Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, А. Л. Пятницкий, Усреднение случайных сингулярных структур и случайных мер, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 1, 23–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/im554>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:27:48

УДК 517.9

В. В. Жиков, А. Л. Пятницкий

Усреднение случайных сингулярных структур и случайных мер

Изучаются задачи усреднения случайных статистически однородных сингулярных структур и вариационных задач с интегрированием по случайной стационарной эргодической мере.

Библиография: 27 наименований.

Введение

В настоящей работе рассмотрены проблемы усреднения дифференциальных операторов и вариационных задач в переменных пространствах L^2 с интегрированием по случайным стационарным быстроосциллирующим мерам. Важным частным случаем является усреднение случайных сингулярных структур, таких как сетки, каркасы и пр.

Результаты работы получены при дальнейшем развитии двух направлений: усреднения уравнений со случайными статистически однородными коэффициентами, с одной стороны, и усреднения периодических сингулярных структур и мер – с другой.

Периодические меры и периодические сингулярные структуры изучались в работах [3], [4], [10], [12]. В связи с этим для произвольной периодической меры Радона $\mu = \mu(dx)$ в $\mathbb{R}^n$ были определены соболевские пространства $H^1(\mathbb{T}^n, \mu(dx))$, где $\mathbb{T}^n$ – тор периодичности, и $H^1(\mathbb{R}^n, \mu(dx))$ путем замыкания множества гладких функций в подходящей норме. Выяснено, что градиент функции определен неоднозначно. Доказано существование так называемого *тангенциального* подпространства $\mathbb{T}(x) \subset \mathbb{R}^n$, с помощью которого описано множество градиентов и определен *тангенциальный* градиент. Получены результаты о разрешимости и единственности в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n, \mu(dx))$ для эллиптических уравнений вида

$$-\operatorname{div} a(x)\nabla u + u = f(x),$$

а также для более общих эллиптических и эволюционных уравнений и систем.

Рассматривая далее семейство мер $\mu^\varepsilon(dx) = \varepsilon^n \mu(\frac{dx}{\varepsilon})$ с малым положительным параметром ε , приходим к задаче усреднения. Для усреднения принципиальным является свойство 2-связности меры μ . Напомним (см., например, [2]), что мера $\mu(dx)$ 2-связна, если всякая периодическая функция, принадлежащая соболевскому пространству $H^1(\mathbb{T}^n, d\mu)$ и имеющая нулевой μ -градиент, равна

Работа первого автора частично финансирована РФФИ (грант № 05-01-621.)

константе μ -п. в. Свойство 2-связности эквивалентно эргодичности соответствующего мере μ марковского процесса на торе периодичности. Далее вместо 2-связности мы говорим о связности или эргодичности меры. При условии связности периодической меры были доказаны (см. [5], [9]) результаты об усреднении, изучены сингулярные структуры и соответствующие им тонкие структуры, исследован вопрос о коммутативности диаграммы перехода к пределу по толщине структуры и по размеру ячейки периодичности, была адаптирована техника двухмасштабной сходимости.

Напомним классические результаты об усреднении дифференциальных операторов со случайными коэффициентами (см. [7], [25]).

Пусть $a(x, \omega) = \{a_{ij}(x, \omega)\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, – статистически однородная эргодическая случайная функция, и пусть

$$\Lambda |\xi|^2 \leq a(x, \omega) \xi \cdot \xi \leq \Lambda^{-1} |\xi|^2, \quad \Lambda > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Для семейства уравнений

$$-\operatorname{div} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) \nabla u^\varepsilon + \lambda u^\varepsilon = f(x), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \lambda > 0,$$

справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. При $\varepsilon \rightarrow 0$ решение u^ε сходится почти наверное (п. н.) в $L^2(\mathbb{R}^n)$ к решению эллиптического уравнения вида

$$-\operatorname{div} \hat{a} \nabla u^0 + \lambda u^0 = f(x)$$

с постоянными неслучайными коэффициентами, причем матрица $\hat{a}$ зависит только от функции $a(x, \omega)$ и не зависит от f и λ .

Результат об усреднении справедлив также для случайных перфорированных областей (см. [6]). Пусть $G = G(\omega)$ – случайное множество в $\mathbb{R}^n$, причем характеристическая функция множества $G(\omega)$ является случайным эргодическим статистически однородным полем. Предположим, что $G(\omega)$ открыто и связно п. н., и пусть $G^\varepsilon(\omega) = \varepsilon G(\omega)$ – гомотетическое сжатие множества $G(\omega)$. Тогда для решения задачи Неймана

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) \nabla u^\varepsilon + \lambda u^\varepsilon &= f(x) \quad \text{в } G^\varepsilon(\omega), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu^\varepsilon} &\equiv a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) \nabla u^\varepsilon \cdot n = 0 \quad \text{на } \partial G^\varepsilon(\omega), \end{aligned}$$

где n – нормаль к $\partial G^\varepsilon(\omega)$, имеет место п. н. сходимость

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{G^\varepsilon} |u^\varepsilon(x, \omega) - u^0(x)|^2 dx = 0;$$

здесь u^0 – решение усредненного уравнения

$$-\operatorname{div} \hat{a} \nabla u^0 + \lambda u^0 = \theta f, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

θ – плотность случайного множества $G = G(\omega)$.

Техника усреднения уравнений со случайными коэффициентами позволяет также исследовать асимптотическое поведение случайных процессов (блужданий) в случайной среде, в частности вопрос о справедливости центральной предельной теоремы (ЦПТ). Для каждой реализации среды рассмотрим диффузионный процесс ξ_t , которому соответствует параболическое уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{div} a(x, \omega) \nabla v.$$

Справедлив следующий результат. Для п. в. реализаций среды и для любого начального условия $\xi_0 = x \in \mathbb{R}^n$ величины $\frac{\xi_t - x}{\sqrt{t}}$ сходятся по распределению при $t \rightarrow \infty$ к центрированной нормальной величине с корреляционной матрицей $\hat{a}$, где $\hat{a}$ – усредненная матрица соответствующего эллиптического оператора.

Для блуждания в случайном множестве краевое условие Неймана соответствует отражению процесса ξ_t на границе $\partial G(\omega)$. Для таких блужданий в работе [6] доказана так называемая центральная предельная теорема в среднем. Для некоторых классов случайных множеств в [14] доказана более точная (индивидуальная) ЦПТ (см. также конец § 9).

Наша цель – обобщить перечисленные результаты на случайные сингулярные структуры. Пусть μ_ω – стационарная эргодическая случайная мера в $\mathbb{R}^n$, т. е. семейство мер Радона таких, что для каждого ограниченного борелевского множества B функция $\mu_\omega(B + x)$ является статистически однородным эргодическим случайным полем. С мерой μ_ω можно связать уравнение

$$-\operatorname{div} a(x, \omega) \nabla u + \lambda u = f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega),$$

понимаемое в смысле интегрального тождества

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x, \omega) \nabla u \nabla \varphi d\mu_\omega(x) + \int_{\mathbb{R}^n} u \varphi d\mu_\omega(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi d\mu_\omega(x) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

в котором градиент ∇u однозначно определяется следующим условием: поток $a \nabla u$ тангенциален. Для кусочно гладких структур тангенциальное подпространство можно определить стандартным образом, для произвольной меры оно введено и изучено в [2], [10]. В § 10 даны определения и изучены свойства тангенциального подпространства и тангенциального градиента по отношению к некоторой мере на вероятностном пространстве, связанной со случайной мерой μ_ω .

Для $\varepsilon > 0$ положим $\mu_\omega^\varepsilon(dx) = \varepsilon^n \mu_\omega(\frac{dx}{\varepsilon})$ и будем изучать асимптотическое поведение решения уравнения

$$-\operatorname{div} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) \nabla u^\varepsilon + \lambda u^\varepsilon = f^\varepsilon \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\varepsilon)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Результат об усреднении для этого уравнения справедлив при условии связности случайной меры μ_ω . Рассмотрим это условие подробнее. Меры μ_ω являются в определенном смысле реализациями некоторой меры в Ω – так называемой меры Пальма (см. [13], а также § 1 настоящей работы). Для

нее в теории случайных мер получен ряд результатов, в частности эргодическая теорема Биркгофа. Мера Пальма по аналогии с периодическим случаем должна быть *связна*, что эквивалентно эргодичности соответствующего ей марковского процесса. Связность меры Пальма определяется в терминах соответствующих этой мере соболевских пространств.

При условии связности для п. в. ω выполнена теорема усреднения (см. теорему 6.1): пусть f^ε сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к f в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\varepsilon)$; тогда u^ε сходится в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\varepsilon)$ к решению уравнения

$$\operatorname{div} \hat{a} \nabla u + \lambda u = f$$

с постоянной неотрицательной матрицей $\hat{a}$. Для достаточно регулярных f эта сходимость эквивалентна соотношению

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |u^\varepsilon(x) - u(x)|^2 d\mu_\omega^\varepsilon(x) = 0.$$

Со случайной мерой можно также связать случайное блуждание в случайной среде и соответствующее параболическое уравнение. Для таких параболических уравнений мы тоже получаем результаты об усреднении, которые могут затем быть использованы при изучении свойств случайных блужданий в стационарных случайных средах. Некоторые модели таких блужданий активно изучаются специалистами по теории вероятностей (см., например, [26], [27]). С точки зрения вероятностной интерпретации важным результатом предлагаемой работы является доказательство ЦПТ в среднем (см. теорему 9.4).

Индивидуальная ЦПТ в настоящей работе не рассматривается, за исключением лишь отдельных условных результатов (см. § 9). Авторы предполагают рассмотреть этот вопрос в отдельной работе.

Типичными примерами сингулярных случайных структур служат перколяционные модели в $\mathbb{R}^n$ и диаграммы Вороного стационарных точечных процессов в $\mathbb{R}^n$. Эти структуры рассмотрены в § 7 и в примере 1.8 соответственно. В частности, в § 7 для перколяционной модели мы даем решение известной проблемы Кестена о существовании эффективной проводимости.

Как уже отмечалось, важную роль при асимптотическом анализе случайных мер играет мера Пальма и связанные с ней соболевские пространства, пространства соленоидальных и потенциальных вектор-функций. Теоремы усреднения мы предпочли доказать методом двухмасштабной сходимости. Версию этой сходимости для случайных мер мы вводим и подробно развиваем. Этот метод может быть использован в других приложениях.

§ 1. Случайные меры и их свойства

1.1. Общие определения. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – стандартное вероятностное пространство с динамической системой T_x , т. е. с группой измеримых отображений $T_x: \Omega \rightarrow \Omega$ таких, что:

- 1) $T_{x+y} = T_x \cdot T_y$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $T_0 = \operatorname{Id}$;
- 2) $P(T_x^{-1}(A)) = P(A)$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{F}$;

3) $T_x(\omega)$ измеримо как отображение $(\mathbb{R}^n \times \Omega, \mathcal{B} \times \mathcal{F})$ в $(\Omega, \mathcal{F})$, где $\mathcal{B}$ – борелевская σ -алгебра.

Всюду далее мы предполагаем, что Ω – компактное метрическое пространство (метрический компакт), $\mathcal{F}$ – борелевская σ -алгебра на Ω и группа T_x непрерывно в этой метрике отображает $\mathbb{R}^n \times \Omega$ в Ω .

Будем также предполагать, что динамическая система T_x является эргодической. По определению T_x эргодична, если всякое инвариантное множество из $\mathcal{F}$ имеет Р-меру 0 или 1.

Весьма часто на вероятностном пространстве действует не динамическая система T_x , $x \in \mathbb{R}^n$, а лишь дискретная группа преобразований T_z , где $z \in \mathbb{Z}^n$. Укажем стандартную процедуру перехода к динамической системе.

Пусть $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ – тор с мерой Лебега dy ,

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega} &= \Omega \times \mathbb{T}^n, & \tilde{\omega} &= \{\omega, y\}, & \tilde{\mu} &= \mu \times dy, \\ \hat{T}(x)\tilde{\omega} &= \{T_{[x+y]}\omega, x + y - [x + y]\},\end{aligned}$$

где $[x + y]$ – целая часть вектора $x + y$. Известно, что динамическая система $\hat{T}_x$ эргодична в том и только в том случае, когда группа T_z эргодична.

ПРИМЕР 1.1 (периодический случай). Пусть $\Omega = \square$ – единичный куб, $\square = \{\omega \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \omega_j \leq 1, j = 1, \dots, n\}$. На Ω имеется динамическая система $T(x)\omega = \omega + x \pmod{1}$, относительно которой мера Лебега инвариантна и эргодична. Реализация функции $f(\omega) \in L^2(\square)$ имеет вид $f(x + \omega)$.

ПРИМЕР 1.2 (квазипериодический случай). Пусть $\Omega = \square$ – единичный куб в $\mathbb{R}^m$, μ – мера Лебега на нем. Для $x \in \mathbb{R}^n$ положим $T(x)\omega = \omega + \lambda x \pmod{1}$, где $\lambda = (\lambda_{ij})$ – матрица размера $n \times m$. Очевидно, преобразование $T(x)$ сохраняет меру μ на Ω . Эргодичность будет иметь место, если $\lambda_{ij}k_j \neq 0$ для любого целочисленного вектора $k \neq 0$. Таким образом, $L^2(\Omega) = L^2(\square)$ – пространство периодических функций от m переменных, а реализации имеют вид $f(\omega + \lambda x)$. Эти реализации называются квазипериодическими функциями, если $f(\omega)$ непрерывна на $\square$.

Напомним, что случайное поле $f(x, \omega)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$, называется стационарным, если для некоторой измеримой функции $\tilde{f} = \tilde{f}(\omega)$ на Ω справедливо представление $f(x, \omega) = \tilde{f}(T(x)\omega)$.

Мерой Радона в $\mathbb{R}^n$ называется неотрицательная борелевская мера, принимающая конечные значения на компактах. Через $T_x\mu$, где $x \in \mathbb{R}^n$, обозначается сдвиг меры μ , т.е. $T_x\mu(B) = \mu(B + x)$ для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^n$.

Семейство μ_ω , $\omega \in \Omega$, мер Радона в $\mathbb{R}^n$ называется стационарным, если для всех $\omega \in \Omega$

$$T_x\mu_\omega = \mu_{T_x\omega}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Поскольку

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) d\mu_{T_x\omega}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y - x) \mu_\omega(y) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

то приходим к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Семейство мер Радона μ_ω в $\mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$, называется *стационарной случайной мерой*, если для любой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ случайная функция

$$F_\varphi(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y - x) d\mu_\omega(y) \quad (1.1)$$

является измеримой стационарной, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y - x) d\mu_\omega(y) = F_\varphi(T_x \omega), \quad (1.2)$$

где $F_\varphi(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) d\mu_\omega(y)$.

Для некоторого упрощения наложим техническое условие:

$$F_\varphi \in L^\infty(\Omega, \mathbb{P}) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty. \quad (1.3)$$

Фактически это условие означает, что

$$\mu_\omega(A) \leq C(A) < \infty \quad \text{п. н. по мере } \mathbb{P} \text{ (P-п. н.)} \quad (1.4)$$

для любого ограниченного борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $\square = [0, 1]^n$. Величина

$$m = \mathbb{E}(\mu(\square)) = \int_{\Omega} \int_{\square} d\mu_\omega(x) d\mathbb{P}(\omega)$$

называется *интенсивностью случайной меры*; здесь и далее через $\mathbb{E}$ обозначено математическое ожидание относительно меры $\mathbb{P}$. Условие (1.4) обеспечивает конечность m . Считаем также, что мера μ имеет положительную интенсивность, так что

$$0 < m < \infty. \quad (1.5)$$

Рассмотрим несколько примеров случайных стационарных мер.

ПРИМЕР 1.3 (периодический случай – продолжение примера 1.1). Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ периодическую меру Радона, $\mu(\cdot + z) = \mu(\cdot)$ при всех $z \in \mathbb{Z}^n$. Ей отвечает случайная мера

$$\mu_\omega = \mu(\cdot + \omega), \quad \omega \in [0, 1]^n = \mathbb{T}^n,$$

стационарность которой проверяется непосредственно.

ПРИМЕР 1.4. Пусть $\rho \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$, $d\mu_\omega(y) = \rho(T_y \omega) dy$. Стационарность меры μ_ω очевидна, так как

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y - x) d\mu_\omega(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y - x) \rho(T_y \omega) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \rho(T_{x+y} \omega) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) d\mu_{T_x \omega}(y). \end{aligned}$$

Часто случайная мера изначально инвариантна только относительно дискретной группы преобразований T_z , $z \in \mathbb{Z}^n$. Мера, инвариантная относительно динамической системы $\hat{T}_x$, $x \in \mathbb{R}^n$, строится, как обычно: для $\hat{\omega} = \{\omega, y\}$ положим

$$\mu_{\hat{\omega}} = \mu_{\omega} + y.$$

Легко видеть, что $\mu_{\hat{\omega}}$ инвариантна относительно преобразований $\hat{T}_x$.

ПРИМЕР 1.5 (случайная перфорированная структура, в частности дисперсная шаровая структура). Случайные перфорированные среды также могут быть описаны в терминах случайной меры. Пусть $\mathcal{U}$ – измеримое подмножество в Ω такое, что $P(\mathcal{U}) > 0$ и $P(\Omega \setminus \mathcal{U}) > 0$. Напомним, что *случайным стационарным множеством* в $\mathbb{R}^n$ называются реализации события $\Omega \setminus \mathcal{U}$, т. е. подмножество в $\mathbb{R}^n$ вида

$$Q(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : T_x \omega \in \Omega \setminus \mathcal{U}\}.$$

Часто дополнение до случайного множества представляет собой объединение отдельных включений или зерен (например, шаров). В связи с этим рассматриваемые случайные множества называют *перфорированными средами*. Соответствующая случайная мера определяется формулой

$$d\mu_{\omega}(x) = \rho(T_x \omega) dx, \quad \rho(\omega) = \mathbf{1}_{\{\Omega \setminus \mathcal{U}\}}.$$

Стационарность этой меры следует из ее определения. Понятно, что для случайных множеств, имеющих п. н. две или более неограниченные связные компоненты, результат об усреднении не имеет места. Одним из примеров “хороших” сред служит *дисперсная шаровая структура* в $\mathbb{R}^3$, определяемая как случайная среда, в которой почти все реализации множества $\mathcal{U}$ представляют собой объединение непересекающихся открытых шаров в $\mathbb{R}^3$, причем радиусы всех этих шаров лежат на отрезке $[r_1, r_2]$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$.

ПРИМЕР 1.6. Рассмотрим целочисленную решетку $\mathbb{Z}^n$, и пусть Γ – множество всех ребер (звеньев), соединяющих соседние точки $\mathbb{Z}^n$. Обозначим ребра через γ_j и используем для них естественную нумерацию $j \in \mathbb{Z}^n$. Построим теперь вероятностное пространство с динамической системой. Пусть $\Omega = \{\{\eta_j\}_{j \in \mathbb{Z}^n}\}$ с системой полунорм $\|\eta^1 - \eta^2\|_j = |\eta_j^1 - \eta_j^2|$, $j \in \mathbb{Z}^n$. Борелевская σ -алгебра $\mathcal{B}$ в Ω совпадает с цилиндрической σ -алгеброй. Пусть P_0 – вероятностная мера на прямой с носителем на конечном отрезке положительной полуоси. В качестве меры P в Ω выберем прямое произведение мер P_0 на каждой из компонент η_j ; динамическую систему T_z , $z \in \mathbb{Z}^n$, в Ω введем следующим образом:

$$(T_z(\eta))_j = \eta_{j+z}.$$

На вероятностном пространстве Ω зададим случайные величины ξ_j : $\xi_j(\eta) = \eta_j$. По построению ξ_j – независимые одинаково распределенные положительные случайные величины, $\xi_j \in L^\infty$. Обозначив через $l_j(dx)$ стандартную меру Лебега на сегменте γ_j , определим случайную меру

$$\mu_{\eta}(dx) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} \xi_j(\eta) l_j(dx).$$

Построенная мера стационарна только относительно целочисленных сдвигов: для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и любого $j \in \mathbb{Z}^n$

$$\mu_\omega(A + j) = \mu_{T_j \omega}(A).$$

Эквивалентная модель с непрерывным временем может быть построена указанным выше способом.

