X – гладкое проективное d -мерное многообразие над полем комплексных чисел. Напомним, что гипотеза $C(X)$ утверждает алгебраичность компонент Кюннета $\pi_X^i \in H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \otimes H^i(X, \mathbb{Q})$ класса диагонали $\Delta_X \hookrightarrow X \times X$, соответствующих операторам проекций $\pi_X^i: H^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(X, \mathbb{Q})$.

Если X, Y удовлетворяют $C(X), C(Y)$, то $H_{\text{alg}}^*(X \times Y, \mathbb{Q})$ стабильно относительно разложения Кюннета. Более того, отображение

$$\pi_X^i \otimes \pi_Y^j: H^{i+j}(X \times Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(X, \mathbb{Q}) \otimes H^j(Y, \mathbb{Q})$$

является проекцией, отвечающей разложению Кюннета (см. [19, предложение 2.6]).

5.2. ЛЕММА. Пусть $f: X' \rightarrow X$ – морфизм конечной степени гладких комплексных проективных многообразий. Тогда $C(X') \Rightarrow C(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, гипотеза $C(X)$ эквивалентна стабильности $H_{\text{alg}}^*(X \times X, \mathbb{Q})$ относительно разложения Кюннета (см. [19, предложение 2.6]). Согласно формуле проекции имеем

$$[f \times f]_* [f \times f]^* = \deg(f \times f).$$

В частности, морфизм конечной степени $f \times f: X' \times X' \rightarrow X \times X$ индуцирует вложение

$$[f \times f]^* = f^* \otimes f^*: H_{\text{alg}}^*(X \times X, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H_{\text{alg}}^*(X' \times X', \mathbb{Q}),$$

совместимое с разложением Кюннета [19, предложение 1.3.7]. Следовательно, $[f \times f]_*$ сохраняет разложение Кюннета. Для любого алгебраического цикла Z на $X \times X$ компоненты Кюннета элемента $[f \times f]^*(\text{cl}_{X \times X}(Z)) \in H_{\text{alg}}^*(X' \times X', \mathbb{Q})$ алгебраичны, потому что $C(X')$ верна. Поэтому компоненты Кюннета элемента $[f \times f]_* [f \times f]^*(\text{cl}_{X \times X}(Z)) = \deg(f \times f) \cdot \text{cl}_{X \times X}(Z)$ алгебраичны и $C(X)$ верна. Лемма доказана.

5.3. Для любого элемента $y' \in K(Y')$ имеем $j^* j_*(y') = y' \cdot \lambda_{-1}(N')$ (см. [4, предложение 13.4]). Поскольку $\lambda_{-1}(N') = -\gamma^1(N' - 1)$ в силу (1.1), то мы получаем соотношение

$$\forall y' \in GK_{\mathbb{Q}}(Y') \quad G j^* G j_*(y') = -y' \cdot c_1(N') = -y' \cdot c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))$$

(см. [6, предложение 2.6]). Поэтому

$$\forall y' \in H_{\text{alg}}^*(Y', \mathbb{Q}) \quad j^* j_*(y') = -y' \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1)). \quad (5.1)$$

5.4. ЛЕММА. *Имеем*

$$\begin{aligned} g_* \left[c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup r-1} \right] &= \text{cl}_Y(Y), \\ \forall p < r-1 \quad g_* \left[c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] &= 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидно для $p < r-1$, потому что

$$\forall p < r-1 \quad g_* \left[c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p} \right] \in g_* H_{\text{alg}}^{2p}(\mathbb{P}(N), \mathbb{Q}) \hookrightarrow H_{\text{alg}}^{2p-2(r-1)}(Y, \mathbb{Q}) = 0$$

(см. [19, п. 1.1]).

