Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Королёв, О законе Грама в теории дзета-функции Римана, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 2, 67–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/im5558>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:09:22

УДК 511.331

М. А. Королёв

О законе Грама в теории дзета-функции Римана

Приведены доказательства одного утверждения Сельберга о распределении ординат нулей дзета-функции Римана, связанного с правилом Грама, а также некоторых эквивалентов этого утверждения.

Библиография: 20 наименований.

Ключевые слова: закон Грама, правило Грама, аргумент дзета-функции Римана.

Введение

В настоящей работе продолжены исследования, начатые в [1] и связанные с распределением ординат нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и так называемым законом Грама.

Напомним основные понятия и определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. При положительном t через $\vartheta(t)$ будем обозначать *приращение аргумента* функции $\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})$ вдоль отрезка с концами в точках $s = \frac{1}{2}$ и $s = \frac{1}{2} + it$.

Можно показать (см., например, [2]), что при неограниченном возрастании t справедливо асимптотическое разложение вида

$$\vartheta(t) \sim \frac{t}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} - 1}{2^{2n} 2n(2n-1)} (-1)^{n+1} B_{2n} t^{-(2n-1)},$$

где B_{2n} – числа Бернулли: $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$ и т. д.

Функция $\vartheta(t)$ входит в выражение для $N(t)$ – числа нулей $\zeta(s)$ в области $0 < \operatorname{Im} s \leq t$. Это выражение называется *формулой Римана–Мангольда* и имеет вид

$$N(t) = \frac{1}{\pi} \vartheta(t) + 1 + S(t).$$

Здесь $S(t) = \pi^{-1} \arg \zeta(\frac{1}{2} + it)$ – аргумент дзета-функции Римана на критической прямой (с основными свойствами $S(t)$ можно ознакомиться в обзорной статье [3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ “Молодые кандидаты РФ” (грант МК-4052.2009.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. При целом $n \geq 0$ *точкой Грама* t_n называется единственное решение уравнения $\vartheta(t_n) = \pi \cdot (n - 1)$.

Пусть $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \dots$ — упорядоченные в порядке возрастания (а в случае совпадения — в произвольном порядке) положительные ординаты нулей функции $\zeta(s)$. Еще первые исследователи, занимавшиеся вычислениями нулей дзета-функции Римана, обратили внимание на то, что для всех не очень больших значений n , за малым числом исключений, ордината γ_n лежит на промежутке $G_n = (t_{n-1}, t_n]$. Это явление получило впоследствии название *закон Грама*, или *правило Грама*.

При попытках сформулировать общую закономерность, подмеченную на сравнительно небольшом числе примеров, возникает определенная степень свободы (см. [4, примечание на с. 212]). По этой причине под правилом Грама иногда понимается нечто иное. Например, говорят, что промежуток G_n удовлетворяет правилу Грама, если G_n содержит ровно один нуль функции $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ независимо от того, совпадает ли его номер с номером n промежутка или не совпадает. Именно так формулировали правило Грама Дж. И. Хатчинсон [5] и Э. Ч. Титчмарш [6]. Нужную трактовку правила Грама можно найти в работе Т. С. Труджиана [7].

Чтобы охарактеризовать степень отклонения от правила Грама, Титчмарш рассмотрел дроби $\frac{c_n - t_n}{t_{n+1} - t_n}$, где c_n — упорядоченные по возрастанию положительные нули функции $\zeta(\frac{1}{2} + it)$, и сформулировал теорему об их неограниченности. Если c_n содержится в промежутке G_m , то несложно показать, что соответствующая дробь близка к разности $m - n$. Таким образом, теорема Титчмарша означает, что номер n ординаты нуля, лежащего на критической прямой, может отличаться от номера промежутка Грама на сколь угодно большую величину. Итак, имеется бесконечно много исключений из правила Грама.

А. Сельберг в своем докладе “Дзета-функция и гипотеза Римана” (см. [8, ч. IV]), упоминая результат Титчмарша, записывает его в виде

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = -\infty, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = +\infty, \quad (1)$$

где для заданного $n \geq 1$ величины Δ_n определяются как разности $m - n$ при условии, что $t_{m-1} < \gamma_n \leq t_m$. В той же работе Сельберг поместил (без доказательства) найденные им формулы

$$\sum_{n=1}^N \Delta_n^{2k} = \frac{(2k)!}{k!} \frac{N}{(2\pi)^k} (\ln \ln N)^k + O(N(\ln \ln N)^{k-1/2}), \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^N \Delta_n^{2k-1} = O(N(\ln \ln N)^{k-1}), \quad (3)$$

в которых $k \geq 1$ — произвольное фиксированное целое число, и высказал следующее предположение: “По-видимому, хотя я и не мог доказать этого строго, $\sqrt{\log \log n}$ есть “нормальный” порядок величины Δ_n в следующем смысле:

если $\Phi(n)$ – положительная функция от n , стремящаяся к бесконечности вместе с n , то неравенства

$$\frac{\sqrt{\log \log n}}{\Phi(n)} < |\Delta_n| < \Phi(n) \sqrt{\log \log n}$$

имеют место для почти всех n . В частности, это должно означать, что γ_ν “почти никогда” не лежат в интервале $(t_{\nu-1}, t_\nu)$. Именно первое неравенство составляет основную трудность, его я доказать полностью не смог”.

Таким образом, закон Грама должен выполняться “с точностью до наоборот”: то, что считалось ранее исключением, оказывается нормой, а то, что именовалось “правилом”, является в действительности очень редким явлением.

Есть основания полагать, что в своем определении разностей Δ_n Сельберг под величинами γ_n подразумевал всё же ординаты всех комплексных нулей $\zeta(s)$, а не только тех, которые лежат на критической прямой, а вместо дробей Титчмарша он рассматривал дроби

$$q_n = \frac{\gamma_n - t_n}{t_{n+1} - t_n}, \quad (4)$$

отличающиеся от величин Δ_n слагаемым $O(1)$ (см. лемму 2 настоящей статьи). В противном случае, ограничиваясь рассмотрением лишь нулей, лежащих на критической прямой, и имея для соответствующим образом определенных величин Δ_n формулы, подобные (2) и (3), нетрудно вывести из них ряд утверждений о нулях $\zeta(s)$, по своей силе весьма близких к гипотезе Римана и, во всяком случае, значительно превосходящих по точности наилучшие из известных на сегодняшний день теорем о числе нулей $\zeta(s)$ на критической прямой.

По этой причине мы, говоря далее о правиле (законе) Грама, будем придерживаться следующих определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что ордината γ_n *удовлетворяет закону Грама*, если выполняются неравенства $t_{n-1} < \gamma_n \leq t_n$.

Таким образом, если промежуток G_n содержит вместе с γ_n ординаты $\gamma_{n-s}, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{n+r}$, то все они, за исключением γ_n , закону Грама не удовлетворяют.

Пусть для заданного $n \geq 1$ выполняются неравенства

$$t_{m-1} < \gamma_n \leq t_m. \quad (5)$$

Положим тогда $\Delta_n = m - n$.

Ясно, что ордината γ_n удовлетворяет правилу Грама тогда и только тогда, когда $\Delta_n = 0$.

В работе [1] автору удалось доказать ту часть гипотезы Сельберга, которая утверждает, что ордината γ_n “почти никогда” не попадает в промежуток $G_n = (t_{n-1}, t_n]$. Для этого понадобилось исследовать свойства последовательности $\Delta(n)$, определяемой следующим образом.

Пусть для данной точки Грама t_n выполнены неравенства

$$\gamma_m \leq t_n < \gamma_{m+1}. \quad (6)$$

Положим тогда $\Delta(n) = m - n$.

Оказалось, что на заданном промежутке изменения n количество величин Δ_n , равных нулю, практически совпадает с количеством равных нулю членов последовательности $\Delta(n)$. Решающим обстоятельством явилось и то, что величины $\Delta(n)$ гораздо легче поддаются исследованию, чем числа Δ_n . Действительно, из (6) и формулы Римана–Мангольдта следует равенство $\Delta(n) = S(t_n + 0)$, сводящее исходную задачу к некоторой задаче о распределении значений аргумента дзета-функции Римана. Поведение функции $S(t)$ на достаточно “правильной” последовательности точек Грама можно исследовать методами, сходящими к работам А. Сельберга [9] и А. Гоша [10].

После того, как работа [1] была опубликована, автору удалось ознакомиться с собранием сочинений Сельберга, которое вышло в свет в 1989–1991 гг. Текст упомянутой лекции 1946 г., включенный в первый том собрания (см. [11, с. 341–355]), оказался снабжен следующим примечанием Сельберга: “Из этих равенств (имеются в виду приведенные выше формулы (2) и (3) – *прим. авт.*) стандартным образом выводится, что величина $\Delta_n/\sqrt{\log \log n}$ имеет гауссово распределение. В частности, это дает ответ на поставленный там же вопрос (приведенная выше гипотеза Сельберга – *прим. авт.*). В 1946 г. я еще не знал, что эти теоремы о моментах Δ_n позволяют находить функцию распределения”. Это примечание Сельберга нуждается в подробных пояснениях.

Действительно, к моменту выхода книги [11] уже были опубликованы работы А. Г. Постникова [12] и В. Ф. Гапошкина [13], в которых приведены рассуждения, позволяющие отыскать функцию распределения случайной величины по ее четным и нечетным моментам, а также статьи А. Фуджи [14] и А. Гоша [10], в которых подобные рассуждения применялись к задачам теории дзета-функции Римана и L -функций Дирихле (с методом Гоша можно ознакомиться и в обзорной статье [15]).

Иначе обстоит дело с обоснованием формул (2) и (3). Доказательство Сельберга, насколько известно, так и не было опубликовано. Вместе с тем, попытка такого обоснования содержится в упомянутой работе Фуджи, посвященной решению похожей задачи из теории L -функций Дирихле. Поясним это подробнее.

Пусть $q \geq 5$ – фиксированное целое число, и пусть χ_1, χ_2 – различные примитивные характеры по модулю q . Занумеруем положительные ординаты нулей функций $L(s, \chi_1)$ и $L(s, \chi_2)$ в порядке возрастания:

$$\begin{aligned} 0 < \gamma_1(\chi_1) \leq \gamma_2(\chi_1) \leq \dots \leq \gamma_n(\chi_1) \leq \gamma_{n+1}(\chi_1) \leq \dots, \\ 0 < \gamma_1(\chi_2) \leq \gamma_2(\chi_2) \leq \dots \leq \gamma_n(\chi_2) \leq \gamma_{n+1}(\chi_2) \leq \dots. \end{aligned}$$

Далее, если для заданного n выполнены неравенства

$$\gamma_m(\chi_1) < \gamma_n(\chi_2) \leq \gamma_{m+1}(\chi_1),$$

то положим $\Delta_n(\chi_1, \chi_2) = n - m$. Возникает вопрос: как часто величина $\Delta_n(\chi_1, \chi_2)$ обращается в нуль, если ордината $\gamma_n(\chi_2)$ меняется в достаточно длинном промежутке $(T, T + H]$?

Для ответа на этот вопрос Фуджи показывает, что дискретная случайная величина со значениями $\Delta_n(\chi_1, \chi_2)/\sqrt{\ln \ln n}$ имеет распределение, сходящееся при неограниченном возрастании T к гауссовскому. Отсюда делается заключение о том, что для “почти всех” n разность $\Delta_n(\chi_1, \chi_2)$ отлична от нуля. Однако

доказательство этих фактов опирается на рассмотрение интеграла

$$j = \int_T^{T+H} (S(t, \chi_1) - S(t, \chi_2))^{2k} dS(t, \chi_2)$$

и, в итоге, на оценку

$$j = O((\ln T)^{2k+1}), \quad (7)$$

которая играет ключевую роль в рассуждениях. Здесь

$$S(t, \chi) = \pi^{-1} \arg L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)$$

– аргумент L -функции Дирихле $L(s, \chi)$ на критической прямой. Вывод оценки (7) в работе [14] не приведен.

Доказательство Фуджи нельзя признать удовлетворительным ввиду того, что интеграл j как интеграл Стильгеса не определен. Это объясняется тем, что точки разрыва кусочно гладкой функции $S(t, \chi_2)$, по которой ведется интегрирование, совпадают с ординатами $\gamma_n(\chi_2)$. В этих же точках совершает скачки и интегрируемая функция $S(t, \chi_1) - S(t, \chi_2)$. В такой ситуации несложно построить две последовательности интегральных сумм для j , сходящиеся к различным пределам (см., например, [16, п. 584]).

Рассуждения Фуджи, формально примененные к задаче вычисления четных моментов Δ_n , приводят к интегралам вида

$$\int_T^{T+H} S^{2k}(t) dS(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

к которым в полной мере относится все изложенное выше для интеграла j .

Таким образом, вопрос обоснования равенств (2) и (3) остается открытым. Ниже делается попытка восполнить этот пробел.

Представим теперь содержание настоящей статьи. Работа состоит из трех параграфов. В § 1 исследуется порядок роста величин Δ_n при $n \rightarrow +\infty$ (теорема 1) и доказываются омега-оценки (теорема 2), значительно уточняющие соотношения (1). Все утверждения в § 1 являются по сути следствиями O - и Ω -оценок для функции $S(t)$.

