Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Левенштам, Обоснование метода усреднения для параболических уравнений, содержащих быстроосциллирующие слагаемые с большими амплитудами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 2, 25–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/im555>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 09:55:19

УДК 517.43+517.948+513.881

В. Б. Левенштам

Обоснование метода усреднения для параболических уравнений, содержащих быстроосциллирующие слагаемые с большими амплитудами

Для абстрактных параболических уравнений со стационарной главной частью и подчиненной ей нелинейностью, в которую входят быстроосциллирующие во времени с нулевым средним слагаемые, пропорциональные корню квадратному из частоты осцилляций, обоснован метод усреднения. Интерес к рассмотрению именно показателя степени $1/2$ связан с тем, что слагаемые, пропорциональные более низким степеням частоты, не влияют на усреднение. Для линейных уравнений того же типа обоснован один алгоритм исследования устойчивости решений, когда стационарная усредненная задача имеет собственные значения, лежащие на мнимой оси (критический случай).

Библиография: 24 наименования.

В основных теоремах классической конечномерной теории усреднения Н. Н. Боголюбова [1] (см. также [2]) рассматриваются системы уравнений (в так называемой стандартной форме), которые можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \omega t), \quad (0.1)$$

где вектор-функция $f(x, \tau)$ обладает средним по τ :

$$\langle f(x, \tau) \rangle_\tau = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N f(x, \tau) d\tau,$$

ω – большой параметр.

В работах [3], [4], посвященных обоснованию метода усреднения для абстрактных параболических уравнений, рассматриваются уравнения вида

$$\frac{dy}{dt} = Ay + g(y, \omega t), \quad (0.2)$$

где A – линейный неограниченный оператор, порождающий в банаховом пространстве аналитическую полугруппу, а вектор-функция $g(y, \tau)$ в определенном смысле подчинена A и обладает средним по τ . Указанные результаты

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00678) и научной программы “Университеты России” (грант УР.04.01.029).

работ [3], [4] изложены в монографии [5] для уравнений (0.2) с нелинейностью $g(y, t, \omega t)$. В книге [6] имеются важные результаты об усреднении уравнений (0.2) с переменным главным оператором $A = A(\omega t)$.

Результаты работ [1], [2] и [3]–[6] имеют непосредственные приложения в механике систем с конечным числом степеней свободы и в механике сплошных сред. Вместе с тем в указанных разделах теоретической механики встречаются важные задачи, математические модели которых отличаются от уравнений (0.1) или (0.2) тем, что дополнительно содержат быстроосциллирующие слагаемые, пропорциональные положительным степеням ω . Укажем некоторые такие уже исследованные задачи.

Очень известна задача об устойчивости равновесий математического маятника с вибрирующим подвесом, которую рассматривали Н. Н. Боголюбов [7] и П. Л. Капица [8]. В работах [7], [8] установлено, что в результате вертикальных высокочастотных вибраций точки подвеса верхнее положение маятника может стать устойчивым, нижнее положение при этом устойчиво, как и при отсутствии вибраций¹.

Следующие важные результаты относятся к двум задачам механики сплошных сред, однако они напоминают описанный выше эффект вибрирующего маятника. В работе [10] показано, что высокочастотные сжатия-растяжения балки могут стабилизировать ее прямолинейную форму. В работе [11] (обоснование см. в [12], [13]) установлено стабилизирующее влияние вертикальных высокочастотных вибраций сосуда с подогреваемой жидкостью на состояние ее относительного покоя. Оказывается, как бы ни был велик градиент температуры, такими вибрациями можно предотвратить конвекцию.

В недавних публикациях [14]–[18] рассмотрены задача о движении материальной точки в $\mathbb{R}^m$ под действием вибрационных сил и связей, задача о движении идеальной жидкости под действием вибрационных массовых сил в сосуде и некоторые другие задачи, описываемые дифференциальными уравнениями с большими высокочастотными слагаемыми. Такие задачи стимулируют распространение систематической теории усреднения на абстрактные параболические уравнения вида

$$\frac{dy}{dt} = Ay + g(y, t, \omega t) + \omega^\alpha \varphi(y, t, \omega t), \quad (0.3)$$

где A – линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, а нелинейные вектор-функции $g(y, t, \tau)$ и $\varphi(y, t, \tau)$ имеют средние по τ , причем среднее φ равно нулю и число α положительно.

Здесь мы рассматриваем показатель $\alpha = 1/2$, названный в работе [17] *первым перестроечным показателем*. Рассмотрение случая, когда $\alpha < 1/2$, малоинтересно, поскольку в этом случае получаем то же усредненное уравнение, что и для (0.2). В случае, когда $\alpha > 1/2$, нам пока не удалось осуществить усреднение уравнения (0.3) даже формально.

Работа состоит из двух параграфов. В § 1 проведено обоснование метода усреднения для задачи об ограниченных на всей временной оси решениях уравнения вида (0.3) при $\alpha = 1/2$, когда вектор-функция $\varphi(x, t, \tau)$ является относительно τ тригонометрическим полиномом. Вместо последнего предположения

¹По поводу этих результатов см. также работу [9].

можно было бы считать, что $\varphi(x, t, \tau)$ представима в виде тригонометрического ряда относительно τ , который достаточно хорошо сходится. На первом этапе доказательства в рассматриваемом уравнении делается замена переменных типа классической замены Крылова–Боголюбова, которая приводит к уравнению, не содержащему больших слагаемых, хотя и имеющему значительно более сложную, нежели (0.2), структуру относительно ω . Асимптотическая близость соответствующих решений исходной и усредненной задач устанавливается после этого путем перехода к интегральному уравнению и применения теоремы о неявных операторах в окрестности значения параметра $\omega = \infty$. Исследование вопросов устойчивости и неустойчивости по Ляпунову решения исходной задачи осуществляется с помощью классических методов теории устойчивости решений эволюционных уравнений в банаховых пространствах [19] в комбинации с некоторыми подходами, известными в теории усреднения.

Сравнивая результаты § 1 с аналогичными результатами работы [4], в которой рассматривалась та же задача, но для уравнений вида (0.2), замечаем, что в данном случае на нелинейную часть уравнения наложены существенно более жесткие ограничения. Можно показать, что это ужесточение требований при переходе от уравнения (0.2) к (0.3) в определенном смысле естественно.

Приведем пример, иллюстрирующий теорему 1.1.

Пусть Ω – ограниченная область n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$. В цилиндре $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + f(x, u, t, \omega t) + \sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} \varphi_k(x, u) e^{i\nu_k \omega t}, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \omega \gg 1. \end{aligned} \quad (0.4)$$

Здесь $f(x, u, t, \tau)$ и $\varphi_k(x, u)$ – комплекснозначные функции, которые определены на множествах $\bar{\Omega} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и $\bar{\Omega} \times \mathbb{C}$ соответственно и удовлетворяют определенным условиям гладкости; ν_k – отличные от нуля вещественные числа. Предполагается, что функция $f(x, u, t, \tau)$ равномерно ограничена, когда u принимает значения из произвольного ограниченного подмножества $U \subset \mathbb{C}$, и равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$, $u \in U$ существует среднее

$$F(x, u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(x, u, t, \tau) d\tau.$$

Решением задачи (0.4) (на всей временной оси $t \in \mathbb{R}$) мы называем вектор-функцию $u(\cdot, t) \in W_q^2(\Omega)$, $q > n$, $L_q(\Omega)$ -дифференцируемую по t и удовлетворяющую при $t \in \mathbb{R}$ уравнениям (0.4).

Наряду с (0.4) рассмотрим усредненную задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + F(x, v) + \sum_{\nu_k + \nu_s = 0} \frac{1}{i\nu_s} \frac{\partial \varphi_k(x, v)}{\partial v} \varphi_s(x, v), \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (0.5)$$

Пусть задача (0.5) имеет стационарное решение v_0 и спектр линеаризованной на v_0 задачи (0.5) не содержит чисто мнимых значений. Тогда из утверждения 1 теоремы 1.1 следует, что для $\mu \in (0, 1)$ найдутся положительные числа r_0 и ω_0 ,

при которых задача (0.4) имеет при $\omega > \omega_0$ единственное в шаре

$$\|u - v_0\|_{C(\mathbb{R}, C^\mu(\bar{\Omega}))} \leq r_0$$

решение u_ω , и при этом

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|u_\omega - v_0\|_{C(\mathbb{R}, C^\mu(\bar{\Omega}))} = 0.$$

Для задачи (0.4) нетрудно переформулировать и остальные утверждения теоремы 1.1.

В §2 для линейных абстрактных параболических уравнений вида (0.3) с $\alpha = 1/2$ исследуется проблема устойчивости по Ляпунову в критическом случае, когда на мнимой оси лежит часть спектра усредненной задачи, которая состоит из конечного числа собственных значений конечной кратности. Интерес к этой задаче возник под влиянием исследований, проведенных Ю. С. Колесовым и В. М. Майоровым (см. [20], [21]), в которых аналогичный вопрос об устойчивости в критическом случае рассматривался для линейных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами. В §2 используются методика, описанная в работе [20], отдельные подходы и результаты работы [21], а также некоторые применявшиеся в §1 приемы. Основной результат §2 состоит в обосновании процедуры типа алгоритма Штокало–Колесова [20], эффективного построения системы m линейных дифференциальных уравнений (m – размерность нейтрального подпространства), отвечающей за устойчивость всего возмущенного уравнения.

Приведем простейший пример, иллюстрирующий теорему 2.1.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим вопрос об устойчивости при больших значениях параметра ω решений задачи Неймана для системы уравнений теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + \sum_{0 < |k| \leq k_0} b_k e^{i\mu_k \omega t} v + \sqrt{\omega} \sum_{0 < |k| \leq k_0} c_k e^{i\nu_k \omega t} u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \Delta v + dv + \sum_{0 < |k| \leq k_0} d_k e^{i\mu_k \omega t} u + \sqrt{\omega} \sum_{0 < |k| \leq k_0} f_k e^{i\nu_k \omega t} u, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \quad (0.6)$$

Здесь k_0 – натуральное число, b_k , c_k , d_k , d и f_k – комплексные числа, $\operatorname{Re} d < 0$, μ_k и ν_k – ненулевые вещественные числа. Из результатов §2 вытекает следующее утверждение. Существует такое $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ и при выполнении неравенства $\operatorname{Re} D_1 > 0$ ($\operatorname{Re} D_1 < 0$), где

$$D_1 = \sum_{\mu_k + \nu_\ell = 0} \mu_k^{-1} b_k c_\ell \sum_{\nu_k + \nu_\ell = 0} (d\nu_\ell)^{-1} f_k c_\ell + \sum_{\mu_k + \nu_\ell = 0} (i\nu_\ell)^{-1} b_k f_\ell,$$

решения задачи (0.6) экспоненциально устойчивы (неустойчивы) по норме $C(\bar{\Omega})$. Если $\operatorname{Re} D_1 = 0$, то необходимо рассматривать следующую поправку D_2 (см. §2) и т. д.

В заключение выражаю благодарность В. И. Юдовичу, который в 1991 г. в своих лекциях по методу усреднения на мехмате РГУ исследовал некоторые задачи с рассматриваемой в данной статье спецификой (см. [14]–[18]) и привлек меня к изучению такого рода вопросов.

Автор очень благодарен также рецензентам за ценные замечания, способствовавшие существенному улучшению статьи.

§ 1. Обоснование метода усреднения

1. Пусть B – комплексное банахово пространство, A – неограниченный оператор, порождающий в B аналитическую полугруппу e^{tA} , $-A$ – положительный оператор². Через B^γ , $\gamma \geq 0$, обозначим банахово пространство элементов $x \in B$, принадлежащих области определения оператора $(-A)^\gamma$, с нормой $\|x\|_{B^\gamma} = \|(-A)^\gamma x\|_B$.

Пусть $\delta \in (0, 1/2)$, $\alpha \in [0, 1/2 + \delta)$, k_0 – натуральное число и G_0 – открытое подмножество пространства B^α . Предположим, что $F: G_0 \rightarrow B^\delta$, $f: G_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow B^\delta$ и $\varphi_k: G_0 \times \mathbb{R} \rightarrow B^\delta$, $1 \leq k \leq k_0$, – непрерывные отображения, удовлетворяющие следующим условиям.

1. Существуют дифференциалы Фреше DF , Df и $D\varphi_k$ указанных отображений по первому аргументу, которые осуществляют непрерывные преобразования соответственно множеств G_0 , $G_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и $G_0 \times \mathbb{R}$ в пространство $\text{Hom}(B^\alpha, B^\delta)$ линейных ограниченных операторов, действующих из B^α в B^δ , с операторной нормой. Кроме того, $(D\varphi_k)(x, \tau)$ равномерно относительно всех аргументов удовлетворяют условию Липшица по x .

2. Однопараметрические семейства $f(\cdot, \cdot, \tau): G_0 \times \mathbb{R} \rightarrow B^\delta$ и $(Df)(\cdot, \cdot, \tau): G_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Hom}(B^\alpha, B^\delta)$, $\tau \in \mathbb{R}$, равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.

3. На интервале $(0, \delta)$ имеется такая тройка чисел $\delta_2 < \delta_1 < \delta_0$, что отображения $(D\varphi_k)(x, t)$ при фиксированных $(x, t) \in G_0 \times \mathbb{R}$ допускают расширения до отображений (за которыми сохраним прежние обозначения $(D\varphi_k)(x, t)$), принадлежащих пространствам $\text{Hom}(B^{\delta_0}, B^{\delta_1})$ и $\text{Hom}(B, B)$. При этом указанные расширения относительно x, t непрерывны и равномерно ограничены.