Мы дадим здесь формальное доказательство оставшейся части утверждения в терминах K -теории для малых значений r . Прежде всего, $g_* l^i = \sigma^i(N)$ для любого i , где $l = \text{cl}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1)) \in K(\mathbb{P}(N))$ (см. [4, п. 15.4], [8, гл. II, предложение 7.11]); с другой стороны,

$$g_* F^k K(\mathbb{P}(N)) \hookrightarrow F^{k-r+1} K(Y)$$

(см. [4, следствие 8.10]). Напомним, что $F^1 K(Y) = \text{Ker}[K(Y) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}]$, где $\varepsilon(E)$ – ранг E для любого локально свободного пучка E на Y (см. [4, определение 8.3]).

Если $r = 2$, то

$$\begin{aligned} Gg_*[c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))] &= g_*[l - 1 \pmod{F^2 K_{\mathbb{Q}}(\mathbb{P}(N))}] \\ &= g_*[l - 1 \pmod{F^1 K_{\mathbb{Q}}(Y)}] = \sigma^1(N) - 1 \pmod{F^1 K_{\mathbb{Q}}(Y)} \\ &= [\text{rank } S^1(N) - 1] \text{cl}(\mathcal{O}_Y) \pmod{F^1 K_{\mathbb{Q}}(Y)} \\ &= [\text{rank } N - 1] \text{cl}(\mathcal{O}_Y) \pmod{F^1 K_{\mathbb{Q}}(Y)} = \text{cl}(\mathcal{O}_Y) \pmod{F^1 K_{\mathbb{Q}}(Y)}, \end{aligned}$$

и в терминах когомологий мы получаем равенство $g_* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1)) = \text{cl}_Y(Y)$.

Если $r = 3$, то

$$\begin{aligned} Gg_*[c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^2] &= g_*[(l - 1)(l - 1) \pmod{F^3 K_{\mathbb{Q}}(\mathbb{P}(N))}] \\ &= g_*[l^2 - 2l + 1 \pmod{F^3 K_{\mathbb{Q}}(\mathbb{P}(N))}] \\ &= g_*[l^2 - 2l + 1 \pmod{F^1 K_{\mathbb{Q}}(Y)}] = \sigma^2(N) - 2\sigma(N) + 1 \pmod{F^1 K_{\mathbb{Q}}(Y)} \\ &= [\text{rank } S^2(N) - 2\text{rank } S^1(N) + 1] \text{cl}(\mathcal{O}_Y) \pmod{F^1 K_{\mathbb{Q}}(Y)} \\ &= \text{cl}(\mathcal{O}_Y) \pmod{F^1 K_{\mathbb{Q}}(Y)}, \end{aligned}$$

и в терминах когомологий мы получаем равенство $g_*[c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup 2}] = \text{cl}_Y(Y)$.

Случай $r \geq 4$ исследуется аналогично. Лемма доказана.

5.5. ТЕОРЕМА. Пусть X – гладкое d -мерное комплексное проективное многообразие, $f: X' \rightarrow X$ – моноидальное преобразование вдоль замкнутого гладкого неприводимого центра $Y \hookrightarrow X$ коразмерности $r \geq 2$. Тогда

$$C(X') \Leftrightarrow [C(X) \& C(Y)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы утверждаем, что

$$r = 2 \Rightarrow \pi_{X'}^k = \begin{cases} [f \times f]^* \pi_X^k, & \text{если } k \in \{0, 1, 2d - 1, 2d\}, \\ [f \times f]^* \pi_X^k - [j \times j]_* [g \times g]^* \pi_Y^{k-2} & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (5.2)$$

Утверждение очевидно для $k \in \{0, 1, 2d - 1, 2d\}$. С другой стороны, для $k \notin \{0, 1, 2d - 1, 2d\}$ имеем

$$\begin{aligned} &[f \times f]^* \pi_X^k - [j \times j]_* [g \times g]^* \pi_Y^{k-2} \\ &\in H^{2d-k}(X', \mathbb{Q}) \otimes H^k(X', \mathbb{Q}) + [j \times j]_* H^{2d-2-k}(Y', \mathbb{Q}) \otimes H^{k-2}(Y', \mathbb{Q}) \\ &\hookrightarrow H^{2d-k}(X', \mathbb{Q}) \otimes H^k(X', \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Остается показать, что соответствие $[f \times f]^* \pi_X^k - [j \times j]_* [g \times g]^* \pi_Y^{k-2}$ определяет каноническую проекцию $H^*(X', \mathbb{Q}) \rightarrow H^k(X', \mathbb{Q})$.