Аналогично можно построить случайные меры на более сложных периодических решетках, а также меры, плотность которых непостоянна вдоль сегментов.

ПРИМЕР 1.7. Если в конструкции примера 1.6 выбрать меру P_0 , равную сумме

$$(1 - p)\delta(s) + p\delta(s - 1), \quad 0 < p < 1,$$

то мы приходим к хорошо известной перколяционной модели. Ограничимся для простоты рассмотрением двумерной модели. В теории перколяции известно (см. [16], [18]), что существует критическое значение $p_c = 0.5$ такое, что при $p > p_c$ с вероятностью, равной единице, имеется единственный бесконечный кластер, состоящий из ребер, которым предписано значение, равное единице, в то время как при $p < p_c$ бесконечный кластер с вероятностью, равной единице, не существует. Мы будем рассматривать только суперкритический случай $p > p_c$ и сохраним значение, равное единице, только на тех ребрах, которые принадлежат бесконечному кластеру. Повторяя далее построения предыдущего примера, приходим к случайной мере на бесконечном кластере.

ПРИМЕР 1.8 (диаграмма Вороного). Определим точечный процесс в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathcal{S}$ – отображение Ω во множество не более чем счетных локально конечных подмножеств в $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Скажем, что $\mathcal{S}$ – *точечный процесс* в $\mathbb{R}^n$, если:

1) для всякого ограниченного борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^n$ мощность (количество точек) множества $A \cap \mathcal{S}(\omega)$, обозначаемая $\#(A \cap \mathcal{S}(\omega))$, является измеримой случайной величиной, принимающей п. н. конечные значения;

2) для каждого ограниченного борелевского множества A случайная функция

$$\xi_A(x, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \#((A + x) \cap \mathcal{S}), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

представляет собой измеримую статистически однородную случайную функцию, т. е.

$$\xi_A(x, \omega) = \#(A \cap \mathcal{S}(T_x \omega)), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

В частности, для любого конечного набора борелевских множеств $A_1, \dots, A_k$ и для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\mathcal{L}(\#(A_1 \cap \mathcal{S}), \dots, \#(A_k \cap \mathcal{S})) = \mathcal{L}(\#((A_1 + x) \cap \mathcal{S}), \dots, \#((A_k + x) \cap \mathcal{S}));$$

здесь $\mathcal{L}$ – распределение случайной величины.

Величина $m = E(\#([0, 1]^n \cap \mathcal{S}))$ называется *интенсивностью точечного процесса*. Мы будем рассматривать процессы конечной положительной интенсивности.

Важным примером точечного процесса в $\mathbb{R}^n$ служит так называемый пуассоновский процесс, характеризующийся следующими двумя свойствами:

- 1) для некоторого $\lambda > 0$ и для каждого ограниченного борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^n$ случайная величина $\#(A \cap \mathcal{S})$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda|A|$;
- 2) для любого набора непересекающихся борелевских множеств $A_1, \dots, A_k$ случайные величины $\#(A_1 \cap \mathcal{S}), \dots, \#(A_k \cap \mathcal{S})$ независимы.

Существование такого процесса доказано, например, в [13].

Переходим к определению диаграммы Вороного точечного процесса. Для произвольного точечного процесса в $\mathbb{R}^n$ перенумеруем точки множества $\mathcal{S}(\omega)$ и обозначим их $\zeta_1(\omega), \dots, \zeta_k(\omega), \dots$. Известно (см. [13]), что такая нумерация может быть выбрана измеримой, так что все ζ_k являются случайными векторами в $\mathbb{R}^n$. Диаграмма Вороного определяется как совокупность выпуклых множеств, заданных для каждой $\zeta_i(\omega)$ равенством

$$M_i(\omega) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \zeta_i) < \text{dist}\left(x, \bigcup_{j \neq i} \zeta_j\right) \right\}.$$

В наших предположениях все M_i являются п. н. выпуклыми многогранниками (см. [13]).

Обозначим $(n-1)$ -мерные грани многогранника M_i через Γ_{ij} , где индекс j выбран таким образом, что Γ_{ij} расположена на гиперплоскости, равноудаленной от точек ζ_i и ζ_j . Мету $d\mu_\omega(x)$ определим теперь формулой

$$d\mu_\omega(x) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\Gamma_{ij}(\omega)}(x) l_{ij}(dx),$$

где через $\mathbf{1}_{\Gamma_{ij}}$ обозначена характеристическая функция множества Γ_{ij} и $l_{ij}(dx)$ – стандартная мера Лебега на соответствующей гиперповерхности. Можно проверить, что $d\mu_\omega(x)$ – стационарная случайная мера конечной интенсивности.

ПРИМЕР 1.9 (“ящичная” структура). Рассмотрим все $(n-1)$ -мерные грани единичного куба $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ и все их целочисленные свиги. Обозначим через S_{ij} грань, разделяющую кубы с центрами в точках i и j из $\mathbb{Z}^n$, $|i-j|=1$. Построив вероятностное пространство, динамическую систему и семейство независимых одинаково распределенных положительных случайных величин ξ_{ij} так же, как в примере 1.6, определим на каждой из граней S_{ij} поверхностную меру Лебега с плотностью ξ_{ij} . Сумма этих мер по всем $i, j \in \mathbb{Z}^n$ есть случайная стационарная мера.

ПРИМЕР 1.10 (составная структура). Рассмотрим на двумерной координатной плоскости отрезки

$$I_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0, 0 \leq x_1 \leq 1\}, \quad I_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 1\}$$

и все их целочисленные сдвиги $I_1^i = I_1 + i$ и $I_2^j = I_2 + j$, $i, j \in \mathbb{Z}^2$. Обозначим $Q^k = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]^2 + k$, $k \in \mathbb{Z}^2$. Пусть η_1^i , η_2^j и η_3^k – три семейства независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин. Определим случайную меру $d\mu(x)$ равенством

$$d\mu(x) = \sum_k \eta_3^k \mathbf{1}_{Q^k}(x) dx + \sum_i \eta_1^i \mathbf{1}_{I_1^i}(x) dx_1 + \sum_j \eta_2^j \mathbf{1}_{I_2^j}(x) dx_2.$$

Эта мера представляет собой сумму абсолютно непрерывной и сингулярной мер. Она стационарна при целочисленных сдвигах.

1.2. Некоторые результаты теории Пальма. Для облегчения чтения материала сформулируем несколько результатов из теории случайных стационарных мер.

Приведем один пример. Пусть ρ – неотрицательная случайная величина, и пусть $\rho \in L^1(\Omega, dP)$. Рассмотрим меры $d\mu_\omega(x) = \rho(T_x\omega) dx$ в $\mathbb{R}^n$ и меру $d\mu(\omega) = \rho(\omega) dP(\omega)$ в Ω . Поскольку плотности $\rho(T_x\omega)$ представляют собой реализации функции $\rho(\omega)$ на траекториях $T_x\omega$, случайную меру μ_ω естественно назвать *реализацией меры μ* . Связь между мерой на Ω и ее реализацией на траекториях $T_x\omega$ задается равенством, называемым *формулой Кэмбела*

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} f(x, T_x\omega) d\mu_\omega(x) dP(\omega) = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} f(x, \omega) d\mu(\omega) dx. \quad (1.6)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} f(x, T_x\omega) \rho(T_x\omega) dx dP(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_\Omega f(x, T_x\omega) \rho(T_x\omega) dP(\omega) \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_\Omega f(x, \omega) \rho(\omega) dP(\omega) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_\Omega f(x, \omega) d\mu(\omega) dx; \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались теоремой Фубини и инвариантностью меры $dP(\omega)$ относительно отображений T_x . Формула (1.6) справедлива для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^n \times \Omega, dx \times d\mu)$.

Оказывается, что и для произвольной случайной стационарной меры $d\mu_\omega(x)$ можно определить меру μ на Ω , связанную с мерами $d\mu_\omega(x)$ формулой (1.6).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Мерой Пальма случайной меры μ_ω называется мера μ на $(\Omega, \mathcal{F})$, определяемая равенством

$$\mu(A) = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{I}_\square(x) \mathbb{I}_A(T_x\omega) d\mu_\omega(x) dP(\omega), \quad (1.7)$$

где $\mathbb{I}$ – характеристическая функция множества, $\square = [0, 1]^n$.

ЛЕММА 1.1 [13]. Мера μ является конечной борелевской мерой на Ω . Для всякой интегрируемой по мере $dx \times \mu$ или неотрицательной измеримой функции $f = f(x, \omega)$ справедливо равенство (1.6).

Другой способ построения меры μ связан с аппроксимацией мер μ_ω сглаженными абсолютно непрерывными мерами, задаваемыми с помощью оператора

сглаживания. Для каждого $\delta > 0$ определим действие оператора $\mathcal{K}^\delta$ на произвольную меру Радона $d\mu(x)$ в $\mathbb{R}^n$ формулой

$$d\mu^\delta(x) = (\mathcal{K}^\delta d\mu)(x) = \tilde{\rho}^\delta(x) dx, \quad \tilde{\rho}^\delta(x) = \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} K\left(\frac{x-y}{\delta}\right) d\mu(y), \quad (1.8)$$

где K – положительная C_0^∞ -функция, причем $\int_{\mathbb{R}^n} K(x) dx = 1$ и $K(-x) = K(x)$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{K}^\delta \mu$ – мера Радона и что семейство μ^δ локально слабо сходится к мере μ при $\delta \downarrow 0$, т.е. для каждой непрерывной функции φ с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$ имеем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu^\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x).$$

Определив теперь

$$d\mu_\omega^\delta(x) = \mathcal{K}^\delta d\mu_\omega(x) = \tilde{\rho}_\omega^\delta(x) dx, \quad \tilde{\rho}_\omega^\delta(x) = \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} K\left(\frac{x-y}{\delta}\right) d\mu_\omega(y), \quad (1.9)$$

получим семейство абсолютно непрерывных мер μ_ω^δ , которые п.н. локально слабо сходятся к μ_ω при $\delta \downarrow 0$.

Согласно (1.2) функция $\tilde{\rho}_\omega^\delta(x)$ представима в виде

$$\tilde{\rho}_\omega^\delta(x) = \rho^\delta(T_x \omega), \quad \rho^\delta(\omega) = \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} K\left(\frac{y}{\delta}\right) d\mu_\omega(y).$$

Таким образом, меры μ_ω^δ представимы в виде $d\mu_\omega^\delta(x) = \rho^\delta(T_x \omega) dx$ и, следовательно, являются реализациями меры $\boldsymbol{\mu}^\delta \stackrel{\text{def}}{=} \rho^\delta(\omega) dP(\omega)$ в Ω .

Покажем, что семейство мер $\boldsymbol{\mu}^\delta(d\omega)$ слабо сходится в Ω к мере $\boldsymbol{\mu}$. Заметим сначала, что семейство мер $\boldsymbol{\mu}^\delta(d\omega)$ слабо компактно в Ω , поскольку Ω – метрический компакт и $\int_\Omega \boldsymbol{\mu}^\delta(d\omega) = m$. Докажем справедливость последнего равенства. При $t \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \int_\Omega \boldsymbol{\mu}^\delta(d\omega) &= \int_\Omega \rho^\delta(\omega) dP(\omega) = t^{-n} \mathbb{E} \int_{t\Box} \rho^\delta(T_x \omega) dx \\ &= t^{-n} \mathbb{E} \int_{t\Box} \int_{\mathbb{R}^n} \delta^{-n} K\left(\frac{x-y}{\delta}\right) d\mu_\omega(y) dx \\ &= t^{-n} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^n} d\mu_\omega(y) \int_{t\Box} \delta^{-n} K\left(\frac{x-y}{\delta}\right) dx \longrightarrow m. \end{aligned}$$

Поскольку левая часть здесь от t не зависит, она равна m . Проверим, что любая предельная мера $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \boldsymbol{\mu}^\delta$ совпадает с $\boldsymbol{\mu}$. С этой целью выберем ту же функцию $K = K(x)$, что и в (1.9), и произвольную непрерывную функцию $f = f(\omega)$ на Ω . Тогда

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(\omega) d\tilde{\boldsymbol{\mu}}(\omega) &= \lim_{\delta \downarrow 0} \int_\Omega f(\omega) \boldsymbol{\mu}^\delta(d\omega) = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} K(x) \mathbb{E}\{f(\omega) \rho^\delta(\omega)\} dx \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} K(x) \mathbb{E}\{f(T_x \omega) \rho^\delta(T_x \omega)\} dx = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^n} K(x) f(T_x \omega) d\mu_\omega^\delta(x) \\ &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^n} K(x) f(T_x \omega) d\mu_\omega(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_\Omega K(x) f(\omega) d\boldsymbol{\mu}(\omega) dx = \int_\Omega f(\omega) d\boldsymbol{\mu}(\omega); \end{aligned}$$

здесь также были использованы формула Кэмбела, свойство (1.4) и теорема Лебега. Требуемое совпадение мер следует теперь из произвольности f .

Определим оператор сглаживания для функций $\varphi \in C(\Omega)$ равенством

$$\varphi^\delta(\omega) = \tilde{K}^\delta \varphi(\omega) = \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} K\left(\frac{y}{\delta}\right) \varphi(T_y \omega) dy. \quad (1.10)$$

Заметим, что из непрерывности группы T_x следует включение $\varphi^\delta \in C(\Omega)$. По формуле Кэмбела также имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi^\delta(\omega) d\mu(\omega) &= \frac{1}{\delta^n} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} K\left(\frac{x}{\delta}\right) \varphi(T_x \omega) dx d\mu(\omega) \\ &= \frac{1}{\delta^n} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} K\left(\frac{x}{\delta}\right) \varphi(T_{-x} \omega) dx d\mu(\omega) \\ &= \frac{1}{\delta^n} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} K\left(\frac{x}{\delta}\right) \varphi(\omega) d\mu_\omega(x) dP(\omega) = \int_{\Omega} \varphi(\omega) \mu^\delta(d\omega). \end{aligned} \quad (1.11)$$

ТЕОРЕМА 1.1 (эргодическая теорема [13]). *Пусть динамическая система T_x эргодична, и пусть стационарная случайная мера μ имеет конечную интенсивность $m > 0$. Тогда для всякого ограниченного борелевского множества A , $|A| > 0$, и всякой функции $g(\omega) \in L^1(\Omega, \mu)$ выполнено соотношение*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^n |A|} \int_{tA} g(T_x \omega) d\mu_\omega(x) = \int_{\Omega} g(\omega) d\mu(\omega) \quad \text{п. н. по мере } P. \quad (1.12)$$

В случае, когда $\mu = P$, теорема 1.1 становится обычной теоремой Биркгофа. Сформулированная эргодическая теорема влечет слабую сходимость мер

$$\mu^\varepsilon = \varepsilon^n d\mu_\omega(\varepsilon^{-1}x)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ к детерминированной мере $m dx$ п. н. по мере P .

Мы видели, что при условии (1.5) мера Пальма – это конечная борелевская мера на метрическом компакте Ω . Не каждая такая мера служит мерой Пальма для стационарной меры.

ПРИМЕР 1.11. Пусть Ω – двумерный тор, $T(x)$ – одномерная динамическая система сдвигов по иррациональной обмотке, I – некоторый отрезок на торе, μ – сосредоточенная на нем одномерная мера Лебега. Тогда:

- 1) если отрезок I параллелен обмотке, то μ не является мерой Пальма;
- 2) если отрезок I ортогонален обмотке, то μ – мера Пальма.

§ 2. Соболевские пространства с мерой

Напомним определение соболевского пространства $H^1(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Скажем, что функция $z = z(x)$, $z \in (L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega))^n$, есть градиент функции $u(x)$ в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$, если найдется такая последовательность $u_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, что при $k \rightarrow \infty$

$$u_k \rightarrow u \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega), \quad \nabla u_k \rightarrow z \quad \text{в } (L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega))^n.$$

Множество пар (u, z) , $z = \nabla u$, с естественной нормой

$$(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)}^2 + \|z\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)}^2)^{1/2}$$

назовем *пространством* $H(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$; это множество образует замкнутое подпространство в $(L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega))^{n+1}$.

Иногда мы называем *элементом соболевского пространства* только первую компоненту пары $(u, \nabla u)$. Отметим, что градиент функции может быть не единственным, он определен с точностью до *множества градиентов нулевой функции*, которое мы обозначим $\Gamma_{\mu_\omega}(0)$. Это множество образует замкнутое подпространство в $(L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega))^n$. Аналогично определяются пространства $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$, а также, для произвольной липшицевой области G , пространства $H^1(G, \mu_\omega)$ и $H_0^1(G, \mu_\omega)$.

Подробное описание соболевских пространств с мерой можно найти в работах [2]–[5] и [8]–[10].

Наша следующая цель – описать некоторые пространства функций на Ω , связанные с мерой μ .

ЛЕММА 2.1. Пусть $v \in L^2(\Omega, \mu)$. Тогда $\mathbb{P}$ -почти все реализации $v(T_x \omega)$ принадлежат пространству $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$. Более того, для всякого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство

$$\mathbb{E} \int_A v^2(T_x \omega) d\mu_\omega(x) = |A| \|v\|_{L^2(\Omega, \mu)}^2. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует непосредственно из формулы Кэмбела и теоремы Фубини.

Верно и обратное утверждение в следующей форме: если почти все реализации измеримой функции $v = v(\omega)$ лежат в $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$ и

$$\mathbb{E} \int_{\square} v^2(T_x \omega) d\mu_\omega(x) < \infty,$$

то $v \in L^2(\Omega, \mu)$ и справедлива формула (2.1).

Приступим к построению пространства $H^1(\Omega, \mu)$. С этой целью рассмотрим множество непрерывных функций на Ω таких, что пределы

$$(\partial_i u)(\omega) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{u(T_{\delta e_i} \omega) - u(\omega)}{\delta}$$

существуют при всех ω и $i = 1, 2, \dots, n$ и непрерывны на Ω . Указанное множество плотно в $L^2(\Omega, \mu)$. Проверить это можно, например, используя плотность $C(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ и определив для произвольной $\varphi \in C(\Omega)$ семейство функций

$$\varphi^\delta(\omega) = \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} K\left(\frac{y}{\delta}\right) \varphi(T_y \omega) dy, \quad (2.2)$$

где K – положительная C_0^∞ -функция, имеющая единичный интеграл; требуемые свойства φ^δ вытекают из непрерывности T_x . Для этого множества функций будем использовать обозначение $C^1(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Скажем, что функция $u \in L^2(\Omega, \mu)$ принадлежит $H^1(\Omega, \mu)$ и $z \in (L^2(\Omega, \mu))^n$ – ее градиент, если найдется последовательность $u_k \in C^1(\Omega)$ такая, что $u_k \rightarrow u$ в $L^2(\Omega, \mu)$ и $\partial_i u_k \rightarrow z_i$ в $L^2(\Omega, \mu)$, $i = 1, 2, \dots, n$, при $k \rightarrow \infty$.

Пространство пар (u, z) обозначим $H(\Omega, \mu)$, множество первых компонент – $H^1(\Omega, \mu)$.

Градиент функции $u \in H^1(\Omega, \mu)$ будем обозначать $z = \partial u$.

Так же, как в случае периодических сингулярных мер (см. [4]), градиент функции $u \in H^1(\Omega, \mu)$, вообще говоря, не единствен. Он определен с точностью до множества градиентов нуля, которое в этом случае мы обозначим $\Gamma_\mu(0)$.

