Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Кузнецов, Гиперплоские сечения и производные категории, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 3, 23–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/im556>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:05:30

УДК 512.73

А. Г. Кузнецов

Гиперплоские сечения и производные категории

Приведено обобщение теоремы Бондала и Орлова о производных категориях когерентных пучков на пересечениях квадрик, демонстрирующее связь этой теоремы с проективной двойственностью. В качестве приложения приведено описание производных категорий когерентных пучков на трехмерных многообразиях Фано индекса 1 степеней 12, 16 и 18.

Библиография: 26 наименований.

Введение

Одной из наиболее перспективных тенденций в современной алгебраической геометрии является систематическое использование производных категорий когерентных пучков [5]. Производные категории, введенные Ж.-Л. Вердье в 1967 г., в последнее время привлекают повышенное внимание, что связано с пониманием их роли в современной геометрии. Было осознано, что геометрическое сходство различных алгебраических многообразий часто является лишь внешним проявлением более глубоких взаимосвязей, которые могут быть выражены как эквивалентность подходящих категорий. Рассмотрим, к примеру, соответствие Маккея. В 1980 г. Дж. Маккей обнаружил [19] связь неприводимых представлений конечных подгрупп $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ с вершинами аффинных диаграмм Коксетера–Дынкина типа A, D, E . Геометрическая интерпретация этого соответствия в терминах разрешения простой поверхностной особенности $\mathbb{C}^2/\Gamma$ была предложена Г. Гонсалесом–Спринбергом и Ж.-Л. Вердье [11] в 1983 г. Наконец, М. Капранов и Е. Вассеро [15] показали, что производная категория когерентных пучков на разрешении особенности $\mathbb{C}^2/\Gamma$ эквивалентна производной категории когерентных Γ -эquivariantных пучков на $\mathbb{C}^2$ (см. также [8], где приводится обобщение этого факта).

Еще один пример переформулировки классических результатов в терминах производных категорий – это теория пересечения квадрик. Ранее, она формулировалась как соответствие между пересечениями квадрик и детерминантами в линейных пространствах квадрик [26]. Геометрический смысл этого соответствия был обнаружен в работе [10]. В частности, в случае пересечения двух четномерных квадрик следует рассматривать гиперэллиптическую кривую, которая является двулистным накрытием прямой $\mathbb{P}^1$ (параметризующей квадрики в пучке), разветвленным в точках прямой $\mathbb{P}^1$, соответствующих

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 05-01-01034 и 02-01-01041), программы Президента РФ для поддержки молодых ученых (МК-3926.2004.1), гранта АФГИР RUM1-2661-МО-05 и Российского фонда поддержки науки.

вырожденным квадрикам. В работе [10] было показано, что многообразие модулей двумерных расслоений на этой гиперэллиптической кривой может быть описано в терминах линейных пространств, содержащихся в пересечении квадрик. А. И. Бондал и Д. О. Орлов в работе [4] раскрыли геометрический смысл этого соответствия, показав, что производная категория когерентных пучков на гиперэллиптической кривой может быть вложена как полная подкатегория в производную категорию когерентных пучков на пересечении квадрик. Наконец, в работе [5] А. И. Бондал и Д. О. Орлов сформулировали теорему, описывающую структуру производной категории когерентных пучков на полном пересечении произвольного числа квадрик.

ТЕОРЕМА 0.1 [5]. *Для всякого семейства квадрик $L \subset S^2W^*$ в четномерном векторном пространстве W существует пучок конечномерных алгебр $\mathcal{A}_L$ на двулистом накрытии пространства $\mathbb{P}(L)$, разветвленном в локусе вырождения, так что если $2 \dim L < \dim W$, то существует полуортогональное разложение*

$$\mathcal{D}^b(X_L) = \langle \mathcal{D}^b(\mathrm{Coh}(\mathcal{A}_L)), \mathcal{O}_{X_L}, \dots, \mathcal{O}_{X_L}(\dim W - 2 \dim L - 1) \rangle,$$

если $2 \dim L = \dim W$, то существует эквивалентность категорий $\mathcal{D}^b(X_L) \cong \mathcal{D}^b(\mathrm{Coh}(\mathcal{A}_L))$, где X_L – полное пересечение квадрик, входящих в семейство L , а $\mathcal{D}^b(\mathrm{Coh}(\mathcal{A}_L))$ – производная категория пучков когерентных $\mathcal{A}_L$ -модулей.

Обсудим связь теоремы 0.1 с теорией проективной двойственности.

Заметим, что пересечение квадрик X_L можно рассматривать как линейное сечение многообразия Веронезе $X = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(S^2W)$ линейным подпространством $\mathbb{P}(L^\perp) \subset \mathbb{P}(S^2W)$, где $L^\perp \subset S^2W^*$ – ортогональное подпространство к $L \subset S^2W^*$. С другой стороны, пучок алгебр $\mathcal{A}_L$ на $\mathbb{P}(L) \subset \mathbb{P}(S^2W^*)$ можно продолжить до пучка $\mathcal{A}_{\mathbb{P}(S^2W^*)}$ на всем пространстве $\mathbb{P}(S^2W^*)$. По существу этот пучок есть пучок четных частей универсальной алгебры Клиффорда, т. е.

$$\mathcal{A}_{\mathbb{P}(S^2W^*)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2W^*)} \oplus \Lambda^2 W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2W^*)}(-1) \oplus \dots \oplus \Lambda^{2n} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2W^*)}(-n)$$

с клиффордовым умножением. Рассмотрим $\mathbb{P}(S^2W^*)$ с пучком алгебр $\mathcal{A}_{\mathbb{P}(S^2W^*)}$ как некоммутативное алгебраическое многообразие. По сути оно является некоммутативным конечным накрытием пространства $\mathbb{P}(S^2W^*)$.

Заметим, что множество критических значений проекции

$$(\mathbb{P}(S^2W^*), \mathcal{A}_{\mathbb{P}(S^2W^*)}) \rightarrow \mathbb{P}(S^2W^*)$$

совпадает с проективно двойственным многообразием $X^\vee \subset \mathbb{P}(S^2W^*)$.

Действительно, поскольку проекция $(\mathbb{P}(S^2W^*), \mathcal{A}_{\mathbb{P}(S^2W^*)}) \rightarrow \mathbb{P}(S^2W^*)$ является плоской, точка $H \in \mathbb{P}(S^2W^*)$ является ее критическим значением тогда и только тогда, когда слой не гладок. С другой стороны, гладкость алгебраического многообразия эквивалентна Ext-ограниченности его производной категории когерентных пучков. Таким образом, множество критических значений – это множество гиперплоскостей $H \in \mathbb{P}(S^2W^*)$ таких, что категория $\mathcal{D}^b(\mathrm{Coh}(\mathcal{A}_H))$ не Ext-ограничена. Из утверждения теоремы 0.1 следует, что это равносильно тому, что категория $\mathcal{D}^b(X_H)$ не Ext-ограничена, т. е. тому, что X_H

особо. Однако X_H – гиперплоское сечение многообразия $X \subset \mathbb{P}(S^2W)$ гиперплоскостью $H \in \mathbb{P}(S^2W^*)$. Учитывая определение проективной двойственности, заключаем, что множество критических значений совпадает с проективно двойственным многообразием.

С точки зрения гомологической алгебры двойственным к многообразию X следует считать не $X^\vee$, а некоммутативное многообразие $(\mathbb{P}(S^2W^*), \mathcal{A}_{\mathbb{P}(S^2W^*)})$. Оно не только описывает множество особых гиперплоских сечений, но по нему также можно восстановить нетривиальные части их производных категорий (например, триангулированная категория особенностей [23] многообразия X_H эквивалентна триангулированной категории особенностей слоя проекции $(\mathbb{P}(S^2W^*), \mathcal{A}_{\mathbb{P}(S^2W^*)}) \rightarrow \mathbb{P}(S^2W^*)$ над точкой H). В частности, оно содержит информацию об их особенностях. Поэтому некоммутативное многообразие $(\mathbb{P}(S^2W^*), \mathcal{A}_{\mathbb{P}(S^2W^*)})$ можно рассматривать как гомологически проективно двойственное к X .

Учитывая все сказанное выше, можно дать следующее определение. *Гомологически проективно двойственное многообразие* к многообразию $X \subset \mathbb{P}(V)$ – это алгебраическое многообразие Y с морфизмом $g: Y \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ и пучком некоммутативных алгебр $\mathcal{A}_Y$ на Y такое, что для всякой гиперплоскости $H \subset V^*$ нетривиальная часть производной категории $\mathcal{D}^b(X_H)$ эквивалентна производной категории $\mathcal{D}^b(Y_H, \mathcal{A}_Y)$ (иначе говоря, существует строго полное вложение $\mathcal{D}^b(Y_H, \mathcal{A}_Y) \rightarrow \mathcal{D}^b(X_H)$, а ортогонал к $\mathcal{D}^b(Y_H, \mathcal{A}_Y)$ в $\mathcal{D}^b(X_H)$ Ext-ограничен).

Автор убежден, что гомологически проективно двойственные многообразия существуют для широкого класса алгебраических многообразий. В настоящей работе показано, как построить гомологически проективно двойственное многообразие для узкого класса многообразий. Предположим, что X – гладкое проективное многообразие, обладающее исключительной парой векторных расслоений (E_1, E_2) такой, что набор

$$(E_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)|X}(1), E_2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)|X}(1), \dots, E_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)|X}(i), E_2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)|X}(i)) \quad (0.1)$$

является исключительным набором, где i – индекс X (т.е. $\omega_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-i)|_X$). В этом случае гомологически проективно двойственное многообразие Y можно построить как многообразие модулей стабильных представлений (R_1, R_2) колчана

$$Q = \bullet \xrightarrow{\text{Hom}(E_1, E_2)^*} \bullet$$

таких, что коядро соответствующего отображения $R_1 \otimes E_1 \rightarrow R_2 \otimes E_2$ сосредоточено на некотором гиперплоском сечении многообразия X . Многообразие модулей Y обладает пучком алгебр Адзумаи $\mathcal{A}_Y$ и универсальным семейством представлений (F_1, F_2) в категории $\mathcal{A}_Y$ -модулей (алгебра Адзумаи $\mathcal{A}_Y$ соответствует элементу группы Брауэра, являющемуся препятствием к существованию универсального семейства в категории $\mathcal{O}_Y$ -модулей, поэтому в категории $\mathcal{A}_Y$ -модулей универсальное семейство существует). Сопоставляя точке многообразия Y гиперплоскость, на которой сосредоточено коядро соответствующего отображения $R_1 \otimes E_1 \rightarrow R_2 \otimes E_2$, мы получаем проекцию $g: Y \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$. Обозначая, как и выше, $X_L = X \cap \mathbb{P}(L^\perp)$, $Y_L = Y \times_{\mathbb{P}(V^*)} \mathbb{P}(L) = g^{-1}(\mathbb{P}(L))$, мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 0.2. *Предположим, что многообразия X_L и Y_L компактны и $\dim X_L = \dim X - \dim L$, $\dim Y_L = \dim Y - \dim L$. Если $r = \dim L \leq i$, то существует полуортогональное разложение*

$$\mathcal{D}^b(X_L) = \langle \mathcal{D}^b(Y_L, \text{Coh}(\mathcal{A}_Y)), E_1(1), E_2(1), \dots, E_1(i-r), E_2(i-r) \rangle,$$

а если $r = \dim L \geq i$, то существует полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}^b(Y_L, \mathcal{A}_Y) = \langle \mathcal{D}^b(X_L), F_2^*(i-r), F_1^*(i-r), \dots, F_2^*(-1), F_1^*(-1) \rangle.$$

В частности, при $\dim L = i$ имеем эквивалентность категорий $\mathcal{D}^b(X_L) \cong \mathcal{D}^b(Y_L, \text{Coh}(\mathcal{A}_Y))$.

На самом деле вместо прямого доказательства теоремы 0.2 мы приводим список условий, налагаемых на многообразие X , пару (E_1, E_2) , многообразие $(Y, \mathcal{A}_Y)$ и пару (F_1, F_2) , выполнение которых влечет утверждение теоремы. В некоторых случаях (когда удастся угадать многообразие Y) вследствие такого подхода можно не строить многообразие Y . Доказательство теоремы состоит из двух частей. В первой части разбирается случай $\dim L = 1$, т. е. случай гиперплоских сечений многообразия X . Иначе говоря, доказывается, что Y гомологически проективно двойственно к X . Оказывается, что вторая часть доказательства, т. е. случай $\dim L > 1$, вытекает отсюда почти формально. Таким образом, теорема 0.2 является в некотором смысле следствием гомологической проективной двойственности многообразий X и Y .

В условиях теоремы 0.2 предположение компактности многообразия X_L не является ограничением, так как X проективно. Напротив, предположение компактности многообразия Y_L является наиболее существенным ограничением, поскольку Y , вообще говоря, может оказаться некомпактным (мы строим Y как многообразие модулей *стабильных* представлений, а стабильность – открытое условие). На самом деле эта проблема является следствием несовершенства конструкции Y (см. ниже). Есть основания считать, что всегда можно построить компактное многообразие Y так, чтобы теорема выполнялась. В этом случае предположение о компактности многообразия Y_L также будет выполняться. От предположения о размерностях многообразий X_L и Y_L тоже можно отказаться. Однако в этом случае необходимо определять X_L и Y_L иначе. Верным определением для X_L и Y_L является “производное” расслоенное произведение: $X_L = X \times_{\mathbb{P}(V)}^{\mathbb{L}} \mathbb{P}(L^\perp)$, $Y_L = Y \times_{\mathbb{P}(V^*)}^{\mathbb{L}} \mathbb{P}(L)$. Как топологическое пространство оно совпадает с обычным расслоенным произведением, но в отличие от него окольцовано некоторым пучком DG-алгебр вместо обычного пучка функций. Соответственно, $\mathcal{D}^b(X_L)$ и $\mathcal{D}^b(Y_L, \mathcal{A}_Y)$ – подходящие категории DG-модулей. В частности, теорема 0.2 дает описание некоторой категории DG-модулей на любом неполном пересечении квадрик. Такое описание интересно, поскольку любое проективное многообразие является пересечением квадрик при вложении в проективное пространство, заданном достаточно обильным линейным расслоением.

Обсудим теперь некоторые формальные следствия теоремы 0.2. Прежде всего необходимо напомнить о том, что среди сделанных предположений не было требования полноты исключительного набора (0.1). Однако, полагая $L = 0$, получаем $X_L = X$, $Y_L = \emptyset$, и из теоремы 0.2 следует, что набор полон. Это

является довольно неожиданным следствием. Аналогично, если Y компактно, то, полагая $L = V^*$, получаем $X_L = \emptyset$, $Y_L = Y$, откуда следует, что набор

$$(F_2^*(i - N), F_1^*(i - N), \dots, F_2^*(-1), F_1^*(-1)),$$

где $N = \dim V$, является полным исключительным набором в категории $\mathcal{D}^b(Y, \mathcal{A}_Y)$.

Также необходимо напомнить о том, что утверждение теоремы 0.2 выполняется не только для отдельных линейных сечений многообразий X и Y , но и для семейств. На самом деле доказательство основано именно на изучении семейств. Например, можно рассмотреть универсальное семейство $\mathcal{X}_1$ гиперплоских сечений многообразия X (которое является дивизором бистепени $(1, 1)$ в $X \times \mathbb{P}(V^*)$). В этом случае семейство $\mathcal{Y}_1 \subset Y \times \mathbb{P}(V^*)$ ортогональных линейных сечений многообразия Y совпадает с графиком проекции g . Относительная версия теоремы 0.2 в этом случае дает полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1) = \langle \mathcal{D}^b(Y, \mathcal{A}_Y), \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)) \otimes E_1(1), \dots, \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)) \otimes E_2(i - 1) \rangle,$$

если Y компактно. Это разложение можно рассматривать как категорное определение компактификации $\bar{Y}$ многообразия Y :

$$\mathcal{D}^b(\bar{Y}, \mathcal{A}_{\bar{Y}}) = \langle \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)) \otimes E_1(1), \dots, \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)) \otimes E_2(i - 1) \rangle^\perp \subset \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1).$$

На самом деле это равенство можно принять за определение гомологически проективно двойственного к X многообразия, если бы была возможность доказать, что эта категория *геометрична*.