Прежде всего, $H^k(X', \mathbb{Q}) = f^* H^k(X, \mathbb{Q}) \oplus j_* g^* H^{k-2}(Y, \mathbb{Q})$ (см. [7, предложение 13.1]). Для любых элементов $x_k \in H^k(X, \mathbb{Q})$, $y_{k-2} \in H^{k-2}(Y, \mathbb{Q})$ образ элемента $f^* x_k + j_* g^* y_{k-2}$ относительно соответствия $[f \times f]^* \pi_X^k - [j \times j]_* [g \times g]^* \pi_Y^{k-2}$

есть

$$\begin{aligned}
& \mathrm{pr}_{2X'*}(\mathrm{pr}_{1X'}^*(f^*x_k + j_*g^*y_{k-2}) \cup ([f \times f]^*\pi_X^k - [j \times j]_*[g \times g]^*\pi_Y^{k-2})) \\
&= \mathrm{pr}_{2X'*}((f^*x_k + j_*g^*y_{k-2}) \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X') \\
&\quad \cup ([f \times f]^*\pi_X^k - [j \times j]_*[g \times g]^*\pi_Y^{k-2})) \\
&= \mathrm{pr}_{2X'*}([f^*x_k \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [f \times f]^*\pi_X^k) \\
&\quad - \mathrm{pr}_{2X'*}([f^*x_k \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [j \times j]_*[g \times g]^*\pi_Y^{k-2}) \\
&\quad + \mathrm{pr}_{2X'*}([j_*g^*y_{k-2} \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [f \times f]^*\pi_X^k) \\
&\quad - \mathrm{pr}_{2X'*}([j_*g^*y_{k-2} \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [j \times j]_*[g \times g]^*\pi_Y^{k-2}), \tag{5.3}
\end{aligned}$$

где $\mathrm{pr}_{iX'}: X' \times X' \rightarrow X'$ – каноническая проекция. С другой стороны, имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
X' \times X' & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{iX'}} & X' \\
\downarrow f \times f & & \downarrow f \\
X \times X & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{iX}} & X
\end{array}$$

Имеем

$$\mathrm{pr}_{2X'*}[f \times f]^* = f^*\mathrm{pr}_{2X*}. \tag{5.4}$$

Действительно, $H^{2d}(X', \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cdot \mathrm{cl}_{X'}(p')$ для точки $p' \in X'$, и $H^{2d}(X, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cdot \mathrm{cl}_X(p)$ для точки $p \in X$. Поэтому для любого $x_i \in H^{m_i}(X, \mathbb{Q})$ имеем

$$\begin{aligned}
& \mathrm{pr}_{2X'*}[f \times f]^*(x_1 \otimes x_2) = \mathrm{pr}_{2X'*}[f^*(x_1) \otimes f^*(x_2)] \\
&= \begin{cases} 0, & \text{если } m_1 \neq 2d, \\ \mathrm{pr}_{2X'*}[\lambda_1 \cdot \mathrm{cl}_{X'}(p') \otimes f^*(x_2)], & \text{если } m_1 = 2d \text{ \& } x_1 = \lambda_1 \cdot \mathrm{cl}_X(p) \quad (\lambda_1 \in \mathbb{Q}), \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{если } m_1 \neq 2d, \\ \lambda_1 \cdot f^*(x_2), & \text{если } m_1 = 2d \text{ \& } x_1 = \lambda_1 \cdot \mathrm{cl}_X(p) \quad (\lambda_1 \in \mathbb{Q}), \end{cases} \\
&= f^*\mathrm{pr}_{2X*}(x_1 \otimes x_2).
\end{aligned}$$