ЛЕММА 2.2. Пусть u – функция из $H^1(\Omega, \mu)$ и z – ее градиент. Тогда $\mathbb{P}$ -почти все реализации $u(T_x\omega)$ принадлежат пространству $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$ и $z(T_x\omega)$ является градиентом $u(T_x\omega)$ как функции x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим аппроксимирующую последовательность функций $u_k \in C^1(\Omega)$. Их реализации $u_k(T_x\omega)$ принадлежат $C^1_b(\mathbb{R}^n)$, и

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_k(T_x\omega) = (\partial_i u_k)(T_x\omega).$$

Здесь мы использовали стандартное обозначение $C^1_b(\mathbb{R}^n)$ для пространства непрерывно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций с нормой

$$\|u\|_{C^1_b(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|u(x)| + |\nabla u(x)|).$$

По формуле Кэмбела (1.6) при $k \rightarrow \infty$ имеем

$$\mathbb{E} \int_A (u_k(T_x\omega) - u(T_x\omega))^2 d\mu_\omega(x) = |A| \int_\Omega (u_k(\omega) - u(\omega))^2 d\mu(\omega) \rightarrow 0,$$

поэтому после выбора подпоследовательности приходим к соотношению при $k \rightarrow \infty$:

$$u_k(T_x\omega) \rightarrow u(T_x\omega) \quad \text{в} \quad L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$$

$\mathbb{P}$ -п. н. Аналогично, при $k \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_k(T_x\omega) \rightarrow z(T_x\omega) \quad \text{в} \quad (L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu_\omega))^n$$

$\mathbb{P}$ -п. н., что завершает доказательство требуемого утверждения.

Пространство $L^2_{\text{pot}}(\Omega, \mu)$ потенциальных векторов определим как замыкание множества $\{\partial u, u \in C^1(\Omega)\}$ в $(L^2(\Omega, \mu))^n$, а пространство $L^2_{\text{sol}}(\Omega, \mu)$ соленоидальных векторов – как ортогональное дополнение к $L^2_{\text{pot}}(\Omega, \mu)$ в $(L^2(\Omega, \mu))^n$, т. е. $L^2_{\text{sol}}(\Omega, \mu) = (L^2_{\text{pot}}(\Omega, \mu))^\perp$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $v \in L^2_{\text{pot}}(\Omega, \mu)$. Тогда $\mathbb{P}$ -п. н. реализации $v(T_x\omega)$ принадлежат пространству $L^2_{\text{pot,loc}}(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$, определяемым как замыкание градиентов гладких функций в $\mathbb{R}^n$ в пространстве $(L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu_\omega))^n$.

Эта лемма доказывается тем же простым способом, что и лемма 2.2. Здесь важно, что пространство $L^2_{\text{pot}}(\Omega, \mu)$ – замыкание множества гладких векторов ∂u , $u \in C^1(\Omega)$, для которых указанное свойство реализаций очевидно. Напротив, пространство $L^2_{\text{sol}}(\Omega, \mu)$ определено иным способом, и в нем гладкие векторы, вообще, не плотны. По этой причине доказательство следующей теоремы не вполне тривиально.

ТЕОРЕМА 2.1. *P-почти все реализации произвольной вектор-функции $w \in L^2_{\text{sol}}(\Omega, \mu)$ соленоидальны в смысле меры μ_ω , т.е.*

$$w(T_x \omega) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, d\mu_\omega), \quad \int_{\mathbb{R}^n} w(T_x \omega) \cdot \nabla \varphi(x) d\mu_\omega(x) = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2.3)$$

Прежде чем доказывать теорему 2.1, приведем одно вспомогательное построение. Будем рассматривать сглаженные меры μ^δ , а также сглаживающий оператор φ^δ , $\varphi \in C(\Omega)$, определенные равенством (1.10).

ЛЕММА 2.4. *Для любого $b \in L^2(\Omega, d\mu)$ найдется $b_\delta \in L^2(\Omega, d\mu^\delta)$ такое, что*

$$\int_{\Omega} b_\delta \varphi d\mu^\delta = \int_{\Omega} b \varphi^\delta d\mu \quad \forall \varphi \in C(\Omega). \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правую часть равенства (2.4) рассмотрим как функционал $\Phi(\varphi)$, $\varphi \in C(\Omega)$. Имеем очевидную оценку

$$|\Phi(\varphi)|^2 \leq c \int_{\Omega} (\varphi^\delta)^2 d\mu, \quad c = \int_{\Omega} b^2 d\mu.$$

По интегральному неравенству Иенсена имеем $(\varphi^\delta)^2 \leq (\varphi^2)^\delta$, поэтому

$$|\Phi(\varphi)|^2 \leq c \int_{\Omega} (\varphi^2)^\delta d\mu = c \int_{\Omega} \varphi^2 d\mu^\delta$$

в силу свойства (1.11) меры μ^δ . Следовательно, b_δ существует по теореме Рисса, и справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} |b_\delta|^2 d\mu^\delta \leq \int_{\Omega} |b|^2 d\mu. \quad (2.5)$$

Далее, так как $\varphi^\delta \rightarrow \varphi$ равномерно на Ω , то $b_\delta \rightarrow b$ в $L^2(\Omega, d\mu^\delta)$. Тогда оценка (2.5) означает, что эта сходимостъ является сильной: $b_\delta \rightarrow b$ в $L^2(\Omega, d\mu^\delta)$.

Рассмотрим теперь вектор $v \in L^2_{\text{sol}}(\Omega, \mu)$ и заметим, что соответствующий ему вектор v_δ будет соленоидальным относительно меры μ^δ . Действительно, для $\partial \varphi$, $\varphi \in C^1(\Omega)$, из равенства (2.4) получим

$$\int_{\Omega} v_\delta \cdot \partial \varphi d\mu^\delta = \int_{\Omega} v \cdot (\partial \varphi)^\delta d\mu = \int_{\Omega} v \cdot \partial \varphi^\delta d\mu = 0.$$

Используя то, что мера μ^δ абсолютно непрерывна относительно P , т.е. $\mu^\delta = \rho^\delta P$, $\rho^\delta \in L^1(\Omega, dP)$, получаем, что вектор

$$p^\delta \equiv v_\delta \rho^\delta$$

соленоидален, $\int_{\Omega} p^{\delta} \cdot \partial \varphi dP(\omega) = 0$ при всех $\varphi \in C^1(\Omega)$. Но тогда по известному результату (см. [14, гл. 7]) он соленоидален на $\mathbf{P}$ -п. в. реализациях:

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_{\delta}(T_x \omega) \cdot \nabla \psi(x) d\mu_{\omega}^{\delta}(x) = 0 \quad \forall \psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n). \quad (2.6)$$

Для $a \in C(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} a(\omega) \left[\int_{\mathbb{R}^n} v_{\delta}(T_x \omega) \cdot \nabla \psi(x) d\mu_{\omega}^{\delta}(x) \right] dP(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} a(T_{-x} \omega) v_{\delta}(\omega) \cdot \nabla \psi(x) \rho^{\delta}(\omega) dP(\omega) dx. \end{aligned}$$

Здесь использована инвариантность меры $\mathbf{P}$ относительно преобразований T_x и формула Кэмбела для

$$f(x, \omega) = a(T_{-x} \omega) \nabla \psi(x) \cdot v_{\delta}(\omega).$$

Поскольку $v_{\delta} \rightarrow v$ в $L^2(\Omega, \mu^{\delta})$, то при фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega} a(T_{-x} \omega) v_{\delta}(\omega) \cdot \nabla \psi(x) \rho^{\delta}(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} a(T_{-x} \omega) \nabla \psi(x) \cdot v(\omega) d\mu(\omega).$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} a(T_{-x} \omega) v(\omega) \cdot \nabla \psi(x) d\mu(\omega) dx \\ &= \int_{\Omega} a(\omega) \left[\int_{\mathbb{R}^n} v(T_x \omega) \cdot \nabla \psi(x) d\mu_{\omega}(x) \right] dP(\omega), \end{aligned}$$

где снова использована формула Кэмбела. Так как функция $a \in C(\Omega)$ произвольна, то $\mathbf{P}$ -п. н.

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(T_x \omega) \cdot \nabla \psi(x) d\mu_{\omega}(x) = 0,$$

что и требуется доказать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Скажем, что $g(\omega) = \operatorname{div}_{\omega} v(\omega)$, $g \in L^2(\Omega, \mu)$, $v \in (L^2(\Omega, \mu))^n$, если

$$\int_{\Omega} g(\omega) u(\omega) d\mu(\omega) = - \int_{\Omega} v(\omega) \cdot \partial u(\omega) d\mu(\omega) \quad \forall u \in C^1(\Omega). \quad (2.7)$$

Ясно, что в этом тождестве можно взять любую пару $(u, \partial u) \in H^1(\Omega, \mu)$.

Тем же способом, что и теорема 2.1, доказывается более общая

ТЕОРЕМА 2.2. Если $g(\omega) = \operatorname{div}_{\omega} v$, то $\mathbf{P}$ -п. н. $\operatorname{div} v(T_x \omega) = g(T_x \omega)$ в смысле меры μ_{ω} , т. е.

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(T_x \omega) \cdot \nabla \varphi d\mu_{\omega}(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} g(T_x \omega) \varphi d\mu_{\omega}(x), \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n). \quad (2.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Легко проверить, что равенство (2.8) остается справедливым для более широкого класса тестовых функций; в частности, оно будет выполнено для произвольной функции $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$ с компактным носителем.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\int_{\Omega} \partial u(\omega) \cdot \partial v(\omega) d\mu(\omega) + \int_{\Omega} u(\omega) v(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} f(\omega) v(\omega) d\mu(\omega), \quad v \in H^1(\Omega, \mu), \quad (2.9)$$

где $f \in L^2(\Omega, \mu)$. Поскольку левая часть в этом уравнении представляет собой скалярное произведение функций $(u, \partial u)$ и $(v, \partial v)$ в $H(\Omega, \mu)$, а правая часть – непрерывный функционал, то по теореме Рисса это уравнение имеет единственное решение $(u, \nabla u) \in H(\Omega, \mu)$. Следовательно, оно однозначно разрешимо в $H^1(\Omega, \mu)$.

Отметим, что в уравнении (2.9) выбор градиента решения определен однозначно, этот выбор диктуется условием ортогональности ∂u всем градиентам нуля, т. е. всем $z \in \Gamma_\mu(0)$. Необходимость этого условия очевидна. Достаточность вытекает из следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Любая функция $u \in H^1(\Omega, \mu)$ имеет единственный градиент, ортогональный $\Gamma_\mu(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через ∂u какой-нибудь градиент u . Поскольку $\Gamma_\mu(0)$ – замкнутое подпространство в $(L^2(\Omega, \mu))^n$, уравнение

$$(z + \partial u, v)_{(L^2(\Omega, \mu))^n} = 0 \quad \forall v \in \Gamma_\mu(0)$$

имеет единственное решение в $\Gamma_\mu(0)$. Функция $(z + \partial u)$ дает искомый градиент.

Сформулируем основное условие, налагаемое на меру Пальма.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Скажем, что мера μ эргодична или 2-связна, если равенство нулю градиента $z = \partial u$ функции $u \in H^1(\Omega, \mu)$ влечет равенство $u = \text{const}$ μ -п. н.

Следствием эргодичности меры μ является следующая лемма об аппроксимации.

ЛЕММА 2.5. Если мера μ эргодична, то множество $\{g(\omega)\}$ функций вида $g(\omega) = \text{div}_\omega v(\omega)$ плотно в подпространстве $\{u \in L^2(\Omega, \mu) : \int_{\Omega} u d\mu(\omega) = 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда найдется элемент $\zeta \in L^2(\Omega, \mu)$, $\zeta \neq 0$, такой, что $\int_{\Omega} \zeta(\omega) d\mu(\omega) = 0$ и ζ ортогонален любому вектору вида $\text{div } v$. Рассмотрим задачу (2.9) с $f = \zeta$. Подставляя $v = u$, найдем

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mu(\omega) + \int_{\Omega} u^2 d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \zeta u d\mu(\omega),$$

откуда следует неравенство

$$\int_{\Omega} u^2 d\mu(\omega) \leq \int_{\Omega} \zeta^2 d\mu(\omega). \quad (2.10)$$

Из соотношения (2.9) получаем

$$\int_{\Omega} (\zeta - u)v d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\mu(\omega),$$

поэтому $\zeta - u = \operatorname{div}_{\omega}(\nabla u)$, и по выбору ζ имеем $\int_{\Omega} (\zeta - u)\zeta d\mu(\omega) = 0$. Далее,

$$0 \leq \int_{\Omega} (\zeta - u)^2 d\mu(\omega) = - \int_{\Omega} u(\zeta - u) d\mu(\omega),$$

так что

$$\int_{\Omega} u^2 d\mu(\omega) \geq \int_{\Omega} u\zeta d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \zeta^2 d\mu(\omega).$$

Отсюда, используя равенство (2.10), получаем $\int_{\Omega} u^2 d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \zeta^2 d\mu(\omega)$. Значит, $\nabla u = 0$, и в силу эргодичности μ имеем $u = \operatorname{const}$. Поэтому $\zeta = \operatorname{const}$ и, следовательно, $\zeta = 0$.

§ 3. Построение замкнутой формы Дирихле и самосопряженного оператора

Пусть $a = (a_{ij}(\omega))$ – симметрическая, $\mathcal{F}$ -измеримая, положительно определенная матрица такая, что

$$\Lambda^{-1}|\xi|^2 \leq a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \Lambda > 0,$$

μ -п. н. В этом параграфе мы рассмотрим меру μ_{ω} как борелевскую меру в $\mathbb{R}^n$ и построим самосопряженный оператор

$$A = -\operatorname{div} a(T_x\omega)\nabla,$$

действующий в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_{\omega})$. Построим также соответствующую замкнутую форму Дирихле.

Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_{\omega})$. Скажем, что функция $u \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu_{\omega})$ есть решение уравнения

$$Au + u = f,$$

если справедливо интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} a(T_x\omega)\nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) d\mu_{\omega}(x) + \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x) d\mu_{\omega}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) d\mu_{\omega}(x) \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Существование и единственность решения как пары $(u, \nabla u)$ следует из теоремы Рисса. Единственный градиент в тождестве (3.1) определяется из условия: поток $a\nabla u$ тангенциален, т. е. $a\nabla u \perp \Gamma_{\mu_{\omega}}(0)$. Покажем, что множество решений плотно в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_{\omega})$.

ЛЕММА 3.1. *Совокупность решений уравнения $Au + u = f$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_{\omega})$, образует плотное множество в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_{\omega})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим множество решений через $\mathcal{D}(A)$ и предположим, что найдется ненулевая функция f_0 , ортогональная $\mathcal{D}(A)$. Пусть v – решение уравнения (3.1) с правой частью f_0 , и пусть u – решение с произвольной правой частью f . По непрерывности интегральное тождество (3.1) справедливо для пробных функций из пространства $H^1(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$. Используя v как пробную функцию в уравнении для u , и наоборот, u как пробную функцию в уравнении для v и вычитая полученные интегральные тождества друг из друга, найдем, что $(f, v) = 0$ для всех $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$. Поэтому $v = 0$ и $\nabla v \in \Gamma_{\mu_\omega}(0)$. Отсюда следует равенство $(a(T_x\omega)\nabla v, \nabla v) = 0$, что противоречит предположению.

Теперь для элемента $u \in \mathcal{D}(A)$, отвечающего правой части f , положим $Au = f - u$. Оператор $(A + I)^{-1}$ отображает функции $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$ в соответствующие решения задачи (3.1). Он является ограниченным, неотрицательным, симметричным, поэтому A – самосопряженный оператор.

Уравнение $Au + u = f$ (или эквивалентное ему уравнение (3.1)) имеет вариационную постановку, его решение доставляет минимум в вариационной задаче

$$\inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (a(x)\nabla u(x) \cdot \nabla u + u^2(x)) d\mu(x) - 2 \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x) d\mu_\omega(x) \right\}. \quad (3.2)$$

Можно определить оператор A несколько иным способом, построив соответствующую квадратичную форму Дирихле. Положим

$$\mathcal{E}(u, u) = \min_{\nabla u \in \Gamma_\mu(u)} \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\nabla u(x) \cdot \nabla u(x) d\mu_\omega(x), \quad (3.3)$$

где $\Gamma_\mu(u)$ – множество всех градиентов функции u . Проверим, что эта квадратичная форма замкнута. Обозначим $\mathcal{E}_1(u, v) = \mathcal{E}(u, v) + (u, v)$, и пусть последовательность функций $u_k \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$ такова, что $\mathcal{E}_1(u_k - u_m, u_k - u_m) \rightarrow 0$ при $k, m \rightarrow \infty$. Наша цель – доказать существование такой функции $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$, что $\mathcal{E}_1(u_k - u_0, u_k - u_0) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Для этого введем в пространстве $\tilde{H}(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$ скалярное произведение

$$((u, \nabla u), (v, \nabla v))_{\tilde{H}} = \int_{\mathbb{R}^n} (u(x)v(x) + a(T_x\omega)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)) d\mu_\omega(x)$$

и обозначим $(u, z(u))$ проекцию в этом скалярном произведении вектора $(u, \nabla u)$ на ортогональное дополнение к подпространству $(0, \Gamma_\mu(0))$. Легко проверить, что

$$\mathcal{E}_1(u, u) = \int_{\mathbb{R}^n} (u^2(x) + a(T_x\omega)z(u) \cdot z(u)) d\mu_\omega(x).$$

Существование требуемого u_0 следует теперь из замкнутости $H(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$ в $(L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega))^{n+1}$.

Можно также доказать замкнутость формы $\mathcal{E}(u, u)$, воспользовавшись следующим результатом о релаксации:

$$\mathcal{E}(u, u) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{a} \nabla^t u \cdot \nabla^t u dx,$$

где $\nabla^t u$ – тангенциальный градиент функции u ,

$$\hat{a}(x)\xi \cdot \xi = \min_{\eta \in T^\perp(x)} a(T_x\omega)(\xi + \eta) \cdot (\xi + \eta)$$

и $T^\perp(x)$ – ортогональное дополнение к тангенциальному пространству меры μ_ω в точке x . Отсюда легко следует замкнутость формы.

Вопросы, связанные с построением тангенциального градиента, тангенциального пространства и релаксации подробно обсуждаются в § 10.

Проверим теперь, что эта форма является марковской.

ЛЕММА 3.2. *Форма $\mathcal{E}(u, u)$ является замкнутой марковской.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению марковость формы означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется монотонная функция $\phi_\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_\varepsilon(t) = t \quad \text{для } t \in [0, 1], \quad -\varepsilon \leq \phi_\varepsilon(t) \leq 1 + \varepsilon, \quad \phi'_\varepsilon(t) \leq 1,$$

такая, что для всякого $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ имеем $\phi_\varepsilon(u) \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ и $\mathcal{E}(\phi_\varepsilon(u), \phi_\varepsilon(u)) \leq \mathcal{E}(u, u)$.

При каждом $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию ϕ_ε , удовлетворяющую следующим условиям:

$$\phi'_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \phi'_\varepsilon(t) = 1 \quad \text{при } t \in [0, 1], \quad 0 \leq \phi'_\varepsilon \leq 1, \quad \text{supp } \phi'_\varepsilon \subset (-\varepsilon, 1 + \varepsilon).$$

В силу легко проверяемого соотношения $\nabla^t \phi_\varepsilon(u) = \phi'_\varepsilon(u) \nabla^t u$, выполненного для каждой $u \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$, и сформулированного выше результата о релаксации находим $\mathcal{E}(\phi_\varepsilon(u), \phi_\varepsilon(u)) \leq \mathcal{E}(u, u)$.

Из леммы 3.2, в частности, следует, что для полугруппы e^{-tA} выполнен принцип максимума.

Наряду с задачей для функций, определенных во всем пространстве, будем также изучать в ограниченной области G с липшицевой границей задачу Дирихле и другие краевые задачи. Сформулируем одну такую задачу.

Пусть S – часть границы ∂G , будем считать S замкнутым подмножеством ∂G с липшицевой границей.

Для заданных функций $f \in L^2(G, \mu_\omega)$ и $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим вариационную задачу

$$\inf_{(\varphi - \varphi_0) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus S)} \int_G (a(T_x\omega) \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + \varphi^2(x) - 2f(x)\varphi(x)) d\mu_\omega(x). \quad (3.4)$$

Назовем *пространством* $\tilde{H}(G, S, \mu_\omega)$ замыкание множества вектор-функций $\{(\varphi, \nabla \varphi) : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus S)\}$ по норме $(L^2(G, d\mu_\omega))^{n+1}$. Множество первых компонент обозначим $H^1(G, S, d\mu_\omega)$. В частности, для пустого множества S обозначим это пространство $H_0^1(G, d\mu_\omega)$.