Главным утверждением в § 2 является лемма 2 о числе решений двойного неравенства

$$a < \Delta_n \leq b,$$

где a и b – заданные целые числа. Оказывается, что это число решений практически не отличается от числа решений двойного неравенства

$$-(b+1) < \Delta(n) \leq -(a+1)$$

(промежутки изменения n предполагаются, конечно, одинаковыми). Следствием этого факта является почти точное совпадение функций распределения Δ_n и $\Delta(n)$ (теорема 3), а также значений моментов любых степеней этих величин (теоремы 4–6). Таким образом, и гипотеза Сельберга, и формулы (2), (3)

вытекают из соответствующих утверждений статьи [1] (леммы 3–5 настоящей работы).

Наконец, в § 3, 4 доказываются некоторые утверждения, являющиеся по сути эквивалентами гипотезы Сельберга. Прежде всего, это задача о распределении разностей $\gamma_n - t_n$ (теоремы 7–10). Если ордината γ_n удовлетворяет закону Грама, то такая разность не превосходит по порядку величины

$$t_{n+1} - t_n \sim \frac{2\pi}{\ln n}. \quad (8)$$

Между тем для “почти всех” n значения $|\gamma_n - t_n|$ оказываются много больше правой части (8) и близки по порядку к

$$\frac{\sqrt{\ln \ln n}}{\ln n}.$$

Завершает статью ряд утверждений о распределении верхних и нижних “пигов” графика функции $S(t)$, т. е. величин $S(\gamma_n + 0)$, $S(\gamma_n - 0)$ (теоремы 11–14). Как и в случае разностей Δ_n , для большинства значений n эти “пики” имеют порядок $\sqrt{\ln \ln n}$.

Введем следующие обозначения. Везде ниже ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $N \geq N_0(\varepsilon) > 1$, N – целое число, $M = [N^{27/82+\varepsilon}]$, $L = \ln \ln N$, $\theta, \theta_1, \theta_2, \dots$ – комплексные числа, по абсолютной величине не превосходящие единицы, в разных соотношениях, вообще говоря, разные. Все прочие обозначения вводятся по ходу изложения.

Автор искренне благодарит профессоров Ю. В. Нестеренко и А. Н. Паршина за всестороннюю поддержку и внимание к работе, Т. С. Труджиана, представившего свой препринт [7] с новыми результатами, связанными с правилом Грама, а также рецензента за тщательную проверку рукописи и ряд полезных замечаний.

§ 1. Порядок роста величин Δ_n при $n \rightarrow +\infty$

В настоящем параграфе доказывается ряд утверждений, показывающих, насколько большими по модулю могут быть величины Δ_n при неограниченном возрастании n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть число γ является ординатой r различных нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$, кратности которых равны $k_1, \dots, k_r$ соответственно. *Кратностью ординаты γ* будем называть величину κ , равную сумме этих кратностей:

$$\kappa = k_1 + \dots + k_r.$$

Если $\gamma = \gamma_l$, то вместо κ будем использовать обозначение κ_l . Таким образом, в случае

$$\gamma_{l-1} < \gamma_l = \gamma_{l+1} = \dots = \gamma_{l+p-1} < \gamma_{l+p} \quad (9)$$

имеем $\kappa_l = \kappa_{l+1} = \dots = \kappa_{l+p-1} = p$. Наконец, из свойств функции $S(t)$ следует равенство

$$\kappa_l = S(\gamma_l + 0) - S(\gamma_l - 0). \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 1. При $n \rightarrow +\infty$ имеет место оценка $\Delta_n = O(\ln n)$. Если верна гипотеза Римана, то

$$\Delta_n = O\left(\frac{\ln n}{\ln \ln n}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь определением функции $N(t)$, из (5) находим

$$N(t_{m-1} - 0) < N(\gamma_n + 0) \leq N(t_m + 0). \quad (11)$$

Заметим теперь, что $N(\gamma_n + 0) = n + \theta_n(\kappa_n - 1)$, где $0 \leq \theta_n \leq 1$. Действительно, в случае $\kappa_n = 1$ это равенство очевидно. Пусть при некотором p выполняются неравенства (9). Тогда, если $n = l + s$, $0 \leq s \leq p - 1$, имеем $\kappa_n = p$, так что

$$N(\gamma_n + 0) = l + p - 1 = n + (p - s - 1) = n + \kappa_n - s - 1 = n + \theta_n(\kappa_n - 1),$$

где

$$0 \leq \theta_n = \frac{\kappa_n - s - 1}{\kappa_n - 1} \leq 1.$$

Учитывая неравенства (11), из формулы Римана–Мангольдта заключаем:

$$\frac{1}{\pi} \vartheta(t_{m-1}) + 1 + S(t_{m-1} - 0) < n + \theta_n(\kappa_n - 1) \leq \frac{1}{\pi} \vartheta(t_m) + 1 + S(t_m - 0).$$

Пользуясь определением точек Грама и заменяя $\vartheta(t_{m-1})$, $\vartheta(t_m)$ на $\pi \cdot (m - 2)$, $\pi \cdot (m - 1)$ соответственно, после несложных преобразований получим

$$-S(t_m + 0) - \kappa_n \leq m - n \leq -S(t_{m-1} - 0) + \kappa_n.$$

Теперь утверждение теоремы следует из (10) и классических оценок сверху для функции $|S(t)|$ (см., например, [3]; по поводу величины постоянных в знаках O см. замечание к лемме 7). Теорема доказана.

Следующая лемма устанавливает связь дробей (4) с величинами Δ_n .

ЛЕММА 1. При $n \rightarrow +\infty$ справедливо равенство

$$\Delta_n = q_n + \theta_n + O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

где $0 \leq \theta_n \leq 1$, а постоянная в знаке O является абсолютной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, из (5) следует, что

$$\frac{t_{m-1} - t_n}{t_{n+1} - t_n} < q_n \leq \frac{t_m - t_n}{t_{n+1} - t_n}. \quad (12)$$

Из определения точек Грама и теоремы Лагранжа о конечных приращениях получаем равенство

$$\pi \cdot (m - n) = \vartheta(t_m) - \vartheta(t_n) = \vartheta'(t_n)(t_m - t_n) + \frac{1}{2} \vartheta''(\xi)(t_m - t_n)^2,$$

в котором ξ – некоторое число, расположенное между t_m и t_n . Таким образом,

$$t_m - t_n = \frac{\pi \cdot (m - n)}{\vartheta'(t_n)} \frac{1}{1 + r}, \quad r = \frac{\vartheta''(\xi)}{2\vartheta'(t_n)} (t_m - t_n). \quad (13)$$

Далее, из теоремы 1 следует грубая оценка

$$t_m - t_n \ll t_m + t_n \ll \frac{n}{\ln n},$$

а из соотношений

$$\vartheta''(\xi) = \frac{1}{2\xi} + O\left(\frac{1}{\xi^3}\right) \ll \frac{1}{\xi} \ll \frac{1}{t_n} \ll \frac{\ln n}{n}, \quad \vartheta'(t_n) = \frac{1}{2} \ln \frac{t_n}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t_n}\right) \gg \ln n$$

следует неравенство

$$r \ll \frac{\ln n}{n} \frac{1}{\ln n} \frac{n}{\ln n} \ll \frac{1}{\ln n}.$$

Тогда из (13) получаются более точные оценки разности $t_m - t_n$ и величины r , а именно

$$t_m - t_n = \frac{\pi \cdot (m - n)}{\vartheta'(t_n)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) \ll \frac{|m - n|}{\ln n} \ll 1, \quad r \ll \frac{\ln n}{n} \frac{1}{\ln n} \ll \frac{1}{n}.$$

Таким образом, находим

$$t_m - t_n = \frac{\pi \cdot (m - n)}{\vartheta'(t_n)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Аналогично доказываются и равенства

$$\begin{aligned} t_{m-1} - t_n &= \frac{\pi \cdot (m - n - 1)}{\vartheta'(t_n)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\ t_{n+1} - t_n &= \frac{\pi}{\vartheta'(t_n)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя найденные значения в (12), получим

$$\begin{aligned} q_n &\leq \frac{\pi \cdot (m - n)}{\vartheta'(t_n)} \frac{\vartheta'(t_n)}{\pi} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \Delta_n + O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \\ q_n &> \frac{\pi \cdot (m - n - 1)}{\vartheta'(t_n)} \frac{\vartheta'(t_n)}{\pi} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \Delta_n - 1 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right). \end{aligned}$$

Теперь утверждение леммы следует из последних двух неравенств.

ТЕОРЕМА 2. *Имеют место неравенства*

$$\max_{N < n \leq N+M} (\pm \Delta_n) \geq c \left(\frac{\ln N}{\ln \ln N} \right)^{1/3},$$

где $c = c(\varepsilon)$ – некоторая положительная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Q = c_1 \left(\frac{\ln N}{\ln \ln N} \right)^{1/3}$, где точное значение постоянной c_1 будет выбрано далее. Допустим, что для всех n , $N < n \leq N + M$, выполнены неравенства

$$q_n = \frac{\gamma_n - t_n}{t_{n+1} - t_n} < Q. \tag{15}$$

Полагая $\tau_n = t_n + Q(t_{n+1} - t_n)$, из (15) находим $\gamma_n < \tau_n$. Однако тогда из формулы Римана–Мангольдта следует, что для всех n из рассматриваемого промежутка справедливы неравенства

$$n \leq N(\gamma_n + 0) \leq N(\tau_n + 0) = \frac{1}{\pi} \vartheta(\tau_n) + 1 + S(\tau_n + 0). \quad (16)$$

Пользуясь теоремой Лагранжа о конечных приращениях и равенством (14), получим

$$\begin{aligned} \vartheta(\tau_n) &= \vartheta(t_n) + \vartheta'(t_n)Q(t_{n+1} - t_n) + \frac{1}{2}\vartheta''(\xi)Q^2(t_{n+1} - t_n)^2 \\ &= \vartheta(t_n) + \pi Q \left(1 + O\left(\frac{1}{N \ln N}\right) \right) + O\left(\frac{Q^2}{N \ln N}\right) = \pi(n - 1 + Q) + O(N^{-1}), \end{aligned}$$

где $t_n < \xi < t_{n+1}$. Подставляя найденное выражение для $\vartheta(\tau_n)$ в (16), после сокращений получим

$$S(\tau_n + 0) \geq -Q + O(N^{-1}). \quad (17)$$

Покажем теперь, что (17) не может выполняться для всех значений n с условием $N < n \leq N + M$. Определим для произвольного положительного x величину $t_x = t(x)$ как единственное решение уравнения

$$\vartheta(t_x) = \pi \cdot (x - 1) \quad (18)$$

и положим $\tau_x = t_x + Q(t_{x+1} - t_x)$. Тогда при некотором η , $x < \eta < x + 1$, имеем

$$\tau'_x = t'_x + Q(t'_{x+1} - t'_x) = t'_x + Q t''_\eta.$$

Дважды дифференцируя (18) по x , находим

$$t'_x = \frac{\pi}{\vartheta'(t_x)}, \quad t''_x = -\frac{(t'_x)^2 \vartheta''(t_x)}{\vartheta'(t_x)} = -\pi^2 \frac{\vartheta''(t_x)}{(\vartheta'(t_x))^3} \ll \frac{1}{x \ln^2 x}.$$

Таким образом, при $N < x \leq N + M$ выполняются неравенства

$$\tau'_x = \frac{\pi}{\vartheta'(t_x)} - O\left(\frac{Q}{x \ln^2 x}\right) = \frac{\pi}{\vartheta'(t_x)} \left(1 - O\left(\frac{Q}{x \ln x}\right)\right) > \frac{\pi}{2\vartheta'(t_x)} > 0,$$

из которых следует, что на рассматриваемом промежутке последовательность τ_n монотонно возрастает. Заметим, наконец, что

$$\tau_{n+1} - \tau_n = \tau'_\lambda < \frac{\pi}{\vartheta'(t_\lambda)} < \frac{\pi}{\vartheta'(t_n)} < \frac{3\pi}{\ln n},$$

где $n < \lambda < n + 1$.

Покажем теперь, что в точках τ_n , близких к минимумам $S(t)$, значения $S(\tau_n)$ обязаны быть отрицательными и большими по модулю. Это и приведет к противоречию с (17).