Из (5.4) следует, что для любого $x_k \in H^k(X, \mathbb{Q})$ выполнено

$$\begin{aligned}
& \mathrm{pr}_{2X'*}([f^*x_k \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [f \times f]^*\pi_X^k) \\
&= \mathrm{pr}_{2X'*}([f^*x_k \otimes f^*\mathrm{cl}_X(X)] \cup [f \times f]^*\pi_X^k) \\
&= \mathrm{pr}_{2X'*}[f \times f]^*([x_k \otimes \mathrm{cl}_X(X)] \cup \pi_X^k) = f^*\mathrm{pr}_{2X*}([x_k \otimes \mathrm{cl}_X(X)] \cup \pi_X^k) \\
&= f^*\mathrm{pr}_{2X*}([\mathrm{pr}_{1X}^*x_k] \cup \pi_X^k) = f^*x_k. \tag{5.5}
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\mathrm{pr}_{2X'*}([f^*x_k \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [j \times j]_*[g \times g]^*\pi_Y^{k-2}) = 0. \tag{5.6}$$

Действительно, определим отображение степени $\langle \cdot \rangle: H^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$ нулем на $H^i(X, \mathbb{Q})$ для $i < 2d$ и изоморфизмом ориентации $H^{2d}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$

на $H^{2d}(X, \mathbb{Q})$. По двойственности Пуанкаре отображение $x \mapsto \langle \cdot \cup x \rangle$ индуцирует изоморфизмы $H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H_i(X, \mathbb{Q})$, которые можно рассматривать как отождествления. Тогда для любых $x' \in H^*(X', \mathbb{Q})$ мы имеем

$$\begin{aligned} & \langle \mathrm{pr}_{2X'}^*([f^*x_k \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [j \times j]_*[g \times g]^*\pi_Y^{k-2}) \cup x' \rangle \\ &= \langle [f^*x_k \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [j \times j]_*[g \times g]^*\pi_Y^{k-2} \cup \mathrm{pr}_{2X'}^*x' \rangle \\ &= \langle [f^*x_k \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [j \times j]_*[g \times g]^*\pi_Y^{k-2} \cup [\mathrm{cl}_{X'}(X') \otimes x'] \rangle \\ &= \langle [f^*x_k \otimes x'] \cup [j \times j]_*[g \times g]^*\pi_Y^{k-2} \rangle = \langle [f^*x_k \otimes x'] \cup [j_*g^* \otimes j_*g^*]\pi_Y^{k-2} \rangle \\ &= \langle [f^*x_k \otimes \mathrm{id}_{X'}^*x'] \cup [j_*g^* \otimes j_*g^*]\pi_Y^{k-2} \rangle \\ &= \langle [x_k \otimes x'] \cup [f_*j_*g^* \otimes \mathrm{id}_{X'}^*j_*g^*]\pi_Y^{k-2} \rangle = 0, \end{aligned}$$

потому что $f_*j_*g^* = 0$ (см. [7, лекция 13]).

Более того,

$$\mathrm{pr}_{2X'}^*([j_*g^*y_{k-2} \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [f \times f]^*\pi_X^k) = 0, \quad (5.7)$$

поскольку для любого $x' \in H^*(X', \mathbb{Q})$

$$\begin{aligned} & \langle \mathrm{pr}_{2X'}^*([j_*g^*y_{k-2} \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [f \times f]^*\pi_X^k) \cup x' \rangle \\ &= \langle [j_*g^*y_{k-2} \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [f \times f]^*\pi_X^k \cup \mathrm{pr}_{2X'}^*x' \rangle \\ &= \langle [j_*g^*y_{k-2} \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [f^* \otimes f^*]\pi_X^k \cup [\mathrm{cl}_{X'}(X') \otimes x'] \rangle \\ &= \langle [j_*g^*y_{k-2} \otimes x'] \cup [f^* \otimes f^*]\pi_X^k \rangle = \langle [f_*j_*g^*y_{k-2} \otimes f_*x'] \cup \pi_X^k \rangle = 0 \end{aligned}$$

в силу соотношения $f_*j_*g^* = 0$ (см. [7, лекция 13]).