Стандартным образом проверяется, что задача (3.4) имеет единственный минимум на множестве $\{v : (v - \varphi_0, \nabla v - \nabla \varphi_0) \in \tilde{H}(G, S, \mu_\omega)\}$ и что функция, на которой достигается минимум, удовлетворяет уравнению

$$\int_G a(T_x\omega) \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) d\mu_\omega(x) + \int_G u(x) \varphi(x) d\mu_\omega(x) = \int_G f(x) \varphi(x) d\mu_\omega(x) \quad (3.5)$$

для всякой $\varphi \in H^1(G, S, d\mu_\omega)$.

§ 4. Двойственное определение соболевских пространств и вопросы аппроксимации

В работе [19] приведено другое (двойственное) определение соболевского пространства, которое удобно для дальнейшего анализа.

Напомним, что для $a \in L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_\omega)$, $b \in (L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_\omega))^n$ мы записываем $\operatorname{div} b = a$ в смысле меры μ_ω , если

$$\int_{\mathbb{R}^n} b \cdot \nabla \varphi d\mu_\omega = - \int_{\mathbb{R}^n} a \varphi d\mu_\omega \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Заметим, что по непрерывности это равенство останется справедливым, если пару $(\varphi, \nabla \varphi)$ заменить на произвольный элемент $(u, v) \in H(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$.

Приведем теперь еще одно определение пространства $H^1(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пара (u, v) , $u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$, $v \in (L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega))^n$, есть элемент пространства $H^1(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$, и $v = \nabla u$, если

$$\int_{\mathbb{R}^n} u a d\mu_\omega = - \int_{\mathbb{R}^n} v \cdot b d\mu_\omega, \quad \text{как только} \quad \operatorname{div} b = a. \quad (4.1)$$

Докажем эквивалентность определений 4.1 и 2.1. Очевидно, что любая пара вида $(u, v) = (u, \nabla u) \in H(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$ удовлетворяет соотношению (4.1), поэтому любой элемент пространства $H(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$ удовлетворяет определению 4.1. Далее, легко проверить, что множество функций, удовлетворяющих определению 2.1, является замкнутым подпространством в $(L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega))^{n+1}$. Допустим, что оно шире, чем $H(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$. Тогда найдется ненулевой элемент (u_0, v_0) , для которого выполнены одновременно равенство (4.1) и равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) u(x) d\mu_\omega(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} v_0(x) \cdot \nabla u(x) d\mu_\omega(x)$$

для всякого $u \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$. Это означает, что $u_0 = \operatorname{div} v_0$ относительно меры μ_ω . Взяв теперь (u_0, v_0) в качестве тестовой функции в (4.1), приходим к равенству

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_0^2 d\mu_\omega(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} v_0^2 d\mu_\omega(x),$$

противоречащему нетривиальности функции (u_0, v_0) .

Далее понадобится аналог леммы 2.4.

ЛЕММА 4.1. Для любого $p \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$ найдется элемент $p_\delta \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\delta)$ такой, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_\delta \varphi d\mu_\omega^\delta = \int_{\mathbb{R}^n} p \varphi^\delta d\mu_\omega \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (4.2)$$

$$p_\delta \rightarrow p \quad \text{в} \quad L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\delta), \quad (4.3)$$

где φ^δ – стандартное сглаживание:

$$\varphi^\delta(x) = \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) K(\delta^{-1}y) dy,$$

с таким же ядром $K(y)$, как в (1.8).

Отсюда получаем следующую лемму.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\operatorname{div} b = a$ в смысле меры μ . Тогда найдутся семейства b_δ и a_δ такие, что $b_\delta \rightarrow b$, $a_\delta \rightarrow a$ в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\delta)$ сильно, $\operatorname{div} b_\delta = a_\delta$ в смысле меры μ^δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть b_δ, a_δ – такие, как в лемме 4.1. Тогда в силу (4.2) имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} b_\delta \cdot \nabla \varphi \, d\mu^\delta = \int_{\mathbb{R}^n} b \cdot \nabla (\varphi)^\delta \, d\mu = - \int_{\mathbb{R}^n} a \varphi^\delta \, d\mu = - \int_{\mathbb{R}^n} a_\delta \varphi \, d\mu^\delta,$$

что и требовалось доказать.

Полученные результаты позволяют установить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. Допустим, что последовательность $(u_\delta, \nabla u_\delta)$ принадлежит $H^1(\mathbb{R}^n, d\mu^\delta)$ и имеет место слабая сходимость

$$u_\delta \rightharpoonup u, \quad \nabla u_\delta \rightharpoonup v \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^n, d\mu^\delta). \quad (4.4)$$

Тогда $u \in H^1(\mathbb{R}^n, d\mu)$, причем $v = \nabla u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем определение 4.1 пространства $H^1(\mathbb{R}^n, d\mu)$. Если $\operatorname{div} b = a$ в смысле μ_ω и b_δ, a_δ такие, как в лемме 4.2, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_\delta a_\delta \, d\mu_\omega^\delta = - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_\delta \cdot b_\delta \, d\mu_\omega^\delta.$$

Учитывая свойства сильной сходимости, отсюда получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} u a \, d\mu = - \int_{\mathbb{R}^n} v \cdot b \, d\mu.$$

Следовательно, $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^n, d\mu)$.

Заметим, что теорема 4.1 тесно связана с тем, что мера μ^δ получается путем сглаживания меры μ . Для других способов аппроксимации меры μ абсолютно непрерывными мерами предельный переход в переменном соболевском пространстве может не иметь места. Предельный переход в соболевских пространствах изучался в работах [5], [21].

Рассмотрим вопрос о сходимости решений эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$. Как и ранее, μ – мера Радона в $\mathbb{R}^n$, μ^δ – ее сглаживание. Рассмотрим уравнения

$$\operatorname{div} A_\delta \nabla u^\delta + u_\delta = f_\delta \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^n, d\mu^\delta), \quad (4.5)$$

$$\operatorname{div} A \nabla u + u = f \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^n, d\mu) \quad (4.6)$$

в следующих предположениях:

- 1) $\lambda \leq A_\delta \leq \lambda^{-1} \mu^\delta$ -п. в., $\lambda > 0$;
- 2) $\lambda \leq A \leq \lambda^{-1} \mu$ -п. в.;
- 3) $A_\delta \rightarrow A$ в $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, d\mu^\delta)$ сильно;
- 4) $f^\delta \rightarrow f$ в $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu^\delta)$ сильно.

ТЕОРЕМА 4.2. Для решений $u_\delta(x)$, $u(x)$ задач (4.5), (4.6) выполнено предельное соотношение

$$u_\delta \rightarrow u \quad \text{в} \quad L^2(\mathbb{R}^n, d\mu^\delta) \quad \text{сильно.} \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $(u_\delta, \nabla u_\delta)$ ограничена в пространстве $H^1(\mathbb{R}^n, d\mu^\delta)$, поэтому без потери общности считаем, что имеет место слабая сходимость $u_\delta \rightharpoonup \tilde{u}$ при $\delta \rightarrow 0$. По теореме 4.1 имеем $(\tilde{u}, \nabla \tilde{u}) \in H^1(\mathbb{R}^n, d\mu)$.

В интегральном тождестве

$$\int_{\mathbb{R}^n} [A_\delta \nabla u_\delta \cdot \nabla \varphi + u_\delta \varphi] d\mu^\delta = \int_{\mathbb{R}^n} f^\delta \varphi d\mu^\delta$$

можно перейти к пределу, опираясь также на легко проверяемое соотношение

$$A_\delta \nabla u_\delta \rightharpoonup A \nabla \tilde{u} \quad \text{в} \quad L^2(\mathbb{R}^n, d\mu^\delta).$$

В результате получим, что $(\tilde{u}, \nabla \tilde{u})$ – решение уравнения (4.6), поэтому $(\tilde{u}, \nabla \tilde{u}) = (u, \nabla u)$. Сильная сходимость (4.7) легко следует из сходимости энергий

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} [A_\delta \nabla u_\delta \cdot \nabla u_\delta + u_\delta^2] d\mu^\delta &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u_\delta f^\delta d\mu^\delta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f u d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} [A \nabla u \cdot \nabla u + u^2] d\mu \end{aligned}$$

и вследствие полунепрерывности снизу при слабой сходимости.

§ 5. Двухмасштабная сходимость в пространствах со случайной мерой

Введем понятие двухмасштабной сходимости, связанной со случайными мерами

$$d\mu_\omega^\varepsilon(x) = \varepsilon^n d\mu_\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$, в частности G может совпадать с $\mathbb{R}^n$, и пусть $T_x \tilde{\omega}$ – типичная траектория. Термин “типичная” означает, что для траектории $T_x \tilde{\omega}$ выполняется соотношение (1.12) при любой функции $g \in C(\Omega)$. Отметим, что траектория п. н. является типичной, это обеспечивается сепарабельностью пространства $C(\Omega)$.

Рассмотрим семейство функций $v^\varepsilon(x)$, ограниченных в $L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon)$, т. е.

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_G |v^\varepsilon(x)|^2 d\mu_\omega^\varepsilon(x) < \infty. \quad (5.1)$$

Наша цель – определить слабый двухмасштабный предел

$$v^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v(x, \omega), \quad (5.2)$$

где $v \in L^2(G \times \Omega, dx \times d\mu(\omega))$. Заметим, что исходная последовательность $v^\varepsilon(x)$ связана с конкретной траекторией $T_x \tilde{\omega}$, но двухмасштабный предел определен на $G \times \Omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Соотношение (5.2) означает, что выполнено условие (5.1) и для любых функций $\varphi(x) \in C_0^\infty(G)$ и $b(\omega) \in C^1(\Omega)$ справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_G v^\varepsilon(x) \varphi(x) b(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \tilde{\omega}) d\mu_{\tilde{\omega}}^\varepsilon(x) = \int_G \int_\Omega v(x, \omega) \varphi(x) b(\omega) d\mu(\omega) dx. \quad (5.3)$$

С помощью эргодической теоремы 1.1 для Р-п. в. $\tilde{\omega}$ находим

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \left| \int_G v^\varepsilon(x) \varphi(x) b(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \tilde{\omega}) d\mu_{\tilde{\omega}}^\varepsilon(x) \right| &\leq \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \|v^\varepsilon\|_{L^2(G, \mu_{\tilde{\omega}}^\varepsilon)} \left(\int_G \varphi^2(x) b^2(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \tilde{\omega}) d\mu_{\tilde{\omega}}^\varepsilon(x) \right)^{1/2} \\ &\leq C C(\tilde{\omega}) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_G \varphi^2(x) b^2(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \tilde{\omega}) d\mu_{\tilde{\omega}}^\varepsilon(x) \right)^{1/2} \\ &= C C(\tilde{\omega}) \left(\int_G \int_\Omega \varphi^2(x) b^2(\omega) d\mu(\omega) dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда стандартным образом с помощью диагональной процедуры получаем (см. [1], [4]), что для семейства функций v^ε , подчиненного оценке (5.1), найдется подпоследовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ такая, что предел в левой части (5.3) существует, является непрерывным в $L^2(G \times \Omega, dx \times \mu)$ линейным функционалом и, следовательно, представим в виде

$$\int_G \int_\Omega v(x, \omega) \varphi(x) b(\omega) d\mu(\omega) dx,$$

при этом $v(x, \omega) \in L^2(G \times \Omega, dx \times d\mu(\omega))$.

Сформулируем это утверждение в виде следующей леммы.

ЛЕММА 5.1. *Всякое семейство функций v^ε , допускающее оценку (5.1), сходится по подпоследовательности слабо двухмасштабно к некоторой функции $v(x, \omega) \in L^2(G \times \Omega, dx \times d\mu(\omega))$.*

Лемма 5.1 относится к произвольной последовательности функций, ограниченной в $L^2(G, d\mu_{\tilde{\omega}}(x))$, но сама траектория $T_x \tilde{\omega}$ не является произвольной, а должна быть типичной. Как обычно, условие типичности связано с выполнением эргодической теоремы. Мы назовем точку $\omega \in \Omega$ *типичной*, если в ней выполняется соотношение (1.12) для любой $g(\omega) \in C(\Omega)$. Пусть $\tilde{\Omega}$ – множество типичных точек. Тогда $\tilde{\Omega}$ инвариантно и $P(\tilde{\Omega}) = 1$, $\mu(\tilde{\Omega}) = t$. Последнее равенство может быть получено из формулы Кэмбела. Имеет место следующее важное утверждение: *любую функцию $g \in L^1(\Omega, \mu)$ можно так изменить на множестве нулевой μ -меры, что она будет определена на $\tilde{\Omega}$, и для любой точки $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ выполняется соотношение (1.12).*

Заметим, что для каждой функции $g \in L^1(\Omega, \mu)$ соотношение (1.12) выполняется при всех $\omega \in \Omega_1$, где Ω_1 – инвариантное множество полной μ -меры. Можно считать, не ограничивая общность, что $\Omega_1 \subset \tilde{\Omega}$. Требуется доопределить g на $\tilde{\Omega} \setminus \Omega_1$. Для этого возьмем последовательность $g^k \in C(\Omega)$, $g^k \rightarrow g$

в $L^1(\Omega, \mu)$ при $k \rightarrow \infty$. В силу (1.12) имеем

$$\lim_{m, k \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t|A|} \int_{tA} |g^k(T_x \omega) - g^m(T_x \omega)| d\mu_\omega(x) = 0$$

при $\omega \in \tilde{\Omega} \setminus \Omega_1$. В этом случае найдется измеримая функция $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, такая, что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t|A|} \int_{tA} |g^k(T_x \omega) - g(x)| d\mu_\omega(x) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t|A|} \int_{tA} g(x) d\mu_\omega(x) &= \int_{\Omega} g(\omega') d\mu(\omega') \end{aligned}$$

при $\omega \in \tilde{\Omega} \setminus \Omega_1$. Для случая $\mu_\omega(dx) = dx$ этот результат доказан в [14, гл. 7, § 5]. Доказательство сохраняется и в рассматриваемом случае. Остается доопределить функцию g на траектории $T_x \omega$, $\omega \in \tilde{\Omega} \setminus \Omega_1$, равенством $g(T_x \omega) = g(x)$.

Всюду далее мы будем идентифицировать функции из $L^2(\Omega, \mu)$ с их модификациями, для которых выполнено соотношение (1.12).

ЛЕММА 5.2. *В определении 5.1 двухмасштабной сходимости можно расширить класс пробных функций, потребовав, чтобы $b(\omega) \in L^2(\Omega, \mu)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b(\omega) \in L^2(\Omega, \mu)$, и пусть последовательность функций $b^k(\omega) \in C^1(\Omega)$ аппроксимирует $b(\omega)$ в норме $L^2(\Omega, \mu)$. Обозначив $Q = \text{supp } \varphi$, имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_Q v^\varepsilon(x) \varphi(x) (b^k(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \tilde{\omega}) - b(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \tilde{\omega})) d\mu_{\tilde{\omega}}^\varepsilon(x) \right| \\ \leq C_\varphi \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v^\varepsilon\|_{L^2(Q, \mu_{\tilde{\omega}}^\varepsilon)} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_Q (b^k(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \tilde{\omega}) - b(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \tilde{\omega}))^2 d\mu_{\tilde{\omega}}^\varepsilon(x) \right)^{1/2} \\ \leq C \|b^k(\omega) - b(\omega)\|_{L^2(Q, \mu)}; \end{aligned}$$

последнее соотношение следует из эргодической теоремы 1.1. Из этого неравенства легко выводится требуемое утверждение.

Другие свойства слабой двухмасштабной сходимости являются предметом следующих двух утверждений.

ЛЕММА 5.3. *Пусть*

$$\|v^\varepsilon\|_{L^2(G, \mu_{\tilde{\omega}}^\varepsilon)} \leq C(\tilde{\omega}), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \|\nabla v^\varepsilon\|_{(L^2(G, \mu_{\tilde{\omega}}^\varepsilon))^n} = 0.$$

Тогда по подпоследовательности имеем сходимость

$$v^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v^0(x), \tag{5.4}$$

где функция $v^0(x)$ не зависит от переменной ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5.1 следует сходимость $v^\varepsilon \xrightarrow{2} v^0(x, \omega)$. Пусть функции $\psi \in L^2(\Omega, \mu)$ и $b \in (L^2(\Omega, \mu))^n$ связаны соотношением $\psi(\omega) = \text{div } b(\omega)$, что означает выполнение равенства

$$\int_{\Omega} \nabla^\omega \theta(\omega) b(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \theta(\omega) \psi(\omega) d\mu(\omega)$$

для каждой $\theta \in H^1(\Omega, \mu)$. Из теоремы 2.2 имеем

$$\int_G v(x) \varphi(x) \psi(T_{\varepsilon} \omega) d\mu_{\omega}^{\varepsilon}(x) = \int_G \varepsilon \nabla(v(x) \varphi(x)) b(T_{\varepsilon} \omega) d\mu_{\omega}^{\varepsilon}(x) \quad \text{Р-п. н.} \quad (5.5)$$

для $v \in H^1(G, \mu_{\omega}^{\varepsilon})$ и $\varphi \in C_0^{\infty}(G)$. Подставляя теперь в (5.5) функцию $v(x) = v^{\varepsilon}(x)$, где v^{ε} такая, как в (5.4), и переходя к двухмасштабному пределу в обеих частях этого равенства, находим

$$\int_G \int_{\Omega} v^0(x, \omega) \psi(\omega) \varphi(x) d\mu(\omega) dx = 0$$

для всех ψ , представимых в виде $\psi(\omega) = \operatorname{div}_{\omega} b(\omega)$. В силу произвольности φ и леммы 2.5 это равенство влечет

$$\int_{\Omega} v^0(x, \omega) \psi(\omega) d\mu(\omega) = 0$$

для всех $\psi(\omega)$ с нулевым средним. Отсюда $v^0 = v^0(x)$.

С мерой μ свяжем квадратичную форму

$$\tau(\xi) = \min_{v \in L_{\text{pot}}^2(\Omega, \mu)} \int_{\Omega} |\xi + v|^2 d\mu(\omega), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Мера μ называется *невыврожденной*, если эта форма невырождена: $\tau(\xi) \geq c_0 |\xi|^2$, $c_0 > 0$. В случае вырождения ядро формы τ состоит из векторов $\xi \in \mathbb{R}^n$, которые служат потенциальными векторами $\xi \in L_{\text{pot}}^2(\Omega, \mu)$. Форма $\tau(\xi)$ – это частный случай усредненной матрицы. Справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Множество средних значений $\int_{\Omega} v d\mu(\omega)$, где $v \in L_{\text{sol}}^2(\Omega, \mu)$, совпадает с ортогональным дополнением к ядру формы τ .*

Это утверждение является частным случаем результатов, которые будут получены в § 6 для усредненной матрицы.