Согласно омега-теореме для $S(t)$ (см. [3]) на промежутке $(\tau_N, \tau_{N+M}]$ найдется такая точка τ , что

$$S(\tau) < -c_0 \left(\frac{\ln N}{\ln \ln N} \right)^{1/3},$$

где $c_0 = c_0(\varepsilon) > 0$ – некоторая постоянная. Определим целое n из неравенств $\tau_n < \tau \leq \tau_{n+1}$ и предположим, что $\gamma^{(1)} < \gamma^{(2)} < \dots < \gamma^{(s)}$ – все различные ординаты нулей $\zeta(s)$, принадлежащие промежутку $(\tau_n, \tau]$. Тогда, записывая приращение функции $S(t)$ на этом промежутке в виде суммы приращений на каждом из интервалов непрерывности $S(t)$ и суммы скачков $S(t)$ в точках разрыва $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots, \gamma^{(s)}$, приходим к тождеству

$$\begin{aligned} S(\tau) - S(\tau_n + 0) &= \{S(\gamma^{(1)} - 0) - S(\tau_n + 0)\} \\ &+ \{S(\gamma^{(1)} + 0) - S(\gamma^{(1)} - 0)\} + \{S(\gamma^{(2)} - 0) - S(\gamma^{(1)} + 0)\} + \dots \\ &\dots + \{S(\gamma^{(s)} + 0) - S(\gamma^{(s)} - 0)\} + \{S(\tau) - S(\gamma^{(s)} + 0)\}, \end{aligned}$$

из которого следует неравенство

$$\begin{aligned} S(\tau) - S(\tau_n + 0) &\geq \{S(\gamma^{(1)} - 0) - S(\tau_n + 0)\} + \{S(\gamma^{(2)} - 0) - S(\gamma^{(1)} + 0)\} + \dots \\ &\dots + \{S(\tau) - S(\gamma^{(s)} + 0)\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Если (a, b) – интервал, на котором функция $S(t)$ непрерывна, и $1 < a < b$, $b - a < 1$, то

$$\begin{aligned} S(b) - S(a) &= (b - a)S'(\xi) = (b - a) \left(-\frac{1}{2} \ln \frac{\xi}{2\pi} + O(\xi^{-2}) \right) \\ &= (b - a) \left(-\frac{1}{2} \ln \frac{\xi}{2\pi} + O(a^{-2}) \right), \end{aligned} \quad (20)$$

где $a < \xi < b$. Пользуясь оценками

$$\tau - \tau_n \leq \tau_{n+1} - \tau_n < \frac{3\pi}{\ln n} < 1,$$

из (19) и (20) заключаем следующее:

$$\begin{aligned} S(\tau) - S(\tau_n + 0) &\geq \{(\gamma^{(1)} - \tau_n) + (\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}) + \dots + (\tau - \gamma^{(s)})\} \left(-\frac{1}{2} \ln \frac{\tau}{2\pi} + O(\tau^{-2}) \right) \\ &> -(\tau - \tau_n) \ln \tau > -\frac{3\pi}{\ln N} \ln N = -3\pi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S(\tau_n + 0) \leq S(\tau) + 3\pi < -c_0 \left(\frac{\ln N}{\ln \ln N} \right)^{1/3} + 3\pi < -0.9c_0 \left(\frac{\ln N}{\ln \ln N} \right)^{1/3}.$$

Теперь несложно заметить, что последнее неравенство противоречит (17) при $c_1 = 0.8c_0$. Таким образом, найдется хотя бы один номер n с условием $N < n \leq N + M$, для которого нарушено неравенство (15). Согласно лемме 1 для такого n имеем

$$\Delta_n > q_n - 1 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \geq Q - 1.1 > c \left(\frac{\ln N}{\ln \ln N} \right)^{1/3}, \quad (21)$$

где $c = 0.7c_0$.

Аналогично доказывается и существование больших по модулю отрицательных значений Δ_n . Именно, допустив, что для всех n из $(N, N+M]$ выполняется неравенство $q_n > -Q$, получим, что $\gamma_n > \sigma_n$, где $\sigma_n = t_n - Q(t_{n+1} - t_n)$, и, следовательно,

$$N(\sigma_n + 0) \leq N(\gamma_n - 0) < n.$$

Преобразуя левую часть последнего неравенства подобно тому, как это сделано выше, получим

$$S(\sigma_n + 0) < Q + O(N^{-1}). \quad (22)$$

Находя затем с помощью омега-теоремы для $S(t)$ точку σ , $\sigma_N < \sigma \leq \sigma_{N+M}$, в которой выполняется неравенство

$$S(\sigma) > c_0 \left(\frac{\ln N}{\ln \ln N} \right)^{1/3},$$

определим номер n из условий $\sigma_{n-1} < \sigma \leq \sigma_n$. Последнее возможно, поскольку величины σ_n образуют на промежутке $(\sigma_N, \sigma_{N+M}]$ строго возрастающую последовательность. Рассуждая точно так же, как и при доказательстве неравенства (21), и пользуясь тем, что $\sigma_n - \sigma_{n-1} < 3\pi(\ln n)^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} S(\sigma_n + 0) - S(\sigma) &> (\sigma_n - \sigma) \left(-\frac{1}{2} \ln \frac{\sigma_n}{2\pi} + O(\sigma_n^{-2}) \right) > -(\sigma_n - \sigma) \ln \sigma_n > -3\pi, \\ S(\sigma_n + 0) &> S(\sigma) - 3\pi > 0.9c_0 \left(\frac{\ln N}{\ln \ln N} \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство противоречит (22) при $c_1 = 0.8c_0$. Итак, найдется по меньшей мере одно число n , $N < n \leq N+M$, такое, что $q_n \leq -Q$. Для него имеем

$$\Delta_n \leq q_n + 1.1 \leq -Q + 1.1 < -c \left(\frac{\ln N}{\ln \ln N} \right)^{1/3},$$

где, как и выше, $c = 0.7c_0$. Теорема доказана.

§ 2. Гипотеза Сельберга и моменты величин Δ_n

Этот параграф посвящен доказательству гипотезы Сельберга и вычислению моментов величин Δ_n , т. е. сумм вида

$$\sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^a, \quad \sum_{N < n \leq N+M} |\Delta_n|^a$$

при различных значениях параметра a .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть a, b – произвольные вещественные числа, $a < b$. Обозначим через $e(a, b)$ число решений неравенства $a < \Delta_n \leq b$ с условием $N < n \leq N+M$. Через $f(a, b)$ обозначим число решений неравенства $a < \Delta(n) \leq b$, подчиненных тому же условию.

Следующее утверждение является ключевым для всех дальнейших рассуждений.

ЛЕММА 2. Для целых чисел a и b , $a < b$, справедливо равенство

$$e(a, b) = f(-(b+1), -(a+1)) + \theta(|a| + |b|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, имеем $e(a, b) = M - e_1 - e_2$, где e_1 и e_2 обозначают числа решений соответственно неравенств

$$\Delta_n \leq a, \quad \Delta_n > b \quad (23)$$

с условием $N < n \leq N + M$. Первое из неравенств (23) эквивалентно следующему:

$$\gamma_n \leq t_{n+a}. \quad (24)$$

Действительно, если $t_{m-1} < \gamma_n \leq t_m$ и $\Delta_n = m - n \leq a$, то $m \leq n + a$ и $\gamma_n \leq t_m \leq t_{n+a}$. Обратно, если выполняется условие (24), то для определенного выше числа m будем иметь $\gamma_n \leq t_m \leq t_{n+a}$, откуда $m \leq n + a$ и $\Delta_n \leq a$.

Полагая $\nu = n + a$ в (24), убеждаемся, что e_1 совпадает с числом решений неравенства

$$\gamma_{\nu-a} \leq t_\nu \quad (25)$$

с условием $N + a < \nu \leq N + M + a$ и, таким образом, не более чем на $|a|$ отличается от f_1 — числа решений неравенства (25) с условием $N < \nu \leq N + M$: $e_1 = f_1 + \theta_1|a|$.

Точно так же доказывается, что неравенство $\Delta_n > b$ эквивалентно неравенству $\gamma_n > t_{n+b}$, а число e_2 совпадает с числом номеров ν с условием $N + b < \nu \leq N + M + b$, удовлетворяющих неравенству

$$\gamma_{\nu-b} > t_\nu. \quad (26)$$

Следовательно, $e_2 = f_2 + \theta_2|b|$, где f_2 — число решений неравенства (26) с условием $N < \nu \leq N + M$.

Однако если точка Грама t_ν не удовлетворяет ни одному из соотношений (25), (26), то

$$\gamma_{\nu-b} \leq t_\nu < \gamma_{\nu-a}. \quad (27)$$

Покажем, что (27) эквивалентно двойному неравенству

$$-(b+1) < \Delta(\nu) \leq -(a+1). \quad (28)$$

Действительно, определяя число m из неравенств $\gamma_m \leq t_\nu < \gamma_{m+1}$, из соотношения (27) заключаем, что $\nu - b \leq m \leq \nu - a - 1$, откуда следует (28). Обратно, из (28) для определенного выше числа m будем иметь $\nu - b \leq m \leq \nu - a - 1$, и, таким образом,

$$\gamma_{\nu-b} \leq \gamma_m \leq t_\nu < \gamma_{m+1} \leq \gamma_{\nu-a}.$$

Следовательно, число решений (27), отвечающих промежутку $N < \nu \leq N + M$, совпадает с $f(-(b+1), -(a+1))$, откуда

$$\begin{aligned} e(a, b) &= M - e_1 - e_2 = M - f_1 - f_2 - \theta_1|a| - \theta_2|b| \\ &= f(-(b+1), -(a+1)) + \theta(|a| + |b|). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть для вещественного x величина $\nu(x)$ обозначает количество чисел n , $N < n \leq N + M$, удовлетворяющих условию

$$\Delta(n) \leq \frac{x}{\pi} \sqrt{\frac{L}{2}}.$$

Тогда

$$\nu(x) = M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du + \theta\delta \right),$$

$$\text{где } \delta = e^{22.4} \varepsilon^{-1.5} (\ln L)^{-0.5}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в работе [1].

ТЕОРЕМА 3. При любых a и b , $a < b$, для числа $e(a, b)$ решений неравенства $a < \Delta_n \leq b$ с условием $N < n \leq N + M$ справедлива формула

$$e(a, b) = M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-u^2/2} du + \theta\Delta \right),$$

$$\text{где } \alpha = \pi a \sqrt{2/L}, \beta = \pi b \sqrt{2/L}, \Delta = 2.2 e^{22.4} \varepsilon^{-1.5} (\ln L)^{-0.5}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предполагая сначала a и b целыми, выберем постоянную c так, чтобы на всем промежутке $N < n \leq N + M$ выполнялись оценки $|\Delta_n| \leq l$, $|\Delta(n)| \leq l$, где $l = [c \ln N]$. Тогда при $-l \leq a < b \leq l$ утверждение теоремы следует из лемм 2, 3:

$$\begin{aligned} e(a, b) &= f(-(b+1), -(a+1)) + 2\theta_1 l \\ &= M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi(b+1)\sqrt{2/L}}^{-\pi(a+1)\sqrt{2/L}} e^{-u^2/2} du + 2\theta_2 \delta \right) + 2\theta_1 l \\ &= M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\pi a \sqrt{2/L}}^{\pi b \sqrt{2/L}} e^{-u^2/2} du + \theta_2 \sqrt{\frac{\pi}{L}} + 2\theta_2 \delta \right) + 2\theta_1 l \\ &= M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-u^2/2} du + 2.1\theta\delta \right). \end{aligned}$$

В случае $-l \leq a < l < b$ искомое соотношение следует из равенства $e(a, b) = e(a, l)$ и оценки

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{\beta} e^{-u^2/2} du < \lambda^{-1} e^{-\lambda^2/2} < 0.01\delta, \quad \lambda = \pi l \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

Случай $a < -l \leq b \leq l$, $a < -l < l < b$ аналогичны рассмотренному.

При нецелых a и b утверждение теоремы получим, воспользовавшись равенством $e(a, b) = e([a], [b])$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Гипотеза Сельберга верна. Более того, если $\Phi(x) > 0$ – произвольная неограниченная сверху монотонно возрастающая функция, то количество тех n из промежутка $N < n \leq N + M$, которые не удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{\Phi(n)} \sqrt{\ln \ln n} < \Delta_n \leq \Phi(n) \sqrt{\ln \ln n},$$

не превосходит по порядку $M(\Phi^{-1}(N) + \Delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО практически дословно повторяет доказательство следствия теоремы 4 из работы [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 3 утверждает, что при любых a и b , $a < b$, в формуле

$$e(a, b) = M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-u^2/2} du + r(a, b) \right)$$

величина $r(a, b)$ допускает при любых a и b следующую оценку:

$$r(a, b) = O((\ln L)^{-0.5}) = O((\ln \ln \ln N)^{-0.5}).$$

Между тем, задавшись произвольным целым a и положительным ε , $\varepsilon < \frac{1}{2}$, получим

$$0 = e(a + \varepsilon, a + 1 - \varepsilon) = M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-u^2/2} du + r(a + \varepsilon, a + 1 - \varepsilon) \right),$$

где $\alpha_1 = \pi(a + \varepsilon)\sqrt{2/L}$, $\alpha_2 = \pi(a + 1 - \varepsilon)\sqrt{2/L}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} r(a + \varepsilon, a + 1 - \varepsilon) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-u^2/2} du = O(\alpha_2 - \alpha_1) \\ &= O(L^{-0.5}) = O((\ln \ln N)^{-0.5}). \end{aligned}$$

По-видимому, такая оценка должна иметь место и при любых a , b (см. [17, теорема 2]).

Введем несколько новых обозначений, необходимых для дальнейшего. Для числа $a > 0$ положим

$$\varkappa(a) = \frac{2^a}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right).$$

Тогда при целом $k \geq 0$ будем иметь

$$\varkappa(2k) = \frac{(2k)!}{k!}, \quad \varkappa(2k+1) = \frac{2^{2k+1}}{\sqrt{\pi}} k!.$$

В дальнейших рассуждениях мы неоднократно будем пользоваться оценками вида

$$\varkappa(2k) < \frac{3}{2} \left(\frac{4k}{e} \right)^k, \quad \frac{1}{\varkappa(2k)} < \left(\frac{e}{4k} \right)^k,$$

не отмечая это особо. То же относится и к легко проверяемым неравенствам

$$k \leq (\sqrt[3]{3})^k, \quad k\sqrt{k} \leq (\sqrt{3})^k, \quad k^2 \leq (\sqrt[3]{9})^k.$$

Положим также $A = e^{21}\varepsilon^{-1.5}$, $B = A^2e^{-8} = e^{34}\varepsilon^{-3}$. Для доказательства формул Сельберга нам понадобится ряд вспомогательных утверждений из статьи [1] (замена $S(t_n)$ в соответствующих утверждениях работы [1] на $S(t_n + 0)$ не влияет на правильность результата, поскольку $S(t)$ при выводе этих формул аппроксимируется функциями, которые не меняются от замены t_n на $t_n + 0$).