Наконец,

$$- \mathrm{pr}_{2X'}^*([j_*g^*y_{k-2} \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [j \times j]_*[g \times g]^*\pi_Y^{k-2}) = j_*g^*y_{k-2}. \quad (5.8)$$

Действительно, для любого $x' \in H^*(X', \mathbb{Q})$ имеем

$$\begin{aligned} & - \langle \mathrm{pr}_{2X'}^*([j_*g^*y_{k-2} \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [j \times j]_*[g \times g]^*\pi_Y^{k-2}) \cup x' \rangle \\ &= - \langle [j_*g^*y_{k-2} \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [j \times j]_*[g \times g]^*\pi_Y^{k-2} \cup \mathrm{pr}_{2X'}^*x' \rangle \\ &= - \langle [j_*g^*y_{k-2} \otimes \mathrm{cl}_{X'}(X')] \cup [j \times j]_*[g \times g]^*\pi_Y^{k-2} \cup [\mathrm{cl}_{X'}(X') \otimes x'] \rangle \\ &= - \langle [j_*g^*y_{k-2} \otimes x'] \cup [j \times j]_*[g \times g]^*\pi_Y^{k-2} \rangle \\ &= - \langle [j_*j_*g^*y_{k-2} \otimes j_*x'] \cup [g \times g]^*\pi_Y^{k-2} \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку $j_*j_*(y') = -y' \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))$ для любого $y' \in H_{\mathrm{alg}}^*(Y', \mathbb{Q})$ в силу (5.1),

$$g_*[g^*y_{k-2} \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))] = y_{k-2} \cup g_*c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))$$

по формуле проекции и

$$g_*[c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup r-1}] = \mathrm{cl}_Y(Y) \quad (5.9)$$

по лемме из п. 5.4, то мы имеем

$$\begin{aligned}
 & - \langle [j^* j_* g^* y_{k-2} \otimes j^* x'] \cup [g \times g]^* \pi_Y^{k-2} \rangle \\
 & = \langle [[g^* y_{k-2} \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))] \otimes j^* x'] \cup [g \times g]^* \pi_Y^{k-2} \rangle \\
 & = \langle [g_* [g^* y_{k-2} \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))] \otimes g_* j^* x'] \cup \pi_Y^{k-2} \rangle \\
 & = \langle [y_{k-2} \cup g_* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))] \otimes g_* j^* x'] \cup \pi_Y^{k-2} \rangle = \langle [y_{k-2} \otimes g_* j^* x'] \cup \pi_Y^{k-2} \rangle.
 \end{aligned}$$

Для всех $r \geq 2$ и для всех $k \geq 2$ мы хотим доказать следующую формулу:

$$\forall y \in H^*(Y, \mathbb{Q}) \quad \langle [y_{k-2} \otimes y] \cup \pi_Y^{k-2} \rangle = \langle y_{k-2} \cup y \rangle. \quad (5.10)$$

Действительно,

$$\pi_Y^{k-2} = \sum_q y_{1q} \otimes y_{2q} \in H^{2d-2r-k+2}(Y, \mathbb{Q}) \otimes H^{k-2}(Y, \mathbb{Q}),$$