ЛЕММА 5.4. *Пусть*

$$\|v^{\varepsilon}\|_{L^2(G, \mu_{\omega}^{\varepsilon})} \leq C(\tilde{\omega}), \quad \|\nabla v^{\varepsilon}\|_{(L^2(G, \mu_{\omega}^{\varepsilon}))^n} \leq C(\tilde{\omega}).$$

Тогда по подпоследовательности имеем сходимость

$$v^{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} v^0(x), \quad (5.6)$$

$$\nabla v^{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} \nabla^{\text{eff}} v^0(x) + v_1(x, u), \quad (5.7)$$

$$\nabla^{\text{eff}} v^0 \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad v_1 \in L^2(G; L_{\text{pot}}^2(\Omega, \mu)), \quad (5.8)$$

где $\nabla^{\text{eff}} = Q\nabla$, Q – ортогональный проектор на ортогональное дополнение к ядру формы τ . В частности, если мера μ невырождена, то $v^0 \in H^1(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим двухмасштабный предел последовательности ∇v^ε через $w(x, \omega)$, и пусть $b(\omega) \in L^2_{\text{sol}}(\Omega, \boldsymbol{\mu})$, $\langle b \rangle \equiv \int_{\Omega} b(\omega) d\boldsymbol{\mu}(\omega) = \eta \neq 0$. Для произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_G \nabla v^\varepsilon(x) \cdot b(T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega) \varphi(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x) &= \int_G \nabla(v^\varepsilon(x)\varphi(x)) \cdot b(T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega) d\mu_\omega^\varepsilon(x) \\ &- \int_G v^\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega) d\mu_\omega^\varepsilon(x) = - \int_G v^\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega) d\mu_\omega^\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Переходя здесь к двухмасштабному пределу, находим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_G w(x, \omega) \cdot b(\omega) \varphi(x) dx d\boldsymbol{\mu}(\omega) &= - \int_{\Omega} \int_G v^0(x) \nabla \varphi(x) \cdot b(\omega) dx d\boldsymbol{\mu}(\omega) \\ &= \eta \cdot \int_G v^0(x) \nabla \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\nabla v^0(x) \cdot \eta = \int_{\Omega} w(x, \omega) \cdot b(\omega) d\boldsymbol{\mu}(\omega) \in L^2(G),$$

поэтому $\nabla^{\text{eff}} v^0 \in L^2(G)$. Остается заметить, что для любой функции $b \in L^2_{\text{sol}}(\Omega, \boldsymbol{\mu})$

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \int_G v^0 \nabla \varphi(x) \cdot b(\omega) dx d\boldsymbol{\mu}(\omega) &= - \int_{\Omega} \int_G v^0 \nabla^{\text{eff}} \varphi(x) \cdot b(\omega) dx d\boldsymbol{\mu}(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \int_G \nabla^{\text{eff}} v^0 \cdot b(\omega) \varphi(x) dx d\boldsymbol{\mu}(\omega), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\int_{\Omega} \int_G (w(x, \omega) - \nabla^{\text{eff}} v^0) \cdot b(\omega) \varphi(x) dx d\boldsymbol{\mu}(\omega) = 0,$$

и $(w(x, \omega) - \nabla^{\text{eff}} v^0) \in L^2(G; L^2_{\text{pot}}(\Omega, \boldsymbol{\mu}))$.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть G – липшицева область, и пусть последовательность функций $v^\varepsilon \in H_0^1(G, \mu_\omega^\varepsilon)$ удовлетворяет оценкам

$$\|v^\varepsilon\|_{L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon)} \leq C(\tilde{\omega}), \quad \|\nabla v^\varepsilon\|_{(L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon))^n} \leq C(\tilde{\omega}). \quad (5.9)$$

Тогда по подпоследовательности имеем сходимость

$$v^\varepsilon \xrightarrow{2} v^0(x) \in H_0^{\text{eff}}(G), \quad (5.10)$$

$$\nabla v^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla^{\text{eff}} v^0(x) + v_1(x, \omega), \quad (5.11)$$

где $H_0^{\text{eff}}(G)$ – замыкание множества $C_0^\infty(G)$ функций по норме пространства $H^{\text{eff}}(G)$, заданного далее, в формуле (6.13), $\nabla^{\text{eff}} v^0 \in (L^2(G))^n$ и $v_1(x, \omega) \in L^2(G; L^2_{\text{pot}}(\Omega, \boldsymbol{\mu}))$. В частности, если мера μ_ω невырождена, то $v^0 \in H_0^1(G)$.

Если функции $v^\varepsilon \in H^1(G, S, \mu_\omega^\varepsilon)$ подчинены оценкам (5.9) и мера μ_ω невырождена, то по подпоследовательности имеем сходимость

$$v^\varepsilon \xrightarrow{2} v^0(x) \in H^1(G, S), \quad (5.12)$$

$$\nabla v^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla v^0(x) + v_1(x, \omega), \quad (5.13)$$

где $v_1(x, \omega) \in L^2(G; L^2_{\text{rot}}(\Omega, \mu))$ и $H^1(G, S)$ – замыкание множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus S)$ функций по норме пространства $H^1(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим функции v^ε нулем во внешность области G , сохранив за продолженными функциями те же обозначения. Продолженные функции удовлетворяют условиям леммы 5.4, поэтому предельная функция $v^0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\nabla^{\text{eff}} v^0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, что $v^0 = 0$ во внешности области G . Согласно [17, гл. X, § 2, лемма 2.6] имеем $v^0 \in H_0^{\text{eff}}(G)$, что завершает доказательство первого утверждения. Второе доказывается аналогично.

Еще одно важное свойство двухмасштабной сходимости дается следующей леммой.

ЛЕММА 5.5. Пусть выполнены оценки

$$\|v^\varepsilon\|_{L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon)} \leq C(\tilde{\omega}), \quad \varepsilon \|\nabla v^\varepsilon\|_{(L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon))^n} \leq C(\tilde{\omega}).$$

Тогда по подпоследовательности имеем сходимость

$$v^\varepsilon \xrightarrow{2s} v(x, \omega), \quad (5.14)$$

$$\varepsilon \nabla v^\varepsilon \xrightarrow{2s} \nabla_\omega v(x, \omega). \quad (5.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функций вида $\psi(\omega) = \text{div}_\omega b(\omega)$ по теореме 2.2 имеем $\psi(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) = \varepsilon \text{div } b(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega)$ относительно меры μ_ω^ε , поэтому

$$\int_G v^\varepsilon(x) \varphi(x) \psi(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) d\mu_\omega^\varepsilon = \int_G \varepsilon \nabla v^\varepsilon(x) \varphi(x) b(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) d\mu_\omega^\varepsilon$$

для всякой $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Переходя к двухмасштабному пределу и обозначив предел $\varepsilon \nabla v^\varepsilon$ через $p(x, \omega)$, найдем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_\Omega v(x, \omega) \varphi(x) \psi(\omega) d\mu(\omega) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_\Omega p(x, \omega) \varphi(x) b(\omega) d\mu(\omega) dx.$$

Отсюда имеем

$$\int_\Omega v(x, \omega) \psi(\omega) d\mu(\omega) = \int_\Omega p(x, \omega) b(\omega) d\mu(\omega),$$

и, следовательно, $p(x, \omega) = \nabla_\omega v(x, \omega)$ при п. в. x . Мы здесь также использовали эквивалентность следующих двух определений пространства $\tilde{H}(\Omega, \mu)$:

1) $\tilde{H}(\Omega, \mu)$ – замыкание множества $\{(v(\omega), \nabla_\omega v(\omega)) : v \in C^1(\Omega)\}$ по норме пространства $(L^2(\Omega, \mu))^{n+1}$;

2) $(v(\omega), z(\omega)) \in \tilde{H}(\Omega, \mu)$, если для $\psi(\omega) = \operatorname{div}_\omega b(\omega)$ выполнено равенство

$$\int_{\Omega} v(\omega) \psi(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} z(\omega) b(\omega) d\mu(\omega). \quad (5.16)$$

Докажем эквивалентность этих определений. То, что всякий элемент пространства $\tilde{H}(\Omega, \mu)$ в смысле первого определения удовлетворяет (5.16), очевидно. Допустим, что второе определение задает более широкое пространство. Тогда найдется элемент $(v_0(\omega), z_0(\omega))$, удовлетворяющий (5.16) и такой, что

$$\int_{\Omega} v_0(\omega) v(\omega) d\mu(\omega) + \int_{\Omega} z_0(\omega) \nabla_\omega v(\omega) d\mu(\omega) = 0.$$

По определению 2.3 это означает, что $v_0 = \operatorname{div}_\omega z_0$. Выбрав теперь в (5.16) в качестве тестовой функции (v_0, z_0) , найдем

$$\int_{\Omega} v_0^2(\omega) d\mu(\omega) = - \int_{\Omega} z_0^2(\omega) d\mu(\omega),$$

что противоречит нетривиальности элемента (v_0, z_0) .

Определим теперь сильную двухмасштабную сходимость в переменном пространстве $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\varepsilon)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Скажем, что семейство функций $\{v^\varepsilon\}$, $v^\varepsilon \in L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon)$, сходится сильно двухмасштабно к функции $v^0(x, \omega) \in L^2(G \times \Omega, dx d\mu(\omega))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если v^ε сходится к v^0 двухмасштабно и для каждого семейства u^ε , сходящегося двухмасштабно к u^0 в $L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon)$, выполняется соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_G v^\varepsilon(x) u^\varepsilon(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x) = \int_G \int_\Omega v^0(x, \omega) u^0(x, \omega) dx d\mu(\omega). \quad (5.17)$$

Сильную двухмасштабную сходимость мы будем обозначать следующим образом: $v^\varepsilon \xrightarrow{2s} v^0$. Важным свойством сильной двухмасштабной сходимости является сходимость норм

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_G (v^\varepsilon(x))^2 d\mu_\omega^\varepsilon(x) = \int_G \int_\Omega (v^0(x, \omega))^2 dx d\mu(\omega). \quad (5.18)$$

Нетрудно проверить, что это соотношение может быть использовано в определении сильной двухмасштабной сходимости вместо (5.17).

Мы можем теперь расширить класс тестовых функций, используемых в соотношении (5.3). Действительно, если u^ε сходится двухмасштабно в $L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon(x))$ к функции u^0 , то для всякой сильно двухмасштабно сходящейся последовательности функций v^ε выполнено (5.17).

§ 6. Усреднение

Сформулируем теперь асимптотические задачи, изучаемые в настоящей работе. Со случайной мерой μ_ω свяжем семейство мер

$$d\mu_\omega^\varepsilon(x) = \varepsilon^n d\mu_\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad (6.1)$$

и рассмотрим уравнение $A^\varepsilon u^\varepsilon + u^\varepsilon = f^\varepsilon$, $f^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\varepsilon)$, интегральное тождество которого имеет вид

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega) \nabla u^\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x) + \int_{\mathbb{R}^n} u^\varepsilon(x) \varphi(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f^\varepsilon(x) \varphi(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x). \quad (6.2)$$

Функция u^ε является также решением вариационной задачи

$$\min \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega) \nabla u \cdot \nabla u d\mu_\omega^\varepsilon(x) + \int_{\mathbb{R}^n} u^2 d\mu_\omega^\varepsilon(x) - 2 \int_{\mathbb{R}^n} f^\varepsilon u d\mu_\omega^\varepsilon(x) \right\}, \quad (6.3)$$

где минимум берется по всем $u \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\varepsilon)$. Вместо указанного минимума можно также брать инфимум по всем гладким финитным функциям. Как было показано выше, задача (6.2) корректна и имеет п. н. единственное решение при каждом положительном ε .

Поскольку μ_ω^ε сходится слабо к мере Лебега, то эффективное уравнение является обычным уравнением.

Напомним определения сильно и слабо сходящихся последовательностей функций в переменном пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Скажем, что семейство v^ε , $\|v^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\varepsilon)} \leq C$, *сходится слабо* в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\varepsilon)$ к $v^0 \in L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, если для каждой $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ имеет место сходимость

$$\int_{\mathbb{R}^n} v^\varepsilon(x) \varphi(x) d\mu^\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} v^0(x) \varphi(x) dx. \quad (6.4)$$

Семейство v^ε , $\|v^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\varepsilon)} \leq C$, *сходится сильно* в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\varepsilon)$ к $v^0 \in L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, если

$$\int_{\mathbb{R}^n} v^\varepsilon(x) p^\varepsilon(x) d\mu^\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} v^0(x) p^0(x) dx \quad (6.5)$$

для каждой последовательности p^ε , сходящейся слабо в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\varepsilon)$ к p^0 .

Слабая и сильная сходимости в ограниченной области определяются аналогично.

В предположении того, что правые части f^ε в (6.2) сходятся сильно (слабо) к некоторой $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, мы будем изучать асимптотическое поведение решений u^ε при $\varepsilon \downarrow 0$, или, другими словами, усреднять уравнение (6.2).

Во многих случаях достаточно считать, что $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ и не зависит от ε .

Определим формально усредненную матрицу a^{eff} равенством

$$a^{\text{eff}} \xi \cdot \xi = \inf \int_{\Omega} a(\omega) (\nabla^\mu \varphi(\omega) + \xi) \cdot (\nabla^\mu \varphi(\omega) + \xi) d\mu(\omega), \quad (6.6)$$

где $\xi \in \mathbb{R}^n$ — произвольный постоянный вектор и инфимум берется по всем $\varphi \in C^1(\Omega)$. Эквивалентно мы можем определить

$$a^{\text{eff}} \xi \cdot \xi = \min \int_{\Omega} a(\omega) (v(\omega) + \xi) \cdot (v(\omega) + \xi) d\mu(\omega), \quad v \in L^2_{\text{pot}}(\Omega, \mu). \quad (6.7)$$

Функция $v^\xi(\omega)$, на которой достигается минимум, является решением задачи

$$v^\xi \in L^2_{\text{pot}}(\Omega, \mu), \quad a(\omega)(\xi + v^\xi(\omega)) \in L^2_{\text{sol}}(\Omega, \mu). \quad (6.8)$$

Это решение линейно зависит от ξ . Матрица a^{eff} теперь может быть определена равенством

$$a^{\text{eff}}\xi = \int_{\Omega} a(\omega)(\xi + v^\xi(\omega)) d\mu(\omega). \quad (6.9)$$

Легко проверить, что матрица a^{eff} симметрична.

Полезно определить матрицу

$$w(\omega) = (v_i^{e_j}(\omega)), \quad i, j = 1, \dots, n; \quad (6.10)$$

здесь e_j – элементы стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$.

В силу эргодической теоремы меры μ_ω^ε сходятся слабо Р-п. н. к мере $m dx$ при $\varepsilon \downarrow 0$ на каждом компакте в $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем без ограничения общности полагаем $m = 1$, так что μ^ε сходится к стандартной мере Лебега.

Рассмотрим теперь формально усредненную задачу

$$-\operatorname{div} a^{\text{eff}} \nabla u^0 + u^0 = f, \quad (6.11)$$

где $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. В интегральной форме это уравнение принимает вид

$$\int_{\mathbb{R}^n} a^{\text{eff}} \nabla u^0(x) \nabla \varphi(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} u^0(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx \quad (6.12)$$

для любой $\varphi \in C_0^\infty$. Поскольку матрица a^{eff} неотрицательна, эта задача однозначно разрешима в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Если матрица a^{eff} положительно определена, то мы имеем обычную эллиптическую задачу, решение которой принадлежит пространству $H^1(\mathbb{R}^n)$. Однако в случае частичного вырождения a^{eff} мы можем только утверждать, что $a^{\text{eff}} \nabla u^0$ лежит в $L^2(\mathbb{R}^n)$, так что u^0 принадлежит функциональному пространству

$$H^{\text{eff}} = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : a^{\text{eff}} \nabla u \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n\} \quad (6.13)$$

с нормой $\|u\|_{H^{\text{eff}}}^2 = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|a^{\text{eff}} \nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$. Легко видеть, что пространство H^{eff} и ядро матрицы a^{eff} не зависят от выбора положительно определенной матрицы $a(\omega)$ в (6.2), а только от меры μ_ω .

Отметим, что невырожденность меры μ_ω эквивалентна положительной определенности матрицы a^{eff} . Более того, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 6.1. *Ядро матрицы a^{eff} совпадает со множеством постоянных потенциальных векторов в пространстве $L^2_{\text{pot}}(\Omega, \mu)$. В частности, необходимым и достаточным условием невырожденности меры μ_ω является отсутствие нетривиальных постоянных функций в $L^2_{\text{pot}}(\Omega, \mu)$. Вектор η лежит в ортогональном дополнении к ядру a^{eff} , если и только если найдется функция $v \in L^2_{\text{sol}}(\Omega, \mu)$ такая, что $\int_{\Omega} v(\omega) d\mu(\omega) = \eta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение легко следует из формулы (6.7). Ясно также, что среднее значение любого соленоидального вектора ортогонально любому постоянному потенциальному вектору. С другой стороны, в силу симметричности матрицы a^{eff} множество вида $a^{\text{eff}}\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, совпадает с ортогональным дополнением к ядру a^{eff} . Согласно (6.8), (6.9) каждый вектор $a^{\text{eff}}\xi$ есть среднее значение соленоидального вектора $a(\omega)(\xi + v^\xi)$, и лемма доказана.

Отметим, что интегральное тождество (6.12) выполняется для любой функции $\varphi \in H^{\text{eff}}$.

Сформулируем теперь результат об усреднении во всем пространстве.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть правая часть f^ε в задаче (6.2) (или в эквивалентной ей задаче (6.3)) сходится сильно (слабо) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\varepsilon)$ к функции $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда решения u^ε задачи (6.2) сходятся сильно (слабо) в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\varepsilon)$ к решению u^0 задачи (6.11) P-н.н.

Приведенное далее доказательство теоремы 6.1 опирается на технику стохастической двухмасштабной сходимости, развитую в § 5.

Отметим, что в случае, когда решение предельной задачи является непрерывной достаточно быстро убывающей на бесконечности функцией, сходимость, обеспечиваемая теоремой 6.1, может быть записана в более привычном виде:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} (u^\varepsilon(x) - u^0(x))^2 d\mu_\omega^\varepsilon(x) = 0.$$

Это условие выполнено, например, для не зависящей от ε непрерывной правой части в (6.2), допускающей оценку $f(x) \leq g(|x|)$, где $g(s)$ – неотрицательная монотонная функция на $[0, \infty)$ такая, что $g(|x|) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Аналогичные результаты справедливы для краевых задач. Так, для задачи Дирихле

$$-\operatorname{div} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) \nabla u^\varepsilon(x) + u^\varepsilon(x) = f^\varepsilon(x), \quad (u^\varepsilon - \varphi_0) \in H_0^1(G, d\mu_\omega) \quad (6.14)$$

разность между предельной функцией u^0 и функцией φ_0 лежит в пространстве $H_0^{\text{eff}}(G)$, являющемся замыканием множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|\varphi\|^2 = \int_G (\varphi^2(x) + a^{\text{eff}} \nabla \varphi(x) \cdot \nabla \varphi(x)) dx.$$

При этом функция u^0 удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_G a^{\text{eff}} \nabla u^0 \cdot \nabla \varphi dx + \int_G u^0 \varphi dx = \int_G f \varphi dx \quad (6.15)$$

для всякой $\varphi \in H_0^{\text{eff}}(G)$. Легко проверить, что решение этой задачи единственно.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть при $\varepsilon \rightarrow 0$ правая часть f^ε в задаче (6.14) сходится сильно (слабо) в $L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon)$ к функции $f \in L^2(G)$. Тогда решение u^ε задачи (3.5) сходится сильно (слабо) в $L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon)$ к решению u^0 задачи (6.15) P-н.н.

Рассмотрим смешанную краевую задачу. Пусть G – область с кусочно гладкой границей, и пусть S – замкнутое подмножество ∂G с липшицевой границей. Напомним, что функция u^ε называется решением смешанной краевой задачи

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega)\nabla u^\varepsilon(x) + u^\varepsilon(x) &= f^\varepsilon(x), \\ u^\varepsilon|_S &= \varphi_0, \quad \frac{\partial}{\partial \nu_a} u^\varepsilon|_{(\partial G \setminus S)} = 0, \end{aligned} \quad (6.16)$$

если $(u^\varepsilon - \varphi_0) \in H^1(G, S, \mu_\omega^\varepsilon)$ и для всякой $\varphi \in H^1(G, S, \mu_\omega^\varepsilon)$ выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega)\nabla u^\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x) + \int_{\mathbb{R}^n} u^\varepsilon(x)\varphi(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f^\varepsilon(x)\varphi(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x). \quad (6.17)$$

В случае смешанной краевой задачи будем для простоты предполагать, что мера μ_ω невырождена. Тогда разность $u^0 - \varphi_0$ лежит в пространстве $H(G, S)$, являющемся замыканием множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus S)$ по норме $H^1(G)$. Функция u^0 удовлетворяет интегральному тождеству (6.15) для всякой $\varphi \in H(G, S)$.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть мера μ_ω невырождена, и пусть при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции f^ε сходятся сильно (слабо) в $L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon)$ к $f \in L^2(G)$. Тогда P -н.н. решение u^ε задачи (6.16) сходится сильно (слабо) в $L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon)$ к функции u^0 такой, что $(u^0 - \varphi_0) \in H(G, S)$, и для всякой $\varphi \in H(G, S)$ выполняется (6.15).