Существуют дифференциалы Фреше второго порядка $(D^2\varphi_k)(x, t) \in \text{Hom}(B^{\delta_0}, \text{Hom}(B^{\delta_0}, B^{\delta_1}))$, $(x, t) \in G_0 \times \mathbb{R}$, которые относительно (x, t) непрерывны, равномерно ограничены и удовлетворяют равномерному условию Липшица по x . При этом они обладают расширениями, за которыми сохраняем прежние обозначения, такими, что $D^2\varphi_k: G_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Hom}(B^{\delta_2}, \text{Hom}(B^{\delta_2}, B))$ являются непрерывными и равномерно ограниченными отображениями.

4. Вектор-функции $\varphi_k(x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow B^\delta$ при $x \in G_0$ обладают производными $\frac{\partial \varphi_k}{\partial t}(x, t)$, которые относительно $(x, t) \in G_0 \times \mathbb{R}$ непрерывны и равномерно ограничены. При этом данные производные обладают дифференциалами Фреше $(D\frac{\partial \varphi_k}{\partial t})(x, t)$ по первой переменной, которые являются непрерывными и равномерно ограниченными отображениями множества $G_0 \times \mathbb{R}$ в пространство $\text{Hom}(B^\alpha, B^\delta)$.

²Мы пользуемся терминологией теории полугрупп и дробных степеней операторов (см., например, [22]).

5. Интегралы

$$N^{-1} \int_t^{t+N} f(x, t, \tau) d\tau, \quad N^{-1} \int_t^{t+N} (Df)(x, t, \tau) d\tau$$

при $N \rightarrow \infty$ сходятся к нулю соответственно по нормам B^δ и $\text{Hom}(B^\alpha, B^\delta)$ равномерно относительно $(x, t) \in G_0 \times \mathbb{R}$.

Пусть ν_k , $1 \leq k \leq k_0$, – произвольный набор ненулевых действительных чисел. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(x) + f(x, t, \omega t) + \sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} \varphi_k(x, t) e^{i\nu_k \omega t}, \quad (1.1)$$

зависящее от большого параметра ω . Нас интересуют ограниченные решения $x: \mathbb{R} \rightarrow B^\alpha$, значения которых $x(t) \in G_0$, $t \in \mathbb{R}$. Прежде чем выписать усредненное уравнение, отметим, что в настоящей работе, являющейся продолжением работы [4], мы ограничиваемся рассмотрением случая автономного усредненного уравнения. В связи с этим предположим, что каждое равенство $\nu_k + \nu_s = 0$, $1 \leq k, s \leq k_0$, влечет независимость отображений $\varphi_k(x, t)$ и $\varphi_s(x, t)$ от t . Определив вектор-функцию

$$\Psi(y) = \sum_{\nu_k + \nu_s = 0} (i\nu_s)^{-1} [(D\varphi_k)(y)] \varphi_s(y),$$

рассмотрим наряду с возмущенным уравнением (1.1) усредненное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = Ay + F(y) + \Psi(y). \quad (1.2)$$

6. Пусть усредненное уравнение (1.2) имеет стационарное решение $\overset{\circ}{y} \in G_0$ и спектр Λ оператора

$$A + (DF)(\overset{\circ}{y}) + (D\Psi)(\overset{\circ}{y}),$$

где

$$\begin{aligned} (D\Psi)(\overset{\circ}{y}) = & \sum_{\substack{1 \leq k, s \leq k_0 \\ \nu_k + \nu_s = 0}} (i\nu_s)^{-1} \{ [(D^2\varphi_k)(\overset{\circ}{y})](\cdot, \varphi_s(\overset{\circ}{y})) \\ & + [(D\varphi_k)(\overset{\circ}{y})] [(D\varphi_s)(\overset{\circ}{y})] \}, \end{aligned}$$

не содержит точек мнимой оси.

2. В этом пункте прежде, чем сформулировать основные результаты данного параграфа в виде теоремы 1.1, напомним некоторые определения и обозначения и произведем в уравнении (1.1) необходимую замену переменных.

Пусть E – произвольное банахово пространство. Через $C(E)$ обозначим обычное банахово пространство непрерывных и ограниченных вектор-функций $x: \mathbb{R} \rightarrow E$ с $\sup$ -нормой. Через $C_\gamma(E)$, где $\gamma \in (0, 1]$, обозначим банахово пространство вектор-функций $x: \mathbb{R} \rightarrow E$, удовлетворяющих условию

$$\|x\|_{C_\gamma(E)} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_E + \sup_{-\infty < t_1 < t_2 < \infty} \left[\frac{\|x(t_2) - x(t_1)\|_E}{(t_2 - t_1)^\gamma} \right] < \infty.$$

Вектор-функция $x: \mathbb{R} \rightarrow E$ называется *почти периодической* (по Бохнеру), если множество ее сдвигов $x_\tau(\cdot) = x(\cdot + \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, компактно в пространстве $C(E)$.

Далее, не нарушая общности, будем считать, что оператор $-A$ сильно положителен, т. е. существует такая постоянная $c > 0$, что при всех λ , у которых $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, выполняется оценка

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\operatorname{Hom}(B, B)} \leq c(1 + |\lambda|)^{-1}. \quad (1.3)$$

Отметим известное интерполяционное неравенство [22, формула (14.24) при $\beta = 1$]:

$$\|(-A)^r x\| \leq \|Ax\|^r \|x\|^{1-r}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad k = k(r) = \text{const}, \quad (1.4)$$

где $x \in B^1$ и $\|a\| = \|a\|_B$.

Введем обозначение:

$$M_\omega(y, t, \tau) \equiv \sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} (i\nu_k \omega I - A)^{-1} \varphi_k(y(t), t) e^{i\nu_k \tau},$$

где I – тождественный оператор в B , $y: \mathbb{R} \rightarrow G_0$, $t, \tau \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$. Из соотношений (1.3), (1.4) вытекает оценка

$$\|(-A)^\alpha M_\omega(y, t, \omega t)\| \leq c\omega^{-(1/2-\alpha+\delta)} \max_k \|\varphi_k(y(t), t)\|_{B^\delta}, \quad (1.5)$$

$c = \text{const}$. Исходя из нее, подберем в пространстве B^α такой шар $G_1 \subset G_0$ с центром в точке $\overset{\circ}{y}$ и возьмем такое число $\omega^* > 0$, что при всех $\omega > \omega^*$ и всех $y: \mathbb{R} \rightarrow G_1$ значения вектор-функций

$$x(t) = y(t) + M_\omega(y, t, \omega t) \quad (1.6)$$

принадлежат G_0 и при этом справедлива оценка

$$\|(DM_\omega)(y, t, \omega t)\|_{\operatorname{Hom}(B, B)} < \frac{1}{2}.$$

В уравнении (1.1) сделаем замену переменных (1.6), которая является аналогом классической замены Крылова–Боголюбова и в близкой форме использовалась ранее в работе [12]. Получим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = Ay + F(y) + f(y, t, \omega t) + \chi(y, t, \omega t) + R(y, t, \omega), \quad (1.7)$$

где

$$\chi(y, t, \tau) = \sum_{1 \leq k, s \leq k_0} (i\nu_s)^{-1} [(D\varphi_k)(y(t), t)] \varphi_s(y(t), t) e^{i(\nu_k + \nu_s)\tau}, \quad (1.8)$$

а легко восстанавливаемое, но громоздкое выражение слагаемого $R(y, t, \omega)$ будет выписано позже (см. ниже (1.9)).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнены предположения п. 1. Тогда для любой пары чисел $\beta \in [\alpha, 1/2 + \delta)$, $\mu \in [0, \min(1/2 + \delta - \beta, \delta_1 - \delta_2)]$ найдется такая пара положительных чисел r_0, ω_0 , что при $\omega > \omega_0$ справедливы следующие утверждения.

1. В шаре S_{r_0} пространства $C_\mu(B^\beta)$ с центром в точке $\overset{\circ}{y}$ и радиусом r_0 существует единственное решение x_ω уравнения (1.1) и справедливо предельное равенство

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|x_\omega - \overset{\circ}{y}\|_{C_\mu(B^\beta)} = 0.$$

2. Если при каждом фиксированном $x \in G_0$ отображения $f(x, t, \tau)$ и $\varphi_k(x, t)$ со значениями в B^δ являются почти периодическими по t, τ и t соответственно и производные $\partial \varphi_k(x, t)/\partial t$ равномерно относительно t непрерывны по t , то решение $x_\omega(t)$ является почти периодическим по t отображением в B^β .

3. Если отображения $f(x, t, \tau)$ и $\varphi_k(x, t)$ не зависят от t , $f(x, t, \tau)$ T -периодично по τ и существует такое $\alpha_0 > 0$, которое кратно числам $2\pi|\nu_k|^{-1}$, $1 \leq k \leq k_0$, и T , то решение $x_\omega(t)$ является $(\alpha_0\omega^{-1})$ -периодическим по t .

4. Если спектр Λ оператора $A + (DF)(\overset{\circ}{y}) + (D\Psi)(\overset{\circ}{y})$ расположен строго в левой комплексной полуплоскости, то решение x_ω экспоненциально устойчиво, причем равномерно относительно начальных данных и параметра ω . Это означает, что существуют такие положительные числа r_1, σ и c , что при $\omega > \omega_0$ для всякого $s \in \mathbb{R}$ и всякого вектора $x_0 \in G_0$, удовлетворяющего условию $\|x_0 - \overset{\circ}{y}\|_{B^\beta} \leq r_1$, существует решение $x_\omega^0(t)$, $t \geq s$, уравнения (1.1) с начальным условием $x_\omega^0(s) = x_0$ и справедлива оценка

$$\|x_\omega^0(t) - x_\omega(t)\|_{B^\beta} \leq c \exp\{-\sigma(t - s)\} \|x_0 - x_\omega^0(s)\|_{B^\beta}, \quad t \geq s.$$

5. Если спектр Λ имеет строго в правой полуплоскости хотя бы одну точку, то решение x_ω неустойчиво. Это означает, что существуют число $r_2 > 0$ и последовательность $x_\omega^n(t)$, $\omega > \omega_0$, заданных на участках $t \in [0, t_n]$ решений уравнения (1.1) такие, что выполняются соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_\omega^n(0) - x_\omega(0)\|_{B^\beta} = 0, \quad \|x_\omega^n(t_n) - x_\omega(t_n)\|_{B^\beta} > r_2.$$

Доказательству теоремы 1.1 посвящена остальная часть параграфа.

3. В этом пункте докажем важную лемму 1.1.

Произведя, как отмечалось выше, в уравнении (1.1) замену переменных (1.6), придем к уравнению (1.7), в котором слагаемое χ задается равенством (1.8), а выражение R имеет вид

$$\begin{aligned} R(y, t, \omega) = & \left[(I + (DM_\omega)(y, t, \omega t))^{-1} - I \right] \left[Ay + F(y + M_\omega(y, t)) \right. \\ & \left. + f(y + M_\omega(y, t), t, \omega t) + \sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} (\varphi_k(y + M_\omega(y, t), t) - \varphi_k(y, t)) e^{i\nu_k \omega t} \right] \\ & - (I + (DM_\omega)(y, t, \omega t))^{-1} \frac{\partial}{\partial t} M_\omega(y, t) + (F(y + M_\omega(y, t)) - F(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (f(y + M_\omega(y, t), t, \omega t) - f(y, t, \omega t)) \\
& + \sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} [\varphi_k(y + M_\omega(y, t), t) - \varphi_k(y, t) - ((D\varphi_k)(y, t))M_\omega(y, t)] e^{i\nu_k \omega t} \\
& + \sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} ((D\varphi_k)(y, t)) \left(M_\omega(y, t) - \sum_{1 \leq s \leq k_0} (i\nu_s \sqrt{\omega})^{-1} \varphi_s(y, t) e^{i\nu_s \omega t} \right) e^{i\nu_k \omega t}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Пусть $\gamma_0 = 1 + \delta_2$, и пусть G_2 – такой шар в пространстве B^{γ_0} с центром в $\overset{\circ}{y}$, что $G_2 \subset G_1 \subset B^\alpha$. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1.1. *Существует функция $\alpha: (\omega^*, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ такая, что*

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha(\omega) = 0,$$

и для всех $y: \mathbb{R} \rightarrow G_2$, $t \in \mathbb{R}$ и $\omega > \omega^$ справедливы оценки*

$$\|R(y(t), t, \omega)\|_{B^{\delta_1}} < \alpha(\omega), \quad \|(DR)(y(t), t, \omega)\|_{\text{Hom}(B^{\gamma_0}, B^{\delta_1})} < \alpha(\omega). \tag{1.10}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что в силу неравенств (1.3) и (1.4) и условия 3 п. 1 существует не зависящая от t , y и ω постоянная c , при которой справедлива оценка

$$\|(DM_\omega)(y(t), t)\|_{\text{Hom}(B, B^{\delta_1})} \leq c\omega^{-1/2+\delta_1}.$$

Отсюда следует существование такого числа $c_1 > 0$, что при $\omega > \omega^*$ справедливо представление

$$[I + DM_\omega(y(t), t)]^{-1} - I = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [DM_\omega(y(t), t)]^k$$

в пространстве $\text{Hom}(B, B^{\delta_1})$ и имеет место оценка

$$\|[I + DM_\omega(y(t), t)]^{-1} - I\|_{\text{Hom}(B, B^{\delta_1})} \leq c_1 \omega^{-1/2+\delta_1}. \tag{1.11}$$

Из формулы конечных приращений и оценки (1.5) при $\alpha = \delta_0$ следуют при $\omega > 0$ и $1 \leq k \leq k_0$ неравенства

$$\sqrt{\omega} \|\varphi_k(y + M_\omega(y(t), t)) - \varphi_k(y, t)\|_{B^{\delta_1}} \leq c_2 \sqrt{\omega} \|M_\omega(y, t)\|_{B^{\delta_0}} \leq c_2, \tag{1.12}$$

$c = \text{const}$. Отметим еще две простые оценки. Из формулы конечных приращений вытекают соотношения

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sqrt{\omega} [\varphi_k(y + M_\omega(y, t), t) - \varphi_k(y, t) - ((D\varphi_k)(y, t))M_\omega(y, t)] \\
&= \sqrt{\omega} \int_0^1 [(D\varphi_k)(y + \theta M_\omega(y, t), t) - (D\varphi_k)(y, t)] d\theta M_\omega(y, t) \\
&= \sqrt{\omega} \int_0^1 d\theta \int_0^1 (D^2\varphi_k)(y + \lambda\theta M_\omega(y, t), t) (\theta M_\omega(y, t), M_\omega(y, t)) d\lambda.
\end{aligned}$$

Отсюда согласно предположению 3 п. 1 и неравенству (1.5) следует оценка

$$\|I_1\|_{B^{\delta_1}} \leq c\omega^{1/2}\omega^{2(-1/2)} = c\omega^{-1/2}, \quad c = \text{const}. \quad (1.13)$$

Из соотношения

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \sqrt{\omega} \left[M_\omega(y, t) - \sum_{1 \leq s \leq k_0} (i\nu_s \sqrt{\omega})^{-1} \varphi_s(y, t) e^{i\nu_s \omega t} \right] \\ &= \sum_{1 \leq s \leq k_0} (i\nu_s)^{-1} A(i\nu_s \omega I - A)^{-1} \varphi_s(y, t) e^{i\nu_s \omega t} \end{aligned} \quad (1.14)$$

и неравенств (1.3), (1.4) вытекает оценка

$$\|I_2\|_{B^{\delta_0}} \leq c\omega^{\delta_0 - \delta}, \quad c = \text{const}. \quad (1.15)$$

Неравенства (1.11)–(1.13), (1.15) позволяют оценить часть слагаемых в представлении (1.9) отображения R . Остальные слагаемые оцениваются совсем просто, и в результате получаем первое неравенство (1.10).