где $y_{1q} \in H^{2d-2r-k+2}(Y, \mathbb{Q})$, $y_{2q} \in H^{k-2}(Y, \mathbb{Q})$. Поэтому

$$\begin{aligned}
 \langle [y_{k-2} \otimes y] \cup \pi_Y^{k-2} \rangle & = \left\langle [y_{k-2} \otimes y] \cup \sum_q y_{1q} \otimes y_{2q} \right\rangle \\
 & = \left\langle \sum_q y_{1q} \otimes y_{2q} \cup [y_{k-2} \otimes y] \right\rangle = \left\langle \sum_q [y_{k-2} \cup y_{1q}] \otimes [y_{2q} \cup y] \right\rangle.
 \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$y_{k-2} \cup y_{1q} \in H^{k-2}(Y, \mathbb{Q}) \cup H^{2d-2r-k+2}(Y, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^{2d-2r}(Y, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cdot \text{cl}_Y(p)$$

для точки $p \in Y$. В итоге мы имеем

$$\begin{aligned}
 & y_{k-2} \cup y_{1q} = \langle y_{k-2} \cup y_{1q} \rangle \cdot \text{cl}_Y(p), \\
 & \sum_q \langle [y_{k-2} \cup y_{1q}] \otimes [y_{2q} \cup y] \rangle = \sum_q \langle [\langle y_{k-2} \cup y_{1q} \rangle \cdot \text{cl}_Y(p)] \otimes [y_{2q} \cup y] \rangle \\
 & = \sum_q \langle y_{k-2} \cup y_{1q} \rangle \cdot \langle \text{cl}_Y(p) \otimes [y_{2q} \cup y] \rangle \\
 & = \sum_q \langle y_{k-2} \cup y_{1q} \rangle \cdot \langle y_{2q} \cup y \rangle = \left\langle \left[\sum_q \langle y_{k-2} \cup y_{1q} \rangle \cdot y_{2q} \right] \cup y \right\rangle \\
 & = \langle [\text{pr}_{2Y*}(\text{pr}_{1Y}^* y_{k-2} \cup \pi_Y^{k-2})] \cup y \rangle = \langle y_{k-2} \cup y \rangle,
 \end{aligned}$$

и (5.10) доказано.

В частности,

$$\langle [y_{k-2} \otimes g_* j^* x'] \cup \pi_Y^{k-2} \rangle = \langle y_{k-2} \cup g_* j^* x' \rangle = \langle j_* g^* y_{k-2} \cup x' \rangle,$$

и (5.8) доказано.

Очевидно, что (5.2) следует из (5.3), (5.5)–(5.8).

Предположим, что гипотеза $C(X')$ верна. Тогда соответствия $\pi_{X'}^i$, $i = 0, 1, \dots$, алгебраичны и $H_{\text{alg}}^*(X' \times X', \mathbb{Q})$ стабильно относительно разложения

Кюннета (см. [19, предложение 2.6]). Согласно лемме из п. 5.2 пространство $H_{\text{alg}}^*(X \times X, \mathbb{Q})$ стабильно относительно разложения Кюннета, и соответствия π_X^i , $i = 0, 1, \dots$, алгебраичны. Согласно (5.2) класс $[j \times j]_*[g \times g]^* \pi_Y^{k-2}$ алгебраичен для любого k . Согласно формуле проекции, (5.1) и (5.9) имеем

$$\begin{aligned} & [g \times g]_*[j \times j]^*[j \times j]_*[g \times g]^* \pi_Y^{k-2} \\ &= [g \times g]_*[[g \times g]^* \pi_Y^{k-2} \cup [c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1)) \otimes c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))]] \\ &= \pi_Y^{k-2} \cup [g_* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1)) \otimes g_* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))] \\ &= \pi_Y^{k-2} \cup [\text{cl}_Y(Y) \otimes \text{cl}_Y(Y)] = \pi_Y^{k-2} \in H_{\text{alg}}^*(Y \times Y, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

В частности, $C(X') \Rightarrow C(Y)$.

Обратно, если X, Y удовлетворяют $C(X), C(Y)$, то π_X^k и π_Y^{k-2} алгебраичны для всех k , поэтому $\pi_{X'}^k$ алгебраичен согласно (5.2). Следовательно, $C(X')$ верна, и теорема доказана для $r = 2$.