Во всех перечисленных задачах усреднения имеет место сходимость потоков и энергий.

ТЕОРЕМА 6.4. В условиях теоремы 6.1 P -н.н. выполнены соотношения

$$a(T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega)\nabla u^\varepsilon \rightharpoonup a^{\text{eff}}\nabla u^0 \quad \text{слабо в } L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\varepsilon), \quad (6.18)$$

и если f^ε сходится к f сильно, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega)\nabla u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon d\mu_\omega^\varepsilon(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} a^{\text{eff}}\nabla u^0 \cdot \nabla u^0 dx. \quad (6.19)$$

Аналогично, для задачи Дирихле и смешанной краевой задачи выполняются соотношения

$$a(T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega)\nabla u^\varepsilon \rightharpoonup a^{\text{eff}}\nabla u^0 \quad \text{слабо в } L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon), \quad (6.20)$$

и в случае сильно сходящихся правых частей имеем

$$\int_G a(T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega)\nabla u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon d\mu_\omega^\varepsilon(x) \rightarrow \int_G a^{\text{eff}}\nabla u^0 \cdot \nabla u^0 dx. \quad (6.21)$$

Докажем теперь сформулированные теоремы об усреднении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. В силу элементарной априорной оценки

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\varepsilon)} + \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\varepsilon)} \leq C$$

по лемме 5.4 для каждой типичной реализации имеем

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\xrightarrow{2} u^0(x), \\ \nabla u^\varepsilon &\xrightarrow{2} \nabla^{\text{eff}} u^0(x) + u_1(x, \omega), \quad u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n; L^2_{\text{pot}}(\Omega, \boldsymbol{\mu})), \\ a(T_{\frac{x}{\varepsilon}}) \nabla u^\varepsilon &\xrightarrow{2} a(\omega) (\nabla^{\text{eff}} u^0 + u_1). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Выберем сначала тестовую функцию вида $\varepsilon \varphi(x) v(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega)$ с $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $v(\omega) \in C^1(\Omega)$, и подставим ее в уравнение (6.2):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) \nabla u^\varepsilon \varphi(x) \cdot \nabla_\omega v(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) d\mu^\varepsilon + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi(x) v(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) d\mu^\varepsilon \\ + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} u^\varepsilon \varphi(x) v(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) d\mu^\varepsilon = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} f^\varepsilon(x) \varphi(x) v(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) d\mu^\varepsilon. \end{aligned}$$

Переходя к двухмасштабному пределу, получим

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} a(\omega) (\nabla u^0(x) + u_1(x, \omega)) \cdot \nabla_\omega v(\omega) \varphi(x) d\boldsymbol{\mu}(\omega) dx = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega} a(\omega) (\nabla u^0(x) + u_1(x, \omega)) \nabla_\omega v(\omega) d\boldsymbol{\mu}(\omega) = 0$$

при п. в. x . Отсюда следует, что $u_1(x, \omega)$ – решение вспомогательной задачи (6.8) для $\xi = \nabla^{\text{eff}} u^0(x)$, т. е. $u_1(x, \omega) = w(\omega) \nabla^{\text{eff}} u^0(x)$. Отсюда

$$\int_{\Omega} a(\omega) (\nabla u^0(x) + u_1(x, \omega)) P(d\omega) = a^{\text{eff}} \nabla u^0(x).$$

Из последнего равенства и из (6.22) следует, что

$$a(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup a^{\text{eff}} \nabla u^0 \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_\varepsilon)$$

(сходимость потоков). Тогда, переходя к пределу в тождестве (6.2), получим, что $u^0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_{\mathbb{R}^n} a^{\text{eff}} \nabla u^0(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} u^0(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx. \quad (6.23)$$

Это уравнение имеет единственное решение, и решения u^ε уравнения (6.2) (или вариационной задачи (6.3)) сходятся слабо относительно меры μ^ε к детерминированной функции $u^0(x)$ – единственному решению задачи (6.23).

Покажем, что в случае сильной сходимости f^ε к f справедлива также сильная сходимость u^ε к u^0 в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\varepsilon)$. Наши рассуждения опираются на доказанную уже слабую сходимость. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$-\operatorname{div} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) \nabla v^\varepsilon(x) + v^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x), \quad v^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu_\varepsilon). \quad (6.24)$$

Решение v^ε этой задачи сходится слабо к решению усредненной задачи

$$-\operatorname{div} a^{\text{eff}} \nabla v(x) + v(x) = u^0(x), \quad v \in H^{\text{eff}}(\mathbb{R}^n).$$

Используя v^ε в качестве тестовой функции в исходном уравнении, а u^ε – в уравнении (6.24) и вычитая полученные интегральные тождества друг из друга, приходим к равенству

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u^\varepsilon(x))^2 d\mu_\omega^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} v^\varepsilon(x) f(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x).$$

Аналогично, для предельных функций имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u^0(x))^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} v(x) f(x) dx.$$

Отсюда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\varepsilon)}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} v^\varepsilon(x) f(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (u^0(x))^2 dx,$$

что завершает доказательство сильной сходимости.

Утверждения теоремы 6.3 о слабой и сильной сходимости решений краевых задач доказываются аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.4. Сначала докажем теорему для задачи, поставленной во всем пространстве. В силу сходимости u^ε к u^0 и ограниченности $\nabla_{\mu_\omega^\varepsilon} u^\varepsilon$ в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\varepsilon)$ по лемме 5.4 имеем

$$a(T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega) \nabla_{\mu_\omega^\varepsilon} u^\varepsilon \xrightarrow{2} a(\omega) (\nabla^{\text{eff}} u^0 + v_1(x, \omega)), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

слабо двухмасштабно, где $v_1(x, \omega) \in L^2(\mathbb{R}^n; L^2_{\text{pot}}(\Omega, \mu))$. Отсюда, в частности, следует слабая сходимость:

$$a(T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega) \nabla_{\mu_\omega^\varepsilon} u^\varepsilon \rightharpoonup \int_{\Omega} a(\omega) (\nabla^{\text{eff}} u^0 + v_1(x, \omega)) d\mu(\omega)$$

в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\varepsilon)$. Как было показано при доказательстве теоремы 6.1, функция $v_1(x, \omega)$ имеет вид $v_1(x, \omega) = w(\omega) \nabla u^0(x)$, где $w(\omega)$ – решение вспомогательной задачи (6.8), (6.10). Поэтому

$$\int_{\Omega} a(\omega) (\nabla^{\text{eff}} u^0 + v_1(x, \omega)) Q(d\omega) = a^{\text{eff}} \nabla u^0,$$

что и требовалось доказать.

Точно так же проверяется сходимость потоков в случае краевых задач (как с однородными, так и неоднородными краевыми условиями).

Докажем сходимость энергий. Поскольку пара $(u^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon)$ принадлежит $H^1(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\varepsilon)$, она может быть использована в качестве тестовой функции в (6.2), откуда следует равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega) \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon d\mu_\omega^\varepsilon(x) + \int_{\mathbb{R}^n} |u^\varepsilon|^2 d\mu_\omega^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f u^\varepsilon d\mu_\omega^\varepsilon(x).$$

Переходя к пределу в этом равенстве и используя доказанную выше сильную сходимость u^ε к u^0 в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\varepsilon)$, имеем P -п. н.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega) \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon d\mu_\omega^\varepsilon(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} |u^0|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} f u^0 dx.$$

С другой стороны, используя $u^0(x)$ в качестве тестовой функции в интегральном тождестве (6.12), приходим к равенству

$$\int_{\mathbb{R}^n} a^{\text{eff}} \nabla u^0 \cdot \nabla u^0 dx = - \int_{\mathbb{R}^n} |u^0|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} f u^0 dx.$$

Из последних двух соотношений легко следует сходимость энергий в случае уравнения, определенного на всем пространстве.

В случае краевых задач сильная сходимость решений и сходимость энергий проверяются так же, как для задач во всем пространстве.

В заключение этого параграфа сформулируем результат о (двухмасштабной) сходимости произвольных решений, который полезен при изучении свойств решений краевых задач.

ТЕОРЕМА 6.5. *Пусть функции $u^\varepsilon(x)$ являются решениями уравнения*

$$-\operatorname{div} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) \nabla u^\varepsilon + u^\varepsilon = f^\varepsilon(x)$$

в области $G \subset \mathbb{R}^n$ в смысле интегрального тождества

$$\int_G (a(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla \varphi(x) + u^\varepsilon \varphi) d\mu_\omega^\varepsilon(x) = \int_G f^\varepsilon(x) \varphi(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Пусть, далее, $f^\varepsilon \rightarrow f$ сильно в $L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon)$ и $\|u^\varepsilon\|_{L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon)} \leq C$. Тогда для типичной реализации любой двухмасштабный предел u^0 функций u^ε зависит только от медленной переменной x и удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(a^{\text{eff}} \nabla u^0) + u^0 = f.$$

Справедлива также следующая сходимость градиентов и потоков:

$$\begin{aligned} \nabla u^\varepsilon &\xrightarrow{2} \nabla^{\text{eff}} u^0 + w(\omega) \nabla^{\text{eff}} u^0, \\ a(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) \nabla u^\varepsilon &\xrightarrow{2} a(\omega) \nabla^{\text{eff}} u^0 + a(\omega) w(\omega) \nabla^{\text{eff}} u^0(x), \end{aligned}$$

где матрица $w(\omega)$ определена в (6.8), (6.10).

Теорема 6.5 доказывается теми же методами, что и предыдущие утверждения этого параграфа.

§ 7. Проблема Кестена

Используем развитую выше технику для изучения эффективной диффузии на бесконечном кластере в двумерной перколяционной модели. Рассмотрим стандартную перколяционную модель в $\mathbb{R}^2$, в которой каждой вершине $\mathbb{Z}^2$ предписано значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $1 - p$, причем соответствующие случайные величины независимы. Соседние вершины, которым предписано значение 1, соединим ребрами. Известно (см., например, [18]), что при $p > p_c \sim 0.59$ полученное множество ребер имеет п. н. единственную неограниченную связную компоненту, называемую *бесконечным кластером*.

Мы будем изучать важный пример случайной сингулярной меры, заданной следующим образом. Носитель этой меры совпадает с объединением ребер, принадлежащих бесконечному кластеру. На каждом таком ребре случайная мера μ_ω определяется как стандартная одномерная мера Лебега $\mathcal{H}^1(\gamma_k)$, где γ_k – соответствующее ребро. По построению μ_ω – случайная, стационарная по отношению к целочисленным сдвигам, локально конечная борелевская мера конечной интенсивности. Конструкции вероятностного пространства и случайной эргодической динамической системы для рассматриваемого примера хорошо известны (см. [18]). Согласно работе [18] плотность бесконечного кластера положительна при всех $p > p_c$, поэтому при $p > p_c$ мера μ_ω имеет положительную интенсивность.

ЛЕММА 7.1. *Мера μ_ω эргодична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную функцию $u(\omega) \in H^1(\Omega, \mu)$ такую, что $\nabla u(\omega) = 0$. По лемме 2.2 имеем $u \in H^1(\mathbb{R}^2, \mu_\omega)$ Р-п. н. и выполнено равенство $\nabla_{\mu_\omega} u(T_x \omega) = 0$. Согласно работам [3], [12] функция $u(T_x \omega)$ принадлежит Р-п. н. пространству $\mathcal{H}^1(\gamma_k)$ на каждом сегменте бесконечного кластера и имеет непрерывную модификацию. Легко проверить, что тангенциальный градиент этой функции совпадает на каждом сегменте с производной вдоль сегмента и при наших предположениях обращается в нуль. Следовательно, $u(T_x \omega)$ равна константе на сегментах бесконечного кластера и, благодаря его связности, на всем кластере Р-п. н. Отсюда с помощью эргодичности T_x и формулы Кембела легко следует, что $u(\omega) = \text{const}$ μ -п. н.

Невырожденность меры μ_ω при $p > p_c$ следует из свойства каналов в соответствующей перколяционной модели (см. [18]). Сформулируем это свойство в форме, адаптированной для наших целей.

Для произвольной последовательности $x_0, x_1, \dots, x_k$ элементов $\mathbb{Z}^2$ таких, что $|x_{i+1} - x_i| = 1$ при всех $i = 1, 2, \dots, k$, назовем *путем* последовательность ребер $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$, $\gamma_i = [x_i, x_{i+1}]$.

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть $p > p_c$. Тогда найдутся константы $c(p) > 0$ и $c_1(p) > 0$ такие, что Р-п. н. при всех достаточно больших N в квадрате $[0, N]^2$ имеется по крайней мере $c(p)N$ непересекающихся путей (каналов), соединяющих верхнюю и нижнюю стороны квадрата и таких, что все ребра этих путей принадлежат бесконечному кластеру. Более того, можно предполагать, что длина каждого канала не превосходит $c_1(p)N$.*

Проверим невырожденность μ_ω . Прежде всего заметим, что усредненная матрица изотропна, что следует из стохастической инвариантности исходной модели относительно поворота на угол, кратный $\pi/2$. Поэтому $a^{\text{eff}} = \kappa^{\text{eff}} I$, где I – единичная матрица, и достаточно проверить, что $\kappa^{\text{eff}} > 0$.

Рассмотрим в квадрате $G = [0, 1]^2$ задачу Дирихле с неоднородными краевыми условиями вида

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \nabla_{\mu_\omega^\varepsilon} u^\varepsilon + u^\varepsilon &= 0, \\ (u^\varepsilon - x_1) &\in H_0^1(G, \mu_\omega^\varepsilon). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Если предположить, что $\kappa^{\text{eff}} = 0$, то энергия предельной задачи обращается в нуль и по теореме о сходимости энергий для задачи Дирихле имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_G |\nabla u^\varepsilon|^2 d\mu_\omega^\varepsilon(x) = 0.$$

Поэтому достаточно проверить, что $\int_G |\nabla u^\varepsilon|^2 d\mu_\omega^\varepsilon(x) > C > 0$ п. н. по мере $\mathbf{P}$. По теореме 7.1 для $\mathbf{P}$ -п. в. ω в квадрате G при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеется по крайней мере $c(p)/\varepsilon$ непересекающихся каналов, соединяющих верхнюю и нижнюю стороны квадрата, причем длина ломаных, образующих каналы, не превосходит $c_1(p)$. Введем на каждой из таких ломаных естественную параметризацию, задаваемую длиной ломаной. Сужение u^ε на каждую такую ломаную является H^1 -функцией введенной координаты. При этом тангенциальный градиент $\nabla^t u^\varepsilon$ направлен параллельно соответствующим сегментам этой ломаной и совпадает с производной u^ε вдоль ломаной. Обозначив через N_j количество ребер в j -м канале и через t введенную координату, получим

$$1 = \left(\int_0^{\varepsilon N_j} \frac{du^\varepsilon}{dt} dt \right)^2 \leq \int_0^{\varepsilon N_j} dt \int_0^{\varepsilon N_j} \left| \frac{du^\varepsilon}{dt} \right|^2 dt.$$

Отсюда имеем

$$\int_0^{\varepsilon N_j} \left| \frac{du^\varepsilon}{dt} \right|^2 dt \geq \frac{1}{c_1(p)}.$$

Суммируя это неравенство по всем каналам, получим

$$\sum_j \int_0^{\varepsilon N_j} \left| \frac{du^\varepsilon}{dt} \right|^2 dt \geq \frac{c(p)}{\varepsilon c_1(p)}.$$

Заметим теперь, что на каждом из каналов по определению меры μ^ε выполнено равенство $d\mu^\varepsilon(x) = m\varepsilon dt$, где m – плотность бесконечного кластера. Поэтому

$$\int_G |\nabla u^\varepsilon|^2 d\mu^\varepsilon(x) \geq \sum_j \int_0^{\varepsilon N_j} \left| \frac{du^\varepsilon}{dt} \right|^2 d\mu^\varepsilon(x) = m\varepsilon \sum_j \int_0^{\varepsilon N_j} \left| \frac{du^\varepsilon}{dt} \right|^2 dt \geq \frac{mc(p)}{c_1(p)},$$

что завершает доказательство равномерной положительности энергии, а следовательно, и положительной определенности эффективной матрицы.

Рассмотрим теперь собственно проблему Кестена. Пусть в рассмотренной выше перколяционной модели $p > p_c$. Обозначим через S объединение верхней и нижней сторон квадрата $G = [0, 1]^2$ и рассмотрим в G задачу

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \nabla_{\mu_\omega^\varepsilon} u^\varepsilon &= 0, \\ (u^\varepsilon - \psi) &\in H^1(G, S, \mu_\omega^\varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial x_1} u^\varepsilon \Big|_{\partial G \setminus S} = 0, \end{aligned} \tag{7.2}$$

где ψ – произвольная C_0^∞ -функция, в частности можно предполагать, что ψ совпадает с линейной функцией в окрестности G . Решение задачи (7.2) может

быть не единственным, это связано с тем, что пересечение бесконечного кластера с квадратом $\frac{1}{\varepsilon}G$, вообще говоря, несвязно. Выберем семейство решений u^ε , $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее оценке

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(G)} \leq C. \quad (7.3)$$

Существование таких решений может быть легко проверено, если мы добавим в уравнение (7.2) малый положительный потенциал. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ и для произвольного $\lambda > 0$ решение задачи

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \nabla_{\mu_\omega^\varepsilon} u_\lambda^\varepsilon + \lambda u_\lambda^\varepsilon &= 0, \\ (u_\lambda^\varepsilon - \psi) &\in H^1(G, S, \mu_\omega^\varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial x_1} u_\lambda^\varepsilon \Big|_{\partial G \setminus S} = 0 \end{aligned}$$

удовлетворяет принципу максимума, поэтому

$$\|u_\lambda^\varepsilon\|_{L^\infty(G)} \leq \|\psi\|_{L^\infty}.$$

Переходя к пределу в интегральном тождестве последней задачи при $\lambda \rightarrow 0$, заключаем, что любая слабая предельная точка семейства u_λ^ε является решением задачи (7.2). Отметим, что тангенциальный градиент решения задачи (7.2) определен однозначно.

Перепишем теперь уравнение (7.2) в виде

$$-\operatorname{div} \nabla_{\mu_\omega^\varepsilon} u^\varepsilon + u^\varepsilon = u^\varepsilon.$$

При условии (7.3) мы можем перейти с слабому пределу по подпоследовательности в правой части этого уравнения. По теореме 6.3 предельная функция удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \kappa^{\text{eff}} \Delta u^0 &= 0, \\ (u^0 - \psi) &\in H^1(G, S), \quad \frac{\partial}{\partial x_1} u^0 \Big|_{\partial G \setminus S} = 0, \end{aligned}$$

решение которого единственно в силу положительности κ^{eff} . Таким образом, любое семейство решений, подчиненное условию (7.3), сходится слабо в $L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon)$ к решению последней задачи. По теореме о сходимости потоков имеем

$$\nabla_{\mu_\omega^\varepsilon} u^\varepsilon \rightharpoonup \kappa^{\text{eff}} \nabla u^0$$

слабо в $L^2(G, \mu_\omega^\varepsilon)$. Докажем сходимость энергий. Используя $(u^\varepsilon - \psi)$ в качестве тестовой функции в интегральном тождестве задачи (7.2) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_G |\nabla_{\mu_\omega^\varepsilon} u^\varepsilon|^2 d\mu_\omega^\varepsilon(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_G \nabla_{\mu_\omega^\varepsilon} u^\varepsilon \cdot \nabla \psi d\mu_\omega^\varepsilon(x) \\ &= \int_G \kappa^{\text{eff}} \nabla u^0 \cdot \nabla \psi dx = \kappa^{\text{eff}} \int_G |\nabla u^0|^2 dx; \end{aligned}$$

здесь были также использованы сходимость потоков и интегральное тождество предельной задачи.