Опишем теперь, что дает наш подход для описания производной категории пересечения четномерных квадрик. В этом случае $X = \mathbb{P}(W)$, где W – четномерное векторное пространство. Рассмотрим вложение Веронезе $X \subset \mathbb{P}(S^2 W) = \mathbb{P}(V)$ и исключительную пару $(E_1, E_2) = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1))$ (заметьте, что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)|X}(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(2)$, так что набор (0.1) становится стандартным исключительным набором на $\mathbb{P}(W)$). Многообразие модулей представлений колчана, которое используется для построения гомологически проективно двойственного многообразия, является открытым подмножеством $Y = \mathbb{P}(S^2 W^*) \setminus \mathbf{Z}$, где $\mathbf{Z}$ – множество квадрик коранга 2. Таким образом, в настоящий момент предложенный метод позволяет доказать теорему 0.1 только для общих подпространств L размерности $\dim L \leq 3$.

Одной из причин того, что многообразие модулей представлений колчана – лишь открытое подмножество в $\mathbb{P}(S^2 W^*)$, является тот факт, что пучок алгебр $\mathcal{A}_{\mathbb{P}(S^2 W^*)}$ перестает быть пучком алгебр Адзумаи вдоль $\mathbf{Z}$, в то время как колчаный подход может дать только пучок алгебр Адзумаи. Однако можно ожидать, что существует алгебраический стек $\bar{Y}$ с подлежащим алгебраическим многообразием $\mathbb{P}(S^2 W^*)$ такой, что пучок алгебр $\mathcal{A}_{\mathbb{P}(S^2 W^*)}$ является прямым образом некоторого пучка алгебр Адзумаи на $\bar{Y}$. Соответственно, можно предположить, что в общей ситуации следует рассматривать подходящим образом определенный стек модулей представлений колчана вместо многообразия модулей.

Аналогично, в общей ситуации можно пытаться найти подходящую стековую компактификацию $\bar{Y}$ многообразия модулей Y такую, что пучок алгебр $\mathcal{A}_Y$ (так

же, как и универсальное семейство (F_1, F_2) может быть продолжен до пучка алгебр Адзумаи $\mathcal{A}_{\overline{Y}}$.

Другой подход к построению гомологически проективно двойственного многообразия состоит в том, чтобы вообще отказаться от использования колчанов и строить Y как многообразие модулей подходящих объектов (например, спинорных расслоений) в производной категории когерентных пучков на X , сосредоточенных на гиперплоских сечениях многообразия X .

В обоих случаях главным препятствием к построению такого многообразия Y является отсутствие хорошей категорной теории многообразий модулей, которая приводила бы к некоммутативным многообразиям модулей.

Теперь кратко опишем содержание работы. В § 1 приводятся основные обозначения и формулируется основной результат работы (теорема 1.2). В § 2 изложены используемые в работе понятия гомологической алгебры. В частности, в п. 2.4 приводятся определения точных декартовых квадратов и строгой замены базы. Здесь же доказываются основные технические результаты: теорема 2.46 о строгой замене базы и предложение 2.51 (относительная версия трюка Бриджлэнда). В § 3 представлена первая часть доказательства теоремы 1.2, а в § 4 ее доказательство завершается. В § 5 приводится общая конструкция многообразия Y по многообразию X , использующая многообразия модулей представлений колчанов. В § 6 приводятся некоторые примеры применения теоремы 1.2. В частности, теорема 1.2 применяется для описания производных категорий когерентных пучков на трехмерных многообразиях Фано индекса 1 степеней 12, 16 и 18. В § 7–9 доказываются технические результаты, относящиеся к этим примерам. Наконец, в § 10 проверяются основные свойства производных категорий когерентных модулей над пучком алгебр Адзумаи. При этом особое внимание уделяется связи комплексов конечных Тог-и Ext-амплитуд и совершенных комплексов.

Автор признателен А. И. Бондалу, Д. О. Орлову, Д. Б. Каледину и А. В. Самохину за полезные обсуждения. Часть результатов настоящей работы была представлена на конференции “Некоммутативная алгебра и алгебраическая геометрия” в университете г. Уорик. Автор благодарен организаторам конференции за предоставленную возможность доклада.

§ 1. Формулировки результатов

Как было указано во введении, сначала мы приведем список условий, налагаемых на пару алгебраических многообразий X и Y , из которых следует, что эти многообразия гомологически проективно двойственны.

Предположим, что имеются следующие *данные*:

(D.1) гладкое связное проективное многообразие X с алгебраическим морфизмом в проективное пространство $f: X \rightarrow \mathbb{P}(V)$;

(D.2) пара векторных расслоений (E_1, E_2) на X ;

(D.3) алгебраическое многообразие Y с пучком алгебр Адзумаи $\mathcal{A}_Y$ и с алгебраическим морфизмом $g: Y \rightarrow \mathbf{P} = \mathbb{P}(V^*) - \mathbf{Z}$, где $\mathbf{Z} \subset \mathbb{P}(V^*)$ – замкнутое подмножество двойственного проективного пространства;

(D.4) пара локально проективных пучков $\mathcal{A}_Y$ -модулей (F_1, F_2) на Y ;

(D.5) линейное отображение $\phi: \text{Hom}(E_1, E_2)^* \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}_Y}(F_1, F_2)$.

Во всех рассматриваемых далее примерах отображение ϕ является изоморфизмом.

Введем следующие обозначения: $W = \text{Hom}(E_1, E_2)^*$ – векторное пространство; $N = \dim V$ – целое число; $Q \subset \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$ – квадрика инцидентности, т. е. дивизор бистепени $(1, 1)$, слой которого над точкой $H \in \mathbb{P}(V^*)$ есть соответствующая гиперплоскость в $\mathbb{P}(V)$; $Q(X, Y) = (X \times Y) \times_{\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)} Q$ – подсхема в $X \times Y$; $i: Q(X, Y) \rightarrow X \times Y$ – вложение.

Слой $Q(X, Y)$ над точкой $y \in Y$ – гиперплоское сечение $X_H = X \cap H$ многообразия X , где H – гиперплоскость в $\mathbb{P}(V)$, соответствующая точке $g(y) \in \mathbb{P}(V^*)$. Мы будем называть многообразие $Q(X, Y)$ также *квадрикой инцидентности*. Заметим, что из приведенного ниже условия (C.1) следует, что квадрика инцидентности $Q(X, Y)$ является дивизором бистепени $(1, 1)$ в $X \times Y$.

Отображение $\phi: W \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}_Y}(F_1, F_2) = \text{Hom}_{\mathcal{A}_Y}(F_2^*, F_1^*)$ индуцирует гомоморфизмы вычисления $W \otimes F_1 \rightarrow F_2$ и $W \otimes F_2^* \rightarrow F_1^*$. Умножая первый из них на F_2^* , второй – на F_1 и складывая, получаем гомоморфизм

$$\text{ad}(\phi): W \otimes F_2^* \boxtimes F_1 \rightarrow F_2^* \boxtimes F_2 \oplus F_1^* \boxtimes F_1 \quad \text{на } Y \times Y.$$

С другой стороны, компонируя гомоморфизм вычисления $W \otimes F_1 \rightarrow F_2$, домноженный на E_2 , с гомоморфизмом ковычисления $E_1 \rightarrow W \otimes E_2$, домноженным на F_1 , получаем гомоморфизм

$$e: E_1 \boxtimes F_1 \rightarrow E_2 \boxtimes F_2 \quad \text{на } X \times Y.$$

Пусть $\mathbb{k}$ – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль.

Предположим далее, что данные (D.1)–(D.5) удовлетворяют следующим условиям:

(C.1) образ $f(X)$ не содержится в гиперплоскости пространства $\mathbb{P}(V)$;

(C.2) канонический класс многообразия X имеет вид $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(-i) := f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-i)$, где $i > 0$;

(C.3) набор пучков $(E_1(1), E_2(1), \dots, E_1(i), E_2(i))$ является исключительным набором (т. е. $\text{Ext}^\bullet(E_s, E_s) = \mathbb{k}$ при $s = 1, 2$ и $\text{Ext}^\bullet(E_s(k), E_t(l)) = 0$ при $i \geq k > l \geq 1$ или $k = l$ и $s > t$) и, дополнительно, $\text{Ext}^{>0}(E_1, E_2) = 0$;

(C.4) морфизм g проективен;

(C.5) коядро морфизма $\text{ad}(\phi)$ имеет вид $\text{Coker ad}(\phi) \cong \Delta_* \mathcal{A}_Y$, где $\Delta: Y \rightarrow Y \times Y$ – диагональное вложение;

(C.6) $\text{Ker } e = 0$ и $\text{Coker } e = i_* \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ – когерентный $\mathcal{A}_Y$ -модуль на $Q(X, Y)$;

(C.7) выполнено равенство $\dim X + N - \text{codim}_{Y \times Y}(Y \times_{\mathbb{P}(V^*)} Y) = 2i$;

(C.8) для всякой гиперплоскости $H \subset \mathbb{P}(V^*)$ имеем $\dim(\mathbf{Z} \cap H) \leq N - i - 2$.

Целое число i , определяемое условием (C.2), называется *индексом* многообразия X . Если множество $\mathbf{Z}$ неприводимо и не содержится в гиперплоскости пространства $\mathbb{P}(V^*)$, то условие (C.8) эквивалентно тому, что $\dim \mathbf{Z} \leq N - i - 1$.

Для всякого линейного подпространства $L \subset V^*$ обозначим

$$X_L = X \times_{\mathbb{P}(V)} \mathbb{P}(L^\perp) \quad \text{и} \quad Y_L = Y \times_{\mathbb{P}(V^*)} \mathbb{P}(L).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Подпространство $L \subset V^*$ называется *допустимым*, если:

- (a) $\dim X_L = \dim X - \dim L$;
- (b) $\dim Y_L = \dim Y + \dim L - N$;
- (c) $\mathbb{P}(L) \cap \mathbf{Z} = \emptyset$.

Заметим, что условие (c) вместе с условием (C.4) влечет компактность Y_L .

ТЕОРЕМА 1.2. Если условия (C.1)–(C.8) выполнены, то:

- 1) многообразие Y гладкое и $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(i - N)$;
- 2) для всякого допустимого подпространства $L \subset V^*$ существуют полуортогональные разложения

$$\mathcal{D}^b(X_L) = \langle \mathcal{D}^b(Y_L, \mathcal{A}_Y), E_1(1), E_2(1), \dots, E_1(i - r), E_2(i - r) \rangle,$$

если $r = \dim L < i$,

$$\mathcal{D}^b(Y_L, \mathcal{A}_Y) = \langle \mathcal{D}^b(X_L), F_2^*(i - r), F_1^*(i - r), \dots, F_2^*(-1), F_1^*(-1) \rangle,$$

если $r = \dim L > i$, и эквивалентность категорий

$$\mathcal{D}^b(X_L) \cong \mathcal{D}^b(Y_L, \mathcal{A}_Y),$$

если $\dim L = i$.

Приведем схему доказательства теоремы 1.2, предполагая для простоты, что $\mathbf{Z} = \emptyset$. Чтобы избежать проблем при работе с производными категориями особых многообразий, заменим отдельные линейные сечения X_L , Y_L многообразий X и Y универсальными семействами линейных сечений $\mathcal{X}_r \subset X \times \mathrm{Gr}(r, V^*)$, $\mathcal{Y}_r \subset Y \times \mathrm{Gr}(r, V^*)$, которые являются гладкими многообразиями (хотя их проекции на $\mathrm{Gr}(r, V^*)$ и не гладки). Заметим, что естественная проекция $\mathcal{X}_r \times_{\mathrm{Gr}(r, V^*)} \mathcal{Y}_r \rightarrow X \times Y$ пропускается через многообразие $Q(X, Y)$, и обозначим через $\mathcal{E}_r$ обратный образ пучка $\mathcal{E}$, определяемого условием (C.6). Тогда объекты $\mathcal{E}_r$ на $\mathcal{X}_r \times_{\mathrm{Gr}(r, V^*)} \mathcal{Y}_r \subset \mathcal{X}_r \times \mathcal{Y}_r$, рассматриваемые как ядра, задают функторы $\Phi_r: \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r, \mathcal{A}_Y) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)$. Рассмотрим также их левые и правые сопряженные функторы $\Phi_r^*, \Phi_r^!: \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r, \mathcal{A}_Y)$. Доказательство теоремы 1.2 состоит из нескольких шагов.

Шаг 1. Замечаем, что $\mathcal{Y}_1 = Y$, и доказываем, что функтор $\Phi_1: \mathcal{D}^b(Y, \mathcal{A}_Y) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1)$ строго полон. Это достигается явным вычислением композиции $\Phi_1^* \circ \Phi_1$. Показывается, что свертка ядер этих функторов изоморфна пучку $\mathrm{Coker} \mathrm{ad}(\phi)$ на $Y \times Y$, который по условию (C.4) задает тождественный функтор на $\mathcal{D}^b(Y, \mathcal{A}_Y)$ (см. § 3).

Шаг 2. Доказываем, что функтор $\Phi_r: \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r, \mathcal{A}_Y) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)$ строго полон при всех $r \leq i$ индукцией по r и что набор

$$\langle \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r, \mathcal{A}_Y), \mathcal{D}^b(\mathrm{Gr}(r, V^*)) \otimes E_1(1), \dots, \mathcal{D}^b(\mathrm{Gr}(r, V^*)) \otimes E_2(i - r) \rangle \quad (1.1)$$

полуортогонален в $\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)$ (см. п. 4.3).

Шаг 3. Используем трюк Бриджлэнда в относительной ситуации. Замечаем, что относительный канонический пучок $\mathcal{K}_i$ над $\mathrm{Gr}(i, V^*)$ равен $\omega_{\mathcal{X}_i / \mathrm{Gr}(i, V^*)} \cong$

$\det \mathcal{L}_i^*$, где $\mathcal{L}_i$ – тавтологическое подрасслоение ранга i на $\mathrm{Gr}(i, V^*)$. Таким образом, $\mathcal{X}_i$ – семейство многообразий Калаби–Яу над $\mathrm{Gr}(i, V^*)$. С другой стороны, функтор $\Phi_i: \mathrm{Gr}(i, V^*)$ -линеен (т. е. коммутирует с тензорным умножением на обратные образы расслоений на $\mathrm{Gr}(i, V^*)$). В п. 2.8 показано, что относительная версия трюка Бриджлэнда (предложение 2.51) применима в такой ситуации, так что Φ_i – эквивалентность, а $\omega_{\mathcal{Y}_i/\mathrm{Gr}(i, V^*)} \cong \det \mathcal{L}_i^*$ (см. п. 4.4).

Шаг 4. С помощью убывающей индукции по r проверяем, что $\omega_{\mathcal{Y}_r/\mathrm{Gr}(r, V^*)} \cong \det \mathcal{L}_r^*(i - r)$, где $\mathcal{L}_r$ – тавтологическое подрасслоение ранга r на $\mathrm{Gr}(r, V^*)$ (см. п. 4.4).

Шаг 5. С помощью убывающей индукции по r проверяем, что построенный полуортогональный набор (1.1) в $\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)$ полон. Иначе говоря, мы доказываем существование полуортогонального разложения

$$\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r) = \langle \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r, \mathcal{A}_Y), \mathcal{D}^b(\mathrm{Gr}(r, V^*)) \otimes E_1(1), \dots, \mathcal{D}^b(\mathrm{Gr}(r, V^*)) \otimes E_2(i - r) \rangle$$

для всех $r \leq i$ (см. п. 4.4).

Шаг 6. С помощью возрастающей индукции по r проверяем, что при всех $r \leq i$ функторы $\Phi_r^!: \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)$ переводят исключительную пару $(E_0(1), E_1(1))$ в пару (F_2^*, F_1^*) с точностью до некоторого сдвига и подкрутки, где E_0 – перестройка E_2 через E_1 , (т. е. E_0 определяется из точного треугольника $E_0 \rightarrow W^* \otimes E_1 \xrightarrow{\mathrm{ev}} E_2$). Отсюда выводим, что

$$\langle \mathcal{D}^b(\mathrm{Gr}(r, V^*)) \otimes F_2^*(i - r), \dots, \mathcal{D}^b(\mathrm{Gr}(r, V^*)) \otimes F_1^*(-1) \rangle$$

– полуортогональный набор в $\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r, \mathcal{A}_Y)$ при всех $r \geq i$. В частности, отсюда следует что в случае $\mathbf{Z} = \emptyset$ набор $(F_2^*(i - N), F_1^*(i - N), \dots, F_2^*(-1), F_1^*(-1))$ является исключительным набором в $\mathcal{D}^b(Y, \mathcal{A}_Y)$ (см. п. 4.5).

Шаг 7. С помощью индукции по r проверяем, что

$$\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r, \mathcal{A}_Y) = \langle \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r), \mathcal{D}^b(\mathrm{Gr}(r, V^*)) \otimes F_2^*(i - r), \dots, \mathcal{D}^b(\mathrm{Gr}(r, V^*)) \otimes F_1^*(-1) \rangle$$

при всех $r \geq i$ (см. п. 4.6).