Легко показать, что при $r = 3$ имеем

$$\pi_{X'}^k = \begin{cases} [f \times f]^* \pi_X^k, & \text{если } k \in \{0, 1, 2d-1, 2d\}, \\ [f \times f]^* \pi_X^k - [j \times j]_* [[g \times g]^* \pi_Y^{k-2} \\ \quad \cup [c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1)) \otimes \text{cl}_{Y'}(Y')]], & \text{если } k \in \{2, 3\}, \\ [f \times f]^* \pi_X^k - [j \times j]_* [[g \times g]^* \pi_Y^{k-4} \\ \quad \cup [\text{cl}_{Y'}(Y') \otimes c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))]], & \text{если } k \in \{2d-3, 2d-2\}, \\ [f \times f]^* \pi_X^k - [j \times j]_* [[g \times g]^* \pi_Y^{k-2} \\ \quad \cup [[c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1)) - g^* c_1(N)] \otimes \text{cl}_{Y'}(Y')] \\ \quad - [j \times j]_* [[g \times g]^* \pi_Y^{k-4} \cup [\text{cl}_{Y'}(Y') \otimes c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))]]] & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (5.11)$$

С другой стороны, существует каноническая точная последовательность

$$0 \rightarrow F \rightarrow g^*(N) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1) \rightarrow 0$$

(см. [4, предложение 4.9, § 13.6]). Поэтому

$$g^* c_1(N) = c_1(g^* N) = c_1(F) + c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1)).$$

Следовательно, при $4 \leq k \leq 2d-4$ имеем

$$\begin{aligned} \pi_{X'}^k &= [f \times f]^* \pi_X^k - [j \times j]_* [[g \times g]^* \pi_Y^{k-2} \\ &\quad \cup [[c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1)) - g^* c_1(N)] \otimes \text{cl}_{Y'}(Y')]] \\ &\quad - [j \times j]_* [[g \times g]^* \pi_Y^{k-4} \cup [\text{cl}_{Y'}(Y') \otimes c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))]] \\ &= [f \times f]^* \pi_X^k + [j \times j]_* [[g \times g]^* \pi_Y^{k-2} \cup [c_1(F) \otimes \text{cl}_{Y'}(Y')]] \\ &\quad - [j \times j]_* [[g \times g]^* \pi_Y^{k-4} \cup [\text{cl}_{Y'}(Y') \otimes c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))]]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Используя формулы (5.11), (5.12), можно легко проверить, что для $r = 3$ мы имеем

$$C(X') \Leftrightarrow [C(X) \& C(Y)].$$

Случай $r \geq 4$ можно проверить в качестве упражнения в теории пересечений.

5.6. СЛЕДСТВИЕ. Если гипотеза $C(X)$ верна для любого гладкого проективного рационального многообразия X над полем комплексных чисел, то $C(Y)$ верна для любого гладкого проективного многообразия Y над $\mathbb{C}$.

5.7. Используя l -адические этальные когомологии, можно легко распространить теорему из п. 5.5 и следствие из п. 5.6 на многообразия над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики.

