Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Юшков, О разрушении решения нелокальной системы уравнений гидродинамического типа, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 1, 201–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im5556>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:57:52

УДК 517.957

Е. В. Юшков

О разрушении решения нелокальной системы уравнений гидродинамического типа

Рассмотрена нелинейная нелокальная система уравнений А. П. Осколкова с источником. Разобрана применимость операторного метода для данного случая. Доказано существование слабого решения начально-краевой задачи для такой системы. Исследованы условия единственности слабого решения. Представлены достаточные условия разрушения решения задачи. Получены оценки снизу и сверху времени разрушения решения задачи. Рассмотрен вопрос гладкости слабого решения.

Библиография: 10 наименований.

Ключевые слова: разрушение решения, система гидродинамического типа, нелокальная начально-краевая задача.

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматривается интегро-дифференциальная система уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} - |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - \int_0^t e^{-(t-s)} \Delta \mathbf{u} ds = \nabla p, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x), \quad \mathbf{u}|_{\partial \Omega \times [0, T]} = 0, \quad (1.2)$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с локально липшицевой границей $\partial \Omega$ на промежутке времени $[0, T]$, $T > 0$. Здесь $p(x, t)$ – давление жидкости в точке x в момент времени t , $\mathbf{u}(x, t)$ – вектор скорости частицы. Данная система называется *системой уравнений Осколкова* или *интегро-дифференциальной системой Кельвина–Фойгта* [1] с кубическим источником, она является модельной для описания жидкостей, которым требуется время, чтобы начать движение под действием приложенной силы. Описание данной жидкости и правомерность модельной системы приведены в [2].

Введем некоторые обозначения, используемые в дальнейшем (см. [3]).

Обозначим через $L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, банахово пространство определенных на Ω вещественных функций, абсолютно интегрируемых с p -й степенью по лебеговой мере $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ с нормой

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00376), а также Программы Президента РФ “Поддержка молодых докторов наук” (грант МД-99.2009.1).

Введем пространства $\mathbf{L}^q(\Omega) = L^q(\Omega) \times L^q(\Omega) \times L^q(\Omega)$, $q \in [1, +\infty)$, векторнозначных функций $\mathbf{u}$. Обозначим через $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ пространство векторнозначных функций $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $u_k \in H_0^1(\Omega)$, $k = \overline{1, 3}$. Можно доказать, что $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ является гильбертовым пространством для скалярного произведения

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \sum_{i=1}^3 (D_i \mathbf{u}, D_i \mathbf{v})_2, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Двойственное к гильбертову пространству $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ обозначим через $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, кроме того, далее мы будем использовать пространство

$$\mathbf{D}(\Omega) = D(\Omega) \times D(\Omega) \times D(\Omega),$$

где $D(\Omega)$ – пространство основных функций с компактным носителем. Теперь введем следующее пространство:

$$\mathbf{V}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{D}(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}.$$

Замыкание $\mathbf{V}(\Omega)$ в пространстве $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ обозначим через $\mathbf{H}(\Omega)$, а замыкание $\mathbf{V}(\Omega)$ в пространстве $\mathbf{L}^2(\Omega)$ обозначим через $\mathbf{X}(\Omega)$. Двойственное к гильбертову пространству $\mathbf{H}(\Omega)$ обозначим через $\mathbf{H}^*(\Omega)$. В пространстве $\mathbf{H}(\Omega)$ скалярное произведение обозначим следующим образом:

$$((\mathbf{v}, \mathbf{u})) = \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \right)^{1/2}.$$

В дальнейшем нам понадобится еще одно пространство:

$$W = \{\mathbf{u} : \mathbf{u}(x)(t) \in C([0, T]; \mathbf{H}(\Omega)); \mathbf{u}'(x)(t) \in L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))\}.$$

Пусть $\|\mathbf{u}\|_W = \|\mathbf{u}\|_{C([0, T]; \mathbf{H})} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})}$ – норма в пространстве W .

§ 2. Существование слабого обобщенного решения задачи

Определим слабую обобщенную разрешимость задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Под *слабым обобщенным решением* задачи (1.1), (1.2) мы понимаем решение $\mathbf{u}(x, t) \in W$ для любого $\varphi \in \mathbf{H}(\Omega)$ и почти всех $t \in (0, T)$ задачи

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} - |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - \int_0^t e^{-(t-s)} \Delta \mathbf{u} ds \right) \varphi dx = 0, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x).$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega)$ и выполнены условия теоремы 4.1 (см. ниже). Тогда существует единственное слабое обобщенное решение $\mathbf{u}(x)$ задачи (2.1), принадлежащее классу $\{\mathbf{u} : \mathbf{u}(x)(t) \in C([0, T_0]; \mathbf{H}(\Omega)); \mathbf{u}'(x)(t) \in$

$L^2(0, T_0; \mathbf{H}(\Omega))\}$. Имеет место разрушение решения за время T_0 , причем для этого времени справедлива оценка $T_1 < T_0 < T_2$. Для T_1 и T_2 имеют место следующие выражения:

$$\begin{aligned} (1 + 2C_7^4)(\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2 + (1 + T_1)^2 T_1) T_1 &= 1, \\ T_2 &= \frac{\Phi^{1-\alpha}(0)}{(\alpha - 1)\Phi^{-\alpha}(0) \left[(\Phi'(0) - \frac{\beta}{\alpha-1}\Phi(0))^2 - \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi^2(0) \right]^{1/2}}, \\ \alpha &= 2(1 - \varepsilon), \quad \beta = \frac{15}{4\varepsilon}, \quad \gamma = 2 + \frac{1145}{32\varepsilon}, \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \Phi(0) &= \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

где C_7 – постоянная наилучшего вложения $\mathbf{H}(\Omega) \subset \mathbf{L}_4(\Omega)$.

Введем операторные уравнения, эквивалентные задаче о слабых решениях. Определим следующие операторы:

$$\begin{aligned} A: \mathbf{H} &\rightarrow \mathbf{H}^*, \quad \langle A\mathbf{u}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad \varphi \in \mathbf{H}(\Omega), \\ B: \mathbf{L}^4(\Omega) &\rightarrow \mathbf{H}^*, \quad \langle B\mathbf{u}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{L}^4(\Omega), \quad \varphi \in \mathbf{H}(\Omega), \\ C: \mathbf{H} &\rightarrow \mathbf{H}^*, \quad \langle C\mathbf{u}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \varphi dx, \\ &\quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad \varphi \in \mathbf{H}(\Omega), \\ J: \mathbf{H} &\rightarrow \mathbf{H}^*, \quad \langle J\mathbf{u}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{u} \varphi dx, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad \varphi \in \mathbf{H}(\Omega). \end{aligned}$$

Таким образом, запишем (2.1) в следующем виде:

$$\langle J\mathbf{u}', \varphi \rangle + \langle A\mathbf{u}', \varphi \rangle - \langle B\mathbf{u}, \varphi \rangle + \langle C\mathbf{u}, \varphi \rangle + \left\langle \int_0^t e^{-(t-s)} A\mathbf{u}(s) ds, \varphi \right\rangle = 0.$$

Поскольку в этом равенстве функция $\varphi \in \mathbf{H}(\Omega)$ произвольна, то оно эквивалентно операторному уравнению

$$(A + J)\mathbf{u}' - B\mathbf{u} + C\mathbf{u} + D\mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

где использовано обозначение

$$D\mathbf{u} = \int_0^t e^{-(t-s)} A\mathbf{u}(s) ds.$$

Получили, что задача (2.2) эквивалентна следующему операторному уравнению:

$$L\mathbf{u} = K\mathbf{u}, \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} L: W &\rightarrow L^2(0, T; \mathbf{H}^*) \times \mathbf{H}, & L\mathbf{v} &= ((A + J)\mathbf{v}' + C\mathbf{v} + D\mathbf{v}, \mathbf{v}|_{t=0}), \\ K: W &\rightarrow L^2(0, T; \mathbf{H}^*) \times \mathbf{H}, & K\mathbf{v} &= (B\mathbf{v}, \mathbf{v}|_{t=0}). \end{aligned}$$

Для доказательства основной теоремы нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 2.1. *Для оператора A имеют место следующие свойства:*

1) *оператор $A: \mathbf{H}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^*(\Omega)$ обратим и непрерывен, и для него имеет место оценка*

$$\|A\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}; \quad (2.4)$$

2) *если $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$, то $A\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^*(\Omega))$, причем оператор A непрерывен и справедлива оценка*

$$\|A\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^*)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})}. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В силу линейности оператора A для доказательства его непрерывности достаточно доказать его ограниченность. Из определения оператора A следует

$$\begin{aligned} |\langle A\mathbf{u}, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx \right| = |((u, \varphi))| \leq \|u\|_{\mathbf{H}} \|\varphi\|_{\mathbf{H}}, \\ \|A\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} &\leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор $A: \mathbf{H}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^*(\Omega)$ ограничен и непрерывен.