Индукционные рассуждения во всех случаях основаны на следующей конструкции. Рассмотрим частичное флаговое многообразие $\mathrm{Fl}(r - 1, r; V^*)$ и тавтологические подрасслоения $\mathcal{L}_{r-1} \subset \mathcal{L}_r \subset V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Fl}(r-1, r; V^*)}$ ранга $r - 1$ и r на нем. Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\mathcal{L}_{r-1}} &= \mathcal{X}_{r-1} \times_{\mathrm{Gr}(r-1, V^*)} \mathrm{Fl}(r - 1, r; V^*), & \mathcal{X}_{\mathcal{L}_r} &= \mathcal{X}_r \times_{\mathrm{Gr}(r, V^*)} \mathrm{Fl}(r - 1, r; V^*), \\ \mathcal{Y}_{\mathcal{L}_{r-1}} &= \mathcal{Y}_{r-1} \times_{\mathrm{Gr}(r-1, V^*)} \mathrm{Fl}(r - 1, r; V^*), & \mathcal{Y}_{\mathcal{L}_r} &= \mathcal{Y}_r \times_{\mathrm{Gr}(r, V^*)} \mathrm{Fl}(r - 1, r; V^*). \end{aligned}$$

Тогда $\mathcal{X}_{\mathcal{L}_r}$ – дивизор в $\mathcal{X}_{\mathcal{L}_{r-1}}$, $\mathcal{Y}_{\mathcal{L}_{r-1}}$ – дивизор в $\mathcal{Y}_{\mathcal{L}_r}$, т. е. возникают диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_{\mathcal{L}_r} & \xleftarrow{\eta} & \mathcal{Y}_{\mathcal{L}_{r-1}} \\ \psi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathcal{Y}_r & & \mathcal{Y}_{r-1} \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{X}_{\mathcal{L}_r} & \xrightarrow{\xi} & \mathcal{X}_{\mathcal{L}_{r-1}} \\ \psi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathcal{X}_r & & \mathcal{X}_{r-1} \end{array}$$

где морфизмы ξ и η – дивизориальные вложения, а ϕ и ψ – проекции.

Далее, обратные образы $\mathcal{E}_{\mathcal{L}_{r-1}}$ и $\mathcal{E}_{\mathcal{L}_r}$ ядер $\mathcal{E}_{r-1}$ и $\mathcal{E}_r$ относительно проекций $\mathcal{X}_{\mathcal{L}_{r-1}} \times_{\text{Fl}(r-1, r; V^*)} \mathcal{Y}_{\mathcal{L}_{r-1}} \rightarrow \mathcal{X}_{r-1} \times_{\text{Gr}(r-1, V^*)} \mathcal{Y}_{r-1}$ и $\mathcal{X}_{\mathcal{L}_r} \times_{\text{Fl}(r-1, r; V^*)} \mathcal{Y}_{\mathcal{L}_r} \rightarrow \mathcal{X}_r \times_{\text{Gr}(r, V^*)} \mathcal{Y}_r$ задают функторы $\Phi_{\mathcal{L}_{r-1}}$ и $\Phi_{\mathcal{L}_r}$ между соответствующими производными категориями. Поскольку все эти функторы происходят из одного и того же объекта $\mathcal{E}$ на $Q(X, Y)$, между ними существуют определенные соотношения (см. п. 4.2).

Наконец, после завершения шагов 1–7 можно вывести теорему 1.2.

Для доказательства первого утверждения теоремы 1.2 положим $r = 1$ и заметим, что $\mathcal{Y}_1 = Y$. Получим полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1) = \langle \mathcal{D}^b(Y, \mathcal{A}_Y), \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)) \otimes E_1(1), \dots, \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)) \otimes E_2(i-1) \rangle$$

и изоморфизм $\omega_{Y/\mathbb{P}(V^*)} \cong \mathcal{L}_1^*(i-1) \cong \mathcal{O}_Y(i)$. Отсюда немедленно следует, что

$$\omega_Y \cong \omega_{Y/\mathbb{P}(V^*)} \otimes \omega_{\mathbb{P}(V^*)} \cong \mathcal{O}_Y(i-N).$$

С другой стороны, из гладкости $\mathcal{X}_1$ вытекает, что категория $\mathcal{D}^b(Y, \mathcal{A}_Y)$, будучи строгой полной подкатегорией в Ext-ограниченной категории $\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1)$, является Ext-ограниченной, следовательно, многообразие $(Y, \mathcal{A}_Y)$ гладко.

Второе утверждение теоремы 1.2 следует из теоремы 2.46 о строгой замене базы, примененной к замене базы $\text{Spec } \mathbb{k} \rightarrow \text{Gr}(r, V^*)$, соответствующей допустимому r -мерному подпространству $L \subset V^*$.

Опишем также вкратце процедуру построения многообразия Y по X . Точнее, зафиксируем данные (D.1) и (D.2), удовлетворяющие условиям (C.1)–(C.3). Как построить данные (D.3)–(D.5), чтобы условия (C.4)–(C.8) тоже были выполнены? Используемый подход сводится к следующему. Поскольку на Y должен быть морфизм $\phi_1: W \otimes F_1 \rightarrow F_2$, естественно строить Y как подсхему в многообразии модулей представлений колчана $Q = \bullet \xrightarrow{W} \bullet$. Из условия (C.6) следует, что вектор размерности (d_1, d_2) представлений обязан удовлетворять равенству

$$\theta(d_1, d_2) = d_2 \text{rank}(E_2) - d_1 \text{rank}(E_1) = 0. \quad (1.2)$$

Заметим, что этим условием вектор размерности определяется лишь с точностью до множителя. Пусть $\mathbf{R}_m$ – пространство представлений колчана Q , вектор размерности (d_1, d_2) которого удовлетворяет условию (1.2) и условию $\gcd(d_1, d_2) = m$, и пусть $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ – тавтологическое семейство представлений на нем. Из условия (C.6) следует, что необходимо рассмотреть следующий фактор (в смысле теории инвариантов)

$$\bar{Y}_m = \{(\rho, H) \in \mathbf{R}_m \times \mathbb{P}(V^*) \mid \text{supp Coker}(E_1 \otimes \mathcal{R}_{1\rho} \xrightarrow{e_\rho} E_2 \otimes \mathcal{R}_{2\rho}) = X \cap H\} //_\chi G,$$

где $G = \text{GL}(d_1) \times \text{GL}(d_2)/\mathbb{k}^*$ и $\chi(g_1, g_2) = \det(g_1)^{-\text{rank}(E_1)} \det(g_2)^{\text{rank}(E_2)}$ – характер группы G . Чтобы получить универсальное семейство представлений колчана на факторе $\bar{Y}_m$, необходимо рассмотреть пучок алгебр Адзумай на $\bar{Y}_m$. Далее, для того чтобы выполнялось условие (C.5), нам придется ограничиться стабильными представлениями колчана, т.е. вместо $\bar{Y}_m$ рассматривать $Y_m = g_m^{-1}(\mathbb{P}(V^*) \setminus \bar{Z}_m)$, где $g_m: \bar{Y}_m \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ – естественная проекция, а $\bar{Z}_m = \bigcup_{2k \leq m} g_k(\bar{Y}_k)$. Пользуясь несильными дополнительными предпо-

ложениями, можно показать, что многообразие Y_m удовлетворяет условиям (С.4)–(С.6). После этого остается выбрать m таким образом, чтобы выполнялось условие (С.7). Этот выбор, а также проверка условия (С.7) являются наиболее трудоемкой частью доказательства гомологической проективной двойственности многообразий X и Y и их приходится проводить в каждом из примеров по-своему.

§ 2. Предварительные сведения

Основная цель настоящего параграфа – разработать технику для рассмотрения производных категорий в относительной ситуации. Основными результатами являются теорема 2.46 о строгой замене базы и предложение 2.51 (относительная версия трюка Бриджлэнда). Поскольку далее эти результаты применяются к производным категориям пучков модулей над пучком алгебр Адзумаи, необходимо рассмотреть соответствующую категорию.

Мы определяем *многообразие Адзумаи* $(X, \mathcal{A}_X)$ как вкладываемое алгебраическое многообразие конечного типа X над полем, снабженное алгеброй Адзумаи $\mathcal{A}_X$ над X , т. е. пучком $\mathcal{O}_X$ -алгебр, локально матричным в этальной топологии [18] (в частности, пучок $\mathcal{A}_X$ – локально свободный $\mathcal{O}_X$ -модуль конечного ранга). Морфизм многообразий Адзумаи $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ состоит из морфизма $f_\circ: X \rightarrow Y$ подлежащих алгебраических многообразий и гомоморфизма $\mathcal{O}_X$ -алгебр $f_\Delta: f_\circ^* \mathcal{A}_Y \rightarrow \mathcal{A}_X$. Иначе говоря, мы рассматриваем многообразия Адзумаи как окольцованные пространства, рассматривая $\mathcal{A}_X$ как пучок колец. Многообразия Адзумаи образуют категорию, содержащую категорию обычных вкладываемых алгебраических многообразий как полную подкатеорию (вкладывающий функтор переводит X в $(X, \mathcal{O}_X)$).

Далее мы рассматриваем категорию многообразий Адзумаи. Для упрощения обозначений мы часто пишем X вместо $(X, \mathcal{A}_X)$, если ясно, какой пучок алгебр имеется в виду, либо если это не имеет значения. Необходимые сведения о многообразиях Адзумаи содержатся в § 10, где, в частности, определяются функторы f_* , f^* , $f^!$, $\otimes_{\mathcal{A}_X}$ и $R\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_X}$ и проверяются все обычные соотношения между ними. Здесь же мы напомним лишь то, что морфизм f называется *строгим*, если f_Δ – изоморфизм, и что для строгого морфизма f выполняются равенства $f^* = f_\circ^*$ и $f^! = f_\circ^!$.

Основное поле $\mathbb{k}$ предполагается алгебраически замкнутым характеристики нуля.

2.1. Ядерные функторы. Обозначим через $\mathcal{D}_{\mathrm{qc}}^b(X)$, $\mathcal{D}_{\mathrm{qc}}^-(X)$, $\mathcal{D}_{\mathrm{qc}}^+(X)$ и $\mathcal{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ соответственно ограниченную, ограниченную сверху, ограниченную снизу и неограниченную производные категории квазикогерентных пучков на многообразии Адзумаи X . Далее, $\mathcal{D}(X)$ – неограниченная производная категория квазикогерентных пучков на X с когерентными когомологиями. Аналогично определяются $\mathcal{D}^b(X)$, $\mathcal{D}^-(X)$ и $\mathcal{D}^+(X)$. Наконец, $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ – категория совершенных комплексов на X .

Всякий раз, когда необходимо отметить роль используемой алгебры Адзумаи на X или требуется явно ее указать, мы пользуемся обозначениями $\mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X)$ и т. д.

Для любого объекта $F \in \mathcal{D}(X)$ через $\mathcal{H}^p(F)$ обозначается p -й пучок когомологий F . Если $a \leq b$ – целые числа, то $\mathcal{D}^{[a,b]}(X)$ – полная подкатегория в $\mathcal{D}(X)$, состоящая из объектов F таких, что $\mathcal{H}^p(F) = 0$ при $p \notin [a, b]$. Аналогично определяются подкатегории $\mathcal{D}^{\geq a}(X)$ и $\mathcal{D}^{\leq a}(X)$. Если $f: X \rightarrow Y$ – морфизм, то f_* , f^* и $f^!$ – производный прямой образ, производный обратный образ и скрученный обратный образ соответственно. Аналогично, $\otimes_{\mathcal{A}_X}$ обозначает производное тензорное произведение, а $R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}$ – производный функтор от локального функтора $\mathcal{H}om$.

ЛЕММА 2.1. *Если $f: X \rightarrow Y$ – морфизм многообразий Адзумай, $F \in \mathcal{D}^-(X)$, $G \in \mathcal{D}^+(Y)$ и носитель $\text{supp}(F)$ проективен над Y , то*

$$f_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, f^! G) \cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(f_* F, G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Z теоретико-схемный носитель F , и пусть $i: Z \rightarrow X$ – соответствующее замкнутое вложение такое, что $F = i_* F'$, где $F' \in \mathcal{D}^-(Z)$. Тогда морфизмы i и $f \circ i: Z \rightarrow Y$ проективны. Пользуясь функториальностью скрученного обратного образа и обычной теоремой двойственности для морфизмов i и $f \circ i$ (см. [12] и лемму 10.34), мы получаем

$$\begin{aligned} f_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, f^! G) &= f_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(i_* F', f^! G) \cong f_* i_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_{X|Z}}(F', i^! f^! G) \\ &\cong (f \circ i)_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_{X|Z}}(F', (f \circ i)^! G) \\ &\cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}((f \circ i)_* F', G) \cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(f_* F, G). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть X_1, X_2 – многообразия Адзумай, и пусть $p_k: X_1 \times X_2 \rightarrow X_k$ – проекции. Рассмотрим произвольный объект $K \in \mathcal{D}_{\text{qc}}^-(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_{X_1}^{\text{opp}} \boxtimes \mathcal{A}_{X_2})$ и определим функторы

$$\Phi_K(F_1) := p_{2*}(p_{1*}^* F_1 \otimes_{\mathcal{A}_{X_1}} K), \quad \Phi_K^!(F_2) := p_{1*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_{X_2}}(K, p_{2*}^! F_2).$$

Таким образом, Φ_K – точный функтор $\mathcal{D}_{\text{qc}}^-(X_1) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{qc}}^-(X_2)$, а $\Phi_K^!$ – точный функтор $\mathcal{D}_{\text{qc}}^+(X_2) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{qc}}^+(X_1)$. Функтор Φ_K называется *ядерным функтором* с ядром K , а $\Phi_K^!$ – *ядерным функтором второго типа* с ядром K .

ЛЕММА 2.2. *Если X_1 гладко и $K \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(X_1 \times X_2)$, то функтор $\Phi_K^!$ изоморфен обычному ядерному функтору с ядром $R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_{X_2}}(K, \omega_{X_1} \boxtimes \mathcal{A}_{X_2})[\dim X_1]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из лемм 10.7, 10.22 и 10.23 (см. далее § 10).

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 2.3. *Всякий морфизм ядер $\phi: K \rightarrow K'$ индуцирует морфизмы ядерных функторов $\phi_*: \Phi_K \rightarrow \Phi_{K'}$, $\phi^!: \Phi_{K'}^! \rightarrow \Phi_K^!$. Если ϕ – изоморфизм, то ϕ_* и $\phi^!$ – изоморфизмы.*

ЛЕММА 2.4. (i) *Если K имеет когерентные когомологии, конечную Тогамплитуду над X_1 , а $\text{supp}(K)$ проективен над X_2 , то Φ_K переводит $\mathcal{D}^b(X_1)$ в $\mathcal{D}^b(X_2)$.*

- (ii) Если K имеет когерентные когомологии, конечную Ext-амплитуду над X_2 , а $\text{supp}(K)$ проективен над X_1 , то $\Phi_K^!$ переводит $\mathcal{D}^b(X_2)$ в $\mathcal{D}^b(X_1)$.
- (iii) Если условия (i) и (ii) выполнены, то функтор $\Phi_K^!$ сопряжен справа к Φ_K . Кроме того, Φ_K переводит $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X_1)$ в $\mathcal{D}^{\text{perf}}(X_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Если K имеет конечную Тог-амплитуду над X_1 , то объект $q_{1*}^* F_1 \otimes_{\mathcal{A}_{X_1}} K \cong q_1^* F_1 \otimes_{\mathcal{A}_{X_1} \otimes \mathcal{A}_{X_2}} K$ ограничен для всех $F_1 \in \mathcal{D}^b(X_1)$. Кроме того, его носитель проективен над X_2 . Поэтому $\Phi_K(F_1)$ ограничен и имеет когерентные когомологии.

(ii) Аналогично, если K имеет конечную Ext-амплитуду над X_2 , то объект $\text{RHom}_{\mathcal{A}_{X_2}}(K, q_{2*}^! F_2) \cong \text{RHom}_{\mathcal{A}_{X_1}^{\text{opp}} \otimes \mathcal{A}_{X_2}}(K, q_2^! F_2)$ ограничен для всех $F_2 \in \mathcal{D}^b(X_2)$. Кроме того, его носитель проективен над X_1 . Поэтому $\Phi_K^!(F_2)$ ограничен и имеет когерентные когомологии.