Вывод второго неравенства (1.10) начнем с представления

$$\begin{aligned} I_3 &\equiv D[I + (DM_\omega)(y(t), t)]^{-1} \\ &= -[I + (DM_\omega)(y(t), t)]^{-1} D[(DM_\omega)(y(t), t)] [I + (DM_\omega)(y(t), t)]^{-1} \\ &= -[I + (DM_\omega)(y(t), t)]^{-1} \sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} (i\nu_k \omega - A)^{-1} (D^2 \varphi_k)(y(t), t) \\ &\quad \times e^{i\nu_k \omega t} [I + (DM_\omega)(y(t), t)]^{-1}, \end{aligned}$$

из которого вытекает оценка

$$\|I_3\|_{\text{Hom}(B^{\delta_2}, \text{Hom}(B^{\delta_2}, B^{\delta_1}))} \leq c\omega^{-1/2+\delta_1}, \quad c = \text{const}. \quad (1.16)$$

Воспользовавшись равенством

$$\begin{aligned} I_4 &\equiv \sqrt{\omega} D[\varphi_k(y + M_\omega(y, t), t) - \varphi_k(y, t)] \\ &= \sqrt{\omega} ((D\varphi_k)(y + M_\omega, t)[I + (DM_\omega)(y, t)] - (D\varphi_k)(y, t)), \end{aligned}$$

получим оценку

$$\|I_4\|_{\text{Hom}(B^{\gamma_0}, B^{\delta_2})} \leq c, \quad c = \text{const}. \quad (1.17)$$

Рассмотрим еще представление

$$\begin{aligned} I_5 &\equiv \sqrt{\omega} \{ (D\varphi_k)(y + M_\omega, t)(I + DM_\omega) - (D\varphi_k)(y, t) \\ &\quad - [(D^2 \varphi_k)(y, t)](\cdot, M_\omega) - [(D\varphi_k)(y, t)](DM_\omega) \} \\ &= \sqrt{\omega} \left\{ \left[\int_0^1 (D^2 \varphi_k)(y + \theta M_\omega, t) d\theta - (D^2 \varphi_k)(y, t) \right] (\cdot, M_\omega) \right. \\ &\quad \left. + [(D\varphi_k)(y + M_\omega, t) - (D\varphi_k)(y, t)](DM_\omega) \right\}, \end{aligned}$$

из которого выводим оценку

$$\|I_5\|_{\text{Hom}(B^{\gamma_0}, B^{\delta_1})} \leq c\omega^{-(1/2+\delta_1-\delta)}, \quad c = \text{const}.$$

Осталось оценить выражение

$$I_6 \equiv \sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} [(D^2 \varphi_k)(y, t)] \left[\cdot, M_\omega - \sum_{1 \leq s \leq k_0} (i\nu_s \sqrt{\omega})^{-1} \varphi_s(y, t) e^{i\nu_s \omega t} \right] \\ + \sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} [(D \varphi_k)(y, t)] \left[DM_\omega - \sum_{1 \leq s \leq k_0} (i\nu_s \sqrt{\omega})^{-1} (D \varphi_s)(y, t) e^{i\nu_s \omega t} \right].$$

Из представления (1.14) и условий 3, 4 п. 1 следует неравенство

$$\|I_6\|_{\text{Hom}(B^{\gamma_0}, B^{\delta_1})} \leq c \omega^{-(\delta - \delta_0)}, \quad c = \text{const}. \quad (1.18)$$

В силу оценок (1.16)–(1.18) справедливо второе неравенство (1.10). Лемма доказана.

4. В этом пункте будет доказано первое утверждение теоремы 1.1. Вначале рассмотрим преобразованное уравнение (1.7), сделаем в нем замену переменных

$$y = u + \overset{\circ}{y}$$

и от задачи об ограниченных решениях ($u \in C(B^{\gamma_0})$) полученного уравнения перейдем к эквивалентной задаче об ограниченных решениях интегрального уравнения

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \tau) \{ F(u + \overset{\circ}{y}) - F(\overset{\circ}{y}) - \Psi(\overset{\circ}{y}) - [(DF)(\overset{\circ}{y})]u \\ - [(D\Psi)(\overset{\circ}{y})]u + f(u + \overset{\circ}{y}, \tau, \omega \tau) \\ + \chi(u + \overset{\circ}{y}, \tau, \omega \tau) + R(u + \overset{\circ}{y}, \tau, \omega) \} d\tau \equiv [N_\omega(u)](t). \quad (1.19)$$

Здесь $G(s)$ – функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения

$$\frac{dy}{dt} = Ay + [(DF)(\overset{\circ}{y})]u + [(D\Psi)(\overset{\circ}{y})]u \equiv Su,$$

которая, как известно (см., например, [19], [22]), имеет вид

$$G(t) = \begin{cases} e^{tS} P_-, & t > 0, \\ -e^{tS} P_+, & t < 0, \end{cases}$$

где P_+ – спектральный проектор оператора S , соответствующий спектральному подмножеству

$$\Lambda_+ = \{\lambda \in \Lambda : \text{Re } \lambda > 0\},$$

а $P_- = I - P_+$. Поскольку спектр Λ оператора S по условию не пересекается с мнимой осью, то существуют такие положительные числа a_0, a_1 , что при $t \in \mathbb{R}$ функция Грина $G(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|G(t)\|_{\text{Hom}(B, B)} \leq a_1 e^{-|t|a_0}. \quad (1.20)$$

Приведем еще две известные оценки [3], [22], которые сыграли важную роль в работе [3], а затем в [4]. Пусть $t_0 = \text{const} > 0$, $\mu \in [0, 1]$, $0 \leq \zeta \leq \eta \leq 1 + \delta$.

Тогда существуют такие положительные постоянные $C_{\eta,\zeta}$ и $C_{\eta,\zeta,\mu}$, что при всех $0 < t < t' \leq t_0$ выполняются неравенства

$$\|(-A)^\eta e^{tS}\|_{\text{Hom}(B^\zeta, B)} \leq C_{\eta,\zeta} t^{\zeta-\eta}, \quad (1.21)$$

$$\|(-A)^\eta (e^{t'S} - e^{tS})\|_{\text{Hom}(B^\zeta, B)} \leq C_{\eta,\zeta,\mu} (t' - t)^\mu t^{\zeta-\eta-\mu}. \quad (1.22)$$

Обозначим через $\overset{\circ}{S}$ шар в пространстве $C_\mu(B^{\gamma_0})$, где μ и γ_0 – те же, что и в пп. **2**, **3**, с центром в нуле и столь малым радиусом, что для каждого $u \in \overset{\circ}{S}$ и каждого $t \in \mathbb{R}$ выполнено включение $u(t) + \overset{\circ}{y} \in G_2$. Введем отображение $\hat{N}: \overset{\circ}{S} \times (\omega^*, \infty] \rightarrow C_\mu(B^{\gamma_0})$, заданное равенством $\hat{N}(u, \omega) = N_\omega(u)$ (см. (1.19)) при конечных ω и соотношением

$$\begin{aligned} [\hat{N}(u, \infty)](t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \tau) \{F(u + \overset{\circ}{y}) + \Psi(u + \overset{\circ}{y}) - F(\overset{\circ}{y}) - \Psi(\overset{\circ}{y}) \\ &\quad - [(DF)(\overset{\circ}{y})]u - [(D\Psi)(\overset{\circ}{y})]u\} d\tau. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Корректность такого определения оператора $\hat{N}$ следует из оценок (1.20)–(1.22).

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1.2. *Отображение $\hat{N}(u, \omega)$ обладает дифференциалом Фреше $(D\hat{N})(u, \omega)$ по u ; при этом $\hat{N}$ и $D\hat{N}$ непрерывны в точке $(0, \infty)$ и удовлетворяют равенствам*

$$\hat{N}(0, \infty) = 0, \quad (D\hat{N})(0, \infty) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Два последних равенства следуют из представления (1.23). Для получения остальных результатов леммы удобно выражение $N_\omega(u)$ (см. (1.19)) разбить на два слагаемых:

$$\begin{aligned} [N_\omega(u)](t) &= [N_{\omega,1}(u)](t) + [N_{\omega,2}(u)](t) \\ &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \tau) \{F(u + \overset{\circ}{y}) + \Psi(u + \overset{\circ}{y}) - F(\overset{\circ}{y}) - \Psi(\overset{\circ}{y}) \\ &\quad - [(DF)(\overset{\circ}{y})]u - [(D\Psi)(\overset{\circ}{y})]u + f(u + \overset{\circ}{y}, \tau, \omega\tau) \\ &\quad + \chi(u + \overset{\circ}{y}, \tau, \omega\tau) - \Psi(u + \overset{\circ}{y})\} d\tau \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \tau) R(u + \overset{\circ}{y}, \tau, \omega) d\tau. \end{aligned}$$

Такое разбиение индуцирует представление

$$\hat{N}(u, \omega) = \hat{N}_1(u, \omega) + \hat{N}_2(u, \omega), \quad \omega \in [\omega^*, \infty].$$

Существование дифференциала Фреше $(D\hat{N}_1)(u, \omega)$ и непрерывность отображений $\hat{N}_1(u, \omega)$ и $(D\hat{N}_1)(u, \omega)$ в точке $(0, \infty)$ установлены в заметке [4] с существенным использованием методов работы [3]. Аналогичные результаты относительно отображений $\hat{N}_2(u, \omega)$ и $(D\hat{N}_2)(u, \omega)$ следуют из леммы 1.1 и вытекающего из (1.20)–(1.23) факта о том, что оператор $\hat{G}: C(B^{\delta_1}) \rightarrow C_\mu(B^{\gamma_0})$,

действующий по формуле

$$(\widehat{G}\varphi)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \tau)\varphi(\tau) d\tau, \quad (1.24)$$

непрерывен. Лемма доказана.

Из теоремы о неявных операторах и леммы 1.2 следует существование $\omega_1 \geq \omega^*$ и шара $\overset{1}{S} \subset \overset{\circ}{S}$ таких, что при $\omega > \omega_1$ уравнение (1.19) имеет единственное в $\overset{1}{S}$ решение u_ω , и при этом справедливо соотношение $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|u_\omega\|_{C_\mu(B^{\gamma_0})} = 0$. Вектор-функция $u_\omega(t)$ порождает по формуле $x_\omega = u_\omega + \overset{\circ}{y} + M_\omega(u_\omega + \overset{\circ}{y}, t, \omega t)$ решение уравнения (1.1), удовлетворяющее, очевидно, указанному в п. 1 теоремы 1.1 предельному равенству.