2) Пусть $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$. Возведем оценку (2.4) в квадрат и проинтегрируем по t от 0 до T . Получим

$$\int_0^T \|A\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)}^2 dt \leq \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 dt.$$

Извлекая корень, получим требуемую оценку, и поскольку оператор A линеен и ограничен, он непрерывен как оператор из $L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$ в $L^2(0, T; \mathbf{H}^*(\Omega))$. Лемма доказана.

Напомним следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть X – банахово пространство. Оператор $A: X \rightarrow X^*$ называется *радиально непрерывным*, если при любых фиксированных $u, v \in X$ вещественная функция $s \mapsto \langle A(u + sv), v \rangle$ непрерывна на $[0, 1]$.

Далее нам понадобится следующий результат [4, с. 97, 98].

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Если оператор, действующий из банахова пространства X в X^* , является радиально непрерывным и сильно монотонным, то существует обратный оператор A^{-1} , который является липшиц-непрерывным.*

ЛЕММА 2.2. *Для оператора $A + J$ имеют место следующие свойства:*

1) *оператор $A + J: \mathbf{H}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^*(\Omega)$ обратим и непрерывен, и для него имеют место оценки*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \leq \|(A + J)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} \leq (1 + C_1^2) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}, \quad (2.6)$$

где C_1 – некоторая константа; обратный оператор $(A + J)^{-1}: \mathbf{H}^*(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}(\Omega)$ непрерывен, и для него имеет место оценка

$$\|(A + J)^{-1}\mathbf{f} - (A + J)^{-1}\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \leq \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)}, \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{H}^*(\Omega); \quad (2.7)$$

2) если $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H})$, то $(A + J)\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^*)$, оператор $A + J$ непрерывен, обратим и для него справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})} \leq \|(A + J)\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^*)} \leq (1 + C_1^2)\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})}, \quad (2.8)$$

причем обратный оператор $(A + J)^{-1}$ непрерывен и для него справедлива оценка

$$\|(A + J)^{-1}\mathbf{f} - (A + J)^{-1}\mathbf{g}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})} \leq \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^*)}, \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^*). \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В силу леммы 2.1 оператор $A: \mathbf{H}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^*(\Omega)$ непрерывен. Поскольку вложение $\mathbf{H} \subset \mathbf{H}^*$ непрерывно, то J непрерывен как оператор из $\mathbf{H}(\Omega)$ в $\mathbf{H}^*(\Omega)$. Таким образом, оператор $A + J$ непрерывен из $\mathbf{H}(\Omega)$ в $\mathbf{H}^*(\Omega)$ как сумма двух непрерывных операторов.

Покажем, что $A + J$ обратим. Для этого достаточно показать, что оператор $A + J$ сильно монотонный. Пусть $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\Omega)$; тогда

$$\begin{aligned} \langle (A + J)(\mathbf{u} - \mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle &= ((\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})) + (\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2 \geq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

и, следовательно, $A + J$ – сильно монотонный оператор. В силу леммы 2.1 оператор $A + J$ обратим, а обратный оператор $(A + J)^{-1}$ липшиц-непрерывен.

Пусть $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega)$; тогда из (2.10) при $\mathbf{v} = 0$ имеем

$$\langle (A + J)\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2.$$

С другой стороны,

$$\langle (A + J)\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \leq \|(A + J)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}.$$

Таким образом, имеем

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 \leq \|(A + J)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}.$$

Теперь получим оценку сверху:

$$\begin{aligned} \|(A + J)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} &= \sup_{\varphi \in \mathbf{H}(\Omega)} \frac{|\langle (A + J)\mathbf{u}, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{\mathbf{H}(\Omega)}} \\ &\leq \sup_{\varphi \in \mathbf{H}(\Omega)} \frac{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{H}(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{X}(\Omega)}}{\|\varphi\|_{\mathbf{H}(\Omega)}} \\ &\leq \sup_{\varphi \in \mathbf{H}(\Omega)} \frac{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{H}(\Omega)} + C_1^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{H}(\Omega)}}{\|\varphi\|_{\mathbf{H}(\Omega)}} \\ &\leq (1 + C_1^2) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}, \end{aligned}$$

где C_1 – постоянная из неравенства Пуанкаре $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}(\Omega)} \leq C_1 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}$.

2) Пусть $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H})$. Тогда, возводя (2.6) в квадрат и интегрируя по t от 0 до T , получаем

$$\int_0^T \|(A + J)\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)}^2 dt \leq (1 + C_1^2)^2 \int_0^T \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 dt,$$

откуда следует $(A + J)\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^*)$ и

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})} \leq \|(A + J)\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^*)} \leq (1 + C_1^2) \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})}.$$

Поскольку оператор $A + J$ является линейным и ограниченным, он непрерывен как оператор из $L^2(0, T; \mathbf{H})$ в $L^2(0, T; \mathbf{H}^*)$. Покажем, что множество значений оператора $A + J$ совпадает со всем $L^2(0, T; \mathbf{H}^*)$. Это действительно так, если для любого $\mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^*)$ уравнение $(A + J)\mathbf{u} = \mathbf{v}$ имеет решение $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H})$. Так как оператор $A + J: \mathbf{H}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^*(\Omega)$ обратим, для почти всех $t \in (0, T)$ последнее уравнение имеет решение $\mathbf{u}(t) = (A + J)^{-1}\mathbf{v}(t)$. Покажем, что такая функция $\mathbf{u}$ принадлежит $L^2(0, T; \mathbf{H})$. Из (2.6) для почти всех $t \in (0, T)$ имеем

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \leq \|(A + J)\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} = \|\mathbf{v}(t)\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)}.$$

Поскольку $\mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^*)$, то $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H})$. Возводя последнее неравенство в квадрат и интегрируя по $[0, T]$, получаем

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})} \leq \|(A + J)\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^*)},$$

откуда следует обратимость оператора $A + J: L^2(0, T; \mathbf{H}) \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{H}^*)$.

В силу (2.7) для любых $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^*)$ и почти всех $t \in (0, T)$ имеем

$$\|(A + J)^{-1}\mathbf{f}(t) - (A + J)^{-1}\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \leq \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)}.$$

Возводя эту оценку в квадрат и интегрируя по t , получаем

$$\|(A + J)^{-1}\mathbf{f}(t) - (A + J)^{-1}\mathbf{g}(t)\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})} \leq \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t)\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^*)},$$

откуда следует непрерывность оператора $(A + J)^{-1}$. Лемма доказана.

Далее нам понадобится теорема Браудера–Минти, которую можно найти в [5].

ТЕОРЕМА 2.2 (Ф. Браудер, Г. Минти). Пусть оператор $A: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}^*$ строго монотонный, радиально непрерывный и коэрцитивный. Тогда существует обратный строго монотонный ограниченный оператор $A^{-1}: \mathbf{X}^* \rightarrow \mathbf{X}$.

ЛЕММА 2.3. Для оператора C имеют место следующие свойства:

- 1) оператор $C: \mathbf{H}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^*(\Omega)$ имеет обратный оператор, являющийся липшиц-непрерывным с постоянной Липшица, равной 1;
- 2) справедлива оценка

$$\|C\mathbf{u} - C\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} \leq \mu(R) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \quad (2.11)$$

для любых $R = \max(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}, \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\Omega)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Сначала покажем, что оператор C является радиально-непрерывным. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}\phi(s) &\equiv \langle C(\mathbf{u} + s\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - s \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx + \int_{\Omega} |\mathbf{u} + s\mathbf{v}|^2 (\mathbf{u} + s\mathbf{v}) \mathbf{v} dx,\end{aligned}$$

откуда вытекает радиальная непрерывность C , так как $\phi(s) \in C([0, 1])$.