ЛЕММА 4. Пусть k – целое число с условием $1 \leq k \leq \sqrt{L}$. Тогда справедлива следующая формула:

$$\sum_{N < n \leq N+M} \Delta^{2k}(n) = \frac{\varkappa(2k)}{(2\pi)^{2k}} ML^k (1 + \theta A^k L^{-0.5}).$$

Кроме того, имеет место оценка

$$\left| \sum_{N < n \leq N+M} \Delta^{2k-1}(n) \right| \leq \frac{3.5}{\sqrt{B}} (Bk)^k ML^{k-1}.$$

ЛЕММА 5. Пусть a – произвольное число с условием

$$0 < a \leq \frac{e \ln L}{10A \ln \ln L}.$$

Тогда справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\sum_{N < n \leq N+M} |\Delta(n)|^a = \frac{\varkappa(a)}{(2\pi)^a} ML^{0.5a} (1 + \theta c(A^{-1} \ln L)^{-\gamma}).$$

При этом в случае $0 < a \leq 1$ величины c и γ можно положить равными 90 и $0.5a$, а в случае $a > 1$ – равными $2^{15.4}$ и $\frac{1}{2} + \left\{ \frac{a-1}{2} \right\}$ соответственно.

Подобно утверждениям лемм 4, 5, приводимые ниже аналоги формул Сельберга равномерны по параметру k .

ТЕОРЕМА 4. Пусть k – целое число с условием $1 \leq k \leq \sqrt{L}$. Тогда имеет место равенство

$$\sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k} = \frac{\varkappa(2k)}{(2\pi)^{2k}} ML^k (1 + 1.1\theta A^k L^{-0.5}).$$

В частности, при фиксированном k справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k} = \frac{(2k)!}{k!} \frac{M}{(2\pi)^{2k}} (\ln \ln N)^k + O(M(\ln \ln N)^{k-1/2}).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. При тех же значениях k справедлива оценка

$$\sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k} \leq \frac{1.1}{A} \frac{\varkappa(2k)}{(2\pi)^{2k}} M(AL)^k.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть k – целое число с условием $1 \leq k \leq \sqrt{L}$. Тогда имеет место оценка

$$\left| \sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k-1} \right| \leq \frac{3.6}{\sqrt{B}} (Bk)^k ML^{k-1}.$$

В частности, при фиксированном k имеем

$$\sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k-1} = O(M(\ln \ln N)^{k-1}).$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть a – произвольное число с условием

$$0 < a \leq \frac{e \ln L}{10A \ln \ln L}.$$

Тогда справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\sum_{N < n \leq N+M} |\Delta_n|^a = \frac{\varkappa(a)}{(2\pi)^a} M L^{0.5a} (1 + \theta c (A^{-1} \ln L)^{-\gamma}).$$

При этом в случае $0 < a \leq 1$ величины c и γ можно положить равными 91 и $0.5a$, а в случае $a > 1$ – равными $2^{15.5}$ и $\frac{1}{2} + \left\{\frac{a-1}{2}\right\}$ соответственно. В частности, при $a = 1$ имеем равенство

$$\sum_{N < n \leq N+M} |\Delta_n| = \frac{M}{\pi \sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \ln N} (1 + O((\ln \ln \ln N)^{-1/2})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 4–6 проводятся единообразно. Пользуясь тем, что числа Δ_n целые, при любом $a > 0$ получим

$$\sum_{N < n \leq N+M} |\Delta_n|^a = \sum_{\nu=1}^l \nu^a (e(\nu-1, \nu) + e(-(\nu+1), -\nu)),$$

где число $l = [c \ln N]$ выбрано так, чтобы величины Δ_n , $\Delta(n)$ при $N < n \leq N+M$ не превосходили l по абсолютной величине. Используя лемму 2, при $\nu \geq 2$ получим

$$\begin{aligned} e(\nu-1, \nu) &= f(-(\nu+1), -\nu) + \theta_1(2\nu-1), \\ e(-(\nu+1), -\nu) &= f(\nu-1, \nu) + \theta_2(2\nu+1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{N < n \leq N+M} |\Delta_n|^a &= \sum_{\nu=1}^l \nu^a (f(\nu-1, \nu) + f(-(\nu+1), -\nu) + 4\theta_3 \nu) \\ &= \sum_{N < n \leq N+M} |\Delta(n)|^a + 4\theta_4 \sum_{\nu=1}^l \nu^{a+1}. \end{aligned}$$

Теперь утверждения теорем 4, 6 следуют соответственно из лемм 4, 5 и оценки

$$4 \sum_{\nu=1}^l \nu^{a+1} < \frac{4(l+1)^{a+2}}{a+2} < (1.5 c \ln N)^{a+2}.$$

Далее, при целом $k \geq 1$ имеем

$$\sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k-1} = \sum_{\nu=1}^l (\nu^{2k-1} e(\nu-1, \nu) + (-\nu)^{2k-1} e(-(\nu+1), -\nu))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\nu=1}^l \nu^{2k-1} (e(\nu-1, \nu) - e(-(\nu+1), -\nu)) \\
&= \sum_{\nu=1}^l \nu^{2k-1} (f(-(\nu+1), -\nu) - f(\nu-1, \nu) + 4\theta_1 \nu) \\
&= - \sum_{\nu=1}^l (\nu^{2k-1} f(\nu-1, \nu) + (-\nu)^{2k-1} f(-(\nu+1), -\nu)) + \theta_2 (1.5c \ln N)^{a+2} \\
&= - \sum_{N < n \leq N+M} \Delta^{2k-1}(n) + \theta_3 (1.5c \ln N)^{a+2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, оценка теоремы 5 есть следствие оценки леммы 4.

§ 3. Распределение значений разностей $\gamma_n - t_n$

Из леммы 1 следует, что величины Δ_n и $q_n = \frac{\gamma_n - t_n}{t_{n+1} - t_n}$ отличаются друг от друга лишь на слагаемое порядка $O(1)$. Это обстоятельство наряду с теоремами 3–6 дает возможность изучать распределение разностей $t_n - \gamma_n$ и вычислять моменты этих величин.

ЛЕММА 6. Для любого n с условием $N < n \leq N+M$ справедливо равенство

$$\gamma_n - t_n = \frac{\pi}{\vartheta'(t_N)} (\Delta_n + \varepsilon_n),$$

где $|\varepsilon_n| \leq 1.01$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись формулой (14) и равенством

$$\frac{1}{\vartheta'(t_n)} = \frac{\pi}{\vartheta'(t_N)} \left(1 + O\left(\frac{M}{N \ln N}\right) \right),$$

находим

$$\gamma_n - t_n = q_n(t_{n+1} - t_n) = \frac{\pi q_n}{\vartheta'(t_n)} \left(1 + O\left(\frac{1}{N \ln N}\right) \right) = \frac{\pi q_n}{\vartheta'(t_N)} \left(1 + O\left(\frac{M}{N \ln N}\right) \right).$$

Выражая q_n через Δ_n по лемме 1, получим

$$\gamma_n - t_n = \frac{\pi}{\vartheta'(t_N)} \left(\Delta_n - \theta_n + O\left(\frac{\ln N}{N}\right) \right) \left(1 + O\left(\frac{M}{N \ln N}\right) \right) = \frac{\pi}{\vartheta'(t_N)} (\Delta_n + \varepsilon_n),$$

где

$$|\varepsilon_n| = |\theta_n + O(MN^{-1})| \leq 1.01.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 7. Пусть k – целое число с условием $1 \leq k \leq \sqrt{L}$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{N < n \leq N+M} (\gamma_n - t_n)^{2k} = \frac{\kappa(2k)}{(2\vartheta'(t_N))^{2k}} ML^k (1 + 0.4\theta(4A\sqrt[6]{3})^k L^{-0.5}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы используем стандартные (в этой проблематике) приемы. Поэтому бóльшую часть промежуточных вычислений мы не приводим. Прежде всего, пользуясь равенством

$$(a+b)^{2k} = a^{2k} + 2^{2k-1}\theta k(|a|^{2k-1}|b| + b^{2k})$$

и определяя величины ε_n , как и в лемме 6, находим

$$\begin{aligned} (\Delta_n + \varepsilon_n)^{2k} &= \Delta_n^{2k} + 2^{2k-1}\theta k(|\Delta_n|^{2k-1}|\varepsilon_n| + \varepsilon_n^{2k}) \\ &= \Delta_n^{2k} + 2^{2k}\theta k(|\Delta_n|^{2k-1} + (1.01)^{2k}), \\ \sum_{N < n \leq N+M} (\Delta_n + \varepsilon_n)^{2k} &= \Sigma_1 + 2^{2k}\theta k(\Sigma_2 + (1.01)^{2k}M), \end{aligned}$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k}, \quad \Sigma_2 = \sum_{N < n \leq N+M} |\Delta_n|^{2k-1}.$$

Далее,

$$M = \frac{\varkappa(2k)}{(2\pi)^{2k}} ML^k \delta_1, \quad \delta_1 = \frac{(2\pi)^{2k}}{\varkappa(2k)} \frac{1}{L^k} < \left(\frac{4\pi^2}{L}\right)^k \left(\frac{e}{4k}\right)^k = \left(\frac{\pi^2 e}{kL}\right)^k \leq \frac{\pi^2 e}{L},$$

и, вместе с тем,

$$\delta_1^{1/(2k)} < \sqrt{\frac{\pi^2 e}{kL}}.$$

Используя теперь неравенство Гёльдера наряду со следствием 2, получим

$$\begin{aligned} 2^{2k} k \Sigma_2 &\leq 2^{2k} k M^{1/(2k)} \Sigma_1^{1-1/(2k)} = \frac{\varkappa(2k)}{(2\pi)^{2k}} ML^k \delta_2, \\ \delta_2 &= 2^{2k} k \sqrt{\frac{\pi^2 e}{kL}} \frac{1.1A^k}{\sqrt{A}} < \frac{0.1(4A\sqrt[6]{3})^k}{\sqrt{L}}. \end{aligned}$$

Возвращаясь, наконец, к исходной сумме, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{N < n \leq N+M} (\Delta_n + \varepsilon_n)^{2k} &= \frac{\varkappa(2k)}{(2\pi)^{2k}} ML^k (1 + \theta\delta), \\ \delta &= \frac{1.1A^k}{\sqrt{L}} + \frac{0.1(4A\sqrt[6]{3})^k}{\sqrt{L}} + k(2.02)^{2k} \frac{\pi^2 e}{L} < \frac{0.4(4A\sqrt[6]{3})^k}{\sqrt{L}}, \\ \sum_{N < n \leq N+M} (\gamma_n - t_n)^{2k} &= \left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k} \sum_{N < n \leq N+M} (\Delta_n + \varepsilon_n)^{2k} \\ &= \frac{\varkappa(2k)}{(2\vartheta'(t_N))^{2k}} ML^k (1 + \theta\delta). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Полагая $e_n = (\gamma_n - t_n)\vartheta'(t_N)\sqrt{2/L}$, утверждению теоремы 7 можно придать следующий вид:

$$\sum_{N < n \leq N+M} e_n^{2k} = \frac{(2k)!}{k!} \frac{M}{2^k} (1 + 0.4\theta(4A\sqrt[6]{3})L^{-0.5}).$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть k – целое число с условием $1 \leq k \leq \sqrt{L}$. Тогда справедлива оценка

$$\left| \sum_{N < n \leq N+M} (\gamma_n - t_n)^{2k-1} \right| < \frac{3.7}{\sqrt{B}} \left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)} \right)^{2k-1} (Bk)^k M L^{k-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь равенством

$$(a - b)^{2k-1} = a^{2k-1} + 2^{2k-1} \theta k (a^{2k-2} |b| + |b|^{2k-1}),$$

находим

$$\begin{aligned} & \sum_{N < n \leq N+M} (\Delta_n + \varepsilon_n)^{2k-1} \\ &= \sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k-1} + \theta_1 \left(2^{2k} k \sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k-2} + (2.02)^{2k} k M \right). \end{aligned}$$