Докажем теперь относительную единственность решения $x_\omega(t)$. Для этого обозначим через r_1 радиус шара $\overset{1}{S} \subset C_\mu(B^{\gamma_0})$ и учтем, что в силу сказанного выше уравнение (1.7) при $\omega > \omega_1$ не может иметь двух различных решений в шаре $\widehat{S}_{r_1}: \|y - \overset{\circ}{y}\|_{C_\mu(B^{\gamma_0})} \leq r_1$. Далее заметим, что согласно формуле (1.19) и оценкам (1.20)–(1.22) для $\gamma \in (\gamma_0, 1 + \delta_1)$ найдется такая постоянная k_0 , что решения y_ω уравнения (1.7), удовлетворяющие неравенству

$$\|y_\omega - \overset{\circ}{y}\|_{C_\mu(B^\beta)} \leq 1, \quad \omega > \omega_1,$$

подчинены оценке $\|y_\omega - \overset{\circ}{y}\|_{C_\mu(B^\gamma)} \leq k_0$. Из этого факта и известного интерполяционного неравенства (см. [22, с. 285])

$$\|(-A)^\alpha x\| \leq k(\alpha, \beta) \|(-A)^\beta x\|^{\alpha/\beta} \|x\|^{1-\alpha/\beta}, \quad x \in D((-A)^\beta),$$

где $\beta > \alpha \geq 0$, $k(\alpha, \beta) = \text{const}$, следует существование такого r_2 , что каждое решение y_ω уравнения (1.7), принадлежащее шару $S_{r_2}: \|y - \overset{\circ}{y}\|_{C_\mu(B^\beta)} \leq r_2$, лежит в шаре $\widehat{S}_{r_1}$. Так что уравнение (1.7) при $\omega > \omega_1$ не может иметь двух различных решений в шаре S_{r_2} . Обратимся теперь к преобразованию (1.6), которое связывает решения x_ω уравнения (1.1) и решения y_ω уравнения (1.7). Рассмотрим оператор $\widehat{M}: S_{r_2} \times [\omega_1, \infty] \rightarrow C_\mu(B^\beta)$, действующий по правилу

$$[\widehat{M}(y, \omega)](t) = \begin{cases} M_\omega(y(t), t, \omega t), & \omega \in [\omega_1, \infty), \\ 0, & \omega = \infty. \end{cases}$$

Из оценок (1.3), (1.4) и условий п. 1 нетрудно вывести равномерные относительно $y \in S_{r_2}$, $\omega \in [\omega_1, \infty)$ неравенства

$$\begin{aligned} \|\widehat{M}(y, \omega)\|_{C_\mu(B^\beta)} &\leq c\omega^{-(\frac{1}{2} + \delta - \beta - \mu)}, \\ \|D_y \widehat{M}(y, \omega)\|_{\text{Hom}(C_\mu(B^\beta), C_\mu(B^\beta))} &\leq c\omega^{-(\frac{1}{2} + \delta - \beta - \mu)}, \end{aligned}$$

где $D_y \widehat{M}$ – дифференциал Фреше оператора $\widehat{M}$ по y , $c = \text{const}$. Из этих неравенств следует непрерывность операторов $\widehat{M}$ и $D_y \widehat{M}$ в точке $(\overset{\circ}{y}, \infty)$. Применяя к уравнению

$$x - y - \widehat{M}(y, \omega) = 0$$

в окрестности точки $x = y = \overset{\circ}{y}$, $\omega = \infty$ теорему о неявных операторах, найдем такие числа $\omega_2 \geq \omega_1$ и $r_0 \geq 0$, что при $\omega \geq \omega_2$ каждому решению $x_\omega \in S_{r_0}$ уравнения (1.1) отвечает решение $y_\omega \in S_{r_2}$ уравнения (1.7). Отсюда и следует единственность решения уравнения (1.1) при $\omega > \omega_2$ в шаре S_{r_0} . Утверждение 1 теоремы 1.1 полностью доказано.

5. Утверждение 2 теоремы 1.1 вытекает из определения почти периодической вектор-функции (см. п. 2), соотношений (1.6), (1.9), (1.19), принадлежности $\widehat{G} \in \text{Hom}(C(B^{\delta_1}), C(B^{\gamma_0}))$ и следующих двух лемм.

ЛЕММА 1.3. *Оператор $\widehat{G}$, заданный формулой (1.24), каждую почти периодическую вектор-функцию $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow B^{\delta_1}$ переводит в почти периодическую вектор-функцию $(\widehat{G}\varphi): \mathbb{R} \rightarrow B^{\gamma_0}$.*

ЛЕММА 1.4. *Пусть E_1 и E_2 – банаховы пространства, S_0 – некоторый шар в E_1 и $z: S_0 \times \mathbb{R} \rightarrow E_2$ – такое отображение, что $z(y, t)$ равномерно относительно t непрерывно по y и при каждом фиксированном y почти периодически по t . Тогда из почти периодичности вектор-функции $y: \mathbb{R} \rightarrow E_1$, все значения которой принадлежат S_0 , следует почти периодичность вектор-функции $\widehat{z}(t) \equiv z[y(t), t]$.*

Лемма 1.3 вытекает из определения почти периодической вектор-функции, структуры и непрерывности оператора $\widehat{G}: C(B^{\delta_1}) \rightarrow C(B^{\gamma_0})$.

Лемма 1.4 доказывается так же, как и лемма 4.1 гл. VII монографии [19], и, по существу, вытекает из компактности замыкания множества значений вектор-функции $y(t)$.

Утверждение 3 теоремы 1.1 вытекает из следующих двух простых результатов.

1. Если вектор-функция $y_\omega(t)$ является $(\alpha_0 \omega^{-1})$ -периодической, то и вектор-функция $x_\omega(t)$, связанная с $y_\omega(t)$ соотношением (1.6), является $(\alpha_0 \omega^{-1})$ -периодической.

2. Единственная в шаре $\overset{\circ}{S}$ (см. п. 4) вектор-функция $u_\omega(t)$ такая, что $y_\omega(t) = u_\omega(t) + \overset{\circ}{y}$ – решение уравнения (1.7), является $(\alpha_0 \omega^{-1})$ -периодической.

Действительно, вектор-функция $\hat{y}_\omega(t) = y_\omega(t + \alpha_0 \omega^{-1})$ также является решением уравнения (1.7) и при этом $\hat{y}_\omega - \overset{\circ}{y}$ лежит в $\overset{\circ}{S}$, а значит, $u_\omega(t) = u_\omega(t + \alpha_0 \omega^{-1})$.

6. В этом пункте докажем утверждение 4 теоремы 1.1. Анализ замены переменной (1.6) показывает, что для этого достаточно аналогичное утверждение доказать для решения $y_\omega(t)$ уравнения (1.7), существование и относительная единственность которого установлены в п. 4. Определим некоторые вспомогательные банаховы пространства, которые понадобятся в ходе доказательства.

Через $H_{\eta,\lambda,\gamma}$, $\eta \geq \gamma \geq 0$, $\lambda \in (0, 1]$, обозначим банахово пространство вектор-функций $x: [0, \infty) \rightarrow B^\gamma$, удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned} \|x\|_{H_{\eta,\lambda,\gamma}} = & \sup_{t \in [0, \infty)} \|x(t)\|_{B^\gamma} + \sup_{t \in (0, 1]} t^{\eta-\gamma} \|x(t)\|_{B^\eta} \\ & + \sup_{1 \geq t' > t > 0} t^{\eta-\gamma+\lambda} \frac{\|x(t') - x(t)\|_{B^\eta}}{(t' - t)^\lambda} + \|x\|_{C_\lambda^{[1, \infty)}(B^\eta)} < \infty, \end{aligned}$$

где

$$\|x\|_{C_\lambda^{[1, \infty)}(B^\eta)} = \sup_{t \in [1, \infty)} \|x(t)\|_{B^\eta} + \sup_{\infty > t' > t \geq 1} \frac{\|x(t') - x(t)\|_{B^\eta}}{(t' - t)^\lambda}.$$

Через $H_{\eta,\lambda,\gamma}^{[0, \ell]}$, $\ell \in (0, 1]$, обозначим аналогичное пространство вектор-функций, заданных на отрезке $t \in [0, \ell]$ и удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned} \|x\|_{H_{\eta,\lambda,\gamma}^{[0, \ell]}} = & \sup_{t \in [0, \ell]} \|x(t)\|_{B^\gamma} + \sup_{t \in [0, \ell]} t^{\eta-\gamma} \|x(t)\|_{B^\eta} \\ & + \sup_{\ell \geq t' > t \geq 0} t^{\eta-\gamma+\lambda} \frac{\|x(t') - x(t)\|_{B^\eta}}{(t' - t)^\lambda} < \infty. \end{aligned}$$

Перейдем к непосредственному исследованию устойчивости решения y_ω уравнения (1.7). Сделаем в (1.7) замену переменных $y = u + \overset{\circ}{y}$ и таким образом перейдем к изучению устойчивости решения $u_\omega = y_\omega - \overset{\circ}{y}$ уравнения

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - Su = & F(u + \overset{\circ}{y}) - F(\overset{\circ}{y}) - \Psi(\overset{\circ}{y}) - [(DF)(\overset{\circ}{y})]u - [(D\Psi)(\overset{\circ}{y})]u \\ & + f(u + \overset{\circ}{y}, t, \omega t) + \chi(u + \overset{\circ}{y}, t, \omega t) + R(u + \overset{\circ}{y}, t, \omega). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Пусть $s \in \mathbb{R}$. На полуоси $[s, \infty)$ рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.25) с начальным условием

$$u(s) = u_0, \quad (1.26)$$

где $u_0 \in B^\beta$.

Равномерная (относительно параметра ω и начальных значений) экспоненциальная устойчивость решения u_ω уравнения (1.25) вытекает из следующих двух лемм.

ЛЕММА 1.5. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие положительные числа ρ и ω_0 , что при любых $s \in \mathbb{R}$, $\|u_0\|_{B^\beta} \leq \rho$ и $\omega > \omega_0$ существует единственное на полуоси $[s, \infty)$ решение $u(t)$ задачи (1.25), (1.26). При этом для $\hat{u}(t) = u(t + s)$, $t \geq 0$, выполняется оценка*

$$\|\hat{u}(t)\|_{H_{\gamma_0, \mu, \beta}} \leq \varepsilon,$$

где γ_0, μ, β – те же, что и выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В задаче (1.25), (1.26) введем вместо $t - s$ новую переменную, сохранив за ней прежнее обозначение t . После этого от полученной

задачи Коши перейдем к эквивалентному интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) = & e^{tS} u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)S} \{ F(\hat{u}(\tau) + \overset{\circ}{y}) - F(\overset{\circ}{y}) - [DF(\overset{\circ}{y})] \hat{u} - \Psi(\overset{\circ}{y}) \\ & - [(D\Psi)(\overset{\circ}{y})] u + f(\hat{u} + \overset{\circ}{y}, \tau + s, \omega(\tau + s)) \\ & + \chi(\hat{u} + \overset{\circ}{y}, \tau + s, \omega(\tau + s)) \\ & + R(\hat{u} + \overset{\circ}{y}, \tau + s, \omega) \} d\tau \equiv [T_\omega(u_0)] \hat{u}(t). \end{aligned} \quad (1.27)$$

С помощью оценок (1.20)–(1.22), леммы 1.1 и простого неравенства

$$\|e^{tS} u_0\|_{H_{\gamma_0, \mu, \beta}} \leq c_0 \|u_0\|_{B^\beta}, \quad c_0 = \text{const},$$

устанавливается существование таких чисел $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$, $\omega_0 > 0$ и $\rho > 0$, что при $\omega > \omega_0$, $\|u_0\|_{B^\beta} \leq \rho$ и $\|\hat{u}\|_{H_{\gamma_0, \mu, \beta}} \leq \varepsilon_0$ выполняются оценки

$$\|D_{\hat{u}} [\hat{T}_\omega(u_0) \hat{u}]\|_{\text{Hom}(H_{\gamma_0, \mu, \beta}, H_{\gamma_0, \mu, \beta})} < \frac{1}{2}, \quad (1.28)$$

$$\|\hat{T}_\omega(u_0) 0\|_{H_{\gamma_0, \mu, \beta}} \leq \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (1.29)$$

Не имея возможности изложить полные доказательства неравенств (1.28), (1.29) ввиду их громоздкости, приведем лишь маленький фрагмент вывода оценки (1.28). Именно, оценим в $H_{\gamma_0, \mu, \beta}$ одно слагаемое выражения $D_{\hat{u}}[\hat{T}_\omega(u_0)]\hat{v}$:

$$\begin{aligned} J_\omega(t) = & \int_0^t e^{(t-\tau)S} \left([I + (DM_\omega)(\hat{u}(\tau) + \overset{\circ}{y}, \tau + s, \omega(\tau + s))]^{-1} - I \right) A \hat{v}(\tau) d\tau \\ \equiv & \int_0^t e^{(t-\tau)S} K_\omega(\hat{u}, \hat{v}) d\tau, \end{aligned}$$

когда $\|\hat{u}\|_{H_{\gamma_0, \mu, \beta}} \leq 1$, $\|\hat{v}\|_{H_{\gamma_0, \mu, \beta}} \leq 1$, $\omega > \omega^*$. В силу условий п. 1 и оценки (1.21) имеем

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (0, 1]} t^{\gamma_0 - \beta} \|(-A)^{\gamma_0} J_\omega(t)\|_B & \leq c_1 \omega^{\delta_1 - 1/2} \sup_{t \in (0, 1]} t^{\gamma_0 - \beta} \int_0^t (t - \tau)^{-\gamma_0 + \delta_1} \tau^{-\gamma_0 + \beta} d\tau \\ & \leq c_2 \omega^{\delta_1 - 1/2} \sup_{t \in (0, 1]} t^{-\gamma_0 + \delta_1 + 1} = c_2 \omega^{\delta_1 - 1/2}, \quad c_1, c_2 = \text{const}. \end{aligned}$$

Используя еще и оценку (1.22), получим

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < t_1 < t_2 \leq 1} t_1^{\gamma_0 - \beta + \mu} (t_2 - t_1)^{-\mu} \|J_\omega(t_2) - J_\omega(t_1)\|_{B^{\gamma_0}} \\ & \leq \sup_{0 < t_1 < t_2 \leq 1} t_1^{\gamma_0 - \beta + \mu} (t_2 - t_1)^{-\mu} \left(\left\| \int_0^{t_1} (e^{(t_2 - \tau)S} - e^{(t_1 - \tau)S}) K_\omega(\hat{u}, \hat{v}) d\tau \right\|_{B^{\gamma_0}} \right. \\ & \quad \left. + \left\| \int_{t_1}^{t_2} e^{(t_2 - \tau)S} K_\omega(\hat{u}, \hat{v}) d\tau \right\|_{B^{\gamma_0}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \omega^{\delta_1-1/2} \sup_{0 < t_1 < t_2 \leq 1} t_1^{\gamma_0-\beta+\mu} \left(c_3 \int_0^{t_1} (t_1 - \tau)^{-\gamma_0+\delta_1-\mu} \tau^{-\gamma_0+\beta} d\tau \right. \\
&\quad \left. + c_4 (t_2 - t_1)^{-\mu} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \tau)^{-\gamma_0+\delta_1} \tau^{-\gamma_0+\beta} d\tau \right) \\
&\leq c_5 \omega^{\delta_1-1/2} \sup_{0 < t_1 < t_2 \leq 1} t_1^{\gamma_0-\beta+\mu} \left(t_1^{-2\gamma_0+\delta_1+\beta-\mu+1} + (t_2 - t_1)^{-\mu} \right. \\
&\quad \left. \times (t_2 - t_1)^{-\gamma_0+\delta_1+1} t_1^{-\gamma_0+\beta} \right) = c_6 \omega^{\delta_1-1/2}, \quad c_3, c_4, c_5, c_6 = \text{const}.
\end{aligned}$$

Несложно выводится и оценка

$$\|J_\omega\|_{C_\mu^{[1,\infty)}(B^{\gamma_0})} \leq c_7 \omega^{\delta_1-1/2}, \quad c_7 = \text{const}.$$

В результате видим, что величина $\|J_\omega\|_{H_{\gamma_0,\mu,\beta}}$ является бесконечно малой при $\omega \rightarrow \infty$ равномерно относительно вектор-функций $\hat{u}$ и $\hat{v}$, принадлежащих единичному шару в $H_{\gamma_0,\mu,\beta}$. Изложение одного фрагмента доказательства оценки (1.28) на этом завершено.