Теперь покажем строгую монотонность оператора C :

$$\begin{aligned}\langle C\mathbf{u} - C\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial(u_i - v_i)}{\partial x_j} \right)^2 dx + \int_{\Omega} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}) (\mathbf{u} - \mathbf{v}) dx \\ &\geq \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial(u_i - v_i)}{\partial x_j} \right)^2 dx = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2;\end{aligned}\tag{2.12}$$

здесь мы воспользовались тем, что

$$\begin{aligned}(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}) (\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= |\mathbf{u}|^4 + |\mathbf{v}|^4 - (|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2) \mathbf{v} \mathbf{u} \\ &\geq \frac{1}{2} (|\mathbf{u}|^4 + |\mathbf{v}|^4) - |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 = \frac{1}{2} (|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

И наконец, коэрцитивность оператора C следует из цепочки соотношений

$$\langle C\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx + \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^4 dx \geq \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2.$$

Из полученных свойств оператора C следует существование обратного оператора $C^{-1}: \mathbf{H}^*(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}(\Omega)$. Покажем липшиц-непрерывность последнего. Действительно,

$$\langle C\mathbf{u} - C\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \leq \|C\mathbf{u} - C\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}.\tag{2.13}$$

Из (2.12) и (2.13) следует, что

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \leq \|C\mathbf{u} - C\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)},$$

и в силу обратимости

$$\|C^{-1}\mathbf{w}_1 - C^{-1}\mathbf{w}_2\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \leq \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)}.$$

Здесь использованы обозначения $\mathbf{w}_1 = C\mathbf{u}$, $\mathbf{w}_2 = C\mathbf{v}$.

2) Из леммы 2.1 следует, что

$$\|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\Omega)},$$

так что нам необходимо доказать только следующее неравенство:

$$\| |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} \leq \mu(R) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\Omega)},$$

где $\mu(R) = CR^2$, $R = \max(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}, \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}})$. Справедлива цепочка вложений:

$$|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}: \mathbf{H}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbf{L}^4(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^{4/3}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbf{H}^*(\Omega);$$

здесь через ds обозначено то, что вложение плотное. Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \left\| |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} &\leq C_2 \left\| |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right\|_{\mathbf{L}^{4/3}(\Omega)} \\ &\leq C_2 \left(\int_{\Omega} \left| |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right|^{4/3} dx \right)^{3/4} \\ &\leq C_2 \left(\int_{\Omega} (\max\{|\mathbf{u}|^2, |\mathbf{v}|^2\})^{4/3} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^{4/3} dx \right)^{3/4} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \max\{|\mathbf{u}|^4, |\mathbf{v}|^4\} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^4 dx \right)^{1/4} \\ &\leq C_2 \max\{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^2, \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^2\} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}, \end{aligned}$$

откуда для любых R получаем

$$\|C\mathbf{u} - C\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} \leq \mu(R) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. *Оператор $D: W \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{H}^*(\Omega))$ непрерывен, и для него имеет место оценка*

$$\|D\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^*)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} T^{3/2} \|\mathbf{u}\|_{C([0, T]; \mathbf{H})}. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{v} \in W$; тогда покажем, что $D\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^*)$. Действительно, из (2.4) имеем

$$\begin{aligned} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^*)}^2 &= \int_0^T \left\| \int_0^t e^{-(t-s)} A\mathbf{u}(s) ds \right\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)}^2 dt \\ &\leq \int_0^T \left(\int_0^t |e^{-(t-s)}| \|A\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} ds \right)^2 dt \leq \int_0^T \left(\int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)} ds \right)^2 dt \\ &\leq \int_0^T \max_{s \in [0, t]} \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 \left(\int_0^t 1 ds \right)^2 dt \leq \|\mathbf{u}\|_{C([0, T]; \mathbf{H})}^2 \int_0^T t^2 dt \\ &= \frac{1}{3} T^3 \|\mathbf{u}\|_{C([0, T]; \mathbf{H})}^2. \end{aligned}$$

Непрерывность оператора D в силу его ограниченности вытекает из линейности. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. *Для оператора B имеют место следующие свойства:*

1) *оператор $B: \mathbf{L}^4(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^*(\Omega)$ непрерывен и для него справедлива оценка*

$$\|B\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} \leq C_3 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^2 \quad (2.15)$$

с некоторой константой C_3 ;

2) если $\mathbf{u} \in L^4(0, T; \mathbf{L}^4(\Omega))$, то $B\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^*(\Omega))$ и оператор B непрерывен;

3) если $\mathbf{u} \in W$, то $B\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^*(\Omega))$, оператор B вполне непрерывен и для него справедлива оценка

$$\|B\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^*)} \leq C_4 \|\mathbf{u}\|_{C([0, T]; \mathbf{H})}^2 \quad (2.16)$$

с некоторой константой C_4 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для любых $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^4(\Omega)$, $\varphi \in \mathbf{H}(\Omega)$ имеем

$$|\langle B\mathbf{u}, \varphi \rangle| \leq C_3 \max_{i,j} \|u_i u_j\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \leq C_3 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^2 \|\varphi\|_{\mathbf{H}(\Omega)},$$

откуда и следует оценка (2.15) с некоторой константой C_3 .

Теперь докажем непрерывность оператора B . Для произвольных $\mathbf{u}^m, \mathbf{u}^0 \in \mathbf{L}^4(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} |\langle B\mathbf{u}^m, \varphi \rangle - \langle B\mathbf{u}^0, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 u_i^m u_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 u_i^0 u_j^0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m u_j^m - u_i^0 u_j^0\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m u_j^m - u_i^0 u_j^0\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \\ &\leq \|\varphi\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m u_j^m - u_i^0 u_j^0\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\|B\mathbf{u}^m - B\mathbf{u}^0\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} \leq \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m u_j^m - u_i^0 u_j^0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m u_j^m - u_i^0 u_j^0\|_{L^2(\Omega)} &= \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m u_j^m - u_i^m u_j^0 + u_i^m u_j^0 - u_i^0 u_j^0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m u_j^m - u_i^m u_j^0\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m u_j^0 - u_i^0 u_j^0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^m\|_{L^4(\Omega)} \|u_j^m - u_j^0\|_{L^4(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^3 \|u_j^0\|_{L^4(\Omega)} \|u_i^m - u_i^0\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq C_4 \|\mathbf{u}^m\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + C_4 \|\mathbf{u}^0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \\ &= C_4 (\|\mathbf{u}^m\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + \|\mathbf{u}^0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}) \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Непрерывность оператора $B: \mathbf{L}^4(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^*(\Omega)$ следует из (2.17).

2) Возведем (2.15) в квадрат и проинтегрируем по t от 0 до T :

$$\int_0^T \|B\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)}^2 dt \leq C_3^2 \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^4 dt.$$

Конечность правой части влечет за собой конечность левой, таким образом, $B\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^*)$.

Для доказательства непрерывности оператора B возведем (2.17) в квадрат и проинтегрируем по t . Используя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|B\mathbf{u}^m(t) - B\mathbf{u}^0(t)\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)}^2 dt \\ & \leq C_4^2 \int_0^T (\|\mathbf{u}^m(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + \|\mathbf{u}^0(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)})^2 \|\mathbf{u}^m(t) - \mathbf{u}^0(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^2 dt \\ & \leq C_4^2 \left(\int_0^T (\|\mathbf{u}^m(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + \|\mathbf{u}^0(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)})^4 dt \right)^{1/2} \\ & \quad \times \left(\int_0^T \|\mathbf{u}^m(t) - \mathbf{u}^0(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^4 dt \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\|\mathbf{u}^m(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + \|\mathbf{u}^0(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)})^4 dt = \sum_{i=0}^4 C_4^i \int_0^T \|\mathbf{u}^m(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^i \|\mathbf{u}^0(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^{4-i} dt \\ & \leq \int_0^T \|\mathbf{u}^0(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^4 dt + \int_0^T \|\mathbf{u}^m(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^4 dt \\ & \quad + \sum_{i=1}^3 C_4^i \left(\int_0^T \|\mathbf{u}^m(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^4 dt \right)^{i/4} \left(\int_0^T \|\mathbf{u}^0(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^4 dt \right)^{(4-i)/4} \\ & = \sum_{i=0}^4 C_4^i \left(\int_0^T \|\mathbf{u}^m(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^4 dt \right)^{i/4} \left(\int_0^T \|\mathbf{u}^0(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^4 dt \right)^{(4-i)/4} \\ & = \sum_{i=0}^4 C_4^i \|\mathbf{u}^m\|_{L^4(0, T; \mathbf{L}^4(\Omega))}^i \|\mathbf{u}^0\|_{L^4(0, T; \mathbf{L}^4(\Omega))}^{4-i}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

В итоге из (2.18) и (2.19) имеем

$$\begin{aligned} & \|B\mathbf{u}^m - B\mathbf{u}^0\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^*)} \\ & \leq C_4 \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^0\|_{L^4(0, T; \mathbf{L}^4(\Omega))} \left(\sum_{i=0}^4 C_4^i \|\mathbf{u}^m\|_{L^4(0, T; \mathbf{L}^4(\Omega))}^i \|\mathbf{u}^0\|_{L^4(0, T; \mathbf{L}^4(\Omega))}^{4-i} \right)^{1/4}, \end{aligned}$$

откуда получаем, что оператор $B: L^4(0, T; \mathbf{L}^4(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{H}^*(\Omega))$ непрерывен.