Прежде всего, из следствия 2 получаем оценки

$$2^{2k} k \sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k-2} \leq 2^{2k} k \frac{1.1}{A} \frac{\varkappa(2k-2)}{(2\pi)^{2k-2}} M (AL)^{k-1} = \frac{3.6}{\sqrt{B}} (Bk)^k M L^{k-1} \delta_1,$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\sqrt{B}}{3.6} \frac{1.1 \cdot 2^{2k} k}{(Bk)^k} \frac{(4A)^k}{A^2 (2\pi)^{2k-2}} \varkappa(2k-2) = \frac{1.1}{3.6} \frac{\sqrt{B}}{A^2} \cdot 4\pi^2 \left(\frac{4A}{4\pi^2 Bk} \right)^k \frac{k^2 \varkappa(2k-2)}{2k(2k-1)} \\ &< \frac{1.1}{3.6} \frac{\sqrt{B}}{A^2} \cdot 2\pi^2 \left(\frac{A}{\pi^2 Bk} \right)^k \frac{3}{2} \left(\frac{4k}{e} \right)^k = \frac{1.1}{1.2} \pi^2 \frac{\sqrt{B}}{A^2} \left(\frac{4A}{\pi^2 B e} \right)^k \\ &< \pi^2 \frac{\sqrt{B}}{A^2} \frac{4A}{\pi^2 B e} = \frac{4e^{-5}}{B}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} (2.02)^{2k} k M &= \frac{3.6}{\sqrt{B}} (Bk)^k M L^{k-1} \delta_2, \\ \delta_2 &= \frac{\sqrt{B}}{3.6} \frac{k}{(Bk)^k} \frac{(2.02)^{2k}}{L^{k-1}} < \frac{\sqrt{B}}{3.6} \frac{1}{(kL)^{k-1}} \left(\frac{4.1}{B} \right)^k \leq \frac{4.1}{3.6} \frac{1}{\sqrt{B}} < \frac{1.2}{\sqrt{B}}. \end{aligned}$$

Собирая полученные оценки вместе и пользуясь теоремой 5, имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{N < n \leq N+M} (\Delta_n + \varepsilon_n)^{2k-1} \right| &< \frac{3.6}{\sqrt{B}} (Bk)^k M L^{k-1} \left(1 + \frac{4e^{-5}}{B} + \frac{1.2}{\sqrt{B}} \right) \\ &< \frac{3.7}{\sqrt{B}} (Bk)^k M L^{k-1}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и следует искомое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Оценке теоремы 8 можно придать следующий вид:

$$\left| \sum_{N < n \leq N+M} e_n^{2k-1} \right| < \frac{2.4}{\sqrt{B}} (Be\pi^2)^k \frac{(2k-1)!}{k!} ML^{-0.5}.$$

ТЕОРЕМА 9. Пусть a – произвольное вещественное число с условием

$$0 < a < \frac{e \ln L}{10A \ln \ln L}.$$

Тогда имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\sum_{N < n \leq N+M} |\gamma_n - t_n|^a = \frac{\varkappa(a)}{(2\vartheta'(t_N))^a} ML^{0.5a} (1 + \theta_{c_1} (A^{-1} \ln L)^{-\gamma}),$$

где постоянные c_1 и γ можно положить равными соответственно 97 и 0.5a, если $0 < a \leq 1$, и равными $2^{15.6}$ и $\frac{1}{2} + \left\{ \frac{a-1}{2} \right\}$, если $a > 1$. В частности, при $a = 1$ справедливо равенство

$$\sum_{N < n \leq N+M} |\gamma_n - t_n| = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\ln \ln N}}{\ln N} (1 + O((\ln \ln \ln N)^{-0.5})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $0 < a \leq 1$. Покажем, что

$$|\Delta_n + \varepsilon_n|^a = |\Delta_n|^a + 1.01\theta. \quad (29)$$

Действительно, в случае $\Delta_n = 0$ равенство (29) следует из оценки $|\varepsilon_n| \leq 1.01$. Если $\Delta_n = 1$, то $|\Delta_n + \varepsilon_n|^a = 2.01\theta$ и, таким образом,

$$|\Delta_n + \varepsilon_n|^a = 1 + 2.01\theta - 1 = 1 + 1.01\theta_1 = |\Delta_n|^a + 1.01\theta_1.$$

Если $\Delta_n \geq 2$, то $\Delta_n + \varepsilon_n > 0$. По формуле конечных приращений Лагранжа имеем

$$|\Delta_n + \varepsilon_n|^a = (\Delta_n + \varepsilon_n)^a = \Delta_n^a + a\varepsilon_n(\Delta_n + \theta\varepsilon_n)^{a-1}.$$

Замечая теперь, что $|\Delta_n + \theta\varepsilon_n| \geq 2 - 1.01 = 0.99$, находим

$$\begin{aligned} |a\varepsilon_n(\Delta_n + \theta\varepsilon_n)^{a-1}| &\leq 1.01a \cdot (0.99)^{a-1} \leq 1.01, \\ |\Delta_n + \varepsilon_n|^a &= |\Delta_n|^a + 1.01\theta. \end{aligned}$$

Случай отрицательных Δ_n сводится к рассмотренному. Таким образом,

$$\sum_{N < n \leq N+M} |\Delta_n + \varepsilon_n|^a = \sum_{N < n \leq N+M} |\Delta_n|^a + 1.01\theta M.$$

Теперь утверждение следует из теоремы 6, равенства

$$1.01M = \frac{\varkappa(a)}{(2\pi)^a} ML^{0.5a} \delta_1$$

и оценок

$$\delta_1 = \frac{\pi^{a+0.5}}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} \frac{1.01}{L^{0.5a}} \leq 1.01\pi\sqrt{\pi}L^{-\gamma} < 5.7L^{-\gamma} < 6(A^{-1} \ln L)^{-\gamma}.$$

Рассмотрим теперь случай $a > 1$. Подобно тому, как это проводилось выше, убеждаемся в справедливости равенства

$$|\Delta_n + \varepsilon_n|^a = |\Delta_n|^a + \theta(0.6a \cdot 2^a |\Delta_n|^{a-1} + a(2.02)^a).$$

Суммируя обе его части по n , находим

$$\begin{aligned} & \sum_{N < n \leq N+M} |\Delta_n + \varepsilon_n|^a \\ &= \sum_{N < n \leq N+M} |\Delta_n|^a + \theta \left(0.6a \cdot 2^a \sum_{N < n \leq N+M} |\Delta_n|^{a-1} + a(2.02)^a M \right). \end{aligned}$$

Далее, из теоремы 6 заключаем, что последняя сумма по n не превосходит

$$\frac{\Gamma(0.5a)}{\pi^{a-0.5}} ML^{(a-1)/2} d, \quad d = 1 + c_1 (A^{-1} \ln L)^{-\gamma},$$

где $c_1 = 91$, $\gamma = \frac{1}{2}(a-1)$, если $1 < a \leq 2$, и $c_1 = 2^{15.5}$, $\gamma = \frac{1}{2} + \left\{ \frac{a-2}{2} \right\} = \frac{1}{2} + \left\{ \frac{a}{2} \right\}$, если $a > 2$. Несложно заметить, что при любом $a > 1$ величина d не превосходит 92. Следовательно,

$$0.6a \cdot 2^a \sum_{N < n \leq N+M} |\Delta_n|^{a-1} \leq 92 \cdot 0.6a \cdot 2^a \frac{\Gamma(0.5a)}{\pi^{a-0.5}} ML^{(a-1)/2} = \frac{\varkappa(a)}{(2\pi)^a} ML^{0.5a} \delta_1,$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\pi^{a+0.5}}{\Gamma(0.5(a+1))} \frac{\Gamma(0.5a)}{\pi^{a-0.5}} 92 \cdot 0.6a \cdot 2^a L^{-0.5} < 348 \frac{\Gamma(0.5a+1)}{\Gamma(0.5(a+1))} \cdot 2^a L^{-0.5} \\ &< 348(a+1) \cdot 2^a L^{-0.5} < L^{-0.49}. \end{aligned}$$

Имеем, наконец,

$$\begin{aligned} 0.5a(2.02)^a M &= \frac{\varkappa(a)}{(2\pi)^a} ML^{0.5a} \delta_2, \\ \delta_2 &= \frac{a(2.02)^a \pi^{a+0.5}}{\Gamma(0.5(a+1)) L^{0.5a}} \leq 2a\sqrt{\pi} \left(\frac{2.02\pi}{\sqrt{L}} \right)^a < \frac{4.04\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{L}} < \frac{23}{\sqrt{L}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{N < n \leq N+M} |\Delta_n + \varepsilon_n|^a = \frac{\varkappa(a)}{(2\pi)^a} ML^{0.5a} (1 + \theta\delta),$$

где

$$\begin{aligned} |\delta| &\leq 2^{15.5} (A^{-1} \ln L)^{-\gamma} + L^{-0.49} + 23L^{-0.5} < 2^{15.6} (A^{-1} \ln L)^{-\gamma}, \\ \sum_{N < n \leq N+M} |\gamma_n - t_n|^a &= \frac{\varkappa(a)}{(2\vartheta'(t_N))^a} ML^{0.5a} (1 + \theta\delta). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теоремы 7, 8 позволяют решить вопрос о распределении значений разностей $\gamma_n - t_n$.

ТЕОРЕМА 10. Для числа $\nu(x)$ значений n , $N < n \leq N + M$, удовлетворяющих условию

$$e_n = (\gamma_n - t_n) \vartheta'(t_N) \sqrt{\frac{2}{L}} \leq x,$$

справедлива следующая формула:

$$\nu(x) = M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du + \frac{\theta A}{\sqrt{\ln L}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО практически дословно повторяет доказательство теоремы 4 из [1] (лемма 3 настоящей статьи). Поэтому большую часть промежуточных вычислений мы не приводим.

Предположим, что среди чисел e_n , $N < n \leq N + M$, оказалось μ различных: $e(1), \dots, e(\mu)$, и пусть первое встретилось k_1 раз, $\dots$, μ -е — k_μ раз. Рассмотрим дискретную случайную величину, которая принимает значение $e(s)$ с вероятностью k_s/M . Тогда ее характеристическая функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = \sum_{s=1}^{\mu} \frac{k_s}{M} \exp(ite(s)) = \frac{1}{M} \sum_{N < n \leq N+M} \exp(ite_n).$$

Взяв целое $K > 1$, точное значение которого будет определено ниже, и пользуясь замечаниями 2, 3 находим

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{M} \sum_{N < n \leq N+M} (\cos(te_n) + i \sin(te_n)) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{N < n \leq N+M} \left(\sum_{k=0}^{K-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (te_n)^{2k} + i \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} (te_n)^{2k-1} + 2\theta \frac{(te_n)^{2K}}{(2K)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \frac{1}{M} \sum_{N < n \leq N+M} e_n^{2k} + i \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k-1} t^{2k-1}}{(2k-1)!} \sum_{N < n \leq N+M} e_n^{2k-1} \\ &\quad + 2\theta \frac{t^{2K}}{(2K)!} \frac{1}{M} \sum_{N < n \leq N+M} e_n^{2K} \\ &= \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \frac{(2k)!}{2^k k!} \left(1 + \frac{0.2\theta_1 (4A\sqrt[6]{3})^k}{\sqrt{L}} \right) \\ &\quad + \theta_2 \sum_{k=1}^K \frac{|t|^{2k-1}}{(2k-1)!} \frac{(2k-1)!}{k!} \frac{1.6}{\sqrt{B}} \frac{(Be\pi^2)^k}{\sqrt{L}} \\ &\quad + 2\theta_3 \frac{t^{2K}}{(2K)!} \frac{(2K)!}{2^K K!} \left(1 + \frac{0.2(4A\sqrt[6]{3})^K}{\sqrt{L}} \right), \end{aligned}$$

где $\theta_1 = 0$ при $k = 0$. После несложных преобразований получим

$$f(t) = g(t) + \theta(r_1 + r_2 + r_3),$$

где $g(t) = e^{-t^2/2}$,

$$r_1 = \frac{3}{K!} \left(\frac{t^2}{2} \right)^K, \quad r_2 = \frac{0.4|t|}{\sqrt{L}} \sum_{k=1}^K \frac{(2A\sqrt[6]{3})^k}{k!} |t|^{2k-1},$$

$$r_3 = \frac{2.4|t|}{\sqrt{BL}} \sum_{k=1}^K \frac{(Be\pi^2)^k}{k!} |t|^{2(k-1)}.$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{|f(t) - g(t)|}{|t|} dt,$$

где $\lambda > 1$. Для него имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned} I(\lambda) &\leq \frac{3}{K} \frac{1}{K!} \left(\frac{\lambda^2}{2} \right)^K + \frac{0.4}{\sqrt{L}} \sum_{k=1}^K \frac{(2A\sqrt[6]{3})^k}{k!} \frac{\lambda^{2k}}{2k} + \frac{2.4}{\sqrt{BL}} \sum_{k=1}^K \frac{(Be\pi^2)^k}{k!} \frac{\lambda^{2k-1}}{2k-1} \\ &< \left(\frac{\lambda^2 e}{2K} \right)^K + \frac{0.2}{\sqrt{L}} \exp(2A\sqrt[6]{3}\lambda^2) + \frac{2.4}{\sqrt{BL}} \exp(Be\pi^2\lambda^2) \\ &< \left(\frac{\lambda^2 e}{2K} \right)^K + \frac{0.5}{\sqrt{L}} \exp(Be\pi^2\lambda^2). \end{aligned}$$

Полагая

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\ln L}{Be}}, \quad K = \left\lceil \frac{Be}{2} \lambda^2 \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{1}{8\pi^2} \ln L \right\rceil + 1,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{0.5}{\sqrt{L}} \exp(Be\pi^2\lambda^2) &< \frac{0.5}{\sqrt[4]{L}}, \\ \left(\frac{\lambda^2 e}{2K} \right)^K &\leq B^{-K} \leq \exp\left(-\frac{\ln B}{8\pi^2} \ln L\right) < \exp\left(-\frac{5}{\pi^2} \ln L\right) < \frac{1}{\sqrt{L}}. \end{aligned}$$

Таким образом, $I(\lambda) < 1/\sqrt[4]{L}$. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – функции распределения, отвечающие характеристическим функциям $f(t)$ и $g(t)$ соответственно. Согласно неравенству Берри–Эссена (см., например, [18, п. 20.3]) при любом вещественном x будем иметь

$$|F(x) - G(x)| \leq \frac{2}{\pi} I(\lambda) + \frac{12\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} \lambda^{-1} < \frac{1}{\sqrt[4]{L}} + \frac{e^{20.5}\varepsilon^{-1.5}}{\sqrt{\ln L}} < \frac{A}{\sqrt{\ln L}}.$$

Следовательно,

$$F(x) = G(x) + \frac{\theta A}{\sqrt{\ln L}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du + \frac{\theta A}{\sqrt{\ln L}}.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\Phi(x)$ – произвольная положительная и неограниченная сверху функция, монотонно возрастающая при $x \rightarrow +\infty$. Тогда неравенства

$$\frac{1}{\Phi(n)} \frac{\sqrt{\ln \ln n}}{\ln n} < |\gamma_n - t_n| \leq \Phi(n) \frac{\sqrt{\ln \ln n}}{\ln n}$$

выполняются для почти всех значений n в том смысле, что количество тех n , $n \leq N$, которые не удовлетворяют этим неравенствам, при $N \rightarrow +\infty$ есть величина порядка $o(N)$.