Из оценок (1.28), (1.29) следует, что оператор $\hat{T}_\omega(u_0)$ при $\omega > \omega_0$ и $\|u_0\|_{B^\beta} \leq \rho$ удовлетворяет в шаре $\|\hat{u}\|_{H_{\gamma_0,\mu,\beta}} \leq \varepsilon_0$ принципу сжатых отображений, из которого и следует существование ограниченного решения $u(t)$. Его единственность вытекает из легко устанавливаемой локальной (во времени) единственности решений уравнения (1.1). Лемма доказана.

ЛЕММА 1.6. *Существуют такие положительные числа ρ_1, ω_1 и c , что для любых двух решений $u(t)$ и $v(t)$, $t \geq s$, уравнения (1.25) при $\omega > \omega_1$, удовлетворяющих соответственно оценке $\|u(s)\|_{B^\beta} \leq \rho_1$, $\|v(s)\|_{B^\beta} \leq \rho_1$, справедливо неравенство*

$$\|u(t) - v(t)\|_{B^\beta} \leq c \|u(s) - v(s)\|_{B^\beta} e^{-\frac{a_0}{2}(t-s)}, \quad t \geq s,$$

где $a_0 > 0$ – то же число, что и в (1.20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На числа ρ_1, ω_1 наложим первое ограничение: $\rho_1 \leq \rho$, $\omega_1 \geq \omega_0$, где ρ, ω_0 – те же, что и в лемме 1.5. Тогда решения $u(t)$ и $v(t)$ в силу леммы 1.5 существуют при $t \geq s$ и, обозначив $\hat{u}(t) = u(t+s)$, $\hat{v}(t) = v(t+s)$, выведем из равенства (1.25) для $u(t)$ и такого же равенства для $v(t)$ соотношение

$$\begin{aligned}
\hat{u}(t) - \hat{v}(t) &= e^{tS}(\hat{u}(0) - \hat{v}(0)) + \int_0^t e^{(t-\tau)S} [F(\hat{u}(\tau) + \overset{\circ}{y}) - F(\hat{v}(\tau) + \overset{\circ}{y}) \\
&\quad - [(DF)(\overset{\circ}{y})](\hat{u} - \hat{v}) + f(\hat{u}(\tau) + \overset{\circ}{y}, \tau + s, \omega(\tau + s)) \\
&\quad - f(\hat{v}(\tau) + \overset{\circ}{y}, \tau + s, \omega(\tau + s)) + \chi(\hat{u}(\tau) + \overset{\circ}{y}, \tau + s, \omega(\tau + s)) \\
&\quad - \chi(\hat{v}(\tau) + \overset{\circ}{y}, \tau + s, \omega(\tau + s)) - [(D\Psi)(\overset{\circ}{y})](\hat{u}(\tau) - \hat{v}(\tau)) \\
&\quad + R(\hat{u}(\tau) + \overset{\circ}{y}, \tau + s, \omega) - R(\hat{v}(\tau) + \overset{\circ}{y}, \tau + s, \omega)] d\tau.
\end{aligned}$$

Умножим последнее равенство на $e^{(a_0/2)t}$ и обозначим $[\hat{u}(t) - \hat{v}(t)]e^{(a_0/2)t} = \varphi(t)$. Получим

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= e^{t(S + \frac{a_0}{2}I)} (\hat{u}(0) - \hat{v}(0)) \\
&+ \int_0^t e^{(t-\tau)(S + \frac{a_0}{2}I)} \int_0^1 [(DF)(\theta \hat{u}(\tau) + (1-\theta)\hat{v}(\tau) + \overset{\circ}{y}) - (DF)(\overset{\circ}{y})] d\theta \varphi(\tau) d\tau \\
&+ \int_0^t e^{(t-\tau)(S + \frac{a_0}{2}I)} \int_0^1 (Df)(\theta \hat{u}(\tau) + (1-\theta)\hat{v}(\tau), \tau + s, \omega(\tau + s)) d\theta \varphi(\tau) d\tau \\
&+ \int_0^t e^{(t-\tau)(S + \frac{a_0}{2}I)} \int_0^1 [(D\chi)(\theta u(\tau) + (1-\theta)v(\tau), \tau + s, \omega(\tau + s)) \\
&\quad - (D\Psi)(\overset{\circ}{y})] d\theta \varphi(\tau) d\tau \\
&+ \int_0^t e^{(t-\tau)(S + \frac{a_0}{2}I)} \int_0^1 (DR)(\theta \hat{u}(\tau) + (1-\theta)\hat{v}(\tau) + \overset{\circ}{y}, \tau + s, \omega) d\theta \varphi(\tau) d\tau \\
&\equiv e^{(t-\tau)(S + \frac{a_0}{2}I)} (\hat{u}(0) - \hat{v}(0)) + \overset{\square}{T}_\omega \varphi.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Те же подходы, что используются при доказательстве леммы 1.5, позволяют установить существование таких значений ρ_1 и ω_1 , что при $\omega > \omega_1$ и $\|\hat{u}(0)\|_{B^\beta} < \rho_1$, $\|\hat{v}(0)\|_{B^\beta} < \rho_1$ справедлива оценка

$$\|\overset{\square}{T}_\omega\|_{\text{Hom}(H_{\gamma_0, \mu, \beta}, H_{\gamma_0, \mu, \beta})} < \frac{1}{2}, \tag{1.31}$$

где γ_0, μ – те же, что и выше. Из соотношений (1.30), (1.31) следует указанное в лемме неравенство, которое и требовалось доказать.

7. Докажем утверждение 5 теоремы 1.1 о неустойчивости решения x_ω . Легко видеть, что с помощью замены переменных (1.6) доказательство неустойчивости x_ω может быть выведено из аналогичного свойства решения y_ω уравнения (1.7), существование и относительная единственность которого установлены в п. 4. Точнее, утверждение 5 вытекает из следующего результата.

ЛЕММА 1.7. *Существуют такие положительные числа r_1 и ω_1 , что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся вектор a_ε : $\|a_\varepsilon - y_\omega(0)\|_{B^\beta} \leq \varepsilon$, и число $t_\varepsilon > 0$, при которых задача Коши для уравнения (1.7) с начальным условием $y(0) = a_\varepsilon$ имеет при $\omega > \omega_1$ на участке $t \in [0, t_\varepsilon]$ единственное решение $\hat{y}_\varepsilon(t)$, и при этом выполняется неравенство*

$$\|\hat{y}_\varepsilon(t_\varepsilon) - y_\omega(t_\varepsilon)\|_{B^\beta} \geq r_1.$$

Доказательству леммы 1.7 предположим два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 1.8. *Пусть $r_2 > 0$ – такое число, что шар в пространстве B^β с центром $\overset{\circ}{y}$ и радиусом r_2 принадлежит множеству G_1 . Тогда для любого $r \in (0, r_2)$ найдутся такие числа $\ell = \ell(r)$ и $c_0 = c_0(r)$, что для любого $s \in \mathbb{R}$ и любого вектора a , принадлежащего шару $\|a - \overset{\circ}{y}\|_{B^\beta} \leq r$, задача Коши для уравнения (1.7) с начальным условием $y(s) = a$ имеет при $\omega > \omega^*$ и $t \in [s, s + \ell]$ единственное решение $\hat{y}(t)$, для которого выполняется оценка*

$$\|\hat{y}(t + s) - \overset{\circ}{y}\|_{H_{\gamma_0, \mu, \beta}^{[0, \ell]}} \leq c_0, \tag{1.32}$$

где ω^* – то же, что и в п. 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вектор-функции $u(t) = \hat{y}(t + s) - \mathring{y}$ выпишем соответствующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} u(t) = e^{tA}(a - \mathring{y}) + \int_0^t e^{(t-\tau)A} [F(u(\tau) + \mathring{y}) - F(\mathring{y}) - \Psi(\mathring{y}) \\ + f(u(\tau) + \mathring{y}, \tau + s, \omega(\tau + s)) + \chi(u(\tau) + \mathring{y}, \tau + s, \omega(\tau + s)) \\ + R(u(\tau) + \mathring{y}, \tau + s, \omega)] d\tau \equiv [N(u)](t), \end{aligned} \quad (1.33)$$

и положим $r_3 = 2\|e^{tA}(a - \mathring{y})\|_{H_{\gamma_0, \mu, \beta}^{[0, 1]}} + 1$. После этого, используя неравенства (1.21), (1.22), подберем такое $\ell \in (0, 1]$, что при $\omega > \omega^*$ и $u \in S_{r_3} \equiv \{u: \|u\|_{H_{\gamma_0, \mu, \beta}^{[0, \ell]}} \leq r_3\}$ выполняются оценки

$$\|N(0)\|_{C_{\gamma_0, \mu, \beta}^{[0, \ell]}} < \frac{r_3}{2}, \quad \|DN(u)\|_{\text{Hom}(H_{\gamma_0, \mu, \beta}^{[0, \ell]}, H_{\gamma_0, \mu, \beta}^{[0, \ell]})} < \frac{1}{2}.$$

Из этих оценок следует, что оператор N в шаре S_{r_3} является сжатием, откуда согласно принципу сжимающих отображений следует существование при $t \in [s, s + \ell]$ решения уравнения (1.7) с начальным условием $y(s) = a$. Его единственность вытекает из единственности соответствующего решения уравнения (1.1). Оценка (1.32), очевидно, имеет место с постоянной $c = r_3$. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.9. Пусть $y_\omega(t)$ – ограниченное решение уравнения (1.7), существование и относительная единственность которого установлены в п. 4. Тогда найдутся такие числа ρ_0 , ℓ_1 , ω_1 и c_1 , что при $\omega > \omega_1$ для вектора $a \in B^\beta$, удовлетворяющего при некотором $s \in \mathbb{R}$ условию $\|y_\omega(s) - a\|_{B^\beta} \leq \rho_0$, существует единственное решение $\hat{y}(t)$ уравнения (1.7) с начальным условием $\hat{y}(s) = a$ на участке $t \in [s, s + \ell_1]$ и выполняется оценка

$$\|\hat{y}(t + s) - y_\omega(t + s)\|_{H_{\gamma_0, \mu, \beta}^{[0, \ell_1]}} \leq c_1 \|\hat{y}(s) - y_\omega(s)\|_{B^\beta}. \quad (1.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть c_0 , r_2 – те же, что и в лемме 1.8. Положим $\rho_0 = r_2/3$ и выберем такое $\omega_1 > 0$, что $\|y_\omega - \mathring{y}\|_{C(B^\beta)} < r_2/3$ при $\omega > \omega_1$. Тогда для вектора $a \in B^\beta$, удовлетворяющего при некотором $s \in \mathbb{R}$ неравенству $\|y_\omega(s) - a\|_{B^\beta} < \rho_0$, в силу леммы 1.8 найдется такое $\ell = \ell(2r_2/3)$, что при $\omega > \omega_1$ и $t \in [s, s + \ell]$ существует единственное решение $\hat{y}(t)$ уравнения (1.7) с начальным условием $\hat{y}(s) = a$ и выполняется оценка

$$\|\hat{y}(t + s) - \mathring{y}\|_{H_{\gamma_0, \mu, \beta}^{[0, \ell]}} \leq c_0. \quad (1.35)$$

Пусть $\hat{y}(t) - y_\omega(t) = v(t)$. Тогда $v(t)$ является решением при $t \in [s, s + \ell]$ уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} - Sv = F(y_\omega + v) - F(y_\omega) - [(DF)(\mathring{y})]v + f(y_\omega + v, t, \omega t) \\ - f(y_\omega, t, \omega t) + \chi(y_\omega + v, t, \omega t) - \chi(y_\omega, t, \omega t) \\ - [(D\Psi)(\mathring{y})]v + R(y_\omega + v, t, \omega) - R(y_\omega, t, \omega). \end{aligned}$$

Сделав замену $v(t+s) = \overset{\square}{v}(t)$, $y_\omega(t+s) = \overset{\square}{y}_\omega(t)$ и воспользовавшись формулой конечных приращений, получим для вектор-функции $\overset{\square}{v}(t)$, $0 \leq t \leq \ell$, представление

$$\begin{aligned}
\overset{\square}{v}(t) &= e^{tS} \overset{\square}{v}(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)S} \int_0^1 [(DF)(\overset{\square}{y}_\omega + \theta \overset{\square}{v}) - (DF)(\overset{\circ}{y})] d\theta \overset{\square}{v}(\tau) d\tau \\
&\quad + \int_0^t e^{(t-\tau)S} \int_0^1 (Df)(\overset{\square}{y}_\omega + \theta \overset{\square}{v}, \tau + s, \omega(\tau + s)) d\theta \overset{\square}{v}(\tau) d\tau \\
&\quad + \int_0^t e^{(t-\tau)S} \int_0^1 [(D\Psi)(\overset{\square}{y}_\omega + \theta \overset{\square}{v}) - (D\Psi)(\overset{\circ}{y})] d\theta \overset{\square}{v}(\tau) d\tau \\
&\quad + \int_0^t e^{(t-\tau)S} \int_0^1 (D\tilde{\chi})(\overset{\square}{y}_\omega + \theta \overset{\square}{v}, \tau + s, \omega(\tau + s)) d\theta \overset{\square}{v}(\tau) d\tau \\
&\quad + \int_0^t e^{(t-\tau)S} \int_0^1 (DR)(\overset{\square}{y}_\omega + \theta \overset{\square}{v}, \tau + s, \omega) d\theta \overset{\square}{v}(\tau) d\tau \\
&\equiv e^{tS} \overset{\square}{v}(0) + ([P_\omega(\overset{\square}{v})](\overset{\square}{v}))(t) \equiv e^{tS} \overset{\square}{v}(0) + [P_\omega(\overset{\square}{v})](t), \tag{1.36}
\end{aligned}$$