В результате мы получаем следующий способ определения эффективной проводимости бесконечного кластера. Определим $\kappa(N)$ как минимальную энергию в следующих вариационных задачах:

$$\kappa(N) = \inf_{\substack{u \in C^\infty([0, N]^2) \\ u(0, x_2) = 0, \quad u(N, x_2) = N}} \frac{1}{N^2} \int_{[0, N]^2} |\nabla u(x)|^2 d\mu_\omega(x).$$

Тогда по доказанному Р-п. н.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \kappa(N) = \kappa^{\text{eff}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Результаты, полученные нами для двумерных перколяционных моделей, справедливы также в бóльших размерностях. Здесь надо учесть, что свойство каналов доказано для любых размерностей. Отметим также, что проблема Кестена для непрерывной перколяционной модели рассмотрена в работе [6].

§ 8. Один пример

В этом параграфе мы рассмотрим подробнее пример случайных мер, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега. Пусть $d\mu_\omega(x) = \rho(T_x\omega) dx$, где $\rho(\omega) > 0$, $\rho \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$. В этом случае $d\mu(\omega) = \rho(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$.

Предположим, что $\frac{1}{\rho} \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$, и докажем свойство эргодичности и невырожденности меры μ_ω .

Проверим эргодичность этой случайной меры. Пусть $\nabla_\omega^\mu u(\omega) = 0$. Рассмотрим последовательность $C^1(\Omega)$ -функций $u_m(\omega)$ таких, что при $m \rightarrow \infty$

$$\int_\Omega |u_m(\omega) - u(\omega)|^2 d\mu(\omega) \longrightarrow 0, \quad \int_\Omega |\nabla u_m(\omega)|^2 d\mu(\omega) \longrightarrow 0.$$

Для $k > 0$ определим

$$u_m^k(\omega) = \begin{cases} u_m(\omega), & \text{если } -k \leq u_m(\omega) \leq k, \\ k, & \text{если } u_m(\omega) \geq k, \\ -k, & \text{если } u_m(\omega) \leq -k, \end{cases}$$

и

$$u^k(\omega) = \begin{cases} u(\omega), & \text{если } -k \leq u(\omega) \leq k, \\ k, & \text{если } u(\omega) \geq k, \\ -k, & \text{если } u(\omega) \leq -k. \end{cases}$$

По построению при $m \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_\Omega |u_m^k(\omega) - u^k(\omega)|^2 d\mu(\omega) \leq \int_\Omega |u_m(\omega) - u(\omega)|^2 d\mu(\omega) \longrightarrow 0.$$

Отсюда следует, что для любого ограниченного борелевского множества G

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_G |u_m^k(T_x \omega) - u^k(T_x \omega)|^2 \rho(T_x \omega) dx = 0,$$

поэтому по подпоследовательности Р-п. н. выполнено соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_G |u_m^k(T_x \omega) - u^k(T_x \omega)|^2 \rho(T_x \omega) dx = 0.$$

В силу равномерной ограниченности функций $u_m^k(T_x \omega)$ находим

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_G |u_m^k(T_x \omega) - u^k(T_x \omega)|^2 dx = 0$$

Р-п. н. Далее, выбрав еще раз подпоследовательность, имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_G |\nabla u_m(T_x \omega)|^2 \rho(T_x \omega) dx = 0,$$

поэтому при $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int_G |\nabla u_m^k(T_x \omega)| dx &\leq \int_G |\nabla u_m(T_x \omega)| dx \\ &\leq \left(\int_G |\nabla u_m(T_x \omega)|^2 \rho(T_x \omega) dx \right)^{1/2} \left(\int_G \rho^{-1}(T_x \omega) dx \right)^{1/2} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда $u^k(T_x \omega)$ постоянна Р-п. н. на множестве G и, в силу произвольности G , в $\mathbb{R}^n$. Благодаря эргодичности T_x эта постоянная не зависит от $\omega \in \Omega$. Таким образом, $u(\omega)$ равна константе Р-п. н. и μ -п. н. и эргодичность меры $d\mu_\omega(x)$ доказана.

Покажем, что мера $d\mu(\omega) = \rho(\omega) dP(\omega)$ невырождена. Предположим, что найдется последовательность функций $u_m \in C^1(\Omega)$ таких, что для некоторого $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнено соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla_\omega u_m(\omega) - \xi|^2 \rho(\omega) dP(\omega) = 0. \quad (8.1)$$

Тогда при $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla_\omega u_m(\omega) - \xi| dP(\omega) \\ \leq \left(\int_\Omega |\nabla_\omega u_m(\omega) - \xi|^2 \rho(\omega) dP(\omega) \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \rho^{-1}(\omega) dP(\omega) \right)^{1/2} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\int_\Omega \nabla_\omega u_m(\omega) dP(\omega) = 0$, следовательно,

$$|\xi| = \left| \int_\Omega (\nabla_\omega u_m(\omega) - \xi) dP(\omega) \right| \leq \int_\Omega |\nabla_\omega u_m(\omega) - \xi| dP(\omega).$$

Таким образом, соотношение (8.1) выполняться не может, и мера μ невырождена.

Рассмотрим теперь более общий случай абсолютно непрерывной меры, когда плотность $\rho(\omega) \in L^1(\Omega)$ может обращаться в нуль на множестве положительной меры.

Пусть имеется измеримое множество $\mathcal{U} \subset \Omega$ такое, что:

- 1) $\rho = 0$ в $\mathcal{U}$;
- 2) $\mathbf{1}_{\Omega \setminus \mathcal{U}}(\omega)\rho^{-1}(\omega) \in L^1(\Omega)$, где $\mathbf{1}_{\Omega \setminus \mathcal{U}}$ – характеристическая функция множества $\Omega \setminus \mathcal{U}$;
- 3) множество $Q(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : T_x \omega \in \Omega \setminus \mathcal{U}\}$ открыто и связно Р-п. н.

Тогда мера μ связна. В частном случае, когда $\rho(\omega) = \mathbf{1}_{\Omega \setminus \mathcal{U}}$, приходим к усреднению в перфорированной области. Доказательство связности аналогично доказательству эргодичности, приведенному в начале этого параграфа.

Отметим, что невырожденность меры μ_ω , вообще говоря, не утверждается.

§ 9. Параболические задачи. Центральная предельная теорема

В этом параграфе мы рассмотрим задачу усреднения для параболических уравнений в переменных стохастически однородных пространствах и докажем центральную предельную теорему в среднем.

Мы изучим асимптотическое поведение решений задачи Коши

$$\begin{aligned} \partial_t u^\varepsilon(x, t) &= \operatorname{div}_{\mu_\omega} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) \nabla u^\varepsilon(x, t), \\ (x, t) &\in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad u^\varepsilon(x, 0, \omega) = f^\varepsilon(x, \omega) \end{aligned} \quad (9.1)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предполагаем, что функции f^ε лежат Р-п. н. в пространствах $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\varepsilon)$. В частности, f может быть детерминированной непрерывной функцией, не зависящей от ε и достаточно быстро убывающей на бесконечности.

Сформулируем теорему об усреднении.

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть f^ε п. н. сходятся сильно при $\varepsilon \rightarrow 0$ в переменном пространстве $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega^\varepsilon)$ к функции $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда решение задачи (9.1) сходится п. н. сильно в $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_\omega^\varepsilon)$ при любом $t \geq 0$ к решению u^0 усредненной задачи вида

$$\begin{aligned} \partial_t u^0(x, t) &= \operatorname{div}(a^{\text{eff}} \nabla u^0(x, t)), \\ (x, t) &\in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad u^0(x, 0) = f(x), \end{aligned} \quad (9.2)$$

причем матрица a^{eff} задается формулой (6.6) и совпадает с усредненной матрицей эллиптической задачи.

Требуемые утверждения выводятся из аналогичных утверждений об усреднении эллиптических операторов, при этом используются результаты работы [20] о сходимости полугрупп в переменных пространствах типа теоремы Троттера–Като. Сформулируем этот результат. Пусть μ^h, μ – меры Радона в $\mathbb{R}^n$, $\mu^h \rightharpoonup \mu$. Если B_h, B – операторы в $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu^h)$ и $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ соответственно, $\|B_h\|, \|B\| \leq M_0$, то мы говорим о сильной сходимости $B_h \rightarrow B$, если

$$B_h f_h \rightarrow B f \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^n, d\mu^h),$$

как только $f_h \rightarrow f$ в $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu^h)$.

ТЕОРЕМА 9.2 [20], [23]. Пусть A и A^h – неотрицательные самосопряженные операторы в $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ и $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu^h)$ соответственно и имеет место сильная сходимость резольвент: $(A^h + \lambda)^{-1} \rightarrow (A + \lambda)^{-1}$ при любом $\lambda > 0$. Тогда имеет место сильная сходимость полугрупп: $e^{-A^h t} \rightarrow e^{-At}$ при любом $t \geq 0$. При этом имеет место также слабая сходимость:

$$(A^h + \lambda)^{-1} f_h \rightharpoonup (A + \lambda)^{-1} f \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^n, d\mu^h),$$

как только $f_h \rightharpoonup f$ в $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu^h)$.

Нам понадобится еще один результат о предельном переходе в параболических уравнениях. Его мы будем применять к уравнению (9.1) при фиксированном ε . Поэтому сформулируем его для $\varepsilon = 1$.

Рассмотрим две задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}_{\mu_\omega} a(T_x \omega) \nabla u, & \frac{\partial u^\delta}{\partial t} &= \operatorname{div}_{\mu_\omega^\delta} a^\delta(T_x \omega) \nabla u^\delta, \\ u|_{t=0} &= u^\delta|_{t=0} = \varphi \in C_0^\infty, \end{aligned}$$

где μ_ω^δ – сглаженные меры и при $\delta \rightarrow 0$ имеет место сильная сходимость

$$a^\delta(T_x \omega) \rightarrow a(T_x \omega) \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_\omega^\delta).$$

ТЕОРЕМА 9.3. При $\delta \rightarrow 0$ Р-п. н. имеем

$$u^\delta(x, t, \omega) \rightarrow u(x, t, \omega) \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_\omega^\delta) \quad \text{сильно.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы является непосредственным следствием теорем 4.2 и 9.2.

Переходим к центральной предельной теореме. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \partial_t u^\varepsilon(x, t, \omega) &= \operatorname{div}_{\mu_\omega} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) \nabla u^\varepsilon(x, t) \quad \text{в } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \\ u^\varepsilon(x, 0) &= \phi^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \tag{9.3}$$

где $\phi(y)$ – неотрицательная C_0^∞ -функция такая, что $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) dy = 1$. При таком выборе начального условия достаточно решить задачу (9.3) с $\varepsilon = 1$ и положить $u^\varepsilon(x, t, \omega) = \varepsilon^{-n} u^1\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}, \omega\right)$.

Отметим, что решение $u^\varepsilon(x, t, \omega)$ неотрицательно в силу принципа максимума. Мы хотим показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение u^ε сходится при каждом $t > 0$ к фундаментальному решению $G(x, t)$ усредненного уравнения в следующем смысле: для любой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполняется соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \{u^\varepsilon(x, t, \omega) - \gamma(\omega) G(x, t)\} \varphi(x) d\mu_\omega(x) \right)^2 = 0, \tag{9.4}$$

где

$$\gamma(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) d\mu_\omega(x).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Скажем, что справедлива ЦПТ *в среднем*, если соотношение (9.4) выполняется при всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Будем предполагать, что выполняется единственное условие:

(Н1) *сглаженные меры $\mu_\omega^\delta = \rho^\delta(T_x \omega) dP$ при каждом $\delta > 0$ удовлетворяют условию эллиптичности $\rho^\delta(T_x \omega) > 0$.*

Отметим, что для случайной стационарной меры положительной интенсивности это условие не вносит никаких дополнительных ограничений на меру, поскольку в определении (1.9) сглаживающей меры μ_ω^δ ядро $K(y)$ можно брать не финитным, а просто достаточно быстро (скажем, экспоненциально) убывающим.

ТЕОРЕМА 9.4. *Пусть выполнено условие (Н1). Тогда справедливо равенство (9.4).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} \partial_s v^\varepsilon(x, s) + \operatorname{div}_{\mu_\omega} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) \nabla v^\varepsilon(x, s) &= 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n \times (-\infty, t), \\ v^\varepsilon(x, t) &= \varphi(x) \end{aligned} \quad (9.5)$$

с обращенным временем. Пусть φ совпадает с пробной функцией ϕ в (9.3). Очевидно, что $v^\varepsilon(s) = e^{(t-s)A^\varepsilon} \varphi$, где e^{-tA^ε} – полугруппа, порожденная оператором A^ε . В силу самосопряженности A^ε имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u^\varepsilon(x, t) \varphi(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-tA^\varepsilon} \phi^\varepsilon(x) \varphi(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-tA^\varepsilon} \varphi(x) \phi^\varepsilon(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} v^\varepsilon(x, 0) \phi^\varepsilon(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Эквивалентно мы можем записать

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^\varepsilon(x, t) \varphi(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} V^\varepsilon(x, t) \phi^\varepsilon(x) d\mu_\omega^\varepsilon(x),$$

где V^ε – решение задачи

$$\begin{aligned} \partial_t V^\varepsilon(x, t) &= \operatorname{div}_{\mu_\omega} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) \nabla V^\varepsilon(x, t) \quad \text{в } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ V^\varepsilon(x, 0) &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Согласно теореме 9.1 функция V^ε сходится при всех $t \geq 0$ к решению V^0 задачи

$$\begin{aligned} \partial_t V^0(x, t) &= \operatorname{div}(a^{\text{eff}} \nabla V^0(x, t)), \\ (x, t) &\in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad V^0(x, 0) = \varphi(x). \end{aligned}$$

Обозначим $V^\varepsilon(x, y, t, \omega)$ решение задачи

$$\begin{aligned} \partial_t V^\varepsilon(x, y, t, \omega) &= \operatorname{div}_{\mu_\omega} a(T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) \nabla V^\varepsilon(x, y, t, \omega) \quad \text{в } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ V^\varepsilon(x, y, 0, \omega) &= \varphi(x - y), \end{aligned} \quad (9.7)$$

в которой дифференцирование выполняется по переменной x , а параметр $y \in \mathbb{R}^n$ определяет сдвиг аргумента в начальном условии. Временно предполагаем, что решение $V^\varepsilon(x, y, t)$ непрерывно по x . Из свойств μ_ω^ε и a^ε легко следует, что

$$V^\varepsilon(x, 0, t, \omega) = V^\varepsilon(x - y, -y, t, T_{\frac{y}{\varepsilon}}\omega)$$

при всех $y \in \mathbb{R}^n$. Подставив $y = x$, найдем

$$V^\varepsilon(x, 0, t, \omega) = V^\varepsilon(0, -x, t, T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega).$$

Напомним, что из утверждения леммы 3.2 следует, что решение задачи (9.6) удовлетворяет принципу максимума. Поэтому

$$|V^\varepsilon(0, x', t, \omega) - V^\varepsilon(0, x'', t, \omega)| \leq \|\nabla \varphi\|_{L^\infty} |x' - x''| \quad (9.8)$$

для любых $x', x'' \in \mathbb{R}^n$, т. е. при всех $\varepsilon > 0$, $t > 0$ и $\omega \in \Omega$ функция $V^\varepsilon(0, x, t, \omega)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x с константой $\|\nabla \varphi\|_{L^\infty}$.

Далее, используя формулу Кэмбела, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^n} (V^\varepsilon(x, t, \omega) - V^0(x, t))^2 d\mu_\omega^\varepsilon(x) \\ = \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^n} (V^\varepsilon(0, -x, t, T_{\frac{x}{\varepsilon}}\omega) - V^0(x, t))^2 d\mu_\omega^\varepsilon(x) \\ = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} (V^\varepsilon(0, -x, t, \omega) - V^0(x, t))^2 dx d\mu(\omega) \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\Omega} (V^\varepsilon(0, -x, t, \omega) - V^0(x, t))^2 d\mu(\omega) \right) dx. \end{aligned} \quad (9.9)$$

По теореме 9.1 отсюда следует равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\Omega} (V^\varepsilon(0, -x, t, \omega) - V^0(x, t))^2 d\mu(\omega) \right) dx = 0.$$

В силу неравенства (9.8) интеграл $\int_{\Omega} (V^\varepsilon(0, -x, t, \omega) - V^0(x, t))^2 d\mu(\omega)$ представляет собой липшицеву функцию переменной x с константой Липшица, не зависящей от ε и t , поэтому этот интеграл сходится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по x .

Теперь освободимся от условия непрерывности. Выпишем соотношение (9.9) для сглаженных мер $\mu_{\omega, \delta}^\varepsilon$ при фиксированном $\varepsilon > 0$. Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получим

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^n} (V^\varepsilon(x, t, \omega) - V^0(x, t))^\varepsilon)^2 d\mu_\omega^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} \Phi_\varepsilon(x, t, \omega) d\mu dx,$$

где $\Phi_\varepsilon(x, t, \omega)$ – слабый в $L^2(\mathbb{R}^n \times \Omega)$ предел последовательности

$$(V_\delta^\varepsilon(0, -x, t, \omega) - V^0(x, t))^2.$$

Ясно, что справедлива оценка

$$|\Phi_\varepsilon(x', t, \omega) - \Phi_\varepsilon(x, t, \omega)| \leq C|x' - x|.$$

Справедливы п. н. следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) G(x, t) \lambda(\omega) d\mu_{\omega}^{\varepsilon}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) G(x, t) \lambda(\omega) dx \\ &= \lambda(\omega) u^0(0, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u^0(x, t) \phi^{\varepsilon}(x) d\mu_{\omega}^{\varepsilon}(x). \end{aligned}$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) (u^{\varepsilon}(x, t) - \lambda(\omega) G(x, t)) d\mu_{\omega}^{\varepsilon}(x) \right)^2 \\ = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (V^{\varepsilon}(x, t) - V^0(x, t)) \phi^{\varepsilon}(x) d\mu_{\omega}^{\varepsilon}(x) \right)^2 \\ \leq C \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^n} (V^{\varepsilon}(0, -x, t, T_{\frac{x}{\varepsilon}} \omega) - V^0(x, t))^2 \phi^{\varepsilon}(x) d\mu_{\omega}^{\varepsilon}(x) \\ = C \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} (V^{\varepsilon}(0, -x, t, \omega) - V^0(x, t))^2 \phi^{\varepsilon}(x) dx d\mu(\omega) \\ = C \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} (V^{\varepsilon}(0, -x, t, \omega) - V^0(x, t))^2 d\mu(\omega) \phi^{\varepsilon}(x) dx. \end{aligned}$$

Как было показано выше, внутренний интеграл в правой части последнего равенства сходится к нулю равномерно по переменной x . Следовательно, все выражение в правой части стремится к нулю, что завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 9.1. *Утверждение теоремы 9.4 справедливо для любой стационарной случайной меры положительной интенсивности.*

Сделаем несколько замечаний относительно “индивидуальной” центральной предельной теоремы, которая означает, что для Р-п. в. ω

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \{u^{\varepsilon}(x, t, \omega) - \gamma(\omega) G(x, t)\} \phi(x) d\mu_{\omega}^{\varepsilon} = 0 \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n). \quad (9.10)$$

Без потери общности считаем, что $\gamma(\omega) = 1$. В этом случае

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^{\varepsilon}(x, t, \omega) d\mu_{\omega}^{\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) d\mu_{\omega} = 1.$$

Попытаемся перейти к пределу непосредственно в уравнении (9.3). Для этого нам понадобятся некоторые дополнительные свойства решения u^{ε} , а именно

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |u^{\varepsilon}(x, t, \omega)|^2 d\mu_{\omega}^{\varepsilon} < \infty \quad \forall t > 0, \quad (9.11)$$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \delta} u^{\varepsilon}(x, t, \omega) d\mu_{\omega}^{\varepsilon} \leq C_{\delta}(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} C_{\delta}(t) = 0 \quad \forall \delta > 0. \quad (9.12)$$

ТЕОРЕМА 9.5. *Если выполнены свойства (9.11), (9.12), то выполнено соотношение (9.10), более того,*

$$u^{\varepsilon}(x, t, \omega) \rightharpoonup G(x, t) \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_{\omega}^{\varepsilon}) \quad \forall t > 0,$$

где $G(x, t)$ – фундаментальное решение усредненного уравнения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $u^\varepsilon(x, t_0, \omega)$, $t_0 > 0$, ограничена в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_\omega^\varepsilon)$, и без потери общности считаем ее слабо сходящейся. Тогда по теореме 9.1 последовательность $u^\varepsilon(x, t, \omega)$ слабо сходится при любом $t \geq t_0$. Поэтому можно считать, что

$$u^\varepsilon(x, t, \omega) \rightharpoonup u^0(x, t) \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_\omega^\varepsilon) \quad \forall t > 0,$$

причем $u^0(x, t)$ – решение усредненного уравнения. Остается проверить, что $u^0(x, t) = \delta(0)$, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u^0(x, t) \psi(x) dx = \psi(0) \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Воспользуемся для этого свойством (9.12). Легко видеть, что

$$u^\varepsilon(x, t) d\mu_\omega^\varepsilon \rightharpoonup u^0(x, t) dx$$

в смысле слабой сходимости мер. Тогда из соотношения (9.12) ясно, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^0(x, t) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u^\varepsilon(x, t, \omega) d\mu_\omega^\varepsilon = 1, \quad \int_{|x| \geq \delta} u^0(x, t) dx \leq C_\delta(t).$$

Отсюда следует искомое равенство $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \delta(0)$, т. е. $u(x, t) = G(x, t)$.