(iii) Пусть условия (i) и (ii) выполнены. Пользуясь леммой 2.1, получаем

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{A}_{X_1}}(F_1, \Phi_K^!(F_2)) &= \text{Hom}_{\mathcal{A}_{X_1}}(F_1, p_{1*} \text{RHom}_{\mathcal{A}_{X_2}}(K, p_{2*}^! F_2)) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{A}_{X_1}}(p_{1*}^* F_1, \text{RHom}_{\mathcal{A}_{X_2}}(K, p_{2*}^! F_2)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}_{X_2}}(p_{1*}^* F_1 \otimes_{\mathcal{A}_{X_1}} K, p_{2*}^! F_2) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{A}_{X_2}}(p_{2*}(p_{1*}^* F_1 \otimes_{\mathcal{A}_{X_1}} K), F_2) = \text{Hom}_{\mathcal{A}_{X_2}}(\Phi_K(F_1), F_2) \end{aligned}$$

для всех $F_1 \in \mathcal{D}^b(X_1)$, $F_2 \in \mathcal{D}^b(X_2)$. Далее, из рассуждений, приведенных в п. (ii), следует, что функтор $\Phi_K^!$ имеет ограниченную когомологическую амплитуду, поэтому из сопряженности функторов следует, что Φ_K переводит совершенные комплексы в комплексы конечной Ext-амплитуды, т. е. в совершенные комплексы (см. следствие 10.45).

ЛЕММА 2.5. Если K – совершенный комплекс, многообразие X_2 гладко, а $\text{supp}(K)$ проективен над X_1 и X_2 , то ядерный функтор $\Phi_{K\#}: \mathcal{D}^b(X_2) \rightarrow \mathcal{D}^b(X_1)$ с ядром

$$K^\# := \text{RHom}_{\mathcal{A}_{X_1}}(K, \mathcal{A}_{X_1} \boxtimes \omega_{X_2}[\dim X_2])$$

сопряжен слева к ядерному функтору $\Phi_K: \mathcal{D}^b(X_1) \rightarrow \mathcal{D}^b(X_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 2.4 и 2.2 следует, что правый сопряженный функтор к функтору $\Phi_{K\#}$ задается ядром $\text{RHom}_{\mathcal{A}_{X_1}}(K^\#, \mathcal{A}_{X_1} \boxtimes \omega_{X_2}[\dim X_2])$, что, очевидно, изоморфно K . Таким образом, Φ_K сопряжен справа к $\Phi_{K\#}$, т. е. $\Phi_{K\#}$ сопряжен слева к Φ_K .

Рассмотрим ядра $K_{12} \in \mathcal{D}^-(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_{X_1}^{\text{opp}} \boxtimes \mathcal{A}_{X_2})$, $K_{23} \in \mathcal{D}^-(X_2 \times X_3, \mathcal{A}_{X_2}^{\text{opp}} \boxtimes \mathcal{A}_{X_3})$. Обозначим через $p_{ij}: X_1 \times X_2 \times X_3 \rightarrow X_i \times X_j$ проекции. Свертка ядер определяется формулой

$$K_{23} \circ K_{12} := p_{13*}(p_{12*}^* K_{12} \otimes_{\mathcal{A}_{X_2}} p_{23*}^* K_{23}).$$

ЛЕММА 2.6. Если $K_{12} \in \mathcal{D}^-(X_1 \times X_2)$, $K_{23} \in \mathcal{D}^-(X_2 \times X_3)$, то:

- (i) $\Phi_{K_{23}} \circ \Phi_{K_{12}} = \Phi_{K_{23} \circ K_{12}}$;
- (ii) $\Phi_{K_{12}}^! \circ \Phi_{K_{23}}^! = \Phi_{K_{23} \circ K_{12}}^!$, если $\text{supp}(p_{12*}^* K_{12} \otimes_{\mathcal{A}_{X_2}} p_{23*}^* K_{23})$ проективен над $X_1 \times X_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение доказывается стандартно. Второе доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (\Phi_{K_{12}}^! \circ \Phi_{K_{23}}^!)(F_3) &= p_{1*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_{X_2}}(K_{12}, p_{2\circ}^! p_{2*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_{X_3}}(K_{23}, p_{3\circ}^! F_3)) \\
 &\cong p_{1*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_{X_2}}(K_{12}, p_{12*} p_{23\circ}^! R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_{X_3}}(K_{23}, p_{3\circ}^! F_3)) \\
 &\cong p_{1*} p_{12*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_{X_2}}(p_{12\circ}^* K_{12}, R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_{X_3}}(p_{23\circ}^* K_{23}, p_{23\circ}^! p_{3\circ}^! F_3)) \\
 &\cong p_{1*} p_{13*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_{X_3}}(p_{12\circ}^* K_{12} \otimes_{\mathcal{A}_{X_2}} p_{23\circ}^* K_{23}, p_{13\circ}^! p_{3\circ}^! F_3) \\
 &\cong p_{1*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_{X_3}}(p_{13*} (p_{12\circ}^* K_{12} \otimes_{\mathcal{A}_{X_2}} p_{23\circ}^* K_{23}), p_{3\circ}^! F_3) = \Phi_{K_{23} \circ K_{12}}^!(F_3).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Предположим, что $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ – точные функторы между триангулированными категориями, а $\alpha: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$, $\beta: \Phi_2 \rightarrow \Phi_3$, $\gamma: \Phi_3 \rightarrow \Phi_1[1]$ – морфизмы функторов. Назовем последовательность

$$\Phi_1 \xrightarrow{\alpha} \Phi_2 \xrightarrow{\beta} \Phi_3 \xrightarrow{\gamma} \Phi_1[1]$$

точным треугольником функторов, если для всякого объекта $F \in \mathcal{D}$ треугольник

$$\Phi_1(F) \xrightarrow{\alpha(F)} \Phi_2(F) \xrightarrow{\beta(F)} \Phi_3(F) \xrightarrow{\gamma(F)} \Phi_1(F)[1]$$

точен в $\mathcal{D}'$.

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 2.7. Если $K_1 \xrightarrow{\alpha} K_2 \xrightarrow{\beta} K_3 \xrightarrow{\gamma} K_1[1]$ – точный треугольник ядер в $\mathcal{D}^-(X \times Y)$, то возникают точные треугольники функторов

$$\begin{aligned}
 \Phi_{K_1} &\xrightarrow{\alpha_*} \Phi_{K_2} \xrightarrow{\beta_*} \Phi_{K_3} \xrightarrow{\gamma_*} \Phi_{K_1}[1], \\
 \Phi_{K_3}^! &\xrightarrow{\beta^!} \Phi_{K_2}^! \xrightarrow{\alpha^!} \Phi_{K_1}^! \xrightarrow{\gamma^!} \Phi_{K_3}^![1].
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.8. Пусть $\alpha: X \rightarrow Y$ – конечный морфизм.

а) Если $\mathcal{D}$ – триангулированная категория, а $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}(X)$ – функтор такой, что $\alpha_* \circ \Phi = 0$, то $\Phi = 0$.

б) Если X' – еще одно многообразие, $K, K' \in \mathcal{D}^-(X' \times X)$ – ядра, а $\phi: K \rightarrow K'$ – морфизм такой, что морфизм функторов $\alpha_* \circ \Phi_K \xrightarrow{\alpha_*(\phi_*)} \alpha_* \circ \Phi_{K'}$ является изоморфизмом, то $\phi_*: \Phi_K \rightarrow \Phi_{K'}$ – изоморфизм функторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Поскольку α – конечный морфизм, имеем $\mathcal{H}^i(\alpha_* G) \cong \alpha_* \mathcal{H}^i(G)$ для всех $G \in \mathcal{D}(X)$. Поэтому $\alpha_*(G) = 0$ влечет $\alpha_*(\mathcal{H}^i(G)) = 0$ для всех i , т. е. $G = 0$ в $\mathcal{D}(X)$. В частности, $\alpha_* \Phi(F) = 0$ влечет $\Phi(F) = 0$ для всех $F \in \mathcal{D}$.

б) Пусть K'' – конус морфизма $\phi: K \rightarrow K'$ в $\mathcal{D}^-(X' \times X)$. Получаем точный треугольник функторов $\Phi_K \rightarrow \Phi_{K'} \rightarrow \Phi_{K''}$, из которого следует, что $\alpha_* \circ \Phi_{K''} = 0$. Следовательно, $\Phi_{K''} = 0$ в силу п. а), значит, ϕ_* – изоморфизм.

2.2. Совершенные порождающие классы. Сформулируем следующие утверждения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Класс объектов $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X)$ называется *совершенным порождающим классом* для $(X, \mathcal{A}_X)$, если для любой точки $x \in X$ найдется объект $0 \neq F_x \in \mathcal{F}$ такой, что:

- 1) F_x – совершенный комплекс;
- 2) $\mathcal{H}^p(F_x)$ сосредоточены теоретико-множественно в точке x при всех p ;
- 3) если $p_0 = \max\{p \mid \mathcal{H}^p(F_x) \neq 0\}$, то $\mathcal{H}^{p_0}(F_x) \cong \mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_x$.

ЛЕММА 2.10. На всяком многообразии Адзумай существует совершенный порождающий класс.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем замкнутое вложение $i: X \rightarrow Y$ с гладким Y и рассмотрим класс, состоящий из объектов $F_x := \mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} i_* i^* \mathcal{O}_x$ для всех $x \in X$. Ясно, что $i_* \mathcal{O}_x$ – совершенный комплекс в силу гладкости Y , а обратный образ совершенного комплекса также является совершенным комплексом.

Следующие две леммы очевидны.

ЛЕММА 2.11. Если $\mathcal{F}$ – совершенный порождающий класс для X , а $\mathcal{G}$ – совершенный порождающий класс для Y , то $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}$ – совершенный порождающий класс для $X \times Y$.

ЛЕММА 2.12. Пусть $f: X \rightarrow S$ и $g: Y \rightarrow S$ – морфизмы алгебраических многообразий. Если $\mathcal{F}$ – совершенный порождающий класс для $\mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X)$, а $\mathcal{G}$ – совершенный порождающий класс для $\mathcal{D}(Y, \mathcal{O}_Y)$, то $p^* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_S Y}} q_*^* \mathcal{G}$ – совершенный порождающий класс для $\mathcal{D}(X \times_S Y, p_*^* \mathcal{A}_X)$, где $p: X \times_S Y \rightarrow X$ и $q: X \times_S Y \rightarrow Y$ – проекции.

ЛЕММА 2.13. Если $K \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{A}_X^{\text{opp}})$, $\mathcal{F}$ – совершенный порождающий класс для $(X, \mathcal{A}_X)$ и для всех $F \in \mathcal{F}$ выполняется $H^\bullet(X, F \otimes_{\mathcal{A}_X} K) = 0$, то $K = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $K \neq 0$, и пусть s – максимальное целое число такое, что $\mathcal{H}^s(K) \neq 0$. Выберем точку $x \in \text{supp } \mathcal{H}^s(K)$ и рассмотрим объект $F_x \in \mathcal{F}$, соответствующий этой точке. Пусть t – максимальное целое число такое, что $\mathcal{H}^t(F_x) \neq 0$. Ясно, что $\mathcal{H}^p(F_x \otimes_{\mathcal{A}_X} K)$ сосредоточен в точке x при всех p , $\mathcal{H}^{>s+t}(F_x \otimes_{\mathcal{A}_X} K) = 0$ и

$$\mathcal{H}^{s+t}(F_x \otimes_{\mathcal{A}_X} K) \cong \mathcal{H}^0((\mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_x) \otimes_{\mathcal{A}_X} \mathcal{H}^s(K)) \cong \mathcal{H}^0(\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}^s(K)) \neq 0.$$

Следовательно, спектральная последовательность

$$E_2^{p,q} = H^q(X, \mathcal{H}^p(F_x \otimes_{\mathcal{A}_X} K)) \Rightarrow H^{p+q}(X, F_x \otimes_{\mathcal{A}_X} K)$$

гиперкогомологий объекта $F_x \otimes_{\mathcal{A}_X} K$ вырождается во втором члене, и

$$H^{s+t}(X, F_x \otimes_{\mathcal{A}_X} K) = H^0(X, \mathcal{H}^{s+t}(F_x \otimes_{\mathcal{A}_X} K)) \neq 0,$$

что противоречит предположениям.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.14. Если $K \in \mathcal{D}^-(X \times Y, \mathcal{A}_X^{\text{opp}} \boxtimes \mathcal{A}_Y)$ и функтор $\Phi_K: \mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X) \rightarrow \mathcal{D}(Y, \mathcal{A}_Y)$ обращается в нуль на совершенном порождающем классе $\mathcal{F}$ для $(X, \mathcal{A}_X)$, то $K = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем совершенный порождающий класс $\mathcal{G}$ для $(Y, \mathcal{O}_Y)$. Для всех $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$ имеем

$$\begin{aligned} H^\bullet(X \times Y, (F \boxtimes G) \otimes_{\mathcal{A}_X} K) &\cong H^\bullet(Y, q_*((p^*F \otimes_{\mathcal{A}_X} K) \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} q^*G)) \\ &\cong H^\bullet(Y, \Phi_K(F) \otimes_{\mathcal{O}_Y} G) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}$ – совершенный порождающий класс для $(X \times Y, \mathcal{A}_X)$, то $K = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2.15. Если морфизм ядерных функторов $\Phi_K \rightarrow \Phi_{K'}$, $K, K' \in \mathcal{D}^-(X \times Y)$, индуцированный морфизмом ядер $\phi: K \rightarrow K'$, является изоморфизмом на совершенном порождающем классе $\mathcal{F}$ для X , то ϕ – изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K'' – конус морфизма $\phi: K \rightarrow K'$ в $\mathcal{D}^-(X \times Y)$. Получаем точный треугольник функторов $\Phi_K \rightarrow \Phi_{K'} \rightarrow \Phi_{K''}$, из которого следует, что $\Phi_{K''}$ обращается в нуль на совершенном порождающем классе $\mathcal{F}$. Следовательно, $K'' = 0$, и, значит, ϕ_* – изоморфизм.

2.3. Комплексы Кошуля. Пусть $(X, \mathcal{A}_X)$ – многообразие Адзумаи, $\mathcal{V}$ – векторное расслоение на подлежащем алгебраическом многообразии X , а $s \in \Gamma(X, \mathcal{V})$ – сечение (возможно, нерегулярное) расслоения $\mathcal{V}$. Обозначим через $\text{Kosz}_X(s)$ комплекс Кошуля сечения s , рассматриваемый как объект производной категории $\mathcal{D}^b(X, \mathcal{A}_X)$:

$$\text{Kosz}_X(s) := \{0 \rightarrow \Lambda^{\text{top}} \mathcal{V}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X \xrightarrow{s} \cdots \xrightarrow{s} \mathcal{V}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X \xrightarrow{s} \mathcal{A}_X \rightarrow 0\},$$

где $\mathcal{A}_X$ помещено в степень 0. Предположим, что X – коэн-макколеево многообразие. Напомним, что сечение s *регулярно*, если коразмерность схемы нулей $Z(s) \subset X$ сечения s равна рангу расслоения $\mathcal{V}$. Хорошо известно, что для регулярного сечения s выполняется $\text{Kosz}_X(s) \cong i_* \mathcal{A}_{Z(s)}$, где $i: Z(s) \rightarrow X$ – вложение, а $\mathcal{A}_{Z(s)} = \mathcal{A}_{X|Z(s)}$.

ЛЕММА 2.16. Предположим, что X – коэн-макколеево многообразие. Для всякого сечения $s \in \Gamma(X, \mathcal{V})$ имеем $\text{Kosz}_X(s) \in \mathcal{D}^{[\text{codim}_X Z(s) - \text{rank } \mathcal{V}, 0]}(X, \mathcal{A}_X)$. Более того, комплекс $\text{Kosz}_X(s)$ сосредоточен на инфинитезимальной окрестности схемы $Z(s) \subset X$, а $\mathcal{H}^0(\text{Kosz}_X(s)) \cong i_* \mathcal{A}_{Z(s)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение является локальным. В окрестности любой точки можно разложить расслоение в сумму $\mathcal{V} = \mathcal{V}' \oplus \mathcal{V}''$ так, что первая компонента сечения $s = (s', s'')$ регулярна и $\text{rank } \mathcal{V}' = \text{codim}_X Z(s)$. Обозначим через $i': Z(s') \rightarrow X$ вложение. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Kosz}_X(s) &\cong \text{Kosz}_X(s') \otimes_{\mathcal{A}_X} \text{Kosz}_X(s'') \\ &\cong i'_* \mathcal{A}_{Z(s')} \otimes_{\mathcal{A}_X} \text{Kosz}_X(s'') \cong i'_* \text{Kosz}_{Z(s')}(i'^* s''), \end{aligned}$$

и остается заметить, что $\text{Kosz}_{Z(s')}(i'^* s'') \in \mathcal{D}^{[-\text{rank } \mathcal{V}'', 0]}(Z(s'), \mathcal{A}_{Z(s')})$ по определению, в то время как $\text{rank } \mathcal{V}'' = \text{rank } \mathcal{V} - \text{rank } \mathcal{V}' = \text{rank } \mathcal{V} - \text{codim}_X Z(s)$.