3) В рассматриваемом случае справедлива следующая цепочка вложений:

$$\begin{aligned} W & \subset \{\mathbf{u}: \mathbf{u} \in L^4(0, T; \mathbf{H}(\Omega)); \mathbf{u}' \in L^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))\} \\ & \subset L^4(0, T; \mathbf{L}^4(\Omega)) \xrightarrow{B} L^2(0, T; \mathbf{H}^*(\Omega)), \end{aligned}$$

где вложение непрерывное и вполне непрерывное соответственно и оператор также непрерывен. Для доказательства этого можно воспользоваться следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2.3 [6]. Пусть $X \subset E \subset Y$ – банаховы пространства, причем вложение $X \subset E$ вполне непрерывно, а вложение $E \subset Y$ непрерывно. Пусть $F \subset L^p(0, T; X)$. Будем предполагать, что для любого $f \in F$ его обобщенная производная в пространстве $D'(0, T; Y)$ принадлежит $L^r(0, T; Y)$. Далее, пусть множество F ограничено в $L^p(0, T; X)$, а множество $\{f': f \in F\}$ ограничено в $L^r(0, T; Y)$. Тогда множество F относительно компактно в $L^p(0, T; E)$.

Пусть $X = \mathbf{H}(\Omega)$, $E = \mathbf{L}^4(\Omega)$, $Y = \mathbf{L}^2(\Omega)$, $F = \{\mathbf{u}: \mathbf{u} \in L^4(0, T; \mathbf{H}(\Omega)); \mathbf{u}' \in L^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))\}$, а вложение $W \subset \{\mathbf{u}: \mathbf{u} \in L^4(0, T; \mathbf{H}(\Omega)); \mathbf{u}' \in L^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))\}$ следует из вложений $C([0, T]; \mathbf{H}) \subset L^4(0, T; \mathbf{H})$ и $L^4(0, T; \mathbf{H}) \subset L^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$. Тогда получим, что оператор $B: W \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{H}^*)$ вполне непрерывен. Для получения оценки (2.16) из (2.15) необходимо учесть вложение $\mathbf{H}(\Omega) \subset \mathbf{L}^4(\Omega)$, возвести (2.15) в квадрат и результат проинтегрировать по t от 0 до T . Лемма доказана.

ЛЕММА 2.6. Для операторов L и K имеют место следующие свойства:

1) оператор $L: W \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{H}^*) \times \mathbf{H}$ обратим и обратный оператор

$$L^{-1}: L^2(0, T; \mathbf{H}^*) \times \mathbf{H} \rightarrow W$$

непрерывен;

2) оператор $K: W \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{H}^*) \times \mathbf{H}$ вполне непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для того чтобы доказать обратимость оператора, необходимо показать единственность решения $\mathbf{u} \in W$ задачи

$$(A + J)\mathbf{u}' + C\mathbf{u} + D\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0. \quad (2.20)$$

Поскольку оператор $A + J: L^2(0, T; \mathbf{H}) \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{H}^*)$ непрерывно обратим, то, применяя его к (2.20), получим

$$\mathbf{u}' + (A + J)^{-1}C\mathbf{u} + (A + J)^{-1}D\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0.$$

Определим оператор

$$F\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 - \int_0^t (A + J)^{-1}C\mathbf{u}(s) + (A + J)^{-1}D\mathbf{u}(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Далее нам понадобится следующая лемма из [4].

ЛЕММА 2.7. (C, k) -нормы, определенные для $u \in C([0, T]; X)$ формулой

$$\|u\|_{C([0, T]; X), k} = \sup_{t \in [0, T]} \{e^{-kt} \|u(t)\|_X\}, \quad k \geq 0,$$

эквивалентны норме

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

В силу непрерывности интеграла Бохнера в $C([0, T]; \mathbf{H})$ (см. [4]) для $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C([0, T]; \mathbf{H})$ имеем

$$\begin{aligned}
 \|F\mathbf{u} - F\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\Omega)} &= \left\| \int_0^t (A + J)^{-1} C\mathbf{u}(s) + (A + J)^{-1} D\mathbf{u}(s) ds \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^t (A + J)^{-1} C\mathbf{v}(s) - (A + J)^{-1} D\mathbf{v}(s) ds \right\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \\
 &\leq \int_0^t \|(A + J)^{-1}(C\mathbf{u} - C\mathbf{v})\|_{\mathbf{H}(\Omega)} ds + \int_0^t \|(A + J)^{-1}D(\mathbf{u} - \mathbf{v})(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)} ds \\
 &\leq \int_0^t \|C\mathbf{u} - C\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} ds + \int_0^t \|D(\mathbf{u} - \mathbf{v})(s)\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} ds \\
 &\leq \int_0^t \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)} ds + \int_0^t \left\| \int_0^s e^{-(t-s)} A(\mathbf{u} - \mathbf{v})(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} ds \\
 &\leq \int_0^t \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)} ds + \int_0^t \int_0^s \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})(\tau)\|_{\mathbf{H}(\Omega)} d\tau ds \\
 &\leq (1 + t) \int_0^t \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)} ds \\
 &\leq (1 + t) \left(\int_0^t 1 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \\
 &\leq \sqrt{T} (1 + T) \left(\int_0^t \|(\mathbf{u} - \mathbf{v})(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 e^{-2ks} e^{2ks} ds \right)^{1/2} \\
 &\leq \sqrt{T} (1 + T) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{C([0, T]; \mathbf{H}), k} \left(\int_0^t e^{2ks} ds \right)^{1/2} \\
 &\leq \sqrt{T} (1 + T) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{C([0, T]; \mathbf{H}), k} \left(\frac{e^{2kt} - 1}{2k} \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Умножим левую и правую части последней цепочки соотношений на e^{-kt} и перейдем к максимуму по t , выбирая k так, что

$$\frac{\sqrt{T}(1 + T)}{\sqrt{2k}} \leq 1.$$

Получим

$$\|F\mathbf{u} - F\mathbf{v}\|_{C([0, T]; \mathbf{H}), k} \leq C \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{C([0, T]; \mathbf{H}), k}.$$

Согласно принципу неподвижной точки Банаха существует один элемент $\mathbf{u} \in C([0, T]; \mathbf{H})$ такой, что $\mathbf{u} = F\mathbf{u}$, т. е.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 - \int_0^t ((A + J)^{-1} C\mathbf{u}(s) + (A + J)^{-1} D\mathbf{u}(s)) ds, \quad t \in [0, T].$$

Обратимость оператора L доказана. Докажем непрерывность обратного оператора $L^{-1}: L^2(0, T; \mathbf{H}^*) \times \mathbf{H} \rightarrow W$. Пусть функции $f_1, f_2 \in L^2(0, T; \mathbf{H}^*)$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in W$ удовлетворяют соотношениям

$$(A + J)\mathbf{u}'_1 + C\mathbf{u}_1 + D\mathbf{u}_1 = f_1, \quad \mathbf{u}_1|_{t=0} = \mathbf{u}_{0,1},$$

$$(A + J)\mathbf{u}'_2 + C\mathbf{u}_2 + D\mathbf{u}_2 = f_2, \quad \mathbf{u}_2|_{t=0} = \mathbf{u}_{0,2}.$$