§ 4. Поведение величин $S(\gamma_n + 0)$, $S(\gamma_n - 0)$ “в среднем”

Функция $S(t)$ кусочно гладкая, имеет разрывы в точках, совпадающих с ординатами нулей $\zeta(s)$, и является монотонно убывающей на всяком промежутке непрерывности вида (γ_n, γ_{n+1}) . Таким образом, правый и левый пределы $S(t)$ в точках разрыва – величины $S(\gamma_n \pm 0)$ – имеют наглядный геометрический смысл: они являются верхними и нижними “пиками” пилообразного графика функции $S(t)$ (рис. 1). Подобно тому, как величины $\Delta(n)$ связаны со значениями $S(t)$ в точках Грама ($\Delta(n) = S(t_n + 0)$), разности Δ_n близки к значениям $S(t)$ в точках разрыва (см. лемму 7). Это обстоятельство позволяет вычислить моменты величин $S(\gamma_n \pm 0)$ и приближенно найти для них функцию распределения.

Рис. 1. График функции $S(t)$. Вертикальные отрезки на графике отвечают скачкам $S(t)$ в точках, совпадающих с ординатами нулей $\zeta(s)$

ЛЕММА 7. При $n \rightarrow +\infty$ справедливы равенства

$$S(\gamma_n + 0) = -\Delta_n + \theta_1 \kappa_n + O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \quad S(\gamma_n - 0) = -\Delta_n - \theta_2 \kappa_n + O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

где $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$, а постоянные в знаках O абсолютные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения q_n имеем $\gamma_n = t_n + r_n$, где $r_n = q_n(t_{n+1} - t_n)$. Согласно формуле Римана–Мангольдта выполнено

$$\begin{aligned} N(\gamma_n + 0) &= \frac{1}{\pi} \vartheta(\gamma_n) + 1 + S(\gamma_n + 0) = \frac{1}{\pi} \vartheta(t_n + r_n) + 1 + S(\gamma_n + 0) \\ &= \frac{1}{\pi} \vartheta(t_n) + 1 + \frac{r_n}{\pi} \vartheta'(t_n) + \frac{r_n^2}{2\pi} \vartheta''(\xi) + 1 + S(\gamma_n + 0), \end{aligned}$$

где ξ – некоторое число, расположенное между γ_n и t_n . Воспользовавшись равенством (14), получим

$$\begin{aligned} \frac{r_n}{\pi} \vartheta'(t_n) &= q_n \frac{1}{\pi} \vartheta'(t_n)(t_{n+1} - t_n) = q_n \left(1 + O\left(\frac{1}{n \ln n}\right) \right) = q_n + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ \frac{r_n^2}{2\pi} \vartheta''(\xi) &= O\left(\frac{1}{\xi}\right) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \end{aligned}$$

откуда имеем

$$N(\gamma_n + 0) = n + q_n + S(\gamma_n + 0) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

С другой стороны, при доказательстве теоремы 1 было установлено, что

$$N(\gamma_n + 0) = n + \theta_n(\kappa_n - 1), \quad 0 \leq \theta_n \leq 1.$$

Сравнивая последние выражения для $N(\gamma_n + 0)$ и применяя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} S(\gamma_n + 0) &= -q_n + \theta_n(\kappa_n - 1) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = -\Delta_n + \theta + \theta_n(\kappa_n - 1) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\ &= -\Delta_n + \theta_1 \kappa_n + O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \\ S(\gamma_n - 0) &= S(\gamma_n + 0) - \kappa_n = -\Delta_n - \theta_2 \kappa_n + O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \end{aligned}$$

где $0 \leq \theta_1 \leq 1$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Равенства из леммы 7 позволяют явно указать постоянную c в оценке $|\Delta_n| \leq c \ln n$ из теоремы 1. Действительно, используя оценку сверху для $|S(t)|$ из [3], получим

$$\begin{aligned} |\Delta_n| &= |S(\gamma_n + 0) - \theta_1 \kappa_n| + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\ &= |(1 - \theta_1)S(\gamma_n + 0) + \theta_1 S(\gamma_n - 0)| + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\ &\leq (1 - \theta_1)|S(\gamma_n + 0)| + \theta_1 |S(\gamma_n - 0)| + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\ &\leq (1 - \theta_1 + \theta_1)8.9 \ln \gamma_n + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) < 8.9 \ln n. \end{aligned}$$

Вообще, имея оценку вида $|S(t)| \leq cf(t)$, где $f(t)$ – монотонно возрастающая функция, а c – положительная постоянная, с помощью подобных рассуждений

можно заключить, что при любых $\varepsilon > 0$ и $n \geq n_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство $|\Delta_n| \leq (c + \varepsilon)f(n)$. Так, если верна гипотеза Римана, то из наилучшей в настоящее время верхней границы для $|S(t)|$ (см. [19]) получаем

$$|\Delta_n| \leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \frac{\ln n}{\ln \ln n}.$$

Далее нам потребуется ряд утверждений, основная цель которых – показать, что “в среднем” кратности κ_n ведут себя как постоянные величины.

Пусть $j \geq 1$ – целое число. Через $n_j(T)$ обозначим число ординат γ нулей $\zeta(s)$ с условием $0 < \gamma \leq T$, кратность которых равна j .

Покажем, что при больших значениях j величина $n_j(T)$ достаточно мала. Доказательство этого факта повторяет по сути вывод оценки сверху для числа нулей $\zeta(s)$, имеющих заданную кратность (см. [20]). Оно опирается на то обстоятельство, что вблизи ординат γ с высокой кратностью разность $S(t+h) - S(t)$ при $h \asymp (\ln t)^{-1}$ велика по модулю (лемма 8), в то время как мера множества таких точек t заданного промежутка мала (лемма 9).

Всюду далее будем считать, что $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $h = \frac{\pi}{3} \left(\ln \frac{T}{2\pi}\right)^{-1}$. Относительно величины H будем предполагать следующее. Приводимая ниже лемма 9 доказана в [20] при условии $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Это ограничение в ряде случаев оказывается обременительным. Доказательство леммы 9 опирается на плотностную теорему для нулей дзета-функции Римана, т. е. на оценку сверху разности

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T), \quad (30)$$

выражающей число нулей $\zeta(s)$ в области $\sigma < \operatorname{Re} s < 1$, $T < \operatorname{Im} s \leq T+H$ (см. [15]). Однако вывод оценки разности (30) применим и в случае, когда вместо равенства $H = T^{27/82+\varepsilon}$ параметры T и H связаны соотношениями вида

$$T^{27/82+\varepsilon_1} \leq H \leq T^{27/82+\varepsilon_2}, \quad (31)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – произвольные числа с условием $0.9\varepsilon \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon$. Поэтому всюду далее (если не оговорено иное) будем предполагать, что H удовлетворяет условиям (31) при $\varepsilon_1 = 0.9\varepsilon, \varepsilon_2 = \varepsilon$.

ЛЕММА 8. Пусть γ – ордината нуля функции $\zeta(s)$, $T \leq \gamma - h < \gamma \leq T+H$, и пусть промежуток $(\gamma - h, \gamma]$ содержит ровно m ординат нулей функции $\zeta(s)$, кратность каждой из которых равна j . Тогда при любом t из промежутка $(\gamma - 2h, \gamma - h]$ справедливо неравенство

$$S(t+2h) - S(t) \geq mj - 0.5.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma - 2h < t < \gamma - h$, и пусть $\gamma^{(1)} < \dots < \gamma^{(r)}$ – все различные ординаты нулей $\zeta(s)$, попавшие в промежуток $(t, t+2h]$. Подобно изложенному в доказательстве теоремы 2 устанавливаем тождество

$$\begin{aligned} S(t+2h) - S(t) &= (S(t+2h) - S(\gamma^{(r)} + 0)) + \sum_{\nu=1}^r (S(\gamma^{(\nu)} + 0) - S(\gamma^{(\nu)} - 0)) \\ &+ \sum_{\nu=2}^r (S(\gamma^{(\nu)} - 0) - S(\gamma^{(\nu-1)} + 0)) + (S(\gamma^{(1)} - 0) - S(t)). \end{aligned} \quad (32)$$

Все разности $S(\gamma^{(\nu)} + 0) - S(\gamma^{(\nu)} - 0) = \kappa(\gamma^{(\nu)})$ положительны. Более того, так как $\gamma - h > t$, $\gamma < t + 2h$, то промежуток $(\gamma - h, \gamma]$ целиком содержится в $(t, t + 2h]$ и среди $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(r)}$ найдется не менее m ординат кратности j . Следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^r (S(\gamma^{(\nu)} + 0) - S(\gamma^{(\nu)} - 0)) \geq mj.$$

Преобразуя все прочие разности в правой части (32) с помощью формулы конечных приращений Лагранжа и замечая, что при t , отличном от ординаты нуля $\zeta(s)$ и таком, что $T \leq t \leq T + H$, справедливо равенство

$$S'(t) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} + O(t^{-2}) = -\left(\frac{1}{6h} + \frac{\theta}{\pi} \frac{H}{T}\right),$$

находим

$$\begin{aligned} S(t + 2h) - S(t) &\geq mj - \left((t + 2h - \gamma^{(r)}) + \sum_{\nu=2}^r (\gamma^{(\nu)} - \gamma^{(\nu-1)}) \right. \\ &\quad \left. + (\gamma^{(1)} - t) \right) \left(\frac{1}{6h} + \frac{H}{\pi T} \right) \\ &= mj - 2h \left(\frac{1}{6h} + \frac{H}{\pi T} \right) > mj - 0.5. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $D(\lambda)$ – множество тех значений t из промежутка $T \leq t \leq T + H$, для которых выполнено неравенство $|S(t + 2h) - S(t)| \geq \lambda$. Тогда при любом λ для меры этого множества справедлива оценка

$$\text{mes } D(\lambda) \leq e^4 H e^{-C\lambda},$$

где $C = \pi e \sqrt{\frac{2}{5}} e A^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [20].

ЛЕММА 10. При любом $j \geq 1$ имеет место оценка

$$n_j(T + H) - n_j(T) < e^{7.2} (N(T + H) - N(T)) e^{-Cj},$$

где C – постоянная из леммы 9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем следовать доказательству теорем В, С из [20]. Если j – кратность ординаты γ , $T < \gamma \leq T + H$, то из неравенства $|S(t)| < 8.9 \ln t$ получаем

$$j = S(\gamma + 0) - S(\gamma - 0) \leq 17.8 \ln \gamma < 18 \ln T.$$

Следовательно, при $j \geq 18 \ln T$ разность $n_j(T + H) - n_j(T)$ тождественно равна нулю.

Если $1 \leq j \leq C^{-1} \ln 2$, то $1 \leq 2e^{-Cj}$, так что искомая оценка вытекает из следующей тривиальной оценки:

$$n_j(T + H) - n_j(T) \leq N(T + H) - N(T) \leq 2(N(T + H) - N(T)) e^{-Cj}.$$

Таким образом, остается рассмотреть случай

$$C^{-1} \ln 2 < j < 18 \ln T.$$

Пусть $\gamma_{(1)}$ – наибольшая из ординат кратности j на промежутке $(T, T + H]$. Положим $E_1 = (\gamma_{(1)} - h, \gamma_{(1)}]$ и обозначим через $\gamma_{(2)}$ наибольшую из ординат кратности j на $(T, \gamma_{(1)} - h]$. Полагая $E_2 = (\gamma_{(2)} - h, \gamma_{(2)}]$, через $\gamma_{(3)}$ обозначим наибольшую из ординат кратности j на промежутке $(T, \gamma_{(2)} - h]$, и т. д. Продолжим это построение до тех пор, пока не отыщем ординату $\gamma_{(r)}$ кратности j такую, что $\gamma_{(r)} - h < T \leq \gamma_{(r)}$, или такую, что промежуток $(T, \gamma_{(r)} - h]$ не содержит ни одной ординаты кратности j . В каждом из случаев положим $E_r = (\gamma_{(r)} - h, \gamma_{(r)}]$.