Второе утверждение очевидно, так как $\text{Kosz}_X(s)$ ациклический вне $Z(s)$, а третье утверждение следует из определения пучка идеалов подсхемы $Z(s)$ как образа морфизма $\mathcal{V}^* \xrightarrow{s} \mathcal{O}_X$.

2.4. Точные декартовы квадраты. Пусть $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (S, \mathcal{A}_S)$ и $g: (Y, \mathcal{A}_Y) \rightarrow (S, \mathcal{A}_S)$ – морфизмы многообразий Адзумаи. Предположим, что либо f , либо g – строгий морфизм. В этом случае определено декартово произведение $(X \times_S Y, \mathcal{A}_{X \times_S Y})$ (см. далее лемму 10.37). Рассмотрим соответствующий декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{q} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array} \quad (2.1)$$

Обозначим через $\Gamma_f: X \rightarrow X \times S$ и $\Gamma^g: Y \rightarrow S \times Y$ графики морфизмов f и g соответственно, положим $K_f = \Gamma_{f*} \mathcal{A}_X$, $K^g = \Gamma_*^g \mathcal{A}_Y$, $K(f, g) = \mathcal{A}_{X \times_S Y}$ и рассмотрим соответствующие ядерные функторы. Следующие изоморфизмы функторов очевидны:

$$\begin{aligned} \Phi_{K_f} &\cong f_*: \mathcal{D}^-(X) \rightarrow \mathcal{D}^-(S), & \Phi_{K^g} &\cong g^*: \mathcal{D}^-(S) \rightarrow \mathcal{D}^-(Y), \\ \Phi_{K(f,g)} &\cong q_* p^*: \mathcal{D}^-(X) \rightarrow \mathcal{D}^-(Y). \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.17. *Имеем $K_f \circ K^g \in \mathcal{D}^{\leq 0}(X \times Y)$, причем $\mathcal{H}^0(K_f \circ K^g) \cong K(f, g)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $p_{XS}: X \times S \times Y \rightarrow X \times S$ и $p_{SY}: X \times S \times Y \rightarrow S \times Y$ проекции. Рассмотрим объект $K = p_{XS*} K_f \otimes_{\mathcal{A}_S} p_{SY*}^* K^g$. Поскольку обратный образ и тензорное произведение точны справа, имеем $K \in \mathcal{D}^{\leq 0}$. Далее, ясно, что когомологии K сосредоточены (теоретико-множественно) на расслоенном произведении $X \times_S Y = X \times_S S \times_S Y \subset X \times S \times Y$, причем $\mathcal{H}^0(K) \cong \mathcal{A}_{X \times_S Y}$. Поскольку проекция $p_{XY}: X \times S \times Y \rightarrow X \times Y$ при ограничении на инфинитезимальную окрестность $X \times_S Y$ в $X \times S \times Y$ является конечным морфизмом, получаем

$$K_f \circ K^g = p_{XY*} K \in \mathcal{D}^{\leq 0}, \quad \mathcal{H}^0(K_f \circ K^g) \cong p_{XY*} \mathcal{A}_{X \times_S Y} \cong K(f, g).$$

Лемма доказана.

Канонический морфизм ядер $K_f \circ K^g \rightarrow \mathcal{H}^0(K_f \circ K^g) \cong K(f, g)$ индуцирует морфизм функторов $g^* f_* \rightarrow q_* p^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.18. Декартов квадрат (2.1) называется *точным декартовым*, если канонический морфизм функторов $g^* f_* \rightarrow q_* p^*: \mathcal{D}^-(X) \rightarrow \mathcal{D}^-(Y)$ является изоморфизмом.

Условимся обозначать точные декартовы квадраты знаком $\boxed{\text{EC}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.19. *Декартов квадрат (2.1) точен, если и только если канонический морфизм ядер $K_f \circ K^g \rightarrow \mathcal{H}^0(K_f \circ K^g) \cong K(f, g)$ является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость вытекает из следствия 2.15, а достаточность – из леммы 2.3.

Более того, следствие 2.15 влечет

СЛЕДСТВИЕ 2.20. Если канонический морфизм функторов $g^*f_* \rightarrow q_*p^*$ является изоморфизмом на совершенном порождающем классе $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X)$, то декартов квадрат (2.1) точен.

Из предложения 2.19 также вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.21. Декартов квадрат (2.1) точен тогда и только тогда, когда транспонированный к нему декартов квадрат точен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что критерий предложения 2.19 симметричен.

ЛЕММА 2.22. Декартов квадрат (2.1) точен тогда и только тогда, когда подлежащий квадрат алгебраических многообразий точен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Расслоенное произведение многообразий Адзумаи определено, только если хотя бы один из морфизмов f и g является строгим. Поскольку свойство квадрата быть точным симметрично относительно транспонирования, можно считать, что морфизм g строгий. Тогда p тоже строгий и выполняются равенства $q_*p^* \cong q_*p^*_\circ$ и $g^*f_* \cong g^*_\circ f_*$. Остается заметить, что канонический морфизм функторов $g^*_\circ f_* \rightarrow q_*p^*_\circ$ получается из морфизма функторов $g^*f_* \rightarrow q_*p^*$ забыванием $\mathcal{A}_Y$ -модульной структуры.

СЛЕДСТВИЕ 2.23. Если один из морфизмов f или g плоский, то декартов квадрат (2.1) точен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку свойство квадрата быть точным симметрично относительно транспонирования, можно считать, что морфизм g плоский. Тогда подлежащий квадрат алгебраических многообразий точен в силу [12, гл. II, предложение 5.12].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.24. Если декартов квадрат (2.1) точный, то $f^!g_* \cong p_*q^!$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $f^! \cong \Phi_{K_f}^!$, $g_* \cong \Phi_{K_g}^!$, $p_*q^! \cong \Phi_{K(f,g)}^!$, и применим лемму 2.6, (ii).

ЛЕММА 2.25. Предположим, что правый квадрат в декартовой диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \xrightarrow{v''} & X' & \xrightarrow{v'} & X \\ f'' \downarrow & & f' \downarrow & \boxed{EC} & f \downarrow \\ S'' & \xrightarrow{u''} & S' & \xrightarrow{u'} & S \end{array}$$

точен, и либо f , либо оба морфизма u' и u'' строгие. Тогда объемлющий декартов квадрат точен, если и только если левый декартов квадрат точен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что объемлющий декартов квадрат точен и морфизм f строгий. Выберем совершенные порождающие классы $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}^{\text{perf}}(X, \mathcal{O}_X)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}^{\text{perf}}(S', \mathcal{A}_{S'})$. Тогда для всех $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$ выполнено

$$\begin{aligned} f''_*v''^*(v'_*F \otimes_{\mathcal{O}} f'^*G) &\cong f''_*(v''_*v'_*F \otimes_{\mathcal{O}} v''^*f'^*G) \\ &\cong f''_*((v'v'')^*F \otimes_{\mathcal{O}} f''^*u''^*G) \cong f''_*(v'v'')^*F \otimes_{\mathcal{O}} u''^*G \cong (u'u'')^*f_*F \otimes_{\mathcal{O}} u''^*G \\ &\cong u''^*(u'_*f_*F \otimes_{\mathcal{O}} G) \cong u''^*(f'_*v'_*F \otimes_{\mathcal{O}} G) \cong u''^*f'_*(v'_*F \otimes_{\mathcal{O}} f'^*G). \end{aligned}$$

Остается заметить, что объекты вида $v'^*F \otimes_{\mathcal{O}} f'^*G$ образуют совершенный порождающий класс в производной категории $X' = X \times_S S'$, и применить следствие 2.20.

Предположим, что объемлющий декартов квадрат точен и морфизмы u' и u'' строгие. Выберем совершенные порождающие классы $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}^{\text{perf}}(X, \mathcal{A}_X)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}^{\text{perf}}(S', \mathcal{O}_{S'})$. Тогда для всех $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$ выполнено

$$\begin{aligned} f''_* v''^* (v'^* F \otimes_{\mathcal{O}} f'^* G) &\cong f''_* (v''^* v'^* F \otimes_{\mathcal{O}} v''^* f'^* G) \\ &\cong f''_* ((v' v'')^* F \otimes_{\mathcal{O}} f''^* u''^* G) \cong f''_* (v' v'')^* F \otimes_{\mathcal{O}} u''^* G \cong (u' u'')^* f_* F \otimes_{\mathcal{O}} u''^* G \\ &\cong u''^* (u'^* f_* F \otimes_{\mathcal{O}} G) \cong u''^* (f'_* v'^* F \otimes_{\mathcal{O}} G) \cong u''^* f'_* (v'^* F \otimes_{\mathcal{O}} f'^* G). \end{aligned}$$

Остается заметить, что объекты вида $v'^*F \otimes_{\mathcal{O}} f'^*G$ образуют совершенный порождающий класс в производной категории $X' = X \times_S S'$, и применить следствие 2.20.

С другой стороны, если левый квадрат точен, то

$$f''_* (v' v'')^* F \cong f''_* v''^* (v'^* F) \cong u''^* (f'_* v'^* F) \cong u''^* u'^* f_* F \cong (u' u'')^* f_* F$$

для всех $F \in \mathcal{D}^b(X, \mathcal{A}_X)$, поэтому объемлющий квадрат тоже точен. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.26. *Если g – конечный морфизм, а каноническое отображение*

$$f^* g_* \mathcal{A}_Y \rightarrow p_* q^* \mathcal{A}_Y \cong p_* \mathcal{A}_{X \times_S Y}$$

является изоморфизмом, то декартов квадрат (2.1) точен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\begin{aligned} g_* g^* f_*(F) &\cong f_*(F) \otimes_{\mathcal{A}_S} g_* \mathcal{A}_Y \cong f_*(F \otimes_{\mathcal{A}_X} f^* g_* \mathcal{A}_Y) \\ &\cong f_*(F \otimes_{\mathcal{A}_X} p_* \mathcal{A}_{X \times_S Y}) \cong f_* p_* p^*(F) \cong g_* q_* p^*(F) \end{aligned}$$

и композиция всех изоморфизмов совпадает с морфизмом, получающимся применением функтора прямого образа g_* к каноническому морфизму $g^* f_* \rightarrow q_* p^*$. Поскольку последний морфизм индуцирован морфизмом ядер $K_f \circ K^g \rightarrow K(f, g)$, остается воспользоваться леммой 2.8, b).

СЛЕДСТВИЕ 2.27. *Предположим, что g – строгое замкнутое вложение, $Y \subset S$ – локально полное пересечение и S, X – коэн-макколеевы многообразия. Если $\text{codim}_X(X \times_S Y) = \text{codim}_S Y$, то декартов квадрат (2.1) точен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.26 достаточно проверить, что канонический морфизм $f^* g_* \mathcal{A}_Y \rightarrow p_* \mathcal{A}_{X \times_S Y}$ является изоморфизмом. Это утверждение локально по S , поэтому можно считать, что Y является схемой нулей регулярного сечения s векторного расслоения $\mathcal{V}$ на S ранга $\text{rank } \mathcal{V} = \text{codim}_S Y$. Тогда $g_* \mathcal{A}_Y \cong \text{Kosz}_S(s)$, значит,

$$f^* g_* \mathcal{A}_Y \cong f^* \text{Kosz}_S(s) \cong \text{Kosz}_X(f^* s).$$

Ясно, что схема нулей сечения $f^* s$ на X совпадает с расслоенным произведением $X \times_S Y$, но

$$\text{codim}_X(X \times_S Y) = \text{codim}_S Y = \text{rank } \mathcal{V} = \text{rank } f^* \mathcal{V},$$

следовательно, сечение f^*s регулярно, и существует изоморфизм $\text{Kosz}_X(f^*s) \cong p_*\mathcal{A}_{X \times_S Y}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.28. *Рассмотрим точный декартов квадрат (2.1). Пусть $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ – векторные расслоения на S , X и Y соответственно с сечениями $u \in \Gamma(S, \mathcal{U})$, $v \in \Gamma(X, \mathcal{V})$ и $w \in \Gamma(Y, \mathcal{W})$. Предположим, что сечения*

$$\begin{aligned} p^*f^*u + p^*v + q^*w &\in \Gamma(X \times_S Y, p^*f^*\mathcal{U} \oplus p^*\mathcal{V} \oplus q^*\mathcal{W}), & g^*u + w &\in \Gamma(Y, g^*\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}), \\ f^*u + v &\in \Gamma(X, f^*\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}), & u &\in \Gamma(S, \mathcal{U}) \end{aligned}$$

регулярны. Обозначим через $S_u \subset S$, $X_{u,v} \subset X$, $Y_{u,w} \subset Y$ и $Z_{u,v,w} \subset Z = X \times_S Y$ соответствующие схемы нулей. Тогда декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} Z_{u,v,w} & \longrightarrow & Y_{v,w} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{u,v} & \longrightarrow & S_u \end{array}$$

точен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & & Z_{u,v,w} & \longrightarrow & Y_w \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ Z_{u,v} & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_{u,v} & \longrightarrow & X & \longrightarrow & S \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & Z_{u,v,w} & \longrightarrow & Y_w \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ Z_{u,v} & \longrightarrow & Y & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ X_{u,v} & \longrightarrow & S & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} Z_{u,v,w} & \longrightarrow & Y_{u,w} & \longrightarrow & Y_w \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_{u,v} & \longrightarrow & S_u & \longrightarrow & S \end{array}$$

В первой диаграмме правый квадрат точен по предположению, а левый точен по следствию 2.27. Значит, объемлющий квадрат точен по лемме 2.25. Следовательно, нижний квадрат во второй диаграмме точен. С другой стороны, верхний квадрат этой диаграммы точен по следствию 2.27. Значит, объемлющий квадрат точен по лемме 2.25. Следовательно, объемлющий квадрат в третьей диаграмме точен. Наконец, правый квадрат этой диаграммы точен по следствию 2.27. Значит, левый квадрат этой диаграммы точен по лемме 2.25.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.29. Строгий морфизм $\phi: T \rightarrow S$ называется *строгой заменой базы* относительно морфизма $f: X \rightarrow S$, если декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X \times_S T & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{\phi} & S \end{array}$$

точен.

ЛЕММА 2.30. *Строгий и плоский морфизм является строгой заменой базы относительно любого морфизма.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из следствия 2.23.

СЛЕДСТВИЕ 2.31. Пусть $T \rightarrow S$ – строгая замена базы относительно морфизма $f: X \rightarrow S$. Если $T \rightarrow S' \rightarrow S$ – ее факторизация такая, что $T \rightarrow S'$ – строгий и конечный морфизм, а $S' \rightarrow S$ – строгий и гладкий морфизм, то замена базы $S' \rightarrow S$ строга относительно f , а $T \rightarrow S'$ строга относительно $f': X \times_S S' \rightarrow S'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гладкая замена базы строга по лемме 2.30, а строгость конечной замены базы следует из леммы 2.25.

ЛЕММА 2.32. Если декартов квадрат (2.1) точен, морфизм g имеет конечную Тог-размерность и строг, а f проективен, то существует канонический изоморфизм функторов

$$p^* f^! \cong q^! g^*: \mathcal{D}^+(S) \rightarrow \mathcal{D}^+(X \times_S Y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что

$$\mathrm{Hom}(p^* f^!(F), q^! g^*(F)) \cong \mathrm{Hom}(q_* p^* f^!(F), g^*(F)) \cong \mathrm{Hom}(g^* f_* f^!(F), g^*(F)),$$

следовательно, морфизм сопряжения $f_* f^! \rightarrow \mathrm{id}$ индуцирует морфизм функторов $p^* f^! \rightarrow q^! g^*$. Покажем, что он является изоморфизмом.

Представим f в виде композиции $X \xrightarrow{f_1} S' \xrightarrow{f_2} S$, где f_1 – конечный морфизм, а f_2 – строгий и гладкий. В силу леммы 2.25 достаточно разобрать два отдельных случая: случай гладкого и строгого морфизма f и случай конечного морфизма f .