Для разности $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(t) = & \mathbf{u}_{0,1} - \mathbf{u}_{0,2} - \int_0^t ((A + J)^{-1}C(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \\ & + (A + J)^{-1}D(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - (A + J)^{-1}(f_1 - f_2)) ds. \end{aligned}$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(t)\|_{\mathbf{H}} &= \left\| \mathbf{u}_{0,1} - \mathbf{u}_{0,2} - \int_0^t ((A + J)^{-1}C(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \right. \\ &\quad \left. + (A + J)^{-1}D(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - (A + J)^{-1}(f_1 - f_2)) ds \right\|_{\mathbf{H}} \\ &\leq \| \mathbf{u}_{0,1} - \mathbf{u}_{0,2} \|_{\mathbf{H}} + \left\| \int_0^t (A + J)^{-1}C(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) ds \right\|_{\mathbf{H}} \\ &\quad + \left\| \int_0^t (A + J)^{-1}D(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) ds \right\|_{\mathbf{H}} + \left\| \int_0^t (A + J)^{-1}(f_1 - f_2) ds \right\|_{\mathbf{H}} \\ &\leq \| \mathbf{u}_{0,1} - \mathbf{u}_{0,2} \|_{\mathbf{H}} + \int_0^t \|C(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\|_{\mathbf{H}^*} ds + \int_0^t \|D(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\|_{\mathbf{H}^*} ds \\ &\quad + \int_0^t \|(A + J)^{-1}(f_1 - f_2)\|_{\mathbf{H}^*} ds \\ &\leq \| \mathbf{u}_{0,1} - \mathbf{u}_{0,2} \|_{\mathbf{H}} + (\mu(R) + 1) \int_0^t \| \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \|_{\mathbf{H}} ds \\ &\quad + \int_0^t \left\| \int_0^\tau e^{-(\tau-s)} A(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) ds \right\|_{\mathbf{H}^*} d\tau + \int_0^t \|f_1 - f_2\|_{\mathbf{H}^*} ds \\ &\leq \| \mathbf{u}_{0,1} - \mathbf{u}_{0,2} \|_{\mathbf{H}} + (\mu(R) + 1) \int_0^t \| \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \|_{\mathbf{H}} ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\tau \|A(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\|_{\mathbf{H}^*} ds d\tau + \left(\int_0^t 1 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|f_1 - f_2\|_{\mathbf{H}^*}^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \| \mathbf{u}_{0,1} - \mathbf{u}_{0,2} \|_{\mathbf{H}} + (\mu(R) + T + 1) \int_0^t \| \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \|_{\mathbf{H}} ds + T^{1/2} \|f_1 - f_2\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^*)} \\ &\leq e^{t(\mu(R)+1+T)} (\| \mathbf{u}_{0,1} - \mathbf{u}_{0,2} \|_{\mathbf{H}} + T^{1/2} \|f_1 - f_2\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^*)}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

В последнем неравенстве мы применили неравенство Гронуолла–Беллмана [7]. Переходя в (2.21) к максимуму по t , получим

$$\|(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(t)\|_{C([0,T];\mathbf{H})} \leq e^{T(\mu(R)+1+T)} (\| \mathbf{u}_{0,1} - \mathbf{u}_{0,2} \|_{\mathbf{H}} + T^{1/2} \|f_1 - f_2\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^*)}).$$

Используя последнюю оценку, а также (2.9), (2.14), можно получить, что

$$\begin{aligned} \| \mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2 \|_{L^2(0,T;\mathbf{H})} &= \| (A + J)^{-1}(f_1 - f_2) - (A + J)^{-1}C(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \\ &\quad - (A + J)^{-1}D(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \|_{L^2(0,T;\mathbf{H})} \\ &\leq \|f_1 - f_2\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^*)} + \|C(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + D(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^*)} \end{aligned}$$

$$\leq \left((1 + \mu(R))\sqrt{T} + \sqrt{\frac{T^3}{3}} \right) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{C([0,T];\mathbf{H})} + \|f_1 - f_2\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^*)}.$$

Из полученных оценок имеем

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_W \leq C(\|\mathbf{u}_{0,1} - \mathbf{u}_{0,2}\|_{\mathbf{H}} + \|f_1 - f_2\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^*)}).$$

Это и означает непрерывность оператора $L^{-1}: L^2(0,T;\mathbf{H}^*) \times \mathbf{H} \rightarrow W$.

2) Непрерывность оператора K следует из непрерывности оператора B (лемма 2.4).

Лемма доказана.

Имеет место следующая теорема об априорной оценке.

ТЕОРЕМА 2.4. Если $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega)$, $\mathbf{u} \in W$ – решение уравнения

$$L\mathbf{u} - \varepsilon K\mathbf{u} = 0 \quad (2.22)$$

для некоторого $\varepsilon \in [0, 1]$, то имеет место оценка $\|\mathbf{u}\|_W \leq C_8(T)$, где константа зависит от $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}(\Omega)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{u} \in W$ – решение уравнения (2.22). Тогда

$$\langle (A + J)\mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle - \varepsilon \langle B\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle C\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \left\langle \int_0^t e^{-(t-s)} A\mathbf{u}(s) ds, \mathbf{u}(t) \right\rangle = 0. \quad (2.23)$$

Для оператора B справедливо следующее выражение:

$$\begin{aligned} \langle B\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 u_i u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 u_i \frac{\partial u_j^2}{\partial x_i} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}(t)) \sum_{j=1}^3 u_j^2(t) dx = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, из (2.23) получаем

$$\langle (A + J)\mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle + \langle C\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \left\langle \int_0^t e^{-(t-s)} A\mathbf{u}(s) ds, \mathbf{u}(t) \right\rangle = 0. \quad (2.24)$$

Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle A\mathbf{u}'(s), \mathbf{u}(s) \rangle ds &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} (\|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}}^2) ds = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2, \\ \int_0^t \langle J\mathbf{u}'(s), \mathbf{u}(s) \rangle ds &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} (\|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{X}}^2) ds = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Тогда из (2.24) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{2} (\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2) \\ &\quad - \int_0^t \langle C\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle ds - \int_0^t \left\langle \int_0^s e^{-(\tau-s)} A\mathbf{u}(\tau) d\tau, \mathbf{u}(s) \right\rangle ds. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Оценивая (2.25), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{2} (\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2) + \left| \int_0^t \langle C\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle ds \right| \\ &\quad + \left| \int_0^t \left\langle \int_0^s e^{-(\tau-s)} A\mathbf{u}(\tau) d\tau, \mathbf{u}(s) \right\rangle ds \right|. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \left\langle \int_0^s e^{-(\tau-s)} A\mathbf{u}(\tau) d\tau, \mathbf{u}(s) \right\rangle ds \right| &\leq \int_0^t \left\| \int_0^s e^{-(\tau-s)} A\mathbf{u}(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)} ds \\ &\leq \int_0^t \int_0^s \left(\frac{\|\mathbf{u}(\tau)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2}{2} + \frac{\|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2}{2} \right) d\tau ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^s \|\mathbf{u}(\tau)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 ds d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t s \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 ds \leq T \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 ds. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Заметим, что имеет место непрерывное вложение $\mathbf{H}(\Omega) \subset \mathbf{L}^4(\Omega)$, т. е. найдется такая наилучшая постоянная $C_7 > 0$, что имеет место неравенство

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \leq C_7 ((\mathbf{u}, \mathbf{u}))^{1/2}.$$

Однако тогда имеет место неравенство

$$\left| \int_0^t \langle C\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle ds \right| \leq \int_0^t (\|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + C_7^4 \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^4) ds.$$

В итоге перепишем (2.25) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \int_0^t ((1+T)\|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + C_7^4 \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^4) ds \\ &\leq \frac{1}{2} (\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2) + \int_0^t \left(\frac{(1+T)^2 + \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^4}{2} + C_7^4 \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^4 \right) ds \\ &\leq \frac{\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2 + (1+T)^2 T}{2} + \int_0^t \left(\frac{1}{2} + C_7^4 \right) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^4 ds. \end{aligned}$$

Получаем

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 \leq \frac{\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2 + (1+T)^2 T}{1 - (1+2C_7^4)(\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2 + (1+T)^2 T)t}. \quad (2.28)$$

Из (2.28) вытекает, что для всех $t \in [0, T_1]$, где для $T_1 > 0$, выполнено неравенство

$$(1 + 2C_7^4)(\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2 + (1+T_1)^2 T_1) T_1 < 1,$$

и для всех $t \in [0, T_1)$ имеет место априорная оценка

$$\|u(t)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 \leq C(T) < +\infty.$$

Теперь получим оценку для $\|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}$. Из (2.3) следует, что

$$\mathbf{u}' = (A + J)^{-1}(-B\mathbf{u} - C\mathbf{u} - D\mathbf{u}).$$

Отсюда, учитывая (2.27), получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;\mathbf{H})} &\leq \|(A + J)^{-1}\|(\|C\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^*)} + \|B\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^*)} + \|D\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^*)}) \\ &\leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H})} + \sqrt{\frac{T^3}{3}}\|\mathbf{u}\|_{C([0,T];\mathbf{H})} + C_3\|\mathbf{u}\|_{C([0,T];\mathbf{H})}^2. \end{aligned}$$

Воспользовавшись оценкой для $\|\mathbf{u}\|_{C([0,T];\mathbf{H})}$, получаем оценку $\|\mathbf{u}'\|_{C([0,T];\mathbf{H})} \leq C(T) < \infty$. Теорема доказана.