где $\tilde{\chi}(y, t, \tau) = \chi(y, t, \tau) - \Psi(y)$, а $[P_\omega(u)]v$ — естественным образом определенный, линейный относительно v оператор, зависящий от u , вообще говоря, нелинейно. Выбирая теперь такое число $\ell_1 \in (0, \ell)$, что при всех $\omega > \omega_1$ и всех вектор-функциях $\hat{y}$, удовлетворяющих условию (1.35), справедлива оценка

$$\|P(\overset{\square}{v})\|_{\text{Hom}(H_{\gamma_0, \mu, \beta}^{[0, \ell_1]}, H_{\gamma_0, \mu, \beta}^{[0, \ell_1]})} < \frac{1}{2},$$

легко выводим из (1.36) оценку (1.34) с константой $c_1 = 2\|e^{tA}\|_{\text{Hom}(B^\beta, H_{\gamma_0, \mu, \beta}^{[0, \ell_1]})}$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.7. Здесь мы воспользуемся методом, который применялся в работе [23] при доказательстве леммы 4.1 в гл. II. Вначале, опираясь на лемму 1.9, подберем такие положительные числа ρ_0 , ℓ_1 и ω_1 , что при $\omega > \omega_1$ для любого $s \in \mathbb{R}$ и любого вектора $a \in B^\beta$, удовлетворяющих условию $\|a - y_\omega(s)\| < \rho_0$, задача Коши для уравнения (1.7) с начальным условием $\hat{y}(s) = a$ имеет при $t \in [s, s + \ell_1]$ решение $\hat{y}(t)$ и справедлива оценка (1.34). Предположим теперь, что лемма 1.7 неверна. Тогда найдется сколь угодно большое число ω , для которого при любом $\varepsilon \in (0, \rho_0)$ существует такое $\eta \in (0, \varepsilon)$, что все решения $\hat{y}(t)$ уравнения (1.7), удовлетворяющие оценке $\|\hat{y}(0) - y_\omega(0)\|_{B^\beta} < \eta$, удовлетворяют и неравенству

$$\|\hat{y}(t) - y_\omega(t)\|_{B^\beta} < \varepsilon, \quad t \in [0, \infty). \tag{1.37}$$

Обозначим $\hat{y}(t) - y_\omega(t) = v(t)$, $t \geq 0$, и рассмотрим семейство операторов сдвига $V(t, 0)$, $0 \leq t < \infty$, по траекториям вектор-функций $v(t)$: $V(t, 0)v(0) = v(t)$, $t \geq 0$. При $0 < s < \infty$ и $\|v_0\|_{B^\beta} < \varepsilon$ положим

$$V(t, s)v_0 = \hat{y}(t) - y_\omega(t),$$

где $\hat{y}(t)$ – решение уравнения (1.7), удовлетворяющее условию $\hat{y}(s) = y_\omega(s) + v_0$, причем $t \geq s$ меняется в том промежутке, где определено решение $\hat{y}(t)$ и $\|\hat{y}(t)\|_{B^\beta} < \varepsilon$. Обозначим для краткости $V(k\ell_1, (k-1)\ell_1) \equiv V_k$, $k = 0, 1, \dots$. Тогда для любого натурального k и $\|v_0\|_{B^\beta} < \eta$ получим представление

$$V(n\ell_1, 0)v_0 = V_n V_{n-1} \dots V_1 v_0. \quad (1.38)$$

Отметим вытекающее из соотношения (1.36) при $t = (k-1)\ell_1$ равенство

$$\begin{aligned} V_k v_0 &= e^{\ell_1 S} v_0 + \{\hat{P}_\omega [\hat{y}(t + (k-1)\ell_1) - y_\omega(t + (k-1)\ell_1)]\}(k\ell_1) \\ &= e^{\ell_1 S} v_0 + \hat{P}_k(v_0), \end{aligned} \quad (1.39)$$

где $\hat{y}(t)$ – решение уравнения (1.7) с начальным условием $\hat{y}((k-1)\ell_1) = y_\omega((k-1)\ell_1) + v_0$. В дальнейшем важную роль играет представление (1.38) оператора сдвига $V(t, 0)$ при неограниченно растущих значениях $t = n\ell_1$ в виде произведений операторов V_k . При этом вместо шага ℓ_1 можно было бы взять любое кратное ему $m\ell_1$, и мы бы получили представление $V(nm\ell_1, 0)$ в виде произведения операторов

$$\tilde{V}_k = V(km\ell_1, (k-1)m\ell_1), \quad k = 1, 2, \dots$$

В связи с этим будем считать шаг ℓ_1 столь большим, что выполняются оценки

$$\|e^{\ell_1 S} P_-\|_{\text{Hom}(B^\beta, B^\beta)} = c_1 < \frac{1}{2}, \quad \|e^{\ell_1 S} P_+\|_{\text{Hom}(B^\beta, B^\beta)} = c_2 > 1, \quad (1.40)$$

где $P_\pm$ – спектральные проекторы оператора S , введенные в п. 4. Эти оценки устанавливаются с помощью известного интегрального представления полугруппы e^{tS} через резольвенту оператора S . В частности, вторая из них следует из равенства

$$P_+ a = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} e^{-\lambda t} (\lambda I + S)^{-1} e^{tS} P_+ a \, d\lambda, \quad a \in B^\beta,$$

где γ_+ – контур, лежащий строго в правой полуплоскости и ограничивающий ту часть спектра оператора S , которая лежит в этой полуплоскости. Отметим еще, что из представления оператора $\hat{P}_k$ (1.39), (1.36) нетрудно вывести оценку

$$\|\hat{P}_k(v_0)\|_{B^\beta} \leq \alpha \|v_0\|_{B^\beta}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.41)$$

где коэффициент $\alpha = \alpha(\varepsilon, \omega) > 0$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty} \alpha(\varepsilon, \omega) = 0.$$

Пусть $a \in (0, c_2/c_1)$. Возьмем ε столь малым, а ω столь большим, чтобы величина α в неравенстве (1.41) удовлетворяла соотношениям

$$\alpha < \frac{(c_2 - ac_1)a}{(\|P_+\| + a\|P_-\|)(a+1)}, \quad \alpha < \frac{(c_2 - 1)a}{\|P_+\|(a+1)}, \quad (1.42)$$

где через $\|P_{\pm}\|$ ради краткости обозначены $\|P_{\pm}\|_{\text{Hom}(B^{\beta}, B^{\beta})}$. Рассмотрим в пространстве B^{β} множество Σ векторов x , удовлетворяющих неравенствам

$$\|x\|_{B^{\beta}} < \varepsilon, \quad \|P_+x\|_{B^{\beta}} \geq a\|P_-x\|_{B^{\beta}}. \quad (1.43)$$

Покажем, что если $x \in \Sigma$, то³ $V_kx \in \Sigma$ и при $\|x\|_{B^{\beta}} < \eta$ и $n = 1, 2, \dots$ выполняется оценка

$$\|P_+V(n\ell_1, 0)x\|_{B^{\beta}} \geq b^n\|P_+x\|_{B^{\beta}}, \quad (1.44)$$

где $b = c_2 - \alpha\|P_+\|\frac{a+1}{a} > 1$. Начнем с доказательства первого утверждения. Если $x \in \Sigma$, то из определения оператора V_k следует неравенство $\|V_kx\|_{B^{\beta}} < \varepsilon$. Далее из (1.40), (1.41) и (1.43) находим

$$\begin{aligned} \|P_+V_kx\|_{B^{\beta}} &= \|P_+e^{\ell_1 S}x + P_+\widehat{P}_k(x)\|_{B^{\beta}} \geq c_2\|P_+x\|_{B^{\beta}} - \alpha\|P_+\|\|x\|_{B^{\beta}} \\ &\geq c_2\|P_+x\|_{B^{\beta}} - \alpha\|P_+\|(\|P_+x\|_{B^{\beta}} + \|P_-x\|_{B^{\beta}}) \\ &\geq \left(c_2 - \alpha\|P_+\|\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right)\|P_+x\|_{B^{\beta}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|P_-V_kx\|_{B^{\beta}} &= \|P_-e^{\ell_1 S}x + P_-\widehat{P}_k(x)\|_{B^{\beta}} \\ &\leq c_1\|P_-x\|_{B^{\beta}} + \alpha\|P_-\|(\|P_+x\|_{B^{\beta}} + \|P_-x\|_{B^{\beta}}) \\ &\leq \left(c_1 + \alpha\|P_-\|\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right)\|P_+x\|_{B^{\beta}}. \end{aligned}$$

Отсюда согласно (1.42) следует соотношение $V_kx \in \Sigma$.

Неравенство (1.44) докажем методом математической индукции. При $n = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \|P_+V_1x\|_{B^{\beta}} &\geq c_1\|P_+x\|_{B^{\beta}} - \alpha\|P_1\|\left(\|P_+x\|_{B^{\beta}} + \frac{1}{a}\|P_+x\|_{B^{\beta}}\right) \\ &= \left(c_2 - \alpha\|P_1\|\frac{a+1}{a}\right)\|P_+x\|_{B^{\beta}}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Если предположить, что (1.44) выполнено при каком-либо n , то, учитывая тот факт, что $V(n\ell_1, 0)x \in \Sigma$, аналогично (1.45) найдем

$$\begin{aligned} \|P_+V_n(n\ell_1, 0)x\|_{B^{\beta}} &\geq \left(c_2 - \alpha\|P_1\|\frac{a+1}{a}\right)\|P_+V(n\ell_1, 0)x\|_{B^{\beta}} \\ &\geq b^{n+1}\|P_+x\|_{B^{\beta}}. \end{aligned}$$

Итак, неравенство (1.44) доказано при любом n . Из него следует, что $\|P_+V_n(n\ell_1, 0)x\|_{B^{\beta}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, если $P_+x \neq 0$. Это противоречит предположению (1.37), согласно которому

$$\|P_+V_n(n\ell_1, 0)x\|_{B^{\beta}} \leq \varepsilon\|P_+\|.$$

Лемма доказана.

³В том случае, когда при построении операторов V_k вместо шага ℓ_1 используется кратное $m\ell_1$ дополнительно нужно предполагать, что V_k определен на x .

§ 2. Исследование устойчивости линейных параболических уравнений в критическом случае

1. Здесь, как и в § 1, B – комплексное банахово пространство, A – линейный, вообще говоря, неограниченный оператор в B , порождающий аналитическую полугруппу. Пусть при некотором λ_0 оператор $(A - \lambda_0 I)^{-1}$ вполне непрерывен. Рассмотрим на прямой $t \in \mathbb{R}$ зависящее от большого параметра ω линейное абстрактное параболическое уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{1 \leq k \leq k_0} e^{i\mu_k \omega t} B_k(t)x + \sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} e^{i\nu_k \omega t} C_k(t)x. \quad (2.1)$$

Здесь k_0 – натуральное, а μ_k, ν_k – ненулевые вещественные числа; $B_k(t), C_k(t)$ – операторы, представленные суммами конечного числа гармоник относительно t с операторными коэффициентами

$$B_k(t) = \sum_{0 \leq |s| \leq k_1} e^{i\lambda_{ks}t} B_{ks}, \quad C_k(t) = \sum_{0 \leq |s| \leq k_1} e^{i\gamma_{ks}t} C_{ks},$$

где k_1 – натуральное, а $\lambda_{ks}, \gamma_{ks}$ – вещественные числа. Предположим, что существуют такие числа $\delta \in (0, 1/2)$, $\alpha \in [0, 1/2 + \delta)$ и $\delta_1 \in (0, \delta)$, что операторы B_{ks} и C_{ks} принадлежат пространству $\text{Hom}(B^\alpha, B^\delta)$ и в случае $\alpha > \delta$ операторы C_{ks} продолжаются до операторов из $\text{Hom}(B^\delta, B^{\delta_1})$. Предположим также, что оператор

$$C = \sum_{\nu_k + \nu_r = 0} (i\nu_r)^{-1} C_k(t) C_r(t)$$

не зависит от t и спектр оператора $S = A + C$ лежит в замкнутой левой комплексной полуплоскости ($\text{Re } \lambda \leq 0$), причем на мнимой оси находится m изолированных собственных значений с учетом кратностей.

Отметим, что в первой сумме гармоник в уравнении (2.1) можно было бы допустить присутствие и гармоники с нулевой частотой ($\mu_k = 0$), но с не зависящим от t коэффициентом B_k ; в этом случае мы отнесли бы B_k (в качестве слагаемого) к оператору A .

2. Для исследования вопроса об устойчивости по Ляпунову уравнения (2.1) при больших ω , следуя работам [20], [21], попытаемся найти формальные асимптотические разложения m решений уравнения (2.1), составляющих базис в некотором подпространстве решений, которое отвечает за устойчивость всего уравнения (2.1).