Если морфизм f строгий и гладкий, то q также строгий и гладкий, значит,

$$\begin{aligned} f^!(F) &\cong f^* F \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X/S}[\dim X - \dim S], \\ q^!(F) &\cong q^* F \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_S Y}} \omega_{X \times_S Y/Y}[\dim X \times_S Y - \dim Y]. \end{aligned}$$

Остается заметить, что $\omega_{X \times_S Y/Y} \cong p_*^* \omega_{X/S}$ и $\dim X \times_S Y = \dim X + \dim Y - \dim S$, так как f гладкий, поэтому

$$\begin{aligned} p^*(f^! F) &\cong p^*(f^* F \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X/S}[\dim X - \dim S]) \\ &\cong p^* f^* F \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_S Y}} p_*^* \omega_{X/S}[\dim X - \dim S] \\ &\cong q^* g^* F \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_S Y}} \omega_{X \times_S Y/Y}[\dim X \times_S Y - \dim Y] \cong q^!(g^* F). \end{aligned}$$

Теперь предположим, что морфизм f конечный. Тогда q тоже конечный, значит, по лемме 10.26

$$\begin{aligned} q_* q^! g^*(F) &\cong R\mathcal{H}om(q_* \mathcal{A}_{X \times_S Y}, g^* F) \cong R\mathcal{H}om(q_* p^* \mathcal{A}_X, g^* F) \\ &\cong R\mathcal{H}om(g^* f_* \mathcal{A}_X, g^* F) \cong g^* R\mathcal{H}om(f_* \mathcal{A}_X, F) \\ &\cong g^* f_* f^!(F) \cong q_* p^* f^!(F), \end{aligned}$$

и остается применить лемму 2.8, b).

2.5. Полуортогональные разложения. Напомним основные определения и результаты, касающиеся полуортогональных разложений триангулированных категорий [2], [4].

Полуортогональным разложением триангулированной категории $\mathcal{T}$ называется последовательность полных триангулированных подкатегорий $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ в $\mathcal{T}$ такая, что $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j) = 0$ при $i > j$ (полуортогональность) и для всякого объекта $T \in \mathcal{T}$ существует последовательность точных треугольников $T_i \rightarrow T_{i-1} \rightarrow T_{\mathcal{A}_i}$, в которых $T_{\mathcal{A}_i} \in \mathcal{A}_i$, $T_0 = T$ и $T_n = 0$.

Полная триангулированная подкатегория $\mathcal{A}$ триангулированной категории $\mathcal{T}$ называется *допустимой справа*, если вкладывающий функтор $i: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{T}$ обладает правым сопряженным функтором $i^!: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$, и *допустимой слева*, если он обладает левым сопряженным функтором $i^*: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$. Подкатегория $\mathcal{A}$ называется *допустимой*, если она допустима как справа, так и слева.

Если $\mathcal{A}$ – полная подкатегория в триангулированной категории $\mathcal{T}$, то *правый ортогонал* к $\mathcal{A}$ в $\mathcal{T}$ (соответственно, *левый ортогонал* к $\mathcal{A}$ в $\mathcal{T}$) – это полная подкатегория $\mathcal{A}^\perp$ (соответственно, ${}^\perp\mathcal{A}$), состоящая из всех объектов $T \in \mathcal{T}$ таких, что $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A}, T) = 0$ (соответственно, $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \mathcal{A}) = 0$) для всех $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$.

Для всякой последовательности подкатегорий $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ в $\mathcal{T}$ обозначим через $\langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ наименьшую триангулированную подкатегорию в $\mathcal{T}$, содержащую $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$. Если $\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \rangle$ – полуортогональное разложение, то $\mathcal{A}_1$ допустима слева, $\mathcal{A}_2$ допустима справа и $\mathcal{A}_2 = {}^\perp\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2^\perp$. Обратно, если подкатегория $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ допустима слева (соответственно, справа), то $\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}, {}^\perp\mathcal{A} \rangle$ (соответственно, $\mathcal{T} = \langle {}^\perp\mathcal{A}, \mathcal{A} \rangle$) – полуортогональное разложение. Более общо, выполняется следующая

ЛЕММА 2.33 [2]. *Если $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ – полуортогональный набор в $\mathcal{T}$ такой, что $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ допустимы слева, а $\mathcal{A}_{k+1}, \dots, \mathcal{A}_n$ допустимы справа, то*

$$\langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k, {}^\perp\langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k \rangle \cap \langle \mathcal{A}_{k+1}, \dots, \mathcal{A}_n \rangle^\perp, \mathcal{A}_{k+1}, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$$

– полуортогональное разложение категории $\mathcal{T}$. В частности, полуортогональный набор допустимых подкатегорий $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ задает полуортогональное разложение категории $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство ${}^\perp\langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k \rangle \cap \langle \mathcal{A}_{k+1}, \dots, \mathcal{A}_n \rangle^\perp = 0$ для любого k .

Объект $E \in \mathcal{T}$ называется *исключительным*, если $\text{Hom}(E, E[t]) = 0$ при $t \neq 0$ и $\text{Hom}(E, E) = \mathbb{k}$. Триангулированная подкатегория $\langle E \rangle \subset \mathcal{T}$, порожденная исключительным объектом, допустима. Полуортогональный набор исключительных объектов называется *исключительным набором*.

2.6. Производные категории над базой. Рассмотрим два многообразия Адзумаи $(X, \mathcal{A}_X)$ и $(Y, \mathcal{A}_Y)$ над одним и тем же гладким алгебраическим многообразием S . Иначе говоря, рассмотрим два морфизма $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (S, \mathcal{O}_S)$ и $g: (Y, \mathcal{A}_Y) \rightarrow (S, \mathcal{O}_S)$.

Функтор $\Phi: \mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X) \rightarrow \mathcal{D}(Y, \mathcal{A}_Y)$ называется *S -линейным*, если для всех $F \in \mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X)$, $G \in \mathcal{D}^b(S, \mathcal{O}_S)$ заданы бифункториальные изоморфизмы

$$\Phi(f^*G \otimes_{\mathcal{O}_X} F) \cong g^*G \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Phi(F).$$

Заметим, что, так как S гладко, всякий объект $G \in \mathcal{D}^b(S, \mathcal{O}_S)$ является совершенным комплексом.

ЛЕММА 2.34. *Если функтор Φ S -линеен и обладает правым сопряженным функтором $\Phi^!$, то $\Phi^!$ также S -линеен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $F \in \mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X)$, $G \in \mathcal{D}(Y, \mathcal{A}_Y)$ и $H \in \mathcal{D}^b(S)$ выполнено

$$\begin{aligned} \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_X}(F, \Phi^!(g_*^* H \otimes_{\mathcal{O}_Y} G)) &\cong \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_Y}(\Phi(F), g_*^* H \otimes_{\mathcal{O}_Y} G) \\ &\cong \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_Y}(g_*^* H^* \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Phi(F), G) \cong \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_Y}(\Phi(f_*^* H^* \otimes_{\mathcal{O}_X} F), G) \\ &\cong \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_X}(f_*^* H^* \otimes_{\mathcal{O}_X} F, \Phi^!(G)) \cong \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_X}(F, f_*^* H \otimes_{\mathcal{O}_X} \Phi^!(G)). \end{aligned}$$

Поэтому в силу леммы Йонеды имеем

$$\Phi^!(g_*^* H \otimes_{\mathcal{O}_Y} G) \cong f_*^* H \otimes_{\mathcal{O}_X} \Phi^!(G).$$

Остается заметить, что этот изоморфизм очевидно бифункториален.

Рассмотрим расслоенное произведение алгебраических многообразий. Обозначим через $i: X \times_S Y \rightarrow X \times Y$ вложение, а через $p: X \times Y \rightarrow X$, $q: X \times Y \rightarrow Y$ – проекции, так что $f \circ p \circ i = g \circ q \circ i$.

ЛЕММА 2.35. *Если $K \in \mathcal{D}_{\mathrm{qc}}^-(X \times_S Y, \mathcal{A}_X^{\mathrm{opp}} \otimes \mathcal{A}_Y)$, то ядерные функторы $\Phi_{i_* K}$ и $\Phi_{i_* K}^!$ S -линейны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{i_* K}(f_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_X} F) &\cong q_*(p_*(f_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_X} F) \otimes_{\mathcal{A}_X} i_* K) \\ &\cong q_*(p_* f_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} p_*^* F \otimes_{\mathcal{A}_X} i_* K) \cong q_*(p_*^* F \otimes_{\mathcal{A}_X} i_*(i_*^* p_*^* f_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_S Y}} K)) \\ &\cong q_*(p_*^* F \otimes_{\mathcal{A}_X} i_*(i_*^* q_*^* g_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_S Y}} K)) \cong q_*(p_*^* F \otimes_{\mathcal{A}_X} q_*^* g_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} i_* K) \\ &\cong g_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_Y} q_*(p_*^* F \otimes_{\mathcal{A}_X} i_* K) \cong g_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Phi_{i_* K}(F). \end{aligned}$$

Для $\Phi_{i_* K}^!$ доказательство аналогично.

Строго полная подкатегория $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X)$ называется S -линейной, если для всех $F \in \mathcal{C}$ и всех $G \in \mathcal{D}^b(S, \mathcal{O}_S)$ имеем $f_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_X} F \in \mathcal{C}$.

ЛЕММА 2.36. *Если $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}^b(X, \mathcal{A}_X)$ – строго полная S -линейная допустимая слева (соответственно, справа) триангулированная подкатегория, то ее левый (соответственно, правый) ортогонал также S -линеен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, например, что $\mathcal{C}$ допустима слева. Рассмотрим произвольные $F \in \mathcal{C}$, $F' \in \mathcal{C}^\perp$. Тогда

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_X}(F, f_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_X} F') \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_X}(f_*^* G^* \otimes_{\mathcal{O}_X} F, F') = 0,$$

так как $f_*^* G^* \otimes_{\mathcal{O}_X} F \in \mathcal{C}$. Поэтому $f_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_X} F' \in \mathcal{C}^\perp$, т. е. подкатегория $\mathcal{C}^\perp$ S -линейна.

ЛЕММА 2.37. *Если $\mathcal{D}^b(X, \mathcal{A}_X) = \langle \mathcal{C}^\perp, \mathcal{C} \rangle$ – полуортогональное разложение, а подкатегория $\mathcal{C}$ S -линейна, то $f_* \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_X}(F, F') = 0$ для всех $F \in \mathcal{C}$, $F' \in \mathcal{C}^\perp$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $G \in \mathcal{D}^b(S, \mathcal{O}_S)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(G, f_* \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_X}(F, F')) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f_*^* G, \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_X}(F, F')) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_X}(f_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_X} F, F') = 0, \end{aligned}$$

так как $f_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_X} F \in \mathcal{C}$. Поэтому $f_* \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_X}(F, F') = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.38. Если функтор $\Phi: \mathcal{D}^b(X, \mathcal{A}_X) \rightarrow \mathcal{D}^b(Y, \mathcal{A}_Y)$ S -линеен, $\Phi^!: \mathcal{D}^b(Y, \mathcal{A}_Y) \rightarrow \mathcal{D}^b(X, \mathcal{A}_X)$ сопряжен к нему справа, f и g проективны, а X и Y гладкие, то существует бифункториальный изоморфизм

$$g_* \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_Y}(\Phi(F), F') \cong f_* \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_X}(F, \Phi^!(F')).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольный объект $G \in \mathcal{D}^b(S)$ и заметим, что

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(G, g_* \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_Y}(\Phi(F), F')) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(g_*^* G, \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_Y}(\Phi(F), F')) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_Y}\left(g_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Phi(F), F'\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_Y}\left(\Phi\left(f_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_X} F\right), F'\right) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_X}\left(f_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_X} F, \Phi^! F'\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f_*^* G, \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_X}(F, \Phi^! F')) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(G, f_* \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_X}(F, \Phi^! F')). \end{aligned}$$

С другой стороны, $g_* \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_Y}(\Phi(F), F') \in \mathcal{D}^b(S)$, а $f_* \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_X}(F, \Phi^! F') \in \mathcal{D}^b(S)$ по предположениям о многообразиях X, Y и изоморфизмах f, g . Поэтому, применяя лемму Йонеда, получаем искомый изоморфизм, причем бифункториальный в силу построения.

2.7. Строгая замена базы и ядерные функторы. Рассмотрим морфизмы $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (S, \mathcal{O}_S)$ и $g: (Y, \mathcal{A}_Y) \rightarrow (S, \mathcal{O}_S)$ с гладким S . Для всякого строгого морфизма $\phi: T \rightarrow S$ рассмотрим расслоенные произведения

$$X_T := X \times_S T, \quad Y_T := Y \times_S T, \quad X_T \times_T Y_T = (X \times_S Y) \times_S T$$

и обозначим проекции $X_T \rightarrow X$, $Y_T \rightarrow Y$ и $X_T \times_T Y_T \rightarrow X \times_S Y$ также через ϕ . Далее, обозначим вложения $X \times_S Y \rightarrow X \times Y$ и $X_T \times_T Y_T \rightarrow X_T \times Y_T$ через i и i_T соответственно. Для всякого ядра $K \in \mathcal{D}^-(X \times_S Y, \mathcal{A}_X^{\mathrm{opp}} \otimes \mathcal{A}_Y)$ обозначим

$$K_T = \phi^* K \in \mathcal{D}^-(X_T \times_T Y_T, \mathcal{A}_X^{\mathrm{opp}} \otimes \mathcal{A}_Y).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.39. Строгий морфизм $\phi: T \rightarrow S$ называется *строгой заменой базы* относительно пары (X, Y) , если ϕ является строгой заменой базы относительно морфизмов $f: X \rightarrow S$, $g: Y \rightarrow S$ и $f \times_S g: X \times_S Y \rightarrow S$.

ЛЕММА 2.40. Предположим, что $T \rightarrow S$ – строгая замена базы относительно пары (X, Y) . Если $T \rightarrow S' \rightarrow S$ – ее факторизация такая, что $T \rightarrow S'$ – строгий и конечный морфизм, а $S' \rightarrow S$ – строгий и гладкий морфизм, то замена базы $S' \rightarrow S$ строга относительно пары (X, Y) , а $T \rightarrow S'$ строга относительно пары $(X \times_S S', Y \times_S S')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из следствия 2.31.