Промежутки $E_1, E_2, \dots, E_r$ попарно не пересекаются, имеют одинаковую длину h , и в их объединении содержатся все ординаты кратности j , попавшие в промежуток $(T, T + H]$. Разобьем множество $E_1, E_2, \dots, E_r$ на классы $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$, относя к классу $\mathcal{E}_m$ те из промежутков, которые содержат ровно m ординат кратности j . Если k_m – число элементов в $\mathcal{E}_m$, то

$$n_j(T + H) - n_j(T) \leq 1 \cdot k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m + \dots. \quad (33)$$

Оценим сверху каждую из величин k_m . Допустим, что $E = (\gamma - h, \gamma]$ принадлежит $\mathcal{E}_m$. Обозначим $E' = E - h = (\gamma - 2h, \gamma - h]$. Согласно лемме 8 при любом $t \in E'$ имеем неравенство

$$S(t + 2h) - S(t) \geq mj - 0.5.$$

Поскольку E' содержится в $(T - 2h, T + H]$, то, обозначая через $D(\lambda)$ множество точек $t \in (T - 2h, T + H]$, для которых $|S(t + 2h) - S(t)| \geq \lambda$, заключаем, что E' целиком содержится в $D(mj - 0.5)$. Проведя подобные рассуждения для каждого промежутка E из $\mathcal{E}_m$, убеждаемся, что все k_m промежутков лежат в $D(mj - 0.5)$. Так как они имеют одинаковую длину h и попарно не пересекаются, то их общая длина не превосходит меры $D(mj - 0.5)$, т. е.

$$k_m h \leq \text{mes } D(mj - 0.5).$$

Пользуясь леммой 9, получим

$$\begin{aligned} \text{mes } D(mj - 0.5) &\leq e^4 (H + 2h) e^{-C(mj - 0.5)} < e^{4+C} H e^{-Cmj}, \\ k_m &\leq e^{4+C} H h^{-1} e^{-Cmj}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные оценки в (33), имеем

$$n_j(T + H) - n_j(T) \leq e^{4+C} H h^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-Cmj} = e^{4+C} H h^{-1} \frac{e^{-Cj}}{(1 - e^{-Cj})^2}.$$

Поскольку $e^{-Cj} \leq \frac{1}{2}$, то окончательно находим

$$n_j(T + H) - n_j(T) \leq 4e^{4+C} H h^{-1} e^{-Cj} < e^{7.2} (N(T + H) - N(T)) e^{-Cj}.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для количества $\nu(j) = \nu(j; M, N)$ различных ординат γ_n , $N < n \leq N + M$, имеющих кратность j , справедлива оценка $\nu(j) \leq e^{7.3} M e^{-Cj}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $T = \gamma_N$, $H = \gamma_{N+M} - \gamma_N$ в лемме 10 и замечая, что кратности ординат γ_N , γ_{N+M} – величины порядка $\ln N$, находим

$$\nu(j) \leq e^{7.2} (M + O(\ln N)) e^{-Cj} < e^{7.3} M e^{-Cj}.$$

Оценки из леммы 10 и следствия 4 позволяют изучать поведение кратностей κ_n “в среднем”.

Пусть $a > 0$. Через

$$K_0(a) = K_0(a; M, N) = \sum_{N < n \leq N+M} \kappa_n^a$$

обозначим сумму по всем подряд идущим ординатам γ_n , $N < n \leq N + M$, а через

$$K_1(a) = K_1(a; M, N) = \sum'_{N < n \leq N+M} \kappa_n^a$$

– сумму, распространенную лишь на различные ординаты γ_n , $N < n \leq N + M$.

Так, если выполнены соотношения (9), то в $K_0(a)$ войдут все слагаемые κ_l^a , $\kappa_{l+1}^a, \dots, \kappa_{l+p-1}^a$, в то время как в $K_1(a)$ из перечисленных войдет лишь слагаемое κ_l^a . Несложно заметить, что таким образом определенные суммы K_0 и K_1 связаны соотношением

$$K_0(a) = \sum'_{N < n \leq N+M} \kappa_n \kappa_n^a = K_1(a+1).$$

ЛЕММА 11. Для любого $a \geq 1$ справедлива оценка

$$K_1(a) < e^{8.4} \frac{\Gamma(a+1)}{C^{a+1}} M,$$

где C – постоянная из леммы 9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь следствием 4, находим

$$K_1(a) = \sum_{j \geq 1} j^a \nu(j) \leq e^{7.3} M \sum_{j=1}^{\infty} j^a e^{-Cj}. \quad (34)$$

Функция $y(x) = x^a e^{-Cx}$ возрастает на промежутке $1 \leq x \leq x_a$, где $x_a = aC^{-1}$, и достигает в точке x_a максимума, равного

$$\left(\frac{a}{C}\right)^a e^{-a} = \left(\frac{a}{Ce}\right)^a, \quad (35)$$

после чего монотонно убывает. Определяя целое число m из условий $m < x_a \leq m+1$ и оценивая затем слагаемые суммы (34), отвечающие $j = m, m+1$,

величиной (35), а сумму всех прочих – интегралами от функции $y(x)$, находим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} j^a e^{-Cj} &\leq \left(\int_0^m + \int_{m+1}^{\infty} \right) x^a e^{-Cx} dx + 2 \left(\frac{a}{Ce} \right)^a \\ &< \int_0^{\infty} x^a e^{-Cx} dx + 2 \left(\frac{a}{Ce} \right)^a < \frac{\Gamma(a+1)}{C^{a+1}} + 2 \left(\frac{a}{Ce} \right)^a < \frac{3\Gamma(a+1)}{C^{a+1}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Утверждение леммы следует теперь из последнего неравенства.

Оценка из леммы 11 наряду с равенствами из леммы 7 дает возможность вычислять моменты величин $S(\gamma_n \pm 0)$.

ТЕОРЕМА 11. Пусть k – целое число с условием $1 \leq k \leq \sqrt{L}$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sum_{N < n \leq N+M} S^{2k}(\gamma_n + 0) &= \frac{\varkappa(2k)}{(2\pi)^{2k}} ML^k (1 + 19\theta A(4A\sqrt{3})^k L^{-0.5}), \\ \sum_{N < n \leq N+M} S^{2k}(\gamma_n - 0) &= \frac{\varkappa(2k)}{(2\pi)^{2k}} ML^k (1 + 19\theta A(4A\sqrt{3})^k L^{-0.5}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая точно так же, как и при доказательстве теоремы 7, и пользуясь равенством из леммы 7, получим

$$\begin{aligned} S(\gamma_n + 0) &= -\Delta_n + 1.1\theta\kappa_n, \\ S^{2k}(\gamma_n + 0) &= \Delta_n^{2k} + 2^{2k}\theta k(|\Delta_n|^{2k-1}\kappa_n + (1.1)^{2k}\kappa_n^{2k}), \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\sum_{N < n \leq N+M} S^{2k}(\gamma_n + 0) = \Sigma_1 + 2^{2k}\theta k((1.1)^{2k}\Sigma_2 + \Sigma_3),$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k}, & \Sigma_2 &= \sum_{N < n \leq N+M} \kappa_n^{2k} = \sum'_{N < n \leq N+M} \kappa_n^{2k+1}, \\ \Sigma_3 &= \sum_{N < n \leq N+M} |\Delta_n|^{2k-1} \kappa_n. \end{aligned}$$

Прежде всего, из леммы 11 заключаем следующее:

$$\Sigma_2 \leq \frac{e^{8.4}}{C^{2k+2}} (2k+1)!M = \frac{\varkappa(2k)}{(2\pi)^{2k}} ML^k \delta_2,$$

где

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{e^{8.4}}{C^2} \left(\frac{2\pi}{C} \right)^{2k} \frac{k!(2k+1)!}{(2k)!L^k} \leq \frac{e^{8.4}}{C^2} \left(\frac{4\pi^2}{C^2 L} \right)^k (2k+1) \cdot 2\sqrt{k} \left(\frac{k}{e} \right)^k \\ &< \frac{e^{11}}{C^2} k\sqrt{k} \left(\frac{4\pi^2 k}{C^2 L e} \right)^k \leq \frac{e^{11}}{C^2} \left(\frac{4\pi^2 \sqrt{3} k}{C^2 L e} \right)^k. \end{aligned}$$

Правая часть последнего неравенства достигает на промежутке $1 \leq k \leq \sqrt{L}$ наибольшего значения при $k = 1$. Следовательно,

$$\delta_2 \leq \frac{e^{11}}{C^2} \frac{4\pi^2 \sqrt{3}}{C^2 L} < \frac{1}{\sqrt{L}}.$$

Кроме того, имеем

$$\delta_2^{1/(2k)} = \left(\frac{e^{11}}{C^2} \right)^{1/(2k)} \sqrt{\frac{4\pi^2 \sqrt{3} k}{C^2 L e}} \leq \sqrt{\frac{e^{11}}{C^2}} \frac{2\pi \sqrt[4]{3}}{C \sqrt{e}} \sqrt{\frac{k}{L}} < e^{2.8} A^2 \sqrt{\frac{k}{L}}.$$

Далее, согласно следствию 2 справедливо неравенство

$$\Sigma_1 \leq \frac{\varkappa(2k)}{(2\pi)^{2k}} M L^k \delta_1, \quad \delta_1 = 1.1 A^{k-1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} 2^{2k} k \Sigma_3 &\leq 2^{2k} k \Sigma_1^{1-1/(2k)} \Sigma_2^{1/(2k)} \leq \frac{\varkappa(2k)}{(2\pi)^{2k}} M L^k \delta_3, \\ \delta_3 &= 2^{2k} k \delta_1^{1-1/(2k)} \delta_2^{1/(2k)} \leq 2^{2k} k \left(\frac{1.1}{A} \right)^{1-1/(2k)} A^{k-1/2} e^{2.8} A^2 \sqrt{\frac{k}{L}} \\ &\leq \sqrt{1.1} e^{2.8} A (4A)^k \frac{k \sqrt{k}}{\sqrt{L}} < \frac{18A(4\sqrt{3}A)^k}{\sqrt{L}}. \end{aligned}$$

Окончательно находим

$$\sum_{N < n \leq N+M} S^{2k}(\gamma_n + 0) = \frac{\varkappa(2k)}{(2\pi)^{2k}} M L^k (1 + \theta \delta),$$

где

$$\delta = \frac{1.1 A^k}{\sqrt{L}} + \frac{18A(4A\sqrt{3})^k}{\sqrt{L}} + \frac{2^{2k} k}{\sqrt{L}} < \frac{19A(4A\sqrt{3})^k}{\sqrt{L}}.$$

Второе равенство теоремы выводится аналогично. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 12. Пусть k – целое число с условием $1 \leq k \leq \sqrt{L}$. Тогда имеют место оценки

$$\left| \sum_{N < n \leq N+M} S^{2k-1}(\gamma_n + 0) \right| < c_k M L^{k-1}, \quad \left| \sum_{N < n \leq N+M} S^{2k-1}(\gamma_n - 0) \right| < c_k M L^{k-1},$$

где величину c_k можно положить равной $(eA)^3$, если $k = 1$, и $3.7B^{-0.5}(Bk)^k$, если $k \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы оценим лишь первую сумму, так как вторая оценивается аналогично. Рассмотрим сначала случай $k = 1$. Согласно леммам 7, 11 и теореме 5 имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{N < n \leq N+M} S(\gamma_n + 0) \right| &\leq \left| \sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n \right| + 1.01 \sum_{N < n \leq N+M} \kappa_n \\ &\leq 3.6\sqrt{B}M + e^{2.7} A^3 M < (eA)^3 M. \end{aligned}$$

Пусть теперь $k \geq 2$. Суммируя обе части равенства

$$S^{2k-1}(\gamma_n + 0) = -\Delta_n^{2k-1} + 0.5\theta k \cdot 2^{2k}((1.01)^{2k-1}\kappa_n^{2k-1} + \Delta_n^{2k-2}\kappa_n),$$

получим

$$\left| \sum_{N < n \leq N+M} S^{2k-1}(\gamma_n + 0) \right| \leq \left| \sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k-1} \right| + 0.5k \cdot 2^{2k}((1.01)^{2k-1}\Sigma_1 + \Sigma_2),$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{N < n \leq N+M} \kappa_n^{2k-1} = \sum'_{N < n \leq N+M} \kappa_n^{2k}, \quad \Sigma_2 = \sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k-2}\kappa_n.$$

Согласно лемме 11 имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\leq \frac{e^{8.4}}{C^{2k+1}}(2k)!M < e^{7.6}A\sqrt{k}\left(\frac{2k}{Ce}\right)^{2k}M, \\ 0.5k \cdot 2^{2k}(1.01)^{2k-1}\Sigma_1 &< e^7A\left(\frac{2k}{C}\right)^{2k}M = k^kML^{k-1}\delta_1, \\ \delta_1 = e^7AL\left(\frac{4k}{C^2L}\right)^k &\leq e^7AL\left(\frac{8}{C^2L}\right)^2 < \frac{1}{\sqrt{L}} < \frac{0.05}{\sqrt{B}}. \end{aligned}$$

Далее, применяя к Σ_2 неравенство Гёльдера, получим $\Sigma_2 \leq \Sigma_3^{1-1/k}\Sigma_4^{1/k}$, где

$$\Sigma_3 = \sum_{N < n \leq N+M} \Delta_n^{2k}, \quad \Sigma_4 = \sum_{N < n \leq N+M} \kappa_n^k = \sum'_{N < n \leq N+M} \kappa_n^{k+1}.$$