Пусть $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ – система собственных и присоединенных векторов оператора S , соответствующих собственным значениям, лежащим на мнимой оси. Через P обозначим спектральный проектор оператора S на линейную оболочку L_0 , порожденную системой u (корневое подпространство), а через D – матрицу нормальной жордановой формы оператора PSP , действующего в L_0 (с жордановым базисом u). Рассмотрим систему из m обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = Dy. \quad (2.2)$$

Обозначив через D_0 матрицу, полученную из D заменой ее диагональных элементов нулевыми, представим фундаментальную матрицу системы (2.2) в виде

$$e^{tD} = e^{t(D-D_0)} e^{tD_0}.$$

Возвращаясь в банахово пространство B и рассматривая сужение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Sx$$

на подпространство L_0 , находим его соответствующее решение в виде $U_0(t)e^{tD_0}$, где $U_0(t) = (u_1, u_2, \dots, u_m)e^{t(D-D_0)}$. Так что $U_0(t)$ является вектором-строкой, компоненты которого имеют вид $u_k e^{i\lambda_k t}$, где $i\lambda_k$ – собственные значения оператора A , лежащие на мнимой оси, и $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$.

Для осуществления описанного ниже алгоритма построения асимптотических разложений “критических” базисных решений уравнения (2.1) нам придется предположить, что для произвольного натурального n каждый оператор, являющийся произведением в любой последовательности n операторов из числа A , B_{ks} и C_{ks} , определен на всех корневых векторах u_i , $i = 1, \dots, m$. Отметим, что для справедливости теоремы 2.1 достаточно рассматривать $n \leq mn_0 + 2$, где n_0 – то же, что в этой теореме. Указанные разложения будем искать в виде

$$x(t) = [U_0(t) + \omega^{-1/2}(U_1(t) + V_1(t, \omega t)) + \omega^{-1}(U_2(t) + V_2(t, \omega t)) + \dots] e^{t(D_0 + \omega^{-1/2}D_1 + \omega^{-1}D_2 + \dots)}. \quad (2.3)$$

Здесь $U_i(t)$, $V_i(t, \tau)$ – векторы-строки длины m , компоненты которых являются конечными суммами гармоник по t и по t, τ соответственно с коэффициентами из B , причем $V_i(t, \tau)$ имеют нулевые средние по τ , а D_i , $i \geq 1$, – квадратные числовые матрицы порядка m . Последние подчиним следующему условию. Пусть $s_1, s_2, \dots, s_r$ – номера нулевых строк матрицы D_0 . Тогда потребуем, чтобы в матрицах D_i , $i \geq 1$, ненулевые элементы могли быть лишь в строках с этими же номерами: $s_1, s_2, \dots, s_r$.

Подставим правую часть соотношения (2.3) в уравнение (2.1) вместо x , приравняем коэффициенты в полученном равенстве при одинаковых степенях ω и каждое выписанное при этом уравнение разобьем, применив операцию усреднения по τ , на два уравнения. В одно из них войдут плавные, т. е. не зависящие от τ , вектор-функции, а во второе – быстроосциллирующие, т. е. зависящие от t, τ вектор-функции с нулевым по τ средним. В результате придем к рекуррентной последовательности уравнений, первое из которых имеет вид

$$V_1'(t, \tau) = \sum_{1 \leq k \leq k_0} e^{i\nu_k \tau} C_k(t) U_0(t). \quad (2.4)$$

Здесь и далее для краткости штрихом обозначается дифференцирование по τ , точкой – дифференцирование по t , а выражение $C_k(t)U_0(t)$ означает действие оператора $C_k(t)$ на каждую компоненту вектора $U_0(t)$. Поскольку средние $V_i(t, \tau)$ по τ предполагаются нулевыми, т. е. $\langle V_i(t, \tau) \rangle = 0$, то уравнение (2.4),

в котором t играет роль параметра, имеет единственное решение

$$V_1(t, \tau) = \sum_{1 \leq k \leq k_0} \frac{1}{i\nu_k} e^{i\nu_k \tau} C_k(t) U_0(t).$$

Вторым уравнением рекуррентной последовательности является тождественное равенство

$$\dot{U}_0 + U_0 D = S U_0.$$

Следующее уравнение, которое получаем в результате приравнивания быстро-осциллирующих (предыдущее уравнение – результат приравнивания плавных) коэффициентов при степени ω^0 , имеет вид

$$V_2'(t, \tau) = \sum_{1 \leq k \leq k_0} e^{i\mu_k \tau} B_k(t) U_0(t) + \left(\sum_{1 \leq k \leq k_0} e^{i\nu_k \tau} C_k(t) (U_1 + V_1) \right)_\tau,$$

где $(a(t, \tau))_\tau = a(t, \tau) - \langle a(t, \tau) \rangle$. Отсюда находим

$$V_2(t, \tau) = F_2(t, \tau) - \sum_{1 \leq k \leq k_0} \frac{1}{i\nu_k} e^{i\nu_k \tau} C_k U_1, \quad (2.5)$$

где

$$F_2(t, \tau) = \sum_{1 \leq k \leq k_0} \frac{1}{i\mu_k} e^{i\mu_k \tau} B_k(t) U_0(t) - \sum_{\substack{1 \leq k, s \leq k_0 \\ \nu_k + \nu_s \neq 0}} \frac{1}{\nu_s(\nu_k + \nu_s)} e^{i(\nu_k + \nu_s)\tau} C_k(t) C_s(t) U_0(t).$$

После этого приходим к уравнению для U_1 :

$$\dot{U}_1 + U_0 D_1 + U_1 D_0 = S U_1 + \Phi_2(t), \quad (2.6)$$

где

$$\Phi_2(t) = \left\langle \sum_{1 \leq k \leq k_0} e^{i\mu_k \tau} B_k(t) V_1 \right\rangle + \left\langle \sum_{1 \leq k \leq k_0} e^{i\nu_k \tau} C_k(t) F_2(t, \tau) \right\rangle.$$

Однозначная разрешимость уравнений вида (2.6) установлена в работе [21]. Для полноты изложения и ввиду важности этого вопроса докажем ее независимо. Пусть среди собственных значений $i\lambda_k$ матрицы D существуют ℓ различных: $i\lambda_{k_1}, i\lambda_{k_2}, \dots, i\lambda_{k_\ell}$, где k_p – максимальный из номеров собственных значений, равных $i\lambda_{k_p}$, $p = 1, \dots, \ell$. Тогда в матрице D_0 строки с номерами $k_1, k_2, \dots, k_\ell$ – нулевые, а в матрицах D_i , $i \geq 1$, наоборот, только в строках с этими номерами и могут быть ненулевые элементы.

Обозначим через $d_{k_1}, d_{k_2}, \dots, d_{k_\ell}$ неизвестные элементы первого столбца матрицы D_1 , стоящие в указанных строках. Через U_{11} и Φ_{21} обозначим первые компоненты векторов-строк U_1 и Φ_2 соответственно. Уравнение для U_{11} в силу (2.6) имеет вид

$$\dot{U}_{11} - S U_{11} = \Phi_{21}(t) - \sum_{s=1}^{\ell} u_{k_s} e^{i\lambda_{k_s} t} d_{k_s}.$$

Применив к нему проектор P , получим уравнение в L_0 . Из условия разрешимости последнего в пространстве почти периодических вектор-функций определим d_{k_s} , $s = 1, \dots, \ell$. После этого найдем U_{11} . Точно так же определяем и остальные неизвестные равенства (2.6). Таким образом найдем U_1 , D_1 , а по формуле (2.5) – и V_2 .

Покажем теперь, что описанным рекуррентным способом можно найти входящие в представление (2.3) вектор-строки U_i , V_i и матрицы D_i , $i \leq n$, для любого желаемого номера n . Пусть U_i , V_{i+1} и D_i известны при $i \leq k$, где k – некоторое натуральное число. Тогда рассмотрим уравнение для V_{k+2} :

$$\begin{aligned} V'_{k+2} &= -\dot{V}_k - \sum_{s=1}^k V_s D_{k-s} + A V_k + \left(\sum_{1 \leq s \leq k_0} e^{i\mu_s \tau} B_s(t) (U_k + V_k) \right)_{\tau} \\ &\quad + \left(\sum_{1 \leq s \leq k_0} e^{i\nu_s \tau} C_s(t) V_{k+1} \right)_{\tau} + \sum_{1 \leq s \leq k_0} e^{i\nu_s \tau} C_s(t) U_{k+1} \\ &\equiv \chi_{k+1}(t, \tau) + \sum_{1 \leq s \leq k_0} e^{i\nu_s \tau} C_s(t) U_{k+1}, \end{aligned}$$

откуда выразим V_{k+2} через U_{k+1} :

$$V_{k+2} = F_{k+1}(t, \tau) + \sum_{1 \leq k \leq k_0} \frac{1}{i\nu_s} e^{i\nu_s \tau} C_s(t) U_{k+1}. \quad (2.7)$$

Для U_{k+1} , в свою очередь, выводим уравнение

$$\begin{aligned} \dot{U}_{k+1} + \sum_{i=0}^{k+1} U_i D_{k+1-i} &= A U_{k+1} + \left\langle \sum_{1 \leq k \leq k_0} e^{i\mu_s \tau} B_s V_{k+1} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \sum_{1 \leq k \leq k_0} e^{i\nu_s \tau} C_s V_{k+2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из равенств (2.7), (2.8) получим для неизвестных U_{k+1} , D_{k+1} уравнение типа (2.6), однозначная разрешимость которого установлена. Найдя U_{k+1} , D_{k+1} , по формуле (2.7) определим V_{k+2} . Таким образом, доказано, что описанным способом можно построить любое число членов формальных асимптотических разложений (2.3). При этом отметим важную для дальнейшего исследования формулу

$$\begin{aligned} \frac{dW_n}{dt} + W_n G_n - A W_n - \sum_{1 \leq k \leq k_0} e^{i\mu_k \omega t} B_k(t) W_n \\ - \sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} e^{i\nu_k \omega t} C_k(t) W_n = \omega^{-(n-1)/2} \Omega_n(t, \omega), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$W_n \equiv U_0 + \sum_{k=1}^n \omega^{-k/2} (U_k + V_k), \quad G_n \equiv G_n(\omega) = \sum_{k=0}^n \omega^{-k/2} D_k,$$

а $\Omega_n(t, \omega)$ – равномерно ограниченный в B^{δ_2} относительно $t \in \mathbb{R}$, $\omega > 1$ вектор-строка.

3. Для формулировки основного результата настоящего параграфа нам потребуется следующее определение, которое дано в работе [20].

Рассмотрим в $\mathbb{C}^m$ дифференциальное уравнение

$$\dot{\eta} = G_n(\omega)\eta.$$

Это уравнение называется *сильно устойчивым (неустойчивым)*, если для каждого $R > 0$ найдется такое $\omega(R) > 0$, что при любом $\omega > \omega(R)$ решения исходного дифференциального уравнения

$$\dot{\eta} = G_n(\omega)\eta + \omega^{-(n+1)/2} D\eta$$

устойчивы (неустойчивы), какова бы ни была матрица D с непревосходящей числа R нормой.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть при некотором номере n_0 дифференциальное уравнение

$$\dot{\eta} = G_{n_0}\eta$$

сильно устойчиво (неустойчиво). Тогда существует такое число $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ решения абстрактного параболического уравнения (2.1) экспоненциально устойчивы (неустойчивы) по норме B^β , где $\beta \in [\alpha, 1/2 + \delta)$.

Доказательству теоремы 2.1 посвящена оставшаяся часть работы.

4. Обозначим через Q дополнительный к P спектральный проектор: $Q = I - P$, а через $\mathbb{C}^m \times QB^\beta$ – декартово произведение указанных пространств с обычной нормой – суммой норм сомножителей. Рассмотрим отображение пространства $\mathbb{C}^m \times QB^\beta$ в пространство B^β , заданное формулой

$$x = W_n y_1 + y_2 + \sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} (i\nu_k \omega - A)^{-1} C_k e^{i\nu_k \omega t} y_2, \quad (2.10)$$

где $n = mn_0 + 1$, $y_1 \in \mathbb{C}^m$, $y_2 \in QB^\beta$. Докажем, что это отображение взаимно однозначно и непрерывно. Пусть φ_i , $i = 1, \dots, m$, – непрерывные линейные функционалы на B^β , удовлетворяющие условиям

$$\varphi_i(u_j) = \delta_{ij}, \quad \varphi_i(u) = 0, \quad u \in QB^\beta, \quad i, j = 1, \dots, m,$$

где через δ_{ij} обозначен символ Кронекера. Пусть $W_n^{(s)}$ – s -я компонента вектора-строки W_n . Через $\varphi_{k,t,\omega}$, $k = 1, \dots, m$, обозначим набор линейных непрерывных функционалов на B^β , зависящих от параметров $t \in \mathbb{R}$ и $\omega > \omega_1$, где ω_1 – достаточно большое число, для которых выполняются условия

$$\varphi_{k,t,\omega}(W_n^{(j)}) = \delta_{kj}, \quad \varphi_{k,t,\omega}(u) = 0, \quad u \in QB^\beta, \quad k, j = 1, \dots, m.$$

Такие функционалы можно построить в виде линейных комбинаций семейства исходных функционалов φ_k :

$$\varphi_{k,t,\omega} = \sum_{j=1}^m c_{kj}(t, \omega) \varphi_j.$$

При этом найдется такое значение $\omega_1 > 0$, что при $\omega > \omega_1$ функции $c_{kj}(t, \omega)$ равномерно непрерывны при $t \in \mathbb{R}$, $\omega > \omega_1$ и равномерно относительно t справедливы равенства

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_{kj}(t, \omega) = \delta_{kj} e^{-i\lambda_k t}. \quad (2.11)$$

Очевидно, система из m функционалов $\varphi_{k,t,\omega}$, $k = 1, \dots, m$, линейно независима. Поскольку дефект подпространства QB^β равен m , то из сказанного выше следует, что B^β распадается в прямую сумму:

$$B^\beta = \ell(W_n^{(1)}, \dots, W_n^{(m)}) \oplus QB^\beta, \quad (2.12)$$

где через ℓ обозначена линейная оболочка, порожденная системой векторов $W_n^{(1)}, \dots, W_n^{(m)}$. Введем пару соответствующих разложению (2.12) взаимно дополнительных проекторов P_ω, Q_ω , $\omega > \omega_1$. Именно, для любого вектора $x \in B^\beta$ положим

$$P_\omega(t)x = \sum_{k=1}^m \varphi_{k,t,\omega}(x) W_n^{(k)}, \quad Q_\omega(t)x = x - P_\omega(t)x.$$

Тогда в силу соотношений (2.11) в пространстве $\text{Hom}(B^\beta, B^\beta)$ равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} P_\omega(t) = P, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} Q_\omega(t) = Q. \quad (2.13)$$

Перейдем теперь к непосредственному исследованию преобразования (2.10). Произвольный вектор $x \in B^\beta$ представим в виде $x = P_\omega(t)x + Q_\omega(t)x$ и, учитывая оценку (1.3) и второе из соотношений (2.13) при $\omega > \omega_2$, где ω_2 (причем $\omega_2 > \omega_1$) достаточно велико, найдем вектор $y_2 \in Q_\omega(t)B^\beta$, удовлетворяющий равенству

$$y_2 + \sqrt{\omega} Q_\omega(t) \sum_{1 \leq k \leq k_0} (i\nu_k \omega - A)^{-1} C_k e^{i\nu_k \omega t} y_2 = Q_\omega(t)x.$$

После этого вектор $y_1 \in \mathbb{C}^m$ определим из соотношения

$$W_n y_1 = P_\omega x - P_\omega \left(\sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} (i\nu_k \omega - A)^{-1} C_k e^{i\nu_k \omega t} y_2 \right) \equiv \alpha(x).$$

Именно,

$$y_1^{(k)} = \varphi_{k,t,\omega}(\alpha(x)), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Итак, преобразование (2.10) осуществляет изоморфизм пространства $\mathbb{C}^m \times QB^\beta$ на пространство B^β , который, очевидно, является ограниченным оператором. В силу теоремы Банаха ограничен и обратный оператор, так что преобразование (2.10) при $\omega > \omega_2$ действительно взаимно однозначно и непрерывно.