ЛЕММА 2.41. Если $\phi: T \rightarrow S$ – строгая замена базы относительно пары (X, Y) , то оба квадрата в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} X_T & \xleftarrow{p_T} & X_T \times_T Y_T & \xrightarrow{q_T} & Y_T \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ X & \xleftarrow{p} & X \times_S Y & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

являются точными декартовыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 2.25, примененной к декартовым диаграммам

$$\begin{array}{ccccc} X_T \times_T Y_T & \xrightarrow{p_T} & X_T & \xrightarrow{f_T} & T \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ X \times_S Y & \xrightarrow{p} & X & \xrightarrow{f} & S \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccccc} X_T \times_T Y_T & \xrightarrow{q_T} & Y_T & \xrightarrow{g_T} & T \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ X \times_S Y & \xrightarrow{q} & Y & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

ЛЕММА 2.42. Если $\phi: T \rightarrow S$ – строгая замена базы относительно пары (X, Y) , а морфизм f проективен, то

$$\begin{aligned} \Phi_{i_{T*}K_T} \phi^* &= \phi^* \Phi_{i_*K}, & \Phi_{i_*K} \phi_* &= \phi_* \Phi_{i_{T*}K_T}, \\ \Phi_{i_{T*}K_T}^! \phi^* &= \phi^* \Phi_{i_*K}^!, & \Phi_{i_*K}^! \phi_* &= \phi_* \Phi_{i_{T*}K_T}^!. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для краткости $\Phi = \Phi_{i_*K}$, $\Phi^! = \Phi_{i_*K}^!$, $\Phi_T = \Phi_{i_{T*}K_T}$, $\Phi_T^! = \Phi_{i_{T*}K_T}^!$. Заметим, что ϕ – строгий морфизм, поэтому $\phi^* = \phi_o^*$. Для всех $F \in \mathcal{D}^-(X)$, $G \in \mathcal{D}^-(X_T)$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi_T \phi^*(F) &= q_{T*}(p_{T*} \phi^* F \otimes_{\mathcal{A}_X} K_T) \cong q_{T*}(\phi^* p_o^* F \otimes_{\mathcal{A}_X} \phi^* K) \\ &\cong q_{T*} \phi^*(p_o^* F \otimes_{\mathcal{A}_X} K) \cong \phi^* q_*(p_o^* F \otimes_{\mathcal{A}_X} K) = \phi^* \Phi(F), \\ \Phi \phi_*(G) &= q_*(p_o^* \phi_* G \otimes_{\mathcal{A}_X} K) \cong q_*(\phi_* p_{T*} G \otimes_{\mathcal{A}_X} K) \\ &\cong q_* \phi_*(p_{T*} G \otimes_{\mathcal{A}_X} \phi^* K) \cong \phi_* q_{T*}(p_{T*} G \otimes_{\mathcal{A}_X} K_T) = \phi_* \Phi_T(G). \end{aligned}$$

Заметим, что ϕ имеет конечную Тог-размерность, так как S гладкое, а q проективен в силу проективности f . Поэтому для всех $F \in \mathcal{D}^+(X)$, $G \in \mathcal{D}^+(X_T)$, пользуясь леммой 2.32, получаем

$$\begin{aligned} \Phi_T^! \phi^*(F) &= p_{T*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(K_T, q_{T*}^! \phi^* F) \cong p_{T*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(\phi^* K, \phi^* q_o^! F) \\ &\cong p_{T*} \phi^* R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(K, q_o^! F) \cong \phi^* p_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(K, q_o^! F) = \phi^* \Phi^!(F). \end{aligned}$$

Наконец, пользуясь предложением 2.24, получаем

$$\begin{aligned} \Phi^! \phi_*(G) &= p_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(K, q_o^! \phi_* G) \cong p_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(K, \phi_* q_{T*}^! F) \\ &\cong p_* \phi_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(\phi^* K, q_{T*}^! F) \cong \phi_* p_{T*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(K_T, q_{T*}^! F) = \phi_* \Phi_T^!(F). \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.43. *Предположим, что ϕ – строгая замена базы относительно пары (X, Y) и $K \in \mathcal{D}^b(X \times_S Y)$.*

(а) *Если K имеет конечную Тог-амплитуду над Y , то K_T имеет конечную Тог-амплитуду над Y_T .*

(б) *Если K имеет конечную Ext-амплитуду над X , то K_T имеет конечную Ext-амплитуду над X_T .*

(с) *Если $\text{supp } K$ проективен над X , то $\text{supp } K_T$ проективен над X_T .*

(d) *Если $\text{supp } K$ проективен над Y , то $\text{supp } K_T$ проективен над Y_T .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (а) и (б) вытекают из следствия 10.47, а утверждения (с) и (d) очевидны.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ и Y – гладкие многообразия Адзумаи, проективные над общим гладким алгебраическим многообразием S . Рассмотрим ядра $K_1 \in \mathcal{D}^-(X_1 \times_S Y, \mathcal{A}_{X_1}^{\text{opp}} \otimes \mathcal{A}_Y)$, ..., $K_n \in \mathcal{D}^-(X_n \times_S Y, \mathcal{A}_{X_n}^{\text{opp}} \otimes \mathcal{A}_Y)$ и обозначим через $\Phi_1: \mathcal{D}^b(X_1) \rightarrow \mathcal{D}^b(Y)$, ..., $\Phi_n: \mathcal{D}^b(X_n) \rightarrow \mathcal{D}^b(Y)$ соответствующие ядерные функторы. Пусть $\phi: T \rightarrow S$ – строгий морфизм. Мы будем использовать обозначения X_{kT} , Y_T , f_{kT} , g_T , Φ_{kT} , $\Phi_{kT}^!$ в очевидном смысле. Наконец, предположим, что ядра K_i имеют конечную Тог-амплитуду над Y , конечную Ext-амплитуду над X_i и что морфизмы g и f_i проективны для всех i . Тогда из лемм 2.43 и 2.4 следует, что все функторы сохраняют ограниченные производные категории и функторы $\Phi_i^!$, $\Phi_{iT}^!$ сопряжены справа к Φ_i , Φ_{iT} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.44. *Пусть X_1, X_2 и Y – гладкие многообразия Адзумаи, проективные над общим гладким алгебраическим многообразием S . Предположим, что замена базы $\phi: T \rightarrow S$ строга относительно пар (X_1, Y) , (X_2, Y) .*

(i) *Если подкатегория $\Phi_2(\mathcal{D}^b(X_2))$ ортогональна справа к подкатегории $\Phi_1(\mathcal{D}^b(X_1))$ в $\mathcal{D}^b(Y)$, то подкатегория $\Phi_{2T}(\mathcal{D}^b(X_{2T}))$ ортогональна справа к $\Phi_{1T}(\mathcal{D}^b(X_{1T}))$ в $\mathcal{D}^b(Y_T)$.*

(ii) *Если функтор Φ_1 строго полон, то функтор Φ_{1T} также строго полон.*

(iii) *Если функтор $\Phi_1^!$ строго полон, то функтор $\Phi_{1T}^!$ также строго полон.*

(iv) *Если функтор Φ_1 – эквивалентность, то функтор Φ_{1T} – также эквивалентность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что $\Phi_2(\mathcal{D}^b(X_2))$ ортогональна справа к $\Phi_1(\mathcal{D}^b(X_1))$ тогда и только тогда, когда $\Phi_1^! \Phi_2 = 0$, а $\Phi_{2T}(\mathcal{D}^b(X_{2T}))$ ортогональна справа к $\Phi_{1T}(\mathcal{D}^b(X_{1T}))$ тогда и только тогда, когда $\Phi_{1T}^! \Phi_{2T} = 0$. Поэтому для доказательства утверждения (i) необходимо проверить, что $\Phi_1^! \Phi_2 = 0$ влечет $\Phi_{1T}^! \Phi_{2T} = 0$.

Аналогично, Φ_1 строго полон тогда и только тогда, когда морфизм сопряжения $\text{id}_{\mathcal{D}^b(X_1)} \rightarrow \Phi_1^! \Phi_1$ является изоморфизмом, а Φ_{1T} строго полон тогда и только тогда, когда морфизм сопряжения $\text{id}_{\mathcal{D}^b(X_{1T})} \rightarrow \Phi_{1T}^! \Phi_{1T}$ является изоморфизмом. Поэтому для доказательства утверждения (ii) необходимо проверить, что $\text{id}_{\mathcal{D}^b(X_1)} \cong \Phi_1^! \Phi_1$ влечет $\text{id}_{\mathcal{D}^b(X_{1T})} \cong \Phi_{1T}^! \Phi_{1T}$.

В силу леммы 2.40 достаточно разобрать случаи гладкого ϕ и конечного ϕ .

Если ϕ – гладкий морфизм, то X_{1T} , X_{2T} и Y_T – гладкие многообразия, т. е. функторы $\Phi_1^!$ и $\Phi_{1T}^!$ являются обычными ядерными функторами по лемме 2.2. Более того, если $\mathcal{F}_1$ – совершенный порождающий класс для X_1 , $\mathcal{F}_2$ – совершенный порождающий класс для X_2 , а $\mathcal{G}$ – совершенный порождающий класс

для T , то $f_{2T}^* \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{2T}}} \mathcal{F}_2$ – совершенный порождающий класс для X_{2T} по лемме 2.12. Наконец, для всех $F \in \mathcal{F}_2$, $G \in \mathcal{G}$ по леммам 2.42 и 2.35 имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{1T}^! \circ \Phi_{2T}(f_{2T}^* G \otimes_{\mathcal{O}_{X_{2T}}} \phi^* F) &\cong \Phi_{1T}^!(g_{T \circ}^* G \otimes_{\mathcal{O}_{Y_T}} \Phi_{2T}(\phi^* F)) \\ &\cong f_{1T \circ}^* G \otimes_{\mathcal{O}_{X_{1T}}} \Phi_{1T}^!(\phi^* \Phi_2(F)) \cong f_{1T \circ}^* G \otimes_{\mathcal{O}_{X_{1T}}} \phi^* \Phi_1^!(\Phi_2(F)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что из равенства $\Phi_1^! \Phi_2 = 0$ вытекает обращение в нуль $\Phi_{1T}^! \Phi_{2T}$ на классе $f_{2T}^* \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{2T}}} \mathcal{F}_2$, следовательно, $\Phi_{1T}^! \Phi_{2T} = 0$ по предложению 2.14.

Аналогично, $f_{1T \circ}^* \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{1T}}} \mathcal{F}_1$ – совершенный порождающий класс для X_{1T} , и для всех $F \in \mathcal{F}_1$, $G \in \mathcal{G}$ по леммам 2.42 и 2.35 имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{1T}^! \circ \Phi_{1T}(f_{1T \circ}^* G \otimes_{\mathcal{O}_{X_{1T}}} \phi^* F) &\cong \Phi_{1T}^!(g_{T \circ}^* G \otimes_{\mathcal{O}_{Y_T}} \Phi_{1T}(\phi^* F)) \\ &\cong f_{1T \circ}^* G \otimes_{\mathcal{O}_{X_{1T}}} \Phi_{1T}^!(\phi^* \Phi_1(F)) \cong f_{1T \circ}^* G \otimes_{\mathcal{O}_{X_{1T}}} \phi^* \Phi_1^!(\Phi_1(F)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что из изоморфизма $\text{id}_{\mathcal{D}^b(X_1)} \cong \Phi_1^! \Phi_1$ вытекает изоморфизм $\Phi_{1T}^! \Phi_{1T} \cong \text{id}_{\mathcal{D}^b(X_{1T})}$ на классе $f_{1T \circ}^* \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{1T}}} \mathcal{F}_1$, значит, $\text{id}_{\mathcal{D}^b(X_{1T})} \cong \Phi_{1T}^! \Phi_{1T}$ по следствию 2.15.

Если морфизм ϕ конечен, то из леммы 2.42 следует, что

$$\phi_* \Phi_{1T}^! \Phi_{2T} \cong \Phi_1^! \phi_* \Phi_{2T} \cong \Phi_1^! \Phi_2 \phi_*, \quad \phi_* \Phi_{1T}^! \Phi_{1T} \cong \Phi_1^! \phi_* \Phi_{1T} \cong \Phi_1^! \Phi_1 \phi_*.$$

Мы видим, что из равенства $\Phi_1^! \Phi_2 = 0$ вытекает $\phi_* \Phi_{1T}^! \Phi_{2T} = 0$, следовательно, $\Phi_{1T}^! \Phi_{2T} = 0$ по лемме 2.8, а), и что изоморфизм $\text{id}_{\mathcal{D}^b(X_1)} \cong \Phi_1^! \Phi_1$ влечет изоморфизм $\phi_* \cong \phi_* \Phi_{1T}^! \Phi_{1T}$, следовательно, $\text{id}_{\mathcal{D}^b(X_{1T})} \cong \Phi_{1T}^! \Phi_{1T}$ по лемме 2.8, б).

Утверждение (iii) доказывается так же, как и утверждение (ii), с использованием того, что функтор $\Phi_1^!$ строго полон тогда и только тогда, когда $\Phi_1 \Phi_1^! \cong \text{id}_{\mathcal{D}^b(Y)}$, а функтор $\Phi_{1T}^!$ строго полон тогда и только тогда, когда $\Phi_{1T} \Phi_{1T}^! \cong \text{id}_{\mathcal{D}^b(Y_T)}$. Наконец, утверждение (iv) следует из утверждений (ii) и (iii).

СЛЕДСТВИЕ 2.45. В условиях предложения 2.44 если выполнено равенство $g_* \text{RHom}_{\mathcal{A}_Y}(E, \Phi_2(\mathcal{D}^b(X_2))) = 0$ для некоторого $E \in \mathcal{D}^b(Y)$, то

$$g_{T*} \text{RHom}_{\mathcal{A}_{Y_T}}(\phi^* E, \Phi_{2T}(\mathcal{D}^b(X_{2T}))) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $X_1 = S$, рассмотрим E как ядро на $X_1 \times_S Y = S \times_S Y \cong Y$, положим $\Phi_1 = \Phi_E$ и применим предложение 2.44, (i) и лемму 2.37.

ТЕОРЕМА 2.46. Пусть $X_1, \dots, X_n$ и Y – гладкие многообразия Адзумаи, проективные над общим гладким алгебраическим многообразием S . Предположим, что замена базы $\phi: T \rightarrow S$ строга относительно пар $(X_1, Y), \dots, (X_n, Y)$. Если

$$\mathcal{D}^b(Y) = \langle \Phi_1(\mathcal{D}^b(X_1)), \dots, \Phi_n(\mathcal{D}^b(X_n)) \rangle$$

– полуортгональное разложение, то

$$\mathcal{D}^b(Y_T) = \langle \Phi_{1T}(\mathcal{D}^b(X_{1T})), \dots, \Phi_{nT}(\mathcal{D}^b(X_{nT})) \rangle$$

– также полуортгональное разложение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2.44 достаточно проверить, что ортогонален к триангулированной подкатегории $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}^b(Y_T)$, порожденной подкатегориями $\Phi_{1T}(\mathcal{D}^b(X_{1T})), \dots, \Phi_{nT}(\mathcal{D}^b(X_{nT}))$, равен нулю. Выберем совершенный порождающий класс $\mathcal{F}$ для Y и совершенный порождающий класс $\mathcal{G}$ для T . Всякий объект $F \in \mathcal{F}$ можно разложить по исходному полуортогональному разложению. Пользуясь леммами 2.42 и 2.35, заключаем, что $g_{T \circ}^* G \otimes_{\mathcal{O}_{Y_T}} \phi^*(F)$ содержится в $\mathcal{D}'$ при всех $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$. Значит, $\mathcal{D}'$ содержит совершенный порождающий класс для Y_T , следовательно, $\mathcal{D}'^\perp = 0$ по лемме 2.13.

2.8. Относительный функтор Серра и трюк Бриджлэнда. Предположим, что X и Y – многообразия Адзумаи, X гладко, а $f: X \rightarrow S$, $g: Y \rightarrow S$ – проективные морфизмы на гладкое алгебраическое многообразие S . Если функтор $\Phi: \mathcal{D}^b(X) \rightarrow \mathcal{D}^b(Y)$ S -линеен, то для всех $F, F' \in \mathcal{D}^b(X)$, $G \in \mathcal{D}^b(S)$ имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(G, g_* R\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_Y}(\Phi F, \Phi F')) & \leftarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(G, f_* R\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_X}(F, F')) \\
 \parallel & & \parallel \\
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_Y}(g_{\circ}^* G \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Phi F, \Phi F') & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f_{\circ}^* G, R\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_X}(F, F')) \\
 \parallel & & \parallel \\
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_Y}(\Phi(f_{\circ}^* G \otimes_{\mathcal{O}_X} F), \Phi F') & \xleftarrow{\Phi_{f_{\circ}^* G \otimes_{\mathcal{O}_X} F, F'}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_X}(f_{\circ}^* G \otimes_{\mathcal{O}_X} F, F')
 \end{array}$$

где пунктирной стрелкой показан единственный морфизм, делающий диаграмму коммутативной. Заметим, что $f_* R\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_X}(F, F') \in \mathcal{D}^b(S)$, так как X гладкое, а морфизм f проективный, и что морфизм, представленный пунктирной стрелкой, очевидно, функториален по G . Поэтому из леммы Ионеды следует, что этот морфизм индуцирован каноническим морфизмом

$$\Phi_{F, F'}^S: f_* R\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_X}(F, F') \rightarrow g_* R\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_Y}(\Phi F, \Phi F').$$

ЛЕММА 2.47. *Морфизмы $\Phi_{F, F'}^S$ бифункториальны по F, F' .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться построением $\Phi_{F, F'}^S$ и функториальными свойствами приведенной выше коммутативной диаграммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.48 (ср. [3], [6]). Ковариантный аддитивный функтор $\mathcal{S}_{X/S}: \mathcal{D}^b(X) \rightarrow \mathcal{D}^b(X)$ называется *относительным функтором Серра*, если он является S -линейной эквивалентностью категорий и для всех объектов $F, F' \in \mathcal{D}^b(X)$ заданы бифункториальные изоморфизмы

$$\varphi_{F, F'}: f_* R\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_X}(F, F') \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}(f_* R\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_X}(F', \mathcal{S}_{X/S} F), \mathcal{O}_S).$$

Обозначим через $\omega_{X/S}$ относительное каноническое расслоение подлежащего алгебраического многообразия X над S .

ЛЕММА 2.49 (ср. [3]). *Если многообразие X проективно над S и гладко, то функтор, задаваемый формулой $\mathcal{S}_{X/S}(F) = \omega_{X/S}[\dim X - \dim S] \otimes_{\mathcal{O}_X} F$, является относительным функтором Серра и всякий относительный функтор Серра ему канонически изоморфен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь теоремой двойственности, получаем

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(f_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, F'), \mathcal{O}_S) &\cong \\ &\cong f_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, F'), f_*^!\mathcal{O}_S) \cong f_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F', f_*^!\mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_X} F). \end{aligned}$$

Однако $f_*^!\mathcal{O}_S \cong \omega_{X/S}[\dim X - \dim S]$. Кроме того, ясно, что $\mathcal{S}_{X/S}(F) = \omega_{X/S}[\dim X - \dim S] \otimes_{\mathcal{O}_X} F$ – S -линейная эквивалентность категорий. Дуализируя полученный изоморфизм, заключаем, что мы получили относительный функтор Серра. Второе утверждение доказывается так же, как и единственность обычного функтора Серра [3].