Теперь сформулируем основной результат настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА 2.5. *Операторное уравнение $L\mathbf{u} - K\mathbf{u} = 0$ для любых $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega)$ имеет по меньшей мере одно решение $\mathbf{u} \in W$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2.1 следует, что все решения семейства уравнений $L\mathbf{u} - \varepsilon K\mathbf{u} = 0$ лежат в шаре $B_R \subset W$ с центром в нуле; здесь введено обозначение $R = C_8 + 1$. Поэтому ни одно из уравнений этого семейства не имеет решения на границе данного шара. В силу леммы 2.6 оператор L^{-1} непрерывен, а оператор K вполне непрерывен, следовательно, оператор $L^{-1}K(\cdot): W \rightarrow W$ как суперпозиция вполне непрерывен. Введем отображение $G(\beta, \mathbf{u}) = \beta L^{-1}K\mathbf{u}$. Векторное поле

$$\Phi(\beta, \mathbf{u}) = \mathbf{u} - G(\beta, \mathbf{u})$$

вполне непрерывно и невырождено на границе шара B_R . Таким образом, для этого поля определена степень Лере–Шаудера [8]

$$\deg_{\text{LS}}(\Phi, B_R, 0).$$

По свойству гомотопической инвариантности степени получим, что

$$\deg_{\text{LS}}(\Phi(0, \cdot), B_R, 0) = \deg_{\text{LS}}(\Phi(1, \cdot), B_R, 0).$$

По свойству нормировки степени имеем

$$\deg_{\text{LS}}(I, B_R, 0) = 1, \quad \deg_{\text{LS}}(\Phi(1, \cdot), B_R, 0) = 1.$$

Таким образом, существует хотя бы одно решение $\mathbf{u} \in W$ уравнения

$$\mathbf{u} - L^{-1}K\mathbf{u} = 0.$$

Тогда имеет решение и операторное уравнение (2.3) с учетом выполнения начальных условий. Получили, что существует хотя бы одно слабое решение задачи (1.1), (1.2). Теорема доказана.

§ 3. Единственность слабого обобщенного решения задачи и вопрос гладкости

ТЕОРЕМА 3.1. Слабое решение задачи (1.1), (1.2) единственное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать от противного: пусть существуют два различных слабых решения $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ задачи (1.1). Тогда разность уравнений (2.3) для $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \varphi \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t \partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \, dx \\ & + \int_{\Omega} \int_0^t e^{-(t-s)} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial w_i(s)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \, ds \, dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (u_i u_j - v_i v_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx \\ & - \int_{\Omega} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}) \varphi \, dx = 0, \end{aligned}$$

для любых $\varphi \in \mathbf{H}(\Omega)$ и почти всех $t \in (0, T)$, $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Пусть $\varphi = \mathbf{w}(\cdot, t)$; тогда при почти всех $t \in (0, T)$ получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \mathbf{w} \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t \partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \, dx \\ & + \int_{\Omega} \int_0^t e^{-(t-s)} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial w_i(s)}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \, ds \, dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (u_i u_j - v_i v_j) \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \, dx \\ & - \int_{\Omega} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}) \mathbf{w} \, dx = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Перепишем (3.1) в виде неравенства

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \mathbf{w} \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t \partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \, dx \leq - \int_{\Omega} \int_0^t e^{-(t-s)} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial w_i(s)}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \, ds \, dx \\ & + \int_{\Omega} (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} - |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}) \mathbf{w} \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (u_i u_j - v_i v_j) \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \, dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Воспользуемся оценками (2.11), (2.27) и тем, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (u_i u_j - v_i v_j) \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \, dx \right| = \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 u_i w_j \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 v_j w_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \, dx \right| \\ & = \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 u_i \frac{1}{2} \frac{\partial (w_j^2)}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 v_j w_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \, dx \right| \\ & = \left| -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}) \sum_{j=1}^3 w_j^2 \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 v_j w_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \, dx \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 v_j w_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \left| \sum_{i,j=1}^3 \|v_j w_i\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \right| \\
&\leq C_9 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}} \|\mathbf{w}\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{10} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}}^2.
\end{aligned}$$

Тогда из (3.2) получим неравенство

$$\|\mathbf{w}(t)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 \leq C_{11} \int_0^t \|\mathbf{w}(s)\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 ds$$

для почти всех $t \in [0, T]$. Из неравенства Гронуолла–Беллмана [7] получаем $\|\mathbf{w}(t)\|_{\mathbf{H}(\Omega)} = 0$, откуда следует $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$. Противоречие. Теорема доказана.

Поскольку при доказательстве существования решения в теореме 2.1 требовалось, чтобы $\mathbf{u} \in C([0, T]; \mathbf{H})$, а при доказательстве разрушения нам понадобится $\mathbf{u} \in C^1([0, T]; \mathbf{H})$, то далее будет важна следующая

ЛЕММА 3.1. *Слабое решение задачи (1.1), (1.2) принадлежит пространству $C^k([0, T]; \mathbf{H})$, $k = 0, 1, 2, \dots$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство в три шага.

Шаг 1. Покажем, что для любой функции $\mathbf{u} \in C^k([0, T]; \mathbf{H})$ функция $A\mathbf{u}$ принадлежит $C^k([0, T]; \mathbf{H}^*)$, а оператор $A: C^k([0, T]; \mathbf{H}) \rightarrow C^k([0, T]; \mathbf{H}^*)$ непрерывен. Функция $A\mathbf{u}(t)$ принадлежит $C^k([0, T]; \mathbf{H}^*)$ как суперпозиция k раз непрерывно дифференцируемого отображения и линейного оператора $A: \mathbf{H}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^*(\Omega)$. Воспользовавшись оценкой (2.4), получаем

$$\begin{aligned}
\|A\mathbf{u}\|_{C^k([0, T]; \mathbf{H}^*)} &= \sum_{j=0}^k \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{d^j}{dt^j} (A\mathbf{u})(t) \right\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} \\
&\leq \sum_{j=0}^k \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{d^j}{dt^j} \mathbf{u}(t) \right\|_{\mathbf{H}(\Omega)} = \|\mathbf{u}\|_{C^k([0, T]; \mathbf{H})}.
\end{aligned}$$

Поскольку оператор A линеен и ограничен, он непрерывен как оператор из $C^k([0, T]; \mathbf{H})$ в $C^k([0, T]; \mathbf{H}^*)$.