5. Введем для краткости два обозначения:

$$M_\omega x = \sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} (i\nu_k \omega - A)^{-1} C_k e^{i\nu_k \omega t} x, \quad x \in B^{\delta_0},$$

$$\Phi_{t,\omega}(x) = (\varphi_{1,t,\omega}(x), \dots, \varphi_{m,t,\omega}(x))^T, \quad x \in B,$$

где через T обозначена операция транспонирования, так что $\Phi_{t,\omega}(x)$ – вектор-столбец. Производя в уравнении (2.1) замену переменных (2.10), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 - G_n y_1 &= \Phi_{t,\omega} \left\{ P_\omega \left[\sum_{1 \leq k \leq k_0} e^{i\mu_k \omega t} B_k y_2 \right. \right. \\ &+ \omega \sum_{\nu_k + \nu_r \neq 0} e^{i(\nu_k + \nu_r) \omega t} C_k (i\nu_r \omega - A)^{-1} C_r y_2 \\ &+ \sum_{\nu_k + \nu_r = 0} (i\nu_r)^{-1} C_k A (i\nu_r \omega - A)^{-1} C_r y_2 - \sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} (i\nu_k \omega - A)^{-1} \dot{C}_k e^{i\nu_k \omega t} y_2 \\ &- \left. \left. \sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} (i\nu_k \omega - A)^{-1} C_k e^{i\nu_k \omega t} \left((R(t, \omega) + S) y_2 + \omega^{-(n-1)/2} N(t, \omega) y_1 \right) \right] \right\} \\ &+ \omega^{-(n-1)/2} \Phi_{t,\omega} [P_\omega \Omega_n(t, \omega)] y_1 \equiv K(t, \omega) y_2 + \omega^{-(n-1)/2} L(t, \omega) y_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= S y_2 + \sum_{1 \leq k \leq k_0} e^{i\mu_k \omega t} Q_\omega B_k y_2 \\ &+ \omega Q_\omega \sum_{\nu_k + \nu_r \neq 0} e^{i(\nu_k + \nu_r) \omega t} C_k (i\nu_r \omega + A)^{-1} C_r y_2 \\ &+ ((I + Q_\omega M_\omega)^{-1} - I) \left[S y_2 + \sum_{1 \leq k \leq k_0} e^{i\mu_k \omega t} Q_\omega B_k y_2 \right. \\ &+ \left. \omega \sum_{\nu_k + \nu_r \neq 0} e^{i(\nu_k + \nu_r) \omega t} Q_\omega C_k (i\nu_r \omega - A)^{-1} C_r y_2 \right] \\ &- (I + Q_\omega M_\omega)^{-1} Q_\omega \left\{ \left[\sqrt{\omega} \sum_{1 \leq k \leq k_0} (i\nu_k \omega - A)^{-1} \dot{C}_k e^{i\nu_k \omega t} \right. \right. \\ &- \left. \sum_{\nu_k + \nu_r = 0} (i\nu_r)^{-1} C_k A (i\nu_r \omega - A)^{-1} C_r \right] y_2 \\ &+ \left. \omega^{-(n-1)/2} \Omega_n(t, \omega) y_1 \right\} \equiv R(t, \omega) y_2 + \omega^{-(n-1)/2} N(t, \omega) y_1. \end{aligned}$$

Как отмечалось выше, в настоящем параграфе мы следуем работам [20], [21]. Поэтому нам теперь предстоит доказать, что существует такое $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ и любом $\gamma \in [0, 1]$ система уравнений

$$\dot{y}_1 - G_n y_1 - \gamma K(t, \omega) y_2 - \omega^{-(n-1)/2} \gamma L(t, \omega) y_1 = \varphi_1(t), \quad (2.14)$$

$$\dot{y}_2 - S y_2 - \gamma R(t, \omega) y_2 - \omega^{-(n-1)/2} \gamma N(t, \omega) y_1 = \varphi_2(t), \quad (2.15)$$

где $\varphi_1 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$, $\varphi_2 \in C_\mu(\mathbb{R}, QB^{\delta_1})$, $\mu \in (0, \min(1/2 + \delta - \beta, \delta_1 - \delta_2))$, имеет единственное решение $(y_1, y_2) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \times C_\mu(\mathbb{R}, QB^{\gamma_0})$, $\gamma_0 = 1 + \delta_2$, $\delta_2 \in (0, \delta_1)$. Отсюда вытекает свойство экспоненциальной дихотомии соответствующей однородной системы ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$), причем согласно [21, теорема 1.4] проекторы $P_+(t, \gamma)$ и $P_-(t, \gamma)$, осуществляющие дихотомию, при каждом фиксированном $\omega > \omega_0$ равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$ непрерывны по $\gamma \in [0, 1]$ в операторной топологии. Из последнего утверждения, как известно, следует изоморфность⁴ конечномерных подпространств $P_+(0, 0)B^\beta$ и $P_+(0, 1)B^\beta$. Напомним, что эти подпространства состоят из векторов, являющихся начальными значениями решений однородной системы (2.14), (2.15) при $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$ соответственно, которые ограничены на луче $t \leq 0$. Так мы приходим к заключению, что система (2.14), (2.15) при $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ является устойчивой или неустойчивой одновременно для $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$, из которого следует теорема 2.1.

Итак, рассмотрим задачу об ограниченных на всей оси $t \in \mathbb{R}$ решениях (y_1, y_2) однородной системы (2.14), (2.15). Из уравнения (2.14) находим

$$\begin{aligned} y_2(t) = & \gamma \int_{-\infty}^t G^-(t - \tau) R(\tau, \omega) y_2 d\tau + \omega^{-(n-2)/2} \gamma \int_{-\infty}^t G^-(t - \tau) N(\tau, \omega) y_1 d\tau \\ & + \int_{-\infty}^t G^-(t - \tau) \varphi_2(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $G^-(t - \tau)$ – функция Грина задачи об ограниченных решениях со значениями в пространстве QB уравнения

$$\frac{dx}{dt} - SQx = Qf(t), \quad f \in C(\mathbb{R}, B).$$

С помощью использовавшейся в §1 методики устанавливается существование такого $\omega_1 > 0$, что при $\omega > \omega_1$ справедлива оценка

$$\left\| \int_{-\infty}^t G^-(t - \tau) R(\tau, \omega) d\tau \right\|_{\text{Hom}(C_\mu(\mathbb{R}, B^{\gamma_0}), C_\mu(\mathbb{R}, B^{\gamma_0}))} < \frac{1}{2}.$$

Поэтому при $\omega > \omega_1$ из уравнения (2.16) можно выразить y_2 в следующем виде:

$$y_2 = \omega^{-(n-2)/2} \Gamma(t, \omega, \gamma) y_1 + \psi_2(t, \omega, \gamma), \quad (2.17)$$

где выражения Γ и ψ_2 таковы, что при некоторой постоянной c равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$, $\omega > \omega_1$ и $\gamma \in [0, 1]$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} \|\Gamma(t, \omega, \gamma) y_1\|_{C_\mu(\mathbb{R}, B^{\gamma_0})} &\leq c \|y_1\|_{C_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)}, \\ \|\psi_2(t, \omega, \gamma)\|_{C_\mu(\mathbb{R}, B^{\gamma_0})} &\leq c \|\varphi_2\|_{C_\mu(\mathbb{R}, B^{\delta_1})}. \end{aligned}$$

Подставим (2.17) в уравнение (2.14) и применим к обеим частям полученного равенства оператор L_ω^{-1} , обратный к регулярному в $C_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ оператору $L_\omega \equiv \frac{d}{dt} + G_n$. Придем к уравнению

$$\begin{aligned} y_1 = & \gamma \omega^{-(n-2)/2} L_\omega^{-1} [K(t, \omega) \Gamma(t, \omega, \gamma) + L(t, \omega)] y_1 \\ & + L_\omega^{-1} [\gamma K(t, \omega) \psi_2(t, \omega, \gamma) + \varphi_1(t)] \equiv M(\omega, \gamma) y_1 + [N(\omega, \gamma)](\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned} \quad (2.18)$$

⁴Здесь мы естественным образом отождествляем пространства $\mathbb{C}^m$ и $P_\omega B^\beta$, а также пространства $\mathbb{C}^m \times QB^\beta$ и B^β .

Из леммы И. З. Штокало [24] вытекает оценка

$$\|L_{\omega}^{-1}\|_{\text{Hom}(C_{\mu}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m), C_{\mu}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m))} \leq M\omega^{(n_0+1)(m+1)/2},$$

$M = \text{const}$, которая при замене $C_{\mu}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ на $C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ отмечена в [21]. Исходя из нее, подберем такое $\omega_2 > 0$, что при $\omega > \omega_2$ выполняется неравенство

$$\|M(\omega, \gamma)\|_{\text{Hom}(C_{\mu}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m), C_{\mu}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m))} < \frac{1}{2}.$$

Тогда при $\omega > \omega_2$ к уравнению (2.18) применим принцип сжимающих отображений. Теорема 2.1 доказана.

Список литературы

1. Боголюбов Н. Н., *О некоторых статистических методах в математической физике*, Изд-во АН УССР, Киев, 1945.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, М., 1974.
3. Симоненко И. Б., “Обоснование метода усреднения для абстрактных параболических уравнений”, *Матем. сб.*, **81(123)**:1 (1970), 53–61.
4. Левенштам В. Б., “Метод осреднения и бифуркация ограниченных решений абстрактных параболических уравнений”, *Сиб. матем. журн.*, **17**:5 (1976), 1058–1068.
5. Симоненко И. Б., *Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости*, Изд-во РГУ, Ростов-на-Дону, 1989.
6. Левитан Б. М., Жиков В. В., *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения*, Изд-во МГУ, М., 1978.
7. Боголюбов Н. Н., “Теория возмущений в нелинейной механике”, *Сб. ин-та строит. механики АН УССР*, 1950, № 4, 9–34.
8. Капица П. Л., “Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса”, *ЖЭТФ*, **21**:5 (1951), 588–599.
9. Бардин Б. С., Маркеев А. П., “Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса”, *ПММ*, **59**:6 (1995), 922–929.
10. Челомей В. Н., “О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций”, *ДАН СССР*, **110**:3 (1956), 345–347.
11. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б., “О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции”, *Изв. АН СССР. МЖТ*, 1966, № 5, 51–55.
12. Симоненко И. Б., “Обоснование метода осреднения для задачи конвекции в поле быстроосциллирующих сил и для других параболических уравнений”, *Матем. сб.*, **87**:2 (1972), 236–253.
13. Левенштам В. Б., “Обоснование метода усреднения для задачи конвекции при высокочастотных вибрациях”, *Сиб. матем. журн.*, 1993, № 2, 92–109.
14. Юдович В. И., “Вибродинамика систем со связями”, *Докл. РАН*, **354**:5 (1997), 622–624.
15. Юдович В. И., “Динамика материальной частицы на вибрирующей гладкой поверхности”, *ПММ*, **62**:6 (1998), 968–976.
16. Юдович В. И., “Периодические дифференциальные уравнения с самосопряженным оператором монодромии”, *Матем. сб.*, **192**:3 (2001), 137–160.
17. Юдович В. И., *Вибродинамика и виброгеометрия систем со связями*, Деп. в ВИНИТИ, 2003, № 1407-B2003.

18. Юдович В. И., *Вибродинамика и виброгеометрия систем со связями*, Ч. II. Деп. в ВИНТИ, 2003, № 1408-В2003.
19. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970.
20. Колесов Ю. С., Майоров В. М., “Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами”, *Дифференц. уравн.*, **10** (1974), 1778–1788.
21. Колесов Ю. С., “Об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений параболического типа с почти периодическими коэффициентами”, *ТММО*, **36** (1978), 3–27.
22. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е., *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.
23. Юдович В. И., *Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости*, Изд-во РГУ, Ростов-на-Дону, 1984.
24. Штокало И. З., *Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами*, Изд-во АН УССР, Киев, 1960.

В. Б. ЛЕВЕНШТАМ (V. B. LEVENSHTAM)
Ростовский государственный университет
Южный научный центр РАН
E-mail: vleven@math.rsu.ru

Поступило в редакцию
11.11.2003