Список литературы

1. U. Jannsen, "Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity", *Invent. Math.*, **107**:1 (1992), 447–452.
2. A. J. Scholl, "Classical motives" (Seattle, WA, 1991), *Proc. Sympos. Pure Math.*, **55**, part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 163–187.
3. Ю. И. Манин, "Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования", *Матем. сб.*, **77**(119):4 (1968), 475–507; англ. пер.: J. I. Manin, "Correspondences, motifs and monoidal transformations", *Math. USSR-Sb.*, **6**:4 (1968), 439–470.
4. Ю. И. Манин, "Лекции о K -функторе в алгебраической геометрии", *УМН*, **24**:5 (1969), 3–86; англ. пер.: Ju. I. Manin, "Lectures on the K -functor in algebraic geometry", *Russian Math. Surveys*, **24**:5 (1969), 1–89.
5. W. Fulton, S. Lang, *Riemann–Roch algebra*, Grundlehren Math. Wiss., **277**, Springer-Verlag, New York, 1985.
6. У. Фултон, *Теория пересечений*, Мир, М., 1989; пер. с англ.: W. Fulton, *Intersection theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
7. J. D. Lewis, *A survey of the Hodge conjecture*, 2nd ed., CRM Monogr. Ser., **10**, Amer. Math. Soc., 1999.
8. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, *Grad. Texts in Math.*, **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1977.
9. W. V. D. Hodge, "The topological invariants of algebraic varieties", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. 1 (Cambridge, MA, 1950), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1952, 182–192.
10. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, т. 1, 2, Мир, М., 1982; пер. с англ.: P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, *Pure Appl. Math.*, Wiley-Intersci., New York, 1978.
11. Н. Хиронака, "Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I, II", *Ann. of Math.* (2), **79**:1 (1964), 109–203; **79**:2, 205–326.
12. E. Bierstone, P. D. Milman, "Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant", *Invent. Math.*, **128**:2 (1997), 207–302.
13. С. Г. Танкеев, "Циклы на простых абелевых многообразиях простой размерности", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:1 (1982), 155–170; англ. пер.: S. G. Tankeev, "Cycles on simple abelian varieties of prime dimension", *Math. USSR-Izv.*, **20**:1 (1983), 157–171.

14. A. Grothendieck, “Standard conjectures on algebraic cycles”, *Algebraic Geometry*, Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res. (Bombay, 1968), Oxford Univ. Press, London, 1969, 193–199.
15. D. Lieberman, “Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds”, *Amer. J. Math.*, **90**:2 (1968), 366–374.
16. С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе для комплексных абелевых схем над гладкими проективными кривыми”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 183–224; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the standard conjecture for complex Abelian schemes over smooth projective curves”, *Izv. Math.*, **67**:3 (2003), 597–635.
17. Y. André, “Pour une théorie inconditionnelle des motifs”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **83** (1996), 5–49.
18. И. Ламбек, *Кольца и модули*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: J. Lambek, *Lectures on rings and modules*, Blaisdell, Waltham, MA–Toronto, ON–London, 1966.
19. S. L. Kleiman, “Algebraic cycles and the Weil conjectures”, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson Paris, North-Holland–Amsterdam, 1968, 359–386.
20. A. V. Kelarev, “On the Jacobson radical of graded rings”, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **33**:1 (1992), 21–24.
21. С. Г. Танкеев, “О численной эквивалентности алгебраических циклов на потенциально простых абелевых схемах простой относительной размерности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 145–164; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the numerical equivalence of algebraic cycles on potentially simple Abelian schemes of prime relative dimension”, *Izv. Math.*, **69**:1 (2005), 143–162.
22. O. N. Smirnov, “Graded associative algebras and Grothendieck standard conjectures”, *Invent. Math.*, **128**:1 (1997), 201–206.
23. J. T. Tate, “Algebraic cycles and poles of zeta functions”, *Arithmetical Algebraic Geometry* (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), Harper and Row, New York, 1965, 93–110.
24. J. Tate, “Conjectures on algebraic cycles in l -adic cohomology”, *Motives* (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., **55**, part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 71–83.
25. N. Katz, “Etude cohomologique des pinceaux de Lefschetz”, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Lecture Notes in Math., **340**, 1973, 254–327.
26. Д. Мамфорд, *Лекции о кривых на алгебраической поверхности*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: D. Mumford, *Lectures on curves on a algebraic surface*, Ann. of Math. Stud., **59**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1966.
27. S. Mori, “Classification of higher-dimensional varieties”, *Algebraic geometry* (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., **46**, part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 269–331.

С. Г. ТАНКЕЕВ (S. G. TANKEEV)
Владимирский государственный университет
E-mail: tankeev@vpti.vladimir.ru

Поступило в редакцию
05.10.2004