Вопрос о проверке дополнительных условий (9.11), (9.12) является довольно сложным и связан с так называемыми гауссовыми оценками для переходных вероятностей, или, в терминах дифференциальных уравнений, с оценками типа Нэша–Аронсона для фундаментального решения. В работе [24] (см. также [14, гл. 8]) условия (9.11), (9.12) проверены в случаях:

- 1) блуждания во внешности случайной дисперсной шаровой структуры;
- 2) блуждания по бесконечному кластеру в непрерывной перколяционной модели на плоскости.

Было бы интересно рассмотреть эти вопросы для других моделей, в частности для блуждания по бесконечному кластеру в рассмотренной ранее сеточной модели.

§ 10. Построение тангенциального градиента

В настоящем параграфе мы изучим структуру градиентов нуля и тангенциального подпространства мер μ_ω в $\mathbb{R}^n$ и меры μ в Ω . Напомним, что градиенты нуля обозначаются $\Gamma_{\mu_\omega}(0)$ и $\Gamma_\mu(0)$ соответственно. Докажем сначала несколько свойств этих подпространств.

ЛЕММА 10.1. 1) Пусть $\xi(\omega) \in L^\infty(\Omega, \mu)$, $g(\omega) \in \Gamma_\mu(0)$. Тогда $\xi g \in \Gamma_\mu(0)$. Если $\zeta(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$ и $h(x) \in \Gamma_{\mu_\omega}(0)$, то $\zeta h \in \Gamma_{\mu_\omega}(0)$.

2) Множество $\Gamma_\mu(0) \cap L^\infty(\Omega, \mu)$ плотно в $\Gamma_\mu(0)$. Множество $\Gamma_{\mu_\omega}(0) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$ плотно в $\Gamma_{\mu_\omega}(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Заметим, что первое свойство достаточно проверить для функций $\xi \in C^1(\Omega)$. Пусть ψ_k – последовательность функций класса $C^1(\Omega)$ такая, что

$$\psi_k \rightarrow 0 \quad \text{в} \quad L^2(\Omega, \mu), \quad \nabla_\omega \psi_k \rightarrow g \quad \text{в} \quad (L^2(\Omega, \mu))^n.$$

Имеем

$$\xi \psi_k \rightarrow 0 \quad \text{в} \quad L^2(\Omega, \mu), \quad \nabla_\omega(\xi \psi_k) \rightarrow \xi g \quad \text{в} \quad (L^2(\Omega, \mu))^n,$$

поэтому $\xi g \in \Gamma_\mu(0)$.

2) Для произвольной $\xi \in \Gamma_\mu(0)$ определим g_k как характеристическую функцию множества $\{\omega: |\xi(\omega)| \leq k\}$. Тогда $g_k \xi \in \Gamma_\mu(0) \cap L^\infty(\Omega, \mu)$ и $g_k \xi \rightarrow \xi$ при $k \rightarrow \infty$. Остальные утверждения проверяются аналогично.

Обозначим через Π_μ и Π_{μ_ω} ортогональные проекторы в пространствах $(L^2(\Omega, \mu))^n$ и $(L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega))^n$ на $\Gamma_\mu(0)$ и $\Gamma_{\mu_\omega}(0)$ соответственно.

ЛЕММА 10.2. Пусть $\xi(\omega)$, $g(\omega)$, $\zeta(x)$ и $h(x)$ – те же функции, что и в лемме 10.1. Тогда $\Pi_\mu(\xi g) = \xi \Pi_\mu(g)$ и $\Pi_{\mu_\omega}(\zeta h) = \zeta \Pi_{\mu_\omega}(h)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $\psi(\omega) \in \Gamma_\mu(0)$ в силу леммы 10.1 имеем

$$0 = (g - \Pi_\mu(g), \xi \psi) = (\xi g - \xi \Pi_\mu(g), \psi),$$

где скалярное произведение взято в $L^2(\Omega, \mu)$. Поскольку $\xi \Pi_\mu(g) \in \Gamma_\mu(0)$, то $\xi \Pi_\mu(g) = \Pi_\mu(\xi g)$.

ЛЕММА 10.3. Существует $\mathcal{F}$ -измеримое подпространство $\mathcal{L}(\omega) \subset \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\Gamma_\mu(0) = \{g \in (L^2(\Omega, \mu))^n: g(\omega) \in \mathcal{L}(\omega)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в $\mathbb{R}^n$ стандартный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и положим

$$\psi_j(\omega) = \Pi_\mu(e_j)(\omega), \quad \mathcal{L}(\omega) = \text{span}\{\psi_j(\omega), j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Обозначим $\Theta = \{g \in (L^2(\Omega, \mu))^n: g(\omega) \in \mathcal{L}(\omega)\}$ и проверим, что $\Gamma_\mu(0) = \Theta$. Для $g \in \Gamma_\mu(0) \cap (L^\infty(\Omega, \mu))^n$ имеем

$$g = g_1 e_1 + g_2 e_2 + \dots + g_n e_n = \Pi_\mu(g) = g_1 \psi_1 + g_2 \psi_2 + \dots + g_n \psi_n.$$

Благодаря плотности $\Gamma_\mu(0) \cap (L^\infty(\Omega, \mu))^n$ в $\Gamma_\mu(0)$ и замкнутости Θ отсюда следует, что $\Gamma_\mu(0) \subset \Theta$.

Докажем обратное включение. Поскольку $\psi_1, \dots, \psi_n \in \Gamma_\mu(0)$, то по лемме 10.1 имеем $\sum_{j=1}^n \xi_j(\omega) \psi_j(\omega) \in \Gamma_\mu(0)$ для любых $\xi_j \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Проверим, что множество таких элементов плотно в Θ . Действительно, если для некоторого $g \in \Theta$

$$0 = \left(g, \sum_{j=1}^n \xi_j \psi_j \right) = \sum_{j=1}^n (\xi_j, g \psi_j)$$

при всех $\xi_j \in L^\infty(\Omega, \mu)$, то $g(\omega) \psi_j(\omega) = 0$ μ -п. н. и в силу определения Θ имеем $g = 0$.

Построим по той же схеме множества $\mathcal{L}_{\mu_\omega}(x)$:

$$\kappa_j = \Pi_{\mu_\omega}(e_j), \quad \mathcal{L}_{\mu_\omega}(x) = \text{span}\{\kappa_j, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

ТЕОРЕМА 10.1. *Подпространство $\Gamma_{\mu_\omega}(0)$ представимо в виде*

$$\Gamma_{\mu_\omega}(0) = \{h \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega) : h(x) \in \mathcal{L}_{\mu_\omega}(x)\}. \quad (10.1)$$

Справедливо равенство

$$\mathcal{L}_{\mu_\omega}(x) = \mathcal{L}_\mu(T_x\omega). \quad (10.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление (10.1) доказывается по той же схеме, что и лемма 10.3. Для доказательства (10.2) заметим, что $L_{\mu_\omega}(x)$ измеримо по паре (ω, x) относительно σ -алгебры $\mathcal{F} \times \mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ – борелевская σ -алгебра. Из совпадения мер $d\mu_{T_y\omega}(x)$ и $\mu_\omega(dx+y)$ следует равенство $\mathcal{L}_{\mu_{T_y\omega}}(x) = \mathcal{L}_{\mu_\omega}(x-y)$, поэтому найдется измеримое подпространство $\mathcal{L}_1(\omega) \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $L_{\mu_\omega}(x) = \mathcal{L}_1(T_x\omega)$.

Легко проверяется включение $\mathcal{L}(\omega) \subset \mathcal{L}_1(\omega)$. Действительно, если $(g(\omega), \nabla_\mu g(\omega)) \in \tilde{H}(\Omega, \mu)$, то Р-п. н. $g(T_x\omega) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$ и $\nabla_\mu(T_x\omega)$ является градиентом $g(T_x\omega)$.

Для обоснования обратного включения нам понадобится следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1. *Пусть $b(\omega) \in (L^2(\Omega, \mu))^n$ и $g(\omega) \in L^2(\Omega, \mu)$, и пусть Р-п. н. $b(T_x\omega)$ – μ_ω -градиент функции $g(T_x\omega)$. Тогда $b(\Omega) = \nabla_\mu g(\omega)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся определением (5.16). Для функций $r(\omega) \in L^2(\Omega, \mu)$ и $d(\omega) \in (L^2(\Omega, \mu))^n$, связанных соотношением $r(\omega) = \text{div}_\omega d(\omega)$, по теореме Биркгофа находим, что Р-п. н.

$$\begin{aligned} \int_\Omega r(\omega)g(\omega) d\mu(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^n} \int_{(0,T)^n} r(T_x)g(T_x\omega) d\mu_\omega(x) \\ &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^n} \int_{(0,T)^n} d(T_x\omega) b(T_x\omega) d\mu_\omega(x) \\ &= - \int_\Omega d(\omega) b(\omega) d\mu(\omega); \end{aligned}$$

среднее равенство здесь обосновывается так же, как при доказательстве теоремы 2.1.

Предположим теперь, что $\mathcal{L}_1(\omega)$ шире, чем $\mathcal{L}(\omega)$ на множестве положительной меры μ . Выберем на этом множестве измеримый единичный вектор $s(\omega)$, лежащий в $\mathcal{L}_1(\omega)$ и ортогональный $\mathcal{L}(\omega)$. Положим $s(\omega)$ равным нулю для остальных ω . Согласно первому утверждению теоремы 10.1 $s(T_x\omega)$ – градиент нуля в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$ Р-п. н., поэтому в силу предложения 10.1 $s(\omega)$ является градиентом нуля в $L^2(\Omega, \mu)$, что противоречит предположению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. *Тангенциальным пространством $\mathcal{T}_\mu(\omega)$ назовем ортогональное дополнение в $\mathbb{R}^n$ к $\mathcal{L}(\omega)$. Аналогично, $\mathcal{T}_{\mu_\omega}(x)$ определяется как ортогональное дополнение в $\mathbb{R}^n$ к $\mathcal{L}_{\mu_\omega}(x)$.*

В силу теоремы 10.1 выполнено равенство $\mathcal{T}_{\mu_\omega}(x) = \mathcal{T}_\mu(T_x\omega)$. Пусть $u(\omega)$ – произвольный элемент пространства $H^1(\Omega, \mu)$. Обозначим через $\partial_\mu^t u(\omega)$ ортогональную проекцию в $\mathbb{R}^n$ градиента $\partial_\mu u(\omega)$ на подпространство $\mathcal{T}_{\mu_\omega}(x)$. Функцию $\partial_\mu^t u(\omega)$ называют *тангенциальным градиентом* u . Отметим, что градиент всякой функции $u(\omega) \in H^1(\Omega, \mu)$ однозначно представим в виде

$$\partial_\mu u(\omega) = \partial_\mu^t u(\omega) + g(\omega), \quad (10.3)$$

где $g(\omega) \in \mathcal{L}(\omega)$.

Аналогично определяется тангенциальный градиент произвольной функции $u(x) \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$. Будем обозначать его $\nabla^t u$.

Рассмотрим теперь задачу релаксации, которая может быть сформулирована следующим образом. Пусть $a(\omega)$ – положительно определенная симметрическая матрица и $(u(\omega), \nabla u(\omega)) \in H(\Omega, \mu)$ – решение задачи

$$\operatorname{div}(a(\omega)\nabla u(\omega)) + u(\omega) = f(\omega), \quad f \in L^2(\Omega, \mu). \quad (10.4)$$

Как уже отмечалось выше, выбор градиента $a(\omega)\nabla u(\omega)$ определен в этом случае однозначно ортогональностью ∂u подпространству $\Gamma_\mu(0)$, и этот градиент, вообще говоря, не является тангенциальным.

Мы хотим найти такую матрицу $a^r(\omega)$, чтобы для произвольной функции $f \in L^2(\Omega, \mu)$ решение задачи

$$\operatorname{div}(a^r(\omega)\partial u(\omega)) + u(\omega) = f(\omega)$$

имело бы вид $(u, \partial^t u)$, где $u(\omega)$ должна совпадать с решением задачи (10.4), однако соответствующий градиент должен быть тангенциальным. Эта задача имеет локальный характер и решается с помощью поточечного проектирования на тангенциальное подпространство. А именно, для заданного $\eta \in \mathbb{R}^n$ требуется найти $\zeta \in \mathcal{T}_\mu(\omega)$ такой, что $a(\omega)(\eta + \zeta(\omega)) \in \mathcal{T}_\mu(\omega)$. Легко проверить, что матрица $a^r(\omega)$ линейного отображения $\eta \rightarrow a(\omega)(\eta + \zeta(\omega)) = a^r(\omega)\eta$ симметрическая и что $a^r(\omega)\eta = 0$ для $\eta \in \mathcal{L}(\omega)$. Обозначив через Π^t ортогональный проектор в $\mathbb{R}^n$ на $\mathcal{T}_\mu(\omega)$, получим $a^r(\omega)\Pi^t\eta = a^r(\omega)\eta$. Поскольку $a^r(\omega)\eta = a(\omega)\eta$ для всех $\eta \in \mathcal{T}_\mu(\omega)$ и поток $a\nabla u$ в задаче (10.4) ортогонален $\Gamma_\mu(0)$, то μ -п. н. $a(\omega)\nabla u(\omega) \in \mathcal{T}_\mu(\omega)$ и

$$a(\omega)\nabla u(\omega) = a^r(\omega)\nabla u(\omega) = a^r(\omega)\Pi^t\partial u(\omega),$$

что решает задачу релаксации.

Аналогично можно решить задачу релаксации для мер μ_ω в $\mathbb{R}^n$. С помощью теоремы 10.1 имеем $a_{\mu_\omega}^r(x) = a^r(T_x\omega)$ при μ_ω -почти всех x Р-п. н.

ТЕОРЕМА 10.2. Пусть $a(\omega)$ – положительно определенная симметрическая матрица. Тогда Р-п. н. для произвольной функции $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\omega)$ решения $(u, \nabla u)$, $(v, \nabla v)$ соответственно уравнений

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(T_x\omega)\nabla u(x)) + u(x) &= f(x), \\ -\operatorname{div}(a^r(T_x\omega)\nabla v(x)) + v(x) &= f(x) \end{aligned}$$

имеют одинаковые первые компоненты, а ∇v – тангенциальный градиент функции u , т. е. $u(x) = v(x)$, $\nabla v = \nabla^t u$.

Список литературы

1. Allaire G., “Homogenization and two-scale convergence”, *SIAM J. Math. Anal.*, **23** (1992), 1482–1518.
2. Жиков В. В., “Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости”, *Матем. сб.*, **187**:8 (1996), 3–40.
3. Жиков В. В., “К технике усреднения вариационных задач”, *Функцион. анализ и его прилож.*, **33**:1 (1999), 14–29.
4. Жиков В. В., “Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости”, *Матем. сб.*, **191**:7 (2000), 31–72.
5. Жиков В. В., “Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 81–148.
6. Жиков В. В., “Усреднение в случайных перфорированных областях общего вида”, *Матем. заметки*, **53**:1 (1993), 41–58.
7. Козлов С. М., “Усреднение случайных операторов”, *Матем. сб.*, **109**:2 (1979), 188–202.
8. Bouchitte G., Buttazzo G., Seppecher P., “Energies with respect to a measure and applications to low-dimensional structures”, *Calc. Var. Part. Diff. Eq.*, **5**:1 (1997), 37–54.
9. Bouchitte G., Fragala I., “Homogenization of thin structures by two-scale method with respect to measures”, *SIAM J. Math. Anal.*, **32**:6 (2001), 1198–1226.
10. Bouchitte G., Buttazzo G., Fragala I., “Convergence of Sobolev spaces on varying manifolds”, *J. Geom. Anal.*, **11** (2001), 399–422.
11. Bourgeat A., Mikelić A., Wright S., “On the stochastic two-scale convergence in the mean and applications”, *J. Reine Angew. Math.*, **456** (1994), 19–51.
12. Chechkin G. A., Jikov V. V., Lukkassen D., Piatnitski A. L., “On homogenization of networks and junctions”, *Asymptotic Analysis*, **30** (2002), 61–80.
13. Daley D. J., Vere-Jones D., *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Springer-Verlag, N. Y., 1988.
14. Jikov V. V., Kozlov S. M., Oleinik O. A., *Homogenization of Differential Operator and Integral Functionals*, Springer-Verlag, N. Y., 1994.
15. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic Analysis of Periodic Structures*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1978.
16. Grimmett G., *Percolation. 2 ed*, Fundamental Principles of Mathematical Sciences. V. 321, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
17. Экеланд Н., Темам Р., *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979.
18. Kesten H., *Percolation theory for mathematicians*, Progress in Probability and Statistics. V. 2, Birkhauser, Boston, 1982.
19. Жиков В. В., “Замечание о соболевских пространствах”, *Современная математика и ее прилож.*, **10** (2003), 77–79.
20. Пастухова С. Е., “О сходимости гиперболических полугрупп в переменном пространстве”, *Докл. РАН*, **397**:5 (2004), 596–601.
21. Пастухова С. Е., “Аппроксимативные условия и предельный переход в соболевских пространствах на тонких и составных структурах”, *Современная математика и ее прилож.*, **16** (2004), 47–63.
22. Пастухова С. Е., “Об аппроксимативных свойствах соболевских пространств теории упругости на тонких стержневых структурах”, *Современная математика и ее прилож.*, **12** (2003), 99–106.
23. Пастухова С. Е., “О сходимости гиперболических полугрупп в переменном гильбертовом пространстве”, *Тр. семинара им. Г. И. Петровского*, **24** (2004), 216–241.
24. Жиков В. В., “Асимптотические задачи, связанные с усреднением теплопроводности в перфорированных областях”, *Матем. сб.*, **181**:10 (1990), 1283–1305.

25. Papanicolaou G., Varadhan S. R. S., “Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients. Random fields. Rigorous results in statistical mechanics and quantum field theory”, *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, **27** (1981), 835–873.
26. Sznitman A.-S., *Brownian motion, obstacles and random media*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
27. Varadhan S. R. S., “Random walks in a random environment”, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, **114**:4 (2004), 309–318.

В. В. Жиков (V. V. Zhikov)
Владимирский государственный педагогический
университет
E-mail: zhikov@vgpu.vladimir.ru

Поступило в редакцию
03.02.2005

А. Л. Пятницкий (A. L. Pyatnitskii)
Технологический институт в Нарвике, Норвегия,
Физический институт РАН им. Лебедева
E-mail: andrey@sci.lebedev.ru