Используя следствие 2 и оценку из леммы 11, найдем

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &\leq \frac{1.1}{A} \frac{\varkappa(2k)}{(2\pi)^{2k}} M(AL)^k < \frac{\sqrt{e}}{A} \left(\frac{kAL}{\pi^2e}\right)^k M, \\ \Sigma_4 &\leq \frac{e^{8.4}}{C^{k+2}}(k+1)!M < e^6A^2k\sqrt{k}\left(\frac{k}{Ce}\right)^k M. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} 0.5k \cdot 2^{2k}\Sigma_2 &\leq 0.5k \cdot 2^{2k} \frac{\sqrt[4]{e}}{\sqrt{A}} \left(\frac{kAL}{\pi^2e}\right)^{k-1} e^3A\sqrt{3} \frac{k}{Ce} M \\ &< 25\sqrt{A} \left(\frac{1}{4}kA\right)^k ML^{k-1} < \frac{0.05}{\sqrt{B}}(Bk)^k ML^{k-1}. \end{aligned}$$

Теперь искомое утверждение следует из теоремы 5:

$$\left| \sum_{N < n \leq N+M} S^{2k-1}(\gamma_n + 0) \right| < \frac{(Bk)^k}{\sqrt{B}} ML^{k-1} (3.6 + 0.05 + 0.05) = \frac{3.7}{\sqrt{B}} (Bk)^k ML^{k-1}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 13. Пусть a – произвольное вещественное число с условием

$$0 < a < \frac{e \ln L}{10A \ln \ln L}.$$

Тогда имеют место асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \sum_{N < n \leq N+M} |S(\gamma_n + 0)|^a &= \frac{\varkappa(a)}{(2\pi)^a} M L^{0.5a} (1 + \theta_1 \delta), \\ \sum_{N < n \leq N+M} |S(\gamma_n - 0)|^a &= \frac{\varkappa(a)}{(2\pi)^a} M L^{0.5a} (1 + \theta_2 \delta), \end{aligned}$$

где $\delta = c(A^{-1} \ln L)^{-\gamma}$, причем величины c и γ можно положить соответственно равными $e^5 A^3$ и $0.5a$, если $0 < a \leq 1$, и равными $2^{15.5}$ и $\frac{1}{2} + \left\{ \frac{a-1}{2} \right\}$, если $a > 1$. В частности, при $a = 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sum_{N < n \leq N+M} |S(\gamma_n + 0)| &= \frac{M}{\pi \sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \ln N} (1 + O((\ln \ln \ln N)^{-0.5})), \\ \sum_{N < n \leq N+M} |S(\gamma_n - 0)| &= \frac{M}{\pi \sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \ln N} (1 + O((\ln \ln \ln N)^{-0.5})). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $0 < a \leq 1$. Пользуясь равенством из леммы 7 и рассматривая отдельно случаи $|\Delta_n| \leq 2\kappa_n$ и $|\Delta_n| > 2\kappa_n$, убеждаемся в том, что в каждом из них справедливо равенство

$$|S(\gamma_n + 0)|^a = |\Delta_n|^a + 3.01\theta\kappa_n.$$

Суммируя обе части последнего равенства по n , получаем

$$\sum_{N < n \leq N+M} |S(\gamma_n + 0)|^a = \Sigma_1 + 3.01\theta\Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{N < n \leq N+M} |\Delta_n|^a, \quad \Sigma_2 = \sum_{N < n \leq N+M} \kappa_n = \sum'_{N < n \leq N+M} \kappa_n^2.$$

Оценивая сумму Σ_2 с помощью леммы 11, находим

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\leq \frac{2e^{8.4}}{C^3} M = \frac{\varkappa(a)}{(2\pi)^a} M L^{0.5a} \delta_2, \\ \delta_2 &\leq \frac{\pi^{a+1/2}}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} \frac{2e^{8.4}}{C^3 L^{0.5a}} \leq 2\pi^{1.5} e^{8.4} C^{-3} L^{-0.5a} < 0.5e^5 A^3 L^{-0.5}. \end{aligned}$$

Пользуясь асимптотической формулой из теоремы 6 для суммы Σ_1 , окончательно находим

$$\sum_{N < n \leq N+M} |S(\gamma_n + 0)|^a = \frac{\varkappa(a)}{(2\pi)^a} M L^{0.5a} (1 + \theta\delta),$$

где

$$\delta \leq 91(A^{-1} \ln L)^{-0.5a} + 0.5e^5 A^3 L^{-0.5a} < e^5 A^3 (A^{-1} \ln L)^{-0.5a}.$$

Рассмотрим теперь случай $a > 1$. С помощью легко проверяемого равенства

$$|S(\gamma_n + 0)|^a = |\Delta_n|^a + (3.01)^a \theta(\kappa_n^a + |\Delta_n|^{a-1} \kappa_n)$$

приходим к следующему выражению для первой суммы из условия теоремы:

$$\sum_{N < n \leq N+M} |S(\gamma_n + 0)|^a = \Sigma_1 + (3.01)^a \theta(\Sigma_2 + \Sigma_1^{1-1/a} \Sigma_2^{1/a}),$$

где

$$\Sigma_2 = \sum_{N < n \leq N+M} \kappa_n^a = \sum'_{N < n \leq N+M} \kappa_n^{a+1},$$

а обозначение Σ_1 сохраняет тот же смысл, что и выше. Снова применяя оценку из леммы 11 и пользуясь формулой удвоения для гамма-функции, получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\leq \frac{e^{8.4}}{C^{a+2}} \Gamma(a+2) M \leq \frac{\varkappa(a)}{(2\pi)^a} M L^{0.5a} \delta_1, \\ \delta_1 &= \frac{\pi^{a+1/2}}{\Gamma(\frac{a+1}{2})} \frac{\Gamma(a+2)}{C^{a+2}} \frac{e^{8.4}}{L^{0.5a}} < e^9 C^{-2} \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(\frac{a+1}{2})} \left(\frac{\pi}{C\sqrt{L}} \right)^a \\ &= e^9 C^{-2} (a+2) \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right) \left(\frac{2\pi}{C\sqrt{L}} \right)^a \leq e^9 C^{-2} \left(\frac{4\pi a}{C\sqrt{L}} \right)^a. \end{aligned} \quad (37)$$

Поскольку $a = o(\ln L)$, то, очевидно, имеем

$$\delta_1 \leq e^9 C^{-2} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{L}} \right)^a < \frac{1}{\sqrt[4]{L}}.$$

Далее, замечая, что

$$\Sigma_1 < 1.01 \frac{\varkappa(a)}{(2\pi)^a} M L^{0.5a},$$

и пользуясь оценкой (37) для δ_1 , находим

$$\Sigma_1^{1-1/a} \Sigma_2^{1/a} < \frac{\varkappa(a)}{(2\pi)^a} M L^{0.5a} \delta_2, \quad \delta_2 < 1.01 e^9 C^{-2} \frac{4\pi a}{C\sqrt{L}} < \frac{1}{\sqrt[4]{L}}.$$

Таким образом,

$$\sum_{N < n \leq N+M} |S(\gamma_n + 0)|^a = \frac{\varkappa(a)}{(2\pi)^a} M L^{0.5a} (1 + \theta\delta),$$

где

$$\delta = 2^{15.5} (A^{-1} \ln L)^{-\gamma} + 2(3.01)^a L^{-0.25} < 2^{15.6} (A^{-1} \ln L)^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{2} + \left\{ \frac{a-1}{2} \right\}.$$

Все приведенные выше рассуждения без изменений применимы и ко второй сумме из условия теоремы. Теорема доказана.

Из теорем 11, 12 стандартным образом выводится

ТЕОРЕМА 14. При любом вещественном x для количества $\nu_1 = \nu_1(x)$ ординат γ_n , $N < n \leq N + M$, удовлетворяющих условию

$$S(\gamma_n + 0) \leq \frac{x}{\pi} \sqrt{\frac{L}{2}},$$

имеет место формула

$$\nu_1(x) = M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} + \frac{\theta A}{\sqrt{\ln L}} \right).$$

Подобная формула верна и для количества $\nu_2(x)$ ординат γ_n , $N < n \leq N + M$, подчиненных условию

$$S(\gamma_n - 0) \leq \frac{x}{\pi} \sqrt{\frac{L}{2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 10.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\Phi(x)$ – произвольная положительная и неограниченная сверху функция, монотонно возрастающая при $x \rightarrow +\infty$. Тогда неравенства

$$\frac{1}{\Phi(n)} \sqrt{\ln \ln n} < |S(\gamma_n + 0)| \leq \Phi(n) \sqrt{\ln \ln n} \quad (38)$$

выполняются для почти всех значений n (т.е. доля тех $n \leq N$, для которых неравенства (38) нарушаются, есть $o(N)$ при $N \rightarrow +\infty$). Это утверждение остается справедливым при замене в (38) величины $S(\gamma_n + 0)$ на $S(\gamma_n - 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть $K \geq K_0(\varepsilon) > 0$ – достаточно большое целое число, а N пробегает целые числа из промежутка $(K, 2K]$. Тогда все теоремы из § 2–4 остаются справедливыми при $M = [K^\varepsilon]$ для всех N из указанного промежутка, за исключением не более $K^{1-0.05\varepsilon}$ значений.

Список литературы

1. М. А. Королёв, “Закон Грама и гипотеза Сельберга о распределении нулей дзета-функции Римана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:4 (2010), 83–118; англ. пер.: М. А. Korolev, “Gram’s law and Selberg’s conjecture on the distribution of zeros of the Riemann zeta function”, *Izv. Math.*, **74**:4 (2010), 743–780.
2. C. L. Siegel, “Contributions to the theory of the Dirichlet L -series and the Epstein zeta-functions”, *Ann. of Math.* (2), **44**:2 (1943), 143–172.
3. А. А. Карацуба, М. А. Королёв, “Аргумент дзета-функции Римана”, *УМН*, **60**:3 (2005), 41–96; англ. пер.: А. А. Karatsuba, М. А. Korolev, “The argument of the Riemann zeta function”, *Russian Math. Surveys*, **60**:3 (2005), 433–488.
4. T. Christ, J. Kalpokas, J. Steuding, “Neue Resultate über die Wertverteilung der Riemannschen Zetafunktion auf der kritischen Geraden”, *Math. Semesterber.*, **57**:2 (2010), 201–229.
5. J. I. Hutchinson, “On the roots of the Riemann zeta function”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **27**:1 (1925), 49–60.

6. E. C. Titchmarsh, “The zeros of the Riemann zeta-function”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **151**:873 (1935), 234–255.
7. T. S. Trudgian, *Further results on Gram’s law*, D. Phil. Thesis, University of Oxford, 2009.
8. A. Selberg, “The zeta-function and the Riemann hypothesis”, *C. R. Dixieme Congrès Math. Scandinaves* 1946, Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1947, 187–200.
9. A. Selberg, “Contributions to the theory of the Riemann zeta-function”, *Arch. Math. Naturvid.*, **48**:5 (1946), 89–155.
10. A. Ghosh, “On the Riemann zeta-function – mean value theorems and the distribution of $|S(t)|$ ”, *J. Number Theory*, **17**:1 (1983), 93–102.
11. A. Selberg, *Collected papers*, v. I, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
12. А. Г. Постников, “Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений”, Тр. МИАН СССР, **82**, Наука, М., 1966, 3–112; англ. пер.: A. G. Postnikov, “Ergodic problems in the theory of congruences and of diophantine approximations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **82** (1966), 1–128.
13. В. Ф. Гапошкин, “О скорости приближения к нормальному закону распределений взвешенных сумм лакунарных рядов”, *ТВП*, **13**:3 (1968), 445–461; англ. пер.: V. F. Gaposhkin, “On the speed of convergence to the Gaussian law of weighted sums of gap series”, *Theory Probab. Appl.*, **13**:3 (1968), 421–437.
14. A. Fujii, “On the zeros of Dirichlet L -functions. V”, *Acta Arith.*, **28**:4 (1976), 395–403.
15. А. А. Карацуба, М. А. Королёв, “Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой”, *УМН*, **61**:3 (2006), 3–92; англ. пер.: A. A. Karatsuba, M. A. Korolev, “Behaviour of the argument of the Riemann zeta function on the critical line”, *Russian Math. Surveys*, **61**:3 (2006), 389–482.
16. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. III, 4-е изд., Наука, М., 1966; англ. пер.: G. M. Fikhtengol’ts, *Differential and integral calculus*, v. III, Deutscher, Berlin, 1977.
17. A. Selberg, “Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series”, *Proceedings of the Amalfi conference on analytic number theory* (Maiori, Italy, 1989), Università di Salerno, Salerno, 1992, 367–385.
18. М. Лозэ, *Теория вероятностей*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: M. Loève, *Probability theory*, Van Nostrand, Toronto–New York–London, 1960.
19. D. A. Goldston, S. M. Gonek, “A note on $S(t)$ and the zeros of the Riemann zeta-function”, arXiv: math/0511092.
20. М. А. Королёв, “О кратных нулях дзета-функции Римана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:3 (2006), 3–22; англ. пер.: M. A. Korolev, “On multiple zeros of the Riemann zeta-function”, *Izv. Math.*, **70**:3 (2006), 427–446.

М. А. КОРОЛЁВ (M. A. KOROLEV)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: hardy_ramanujan@mail.ru; korolev@mi.ras.ru

Поступило в редакцию

22.10.2010

28.02.2011