Шаг 2. Докажем, что для любой функции $\mathbf{u} \in C^k([0, T]; \mathbf{H})$ функция $(A+J)\mathbf{u}$ принадлежит $C^k([0, T]; \mathbf{H}^*)$, а оператор $A+J: C^k([0, T]; \mathbf{H}) \rightarrow C^k([0, T]; \mathbf{H}^*)$ обратим и обратный оператор непрерывен. Действительно, функция $(A+J)\mathbf{u}$ принадлежит $C^k([0, T]; \mathbf{H}^*)$ как сумма двух непрерывно дифференцируемых отображений. В силу леммы 2.2, 2) имеем

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H})} \leq \|(A+J)\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^*)}, \quad \ker(A+J) = \{0\}.$$

Теперь для доказательства обратимости оператора $(A+J): C^k([0, T]; \mathbf{H}) \rightarrow C^k([0, T]; \mathbf{H}^*)$ достаточно доказать, что его множество значений совпадает с пространством $C^k([0, T]; \mathbf{H}^*)$. Покажем, что уравнение

$$(A+J)\mathbf{u} = \mathbf{w}$$

имеет решение $\mathbf{u} \in C^k([0, T]; \mathbf{H})$ при любом $\mathbf{w} \in C^k([0, T]; \mathbf{H}^*)$. Поскольку обратим оператор

$$A + J: \mathbf{H}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^*(\Omega),$$

при каждом t существует решение $\mathbf{u}(t) = (A + J)^{-1}\mathbf{w}(t)$. Определенная таким образом функция принадлежит $C^k([0, T]; \mathbf{H})$ как суперпозиция k раз непрерывно дифференцируемого отображения и линейно непрерывного оператора. Из (2.7) для любых $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C([0, T]; \mathbf{H}^*)$ имеем

$$\|(A + J)^{-1}\mathbf{f}(t) - (A + J)^{-1}\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \leq \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{H}^*(\Omega)} \leq \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{C([0, T]; \mathbf{H}^*)}.$$

Переходя в последнем неравенстве к максимуму по t , получаем

$$\|(A + J)^{-1}\mathbf{f}(t) - (A + J)^{-1}\mathbf{g}(t)\|_{C([0, T]; \mathbf{H})} \leq \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t)\|_{C([0, T]; \mathbf{H}^*)},$$

откуда следует непрерывность обратного оператора $(A + J)^{-1}: C^k([0, T]; \mathbf{H}^*) \rightarrow C^k([0, T]; \mathbf{H})$.

Шаг 3. Покажем, что для $\mathbf{u} \in C^k([0, T]; \mathbf{H})$ функции $D\mathbf{u}$, $B\mathbf{u}$ принадлежат $C^k([0, T]; \mathbf{H}^*)$. Поскольку $A\mathbf{u} \in C^k([0, T]; \mathbf{H}^*)$, то

$$D\mathbf{u} = \int_0^t e^{-(t-s)} A\mathbf{u}(s) ds$$

принадлежит $C^{k+1}([0, T]; \mathbf{H}^*)$. Теперь заметим, что $B\mathbf{u} = b(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, где $b(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – непрерывная билинейная форма. Для каждого $\varphi \in \mathbf{H}(\Omega)$ форма

$$\varphi \rightarrow \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx$$

линейная и непрерывная [9], следовательно, существует элемент $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{H}^*(\Omega)$ такой, что

$$\langle b(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx.$$

Отсюда получим, что если $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C([0, T]; \mathbf{H})$, то $b(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \in C([0, T]; \mathbf{H}^*)$ как суперпозиция непрерывных отображений. Пусть $\mathbf{v} \in C^k([0, T]; \mathbf{H})$; тогда при $k = 1$ получим

$$(B(\mathbf{v})(t))' = (b(\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t)))' = b(\mathbf{v}'(t), \mathbf{v}(t)) + b(\mathbf{v}(t), \mathbf{v}'(t)),$$

таким образом, $(B(\mathbf{v}))' \in C([0, T]; \mathbf{H}^*)$ и $B(\mathbf{v}) \in C^1([0, T]; \mathbf{H}^*)$. Аналогично для любого k доказывается, что $B(\mathbf{v}) \in C^k([0, T]; \mathbf{H}^*)$.

Теперь продолжим доказательство по индукции. Пусть $\mathbf{v}$ – слабое решение нашей задачи; тогда имеет место равенство

$$(A + J)\mathbf{v}' = -B\mathbf{v} - C\mathbf{v} - D\mathbf{v}.$$

Для случая $k = 0$ имеем $\mathbf{v} \in C([0, T]; \mathbf{H})$. В силу доказанных свойств операторов $A\mathbf{v}$, $B\mathbf{v}$, $C\mathbf{v}$, $D\mathbf{v}$ последние принадлежат пространству $C([0, T]; \mathbf{H}^*)$. Применяя оператор $(A + J)^{-1}$, получаем

$$\mathbf{v}' = (A + J^{-1})(-B\mathbf{v} - C\mathbf{v} - D\mathbf{v}).$$

В силу изложенного выше получаем, что $\mathbf{v}' \in C([0, T]; \mathbf{H})$, следовательно, $\mathbf{v} \in C^1([0, T]; \mathbf{H}^*)$.

Пусть утверждение верно при $k = m - 1$; докажем его при $k = m$, $\mathbf{v} \in C^m([0, T]; \mathbf{H})$. В силу доказанного нами $A\mathbf{v}$, $B\mathbf{v}$, $C\mathbf{v}$, $D\mathbf{v} \in C^m([0, T]; \mathbf{H}^*)$. Применяя оператор $(A + J)^{-1}$, получаем

$$\mathbf{v}' = (A + J^{-1})(-B\mathbf{v} - C\mathbf{v} - D\mathbf{v}).$$

Правая часть последнего равенства лежит в $C^m([0, T]; \mathbf{H}^*)$, следовательно, $\mathbf{v} \in C^{m+1}([0, T]; \mathbf{H}^*)$. Методом математической индукции требуемое утверждение доказано. Лемма доказана.

§ 4. Разрушение слабого обобщенного решения

Введем следующие обозначения:

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}((\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)_2, \quad \Phi'(0) = \|\mathbf{u}_0\|_4^4 - ((\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)).$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть начальная функция $\mathbf{u}_0(x)$ принадлежит $\mathbf{H}(\Omega)$ и выполнены начальные условия

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(0) + \left(\frac{\gamma}{\alpha - 1} \right)^{1/2} \Phi(0).$$

Тогда $T \neq +\infty$. Более того, найдется такой момент времени

$$T_0 \leq T_2, \quad T_2 = \frac{\Phi^{1-\alpha}(0)}{(\alpha - 1)\Phi^{-\alpha}(0) \left[(\Phi'(0) - \frac{\beta}{\alpha-1}\Phi(0))^2 - \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi^2(0) \right]^{1/2}},$$

что

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty;$$

здесь введены обозначения

$$\alpha = 2(1 - \varepsilon), \quad \beta = \frac{15}{4\varepsilon}, \quad \gamma = 2 + \frac{1145}{32\varepsilon}, \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства разрушения решения получим первое и второе энергетические неравенства. Для этого возьмем в качестве φ в (2.1) сначала $\mathbf{u}$, а затем $\mathbf{u}'$ и получим соответственно

$$\frac{d\Phi}{dt} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \int_0^t e^{-(t-s)} ((\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(s))) ds = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^4, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}'\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}'\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) + \int_{\Omega} (\mathbf{u}', (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}) dx \\ + \int_0^t e^{-(t-s)} ((\mathbf{u}', \mathbf{u})) ds = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^4; \end{aligned} \quad (4.2)$$

здесь введен функционал

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2).$$

Можно получить справедливость следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} ((\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{u}') dx \right| &\leq \sum_{j,k=1}^3 \int_{\Omega} |u_j| |u_k| \left| \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right| dx \\ &\leq \sum_{j,k=1}^3 \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \left| \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right| dx \leq \left(\int_{\Omega} |\mathbf{u}|^4 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^3 \left| \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right|^2 \right) dx \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{3} \|\mathbf{u}\|_4^2 ((\mathbf{u}', \mathbf{u}'))^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2} ((\mathbf{u}', \mathbf{u}')) + \frac{3}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}\|_4^4 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} ((\mathbf{u}', \mathbf{u}')) + \frac{3}{2\varepsilon} \Phi'(t) + \frac{3}{2\varepsilon} \Phi(t) + \frac{3}{2\varepsilon} \int_0^t e^{-(t-s)} ((\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(s))) ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} ((\mathbf{u}', \mathbf{u}')) + \frac{3}{2\varepsilon} \Phi'(t) + \frac{3}{\varepsilon} \Phi(t) + \frac{3}{2\varepsilon} \Phi(t) + \frac{3}{2\varepsilon} \int_0^t e^{-(t-s)} \Phi(s) ds. \end{aligned}$$

Подставляя в (4.2) выражение для $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^4$ из (4.1), можно получить следующее равенство:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}'\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}'\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2 &= -\frac{1}{4} \frac{d}{dt} ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) - \frac{3}{4} \int_0^t e^{-(t-s)} ((\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(s))) ds \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^t e^{-(t-s)} ((\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(s))) ds + \frac{1}{4} ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) + \frac{1}{4} \Phi'' - \int_{\Omega} ((\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{u}') dx. \end{aligned}$$

Отсюда, используя оценки

$$\left| \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 \right| \leq \varepsilon \|\mathbf{u}'\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \frac{2}{\varepsilon} \Phi(t), \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 \leq 2\Phi(t),$$

получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{5}{4} \varepsilon \right) \|\mathbf{u}'\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}'\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2 \\ \leq \frac{1}{4} \Phi'' + \left(\frac{13}{2\varepsilon} + \frac{3}{4} \right) \Phi + \frac{3}{2\varepsilon} \Phi' + \int_0^t \left(\frac{57}{16\varepsilon} + \frac{1}{4} \right) e^{-(t-s)} \Phi(s) ds. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Нетрудно установить, что имеет место неравенство (см., например, [10])

$$(\Phi')^2 \leq 2\Phi(t) (\|\mathbf{u}'\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}'\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.4)$$

Тогда из (4.3) и (4.4) получаем интегро-дифференциальное неравенство

$$\begin{aligned} \Phi \Phi'' - \alpha (\Phi')^2 + \beta \Phi' \Phi + \gamma_1 \Phi^2 + \gamma_2 \int_0^t e^{-(t-s)} \Phi(s) \Phi(t) ds &\geq 0, \\ \alpha = 2(1 - \varepsilon), \quad \beta = \frac{15}{4\varepsilon}, \quad \gamma_1 = \frac{5 \cdot 13}{4\varepsilon} + \frac{3}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{105}{32\varepsilon} + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

При $\alpha > 1$ приходим к выводу, что $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Имеет место формула интегрирования по частям

$$\int_0^t e^{-(t-s)} \Phi(s) ds = e^{-t} \int_0^t e^s \Phi(s) ds = \Phi(t) - e^{-t} \Phi(0) - \int_0^t e^{-(t-s)} \Phi'(s) ds.$$

Поскольку $\Phi(t) \geq 0$, отсюда можно получить следующее неравенство сверху:

$$\int_0^t e^{-(t-s)} \Phi(s) ds \leq \Phi(t) - \int_0^t e^{-(t-s)} \Phi'(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

При выполнении начального условия $\Phi'(0) > 0$ найдется такой момент времени $t_1 \in (0, T]$, что

$$\Phi'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, t_1].$$

Следовательно,

$$\int_0^t e^{-a(t-s)} \Phi(s) ds \leq \frac{1}{a} \Phi(t) \quad \forall t \in [0, t_1].$$

Однако тогда из интегро-дифференциального неравенства (4.5) получим следующее обыкновенное дифференциальное неравенство:

$$\Phi \Phi'' - \alpha (\Phi')^2 + \beta \Phi \Phi' + \gamma \Phi^2 \geq 0, \quad t \in [0, t_1], \quad \gamma = 2 + \frac{1145}{32\varepsilon}. \quad (4.7)$$

Теперь исследуем обыкновенное дифференциальное неравенство (4.7). Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\frac{\Phi''}{\Phi^\alpha} - \alpha \frac{(\Phi')^2}{\Phi^{1+\alpha}} + \beta \frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} + \gamma \Phi^{1-\alpha} \geq 0 \Rightarrow \left[\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} \right]' + \beta \frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} + \gamma \Phi^{1-\alpha} \geq 0.$$

Введем обозначение

$$Y(t) = \Phi^{1-\alpha}(t) e^{\beta t}.$$

Тогда из (4.7) получим неравенство

$$Y'' - \beta Y' - \delta Y \leq 0, \quad t \in [0, t_1], \quad \delta = (\alpha - 1)\gamma. \quad (4.8)$$

Рассмотрим отдельно выражение для $Y'(t)$:

$$Y' = (\alpha - 1) e^{\beta t} \Phi^{-\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi - \Phi' \right).$$

Предположим, что в начальный момент времени выполнено неравенство

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(0).$$

Тогда найдется такой момент времени $t_2 \in (0, t_1]$, что будет выполнено неравенство

$$Y'(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, t_2].$$

Из (4.8) получим следующее неравенство:

$$Y'' - \delta Y \leq 0, \quad t \in [0, t_2], \quad \delta = (\alpha - 1)\gamma. \quad (4.9)$$

Теперь умножим обе части неравенства (4.9) на Y' и проинтегрируем с учетом начального условия; в результате получим

$$(Y'(t))^2 \geq A^2 + \delta(Y(t))^2, \quad (4.10)$$

где

$$A^2 = (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[\left(\Phi'(0) - \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(0) \right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi^2(0) \right]. \quad (4.11)$$

Если $A^2 > 0$, то с учетом (4.11) получим условие для начальных данных задачи:

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(0) + \left(\frac{\gamma}{\alpha - 1} \right)^{1/2} \Phi(0).$$

Из (4.10) имеем

$$\begin{aligned} (\alpha - 1)e^{-\beta t} \Phi^{-\alpha}(t) \left[\frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(t) - \Phi'(t) \right] &\leq -A \\ \Rightarrow \Phi'(t) - \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(t) &\geq \frac{A}{\alpha - 1} e^{\beta t} \Phi^\alpha(t) > 0 \quad \forall t \in [0, t_2], \end{aligned}$$

где последнее неравенство есть следствие того, что, во-первых, $\Phi(0) > 0$, а во-вторых, $\Phi'(t) \geq 0$ при $t \in [0, t_2]$, но тогда если $t_2 < T$, то при $t = t_2$ имеет место неравенство

$$\Phi'(t_2) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(t_2) \Rightarrow \Phi'(t_2) > 0.$$

Пусть $t = t_2$ – начальный момент времени; тогда в силу включения $\Phi(t) \in C^1([0, T])$ найдется такой момент времени $t_3 > t_2$, что

$$\Phi'(t) \geq \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(t) \quad \forall t \in [0, t_3],$$

т.е., в частности, $\Phi'(t) \geq 0$ для всех $t \in [0, t_3]$. Продолжая данный алгоритм, получим, что имеет место неравенство $Y'(t) \leq -A$ для любого $t \in [0, T]$. Проинтегрируем последнее неравенство по времени и получим, что

$$Y(t) \leq Y(0) - At \quad \forall t \in [0, T].$$

Отсюда имеем

$$\Phi(t) \geq \frac{\exp\{\beta t/(\alpha - 1)\}}{[\Phi_0^{1-\alpha} - At]^{1/(\alpha-1)}} \quad \forall t \in [0, T].$$

Теперь приходим к выводу, что найдется такой момент времени

$$T_0 \in [0, T_2], \quad T_2 = \frac{\Phi_0^{1-\alpha}}{A} < +\infty,$$

что $\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty$. Теорема доказана.

В заключение автор выражает искреннюю признательность М. О. Корпусову за неоценимую помощь в работе и полезное обсуждение полученных результатов.

Список литературы

1. А. П. Осколков, “О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 9, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **59**, Наука, Л., 1976, 133–177; англ. пер.: А. Р. Oskolkov, “Some nonstationary linear and quasilinear systems occurring in the investigation of the motion of viscous fluids”, *J. Soviet Math.*, **10**:2 (1978), 299–335.
2. В. Г. Звягин, М. В. Турбин, “Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта”, *Гидродинамика*, СМФН, **31**, РУДН, М., 2009, 3–144; англ. пер.: V. G. Zvyagin, M. V. Turbin, “The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin–Voigt fluids”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **168**:2 (2010), 157–308.
3. М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, “О разрушении решения системы уравнений Осколкова”, *Матем. сб.*, **200**:4 (2009), 83–108; англ. пер.: М. О. Korpusov, A. G. Sveshnikov, “Blow-up of Oskolkov’s system of equations”, *Sb. Math.*, **200**:4 (2009), 549–572.
4. Х. Гаевский, К. Грёбер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978; пер. с нем.: H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
5. М. О. Корпусов, *Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях*, УРСС, М., 2011.
6. J. Simon, “Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$ ”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **146**:1 (1987), 65–96.
7. В. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967.
8. А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, *Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных*, Научный Мир, М., 2008.
9. Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Temam, *Navier–Stokes equations*, Stud. Math. Appl., **2**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1979.
10. А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.

Е. В. Юшков (E. V. Yushkov)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова,
 физический факультет
 E-mail: yushkov.msu@mail.ru

Поступило в редакцию
 22.10.2010