СЛЕДСТВИЕ 2.50. Если многообразие X гладко, $\Phi: \mathcal{D}^b(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^b(X)$ – S -линейная эквивалентность, а $\omega_{X/S} \cong f_*^!L$ для некоторого линейного расслоения L на S , то Y гладко, $\dim Y = \dim X$ и $\omega_{Y/S} \cong g_*^!L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если многообразие X гладко, то категория $\mathcal{D}^b(X)$ Ext-ограничена, поэтому категория $\mathcal{D}^b(Y)$ также Ext-ограничена, т. е. Y гладко (см. лемму 10.19). Далее, ясно, что функтор $\mathcal{S}_{Y/S} = \Phi^! \circ \mathcal{S}_{X/S} \circ \Phi$ является относительным функтором Серра на Y . Пусть $d = \dim X - \dim S$. Тогда получим

$$(\Phi^! \circ \mathcal{S}_{X/S} \circ \Phi)(F) = \Phi^!(f_*^!L[d] \otimes_{\mathcal{O}_X} \Phi(F)) \cong g_*^!L[d] \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Phi^!(\Phi(F)) \cong g_*^!L[d] \otimes_{\mathcal{O}_Y} F,$$

и остается воспользоваться единственностью относительного функтора Серра.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.51. Если X гладко и связно, $\omega_X \cong f_*^!L$ для некоторого линейного расслоения L на S , а Y непусто, то всякий строго полный S -линейный функтор $\Phi: \mathcal{D}^b(Y) \rightarrow \mathcal{D}^b(X)$ является эквивалентностью категорий. Более того, в этом случае Y гладко, связно, $\dim Y = \dim X$ и $\omega_Y \cong g_*^!L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функтор Φ задает эквивалентность категории $\mathcal{D}^b(Y)$ на некоторую строго полную допустимую справа S -линейную подкатегорию $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}^b(X)$. Рассмотрим полуортогональное разложение $(\mathcal{C}^\perp, \mathcal{C})$ категории $\mathcal{D}^b(X)$. Заметим, что относительный функтор Серра

$$\mathcal{S}_{X/S}(F) = f_*^!L \otimes_{\mathcal{O}_X} F[\dim X - \dim S]$$

сохраняет всякую S -линейную подкатегорию в $\mathcal{D}^b(X)$. Поэтому для всех $F \in \mathcal{C}$, $F' \in \mathcal{C}^\perp$ имеем

$$f_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F', F) \cong (f_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, \mathcal{S}_{X/S}F'))^* = 0,$$

откуда следует, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_X}(F', F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S, f_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F', F)) = 0$. Таким образом, подкатегории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}^\perp$ полностью ортогональны. Но категория $\mathcal{D}^b(X)$ неразложима в силу результатов работы [7], поэтому $\mathcal{C}^\perp = 0$, т. е. Φ – эквивалентность категорий. Остальные утверждения вытекают из следствия 2.50.

§ 3. Универсальное гиперплоское сечение

В настоящем параграфе проведем первую часть доказательства теоремы 1.2, как и было намечено во введении. Итак, пусть X – гладкое проективное многообразие, $f: X \rightarrow \mathbb{P}(V)$ – морфизм в проективное пространство, $\dim V = N$,

причем $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(-i) := f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-i)$, а (E_1, E_2) – пара исключительных расслоений на X такая, что набор $(E_1(1), E_2(1), \dots, E_1(i), E_2(i))$ является исключительным. Далее, пусть $(Y, \mathcal{A}_Y)$ – многообразие Адзумаи, $g: Y \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \setminus \mathbf{Z}$ – проективный морфизм в открытое подмножество двойственного проективного пространства, (F_1, F_2) – пара локально проективных пучков $\mathcal{A}_Y$ -модулей на Y , а $\phi: W = \text{Hom}(E_1, E_2)^* \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}_Y}(F_1, F_2)^*$ – линейное отображение. Предположим, что перечисленные данные удовлетворяют условиям (С.1)–(С.6), приведенным в § 1. Заметим также, что условие (С.8) не будет использовано в настоящем параграфе, а условие (С.7) будет явно сформулировано в основном результате параграфа – теореме 3.1.

Хотя многообразие Y , рассматриваемое в настоящем параграфе, вообще говоря, является многообразием Адзумаи, для облегчения обозначений мы не будем явно указывать алгебру Адзумаи (в этом параграфе) и будем рассматривать Y как обычное алгебраическое многообразие. Внимательный читатель без труда восстановит опущенные детали и проверит, что в § 2 и § 10 содержится проверка всех используемых фактов для многообразий Адзумаи.

3.1. Обозначения. Пусть $\mathbf{P} = \mathbb{P}(V^*) \setminus \mathbf{Z}$. Обозначим через $\mathcal{L}$ ограничение на $\mathbf{P}$ пучка $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-1)$. Напомним, что условие (С.6) влечет следующую точную последовательность на $X \times Y$:

$$0 \rightarrow E_1 \boxtimes F_1 \xrightarrow{e} E_2 \boxtimes F_2 \rightarrow i_* \mathcal{E} \rightarrow 0, \quad (3.1)$$

где $\mathcal{E}$ – когерентный пучок на $Q(X, Y) = (X \times Y) \times_{\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)} Q$, $Q \subset \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$ – квадрака инцидентности, а $i: Q(X, Y) \rightarrow X \times Y$ – вложение.

Рассмотрим произведение $\mathcal{X} = X \times \mathbf{P}$. Пусть $\mathcal{X}_1 \subset X \times \mathbf{P}$ – *универсальное гиперплоское сечение* X , т. е. схема нулей канонического сечения линейного расслоения $\mathcal{O}_X(1) \boxtimes \mathcal{L}^*$. Пусть $\alpha: \mathcal{X}_1 \rightarrow X \times \mathbf{P}$ – вложение. Имеем следующую резольвенту:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_{X \times \mathbf{P}} \rightarrow \alpha_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}_1} \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Обозначим через β вложение Y в $\mathbf{P} \times Y$, заданное графиком морфизма g . Ниже будет показано, что композиция

$$Q(X, Y) \xrightarrow{i} X \times Y \xrightarrow{\text{id}_X \times \beta} X \times \mathbf{P} \times Y$$

пропускается через $\mathcal{X}_1 \times Y$. Обозначим через $j: Q(X, Y) \rightarrow \mathcal{X}_1 \times Y$ соответствующее замкнутое вложение, так что $(\text{id}_X \times \beta) \circ i = (\alpha \times \text{id}_Y) \circ j$ и имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Q(X, Y) & \xrightarrow{i} & X \times Y \\ \downarrow j & & \downarrow \beta \\ \mathcal{X}_1 \times Y & \xrightarrow{\alpha} & X \times \mathbf{P} \times Y \end{array} \quad (3.3)$$

(мы пишем α вместо $\alpha \times \text{id}_Y$ и β вместо $\text{id}_X \times \beta$ для краткости). Далее, рассмотрим объект $\mathcal{E}^* = R\text{Hom}_{Q(X, Y)}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{Q(X, Y)}) \in \mathcal{D}(Q(X, Y))$ и обозначим

$$\mathcal{E}_1 = j_* \mathcal{E}, \quad \mathcal{E}^{\#t} = \mathcal{E}^*(1 + t - i, 1), \quad \mathcal{E}_1^{\#t} = j_* \mathcal{E}^{\#t} \otimes \mathcal{L}^{*\otimes t}[\dim X - 1], \quad (3.4)$$

где через $\mathcal{O}(a, b)$ обозначено $\mathcal{O}_X(a) \otimes \mathcal{O}_Y(b)$. Пусть

$$B := \dim X + \dim \mathbf{P} - \operatorname{codim}_{Y \times_Y} (Y \times_{\mathbf{P}} Y). \quad (3.5)$$

Заметим, что условие (C.7) эквивалентно равенству $B = 2i - 1$.

Сформулируем основной результат настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если данные $(X, f, E_1, E_2, Y, g, F_1, F_2, \phi)$ удовлетворяют условиям (C.1)–(C.6), то $B \geq 2i - 1$. Если же $B = 2i - 1$, то функтор $\Phi_{\mathcal{E}_1}: \mathcal{D}^b(Y) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1)$ строго полон. Более того, в этом случае многообразие Y гладко.*

Доказательство теоремы 3.1 проведем следующим образом. Прежде всего заметим, что функтор $\Phi_{\mathcal{E}_1^{\#0}}$ сопряжен слева к $\Phi_{\mathcal{E}_1}$, поэтому утверждение теоремы 3.1 сводится к вычислению свертки $\mathcal{E}_1 \circ \mathcal{E}_1^{\#0}$. Однако прямое вычисление провести трудно (грубо говоря, для этого требуется вычислить $R\mathcal{H}om$ между пучками на особом дивизоре, пользуясь резольвентами этих пучков на объемлющем многообразии). Поэтому мы используем следующие рассуждения. Рассмотрим свертки $\mathcal{E}_1 \circ \mathcal{E}_1^{\#t}$ при всех $t \in \mathbb{Z}$. Кроме того, рассмотрим объекты $\tilde{\mathcal{E}} = i^* i_* \mathcal{E} \in \mathcal{D}(Q(X, Y))$, $\tilde{\mathcal{E}}_1 = j_* \tilde{\mathcal{E}} \in \mathcal{D}(\mathcal{X}_1 \times Y)$ и свертки $\tilde{\mathcal{E}}_1 \circ \mathcal{E}_1^{\#t}$. Поскольку i – дивизориальное вложение $(Q(X, Y) - \text{дивизор бистепени } (1, 1))$, существует точный треугольник функторов $i^* i_* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}(-1, -1)[2]$, который дает точный треугольник свертков $\tilde{\mathcal{E}}_1 \circ \mathcal{E}_1^{\#t} \rightarrow \mathcal{E}_1 \circ \mathcal{E}_1^{\#t} \rightarrow \mathcal{E}_1 \circ \mathcal{E}_1^{\#(t-1)}[2]$. Оказывается, первый член легко явно вычислить при $0 \leq t \leq i$. Пользуясь этими вычислениями и равномерной (по t) когомологической ограниченностью свертки $\mathcal{E}_1 \circ \mathcal{E}_1^{\#t}$, удастся доказать теорему.

Далее приведем подробное доказательство.

3.2. Предварительные результаты. Сформулируем следующие леммы.

ЛЕММА 3.2. *Универсальное гиперплоское сечение $\mathcal{X}_1$ является гладким многообразием, проективным над $\mathbf{P}$ относительной размерности $\dim X - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что проекция $\mathcal{X}_1 \rightarrow X$ является гладким морфизмом (более того, этот морфизм – проективизация векторного расслоения), поэтому $\mathcal{X}_1$ гладко. С другой стороны, слои $\mathcal{X}_1$ над $\mathbf{P}$ – это гиперплоские сечения X , поэтому все они имеют размерность $\dim X - 1$ по условию (C.1) и проективны, поскольку проективно X .

ЛЕММА 3.3. *Имеем $\mathcal{X}_1 \times_{\mathbf{P}} Y \cong Q(X, Y)$. Обозначим через j индуцированное вложение $Q(X, Y) \rightarrow \mathcal{X}_1 \times Y$. Тогда $(\operatorname{id}_X \times \beta) \circ j = (\alpha \times \operatorname{id}_Y) \circ i$, т. е. квадрат (3.3) коммутативен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\mathcal{X}_1 \times_{\mathbf{P}} Y$ совпадает со схемой нулей канонического сечения линейного расслоения $\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{L}^*$ на $\mathcal{X} \times_{\mathbf{P}} Y = (X \times \mathbf{P}) \times_{\mathbf{P}} Y = X \times Y$. С другой стороны, на $\mathcal{X} \times_{\mathbf{P}} Y$ имеем $\mathcal{L}^* \cong \mathcal{O}_Y(1)$, поэтому $\mathcal{X}_1 \times_{\mathbf{P}} Y$ является схемой нулей сечения расслоения $\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{O}_Y(1)$ и, значит, совпадает с $Q(X, Y)$. Остается заметить, что каноническое вложение $(X \times \mathbf{P}) \times_{\mathbf{P}} Y \rightarrow X \times \mathbf{P} \times Y$ совпадает с $\operatorname{id}_X \times \beta$, в то время как вложение $\mathcal{X}_1 \times Y \rightarrow X \times \mathbf{P} \times Y$ совпадает с $\alpha \times \operatorname{id}_Y$.

ЛЕММА 3.4. *Объект $\mathcal{E}^* = R\mathcal{H}om_{Q(X,Y)}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{Q(X,Y)}) \in \mathcal{D}(Q(X,Y))$ является когерентным пучком, и на $X \times Y$ существует точная последовательность*

$$0 \rightarrow E_2^*(-1) \boxtimes F_2^*(-1) \xrightarrow{e^*} E_1^*(-1) \boxtimes F_1^*(-1) \rightarrow i_*\mathcal{E}^* \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя функтор $R\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_{X \times Y}(-1, -1))$ к точной последовательности (3.1), получаем треугольник

$$E_2^*(-1) \boxtimes F_2^*(-1) \xrightarrow{e^*} E_1^*(-1) \boxtimes F_1^*(-1) \rightarrow R\mathcal{H}om(i_*\mathcal{E}, \mathcal{O}_{X \times Y}(-1, -1))[1]$$

на $X \times Y$. Поскольку e – изоморфизм в общей точке $X \times Y$, получаем, что e^* – вложение, поэтому третий член треугольника является пучком. С другой стороны, i – дивизориальное вложение, поэтому $\mathcal{O}_{Q(X,Y)} = i^*\mathcal{O}_{X \times Y} = i^!\mathcal{O}_{X \times Y}(-1, -1)[1]$, и по теореме двойственности получаем

$$\begin{aligned} i_*R\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{Q(X,Y)}) &= i_*R\mathcal{H}om(\mathcal{E}, i^!\mathcal{O}_{X \times Y}(-1, -1))[1] \\ &= R\mathcal{H}om(i_*\mathcal{E}, \mathcal{O}_{X \times Y}(-1, -1))[1]. \end{aligned}$$

Так как функтор i_* точен, отсюда следует, что $\mathcal{E}^* = R\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{Q(X,Y)})$ – когерентный пучок на $Q(X, Y)$, а последовательность (3.6) точна.

ЛЕММА 3.5. *Пучок $\mathcal{E}_1$ является совершенным комплексом на $\mathcal{X}_1 \times Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что пучок $\mathcal{E}_1 = j_*\mathcal{E}$ на $\mathcal{X}_1 \times Y$ имеет конечную Тог-амплитуду над Y . Действительно, рассмотрим коммутативный квадрат (3.3). Обозначая обратные образы на $\mathcal{X}_1 \times Y$, $X \times \mathbf{P} \times Y$ и $X \times Y$ объектов $\mathcal{F}$ на Y тем же символом и пользуясь формулой проекции, получаем

$$\alpha_*(j_*\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) = \alpha_*j_*\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} = \beta_*i_*\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} = \beta_*(i_*\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}).$$

Поскольку α_* и β_* точны, заключаем, что Тог-амплитуда $j_*\mathcal{E}$ над Y равна Тог-амплитуде $i_*\mathcal{E}$ над Y , которая конечна, так как $i_*\mathcal{E}$ обладает конечной локально свободной резольвентой (3.1). Однако $\mathcal{X}_1 \times Y$ гладко над Y по лемме 3.2, поэтому остается воспользоваться леммой 10.43.

ЛЕММА 3.6. *Функтор $\Phi_{\mathcal{E}_1^{\#0}}$ сопряжен слева к функтору $\Phi_{\mathcal{E}_1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\mathcal{E}_1$ – совершенный комплекс по лемме 3.5, а его носитель $Q(X, Y) \cong \mathcal{X}_1 \times_{\mathbf{P}} Y$ проективен над $\mathcal{X}_1$ по условию (C.4) и над Y по лемме 3.2. Следовательно, в силу леммы 2.5 достаточно показать, что $\mathcal{E}_1^{\#0} \cong R\mathcal{H}om(\mathcal{E}_1, \omega_{\mathcal{X}_1}[\dim \mathcal{X}_1])$. Пусть q_1 и q – проекции $\mathcal{X}_1 \times Y \rightarrow Y$ и $X \times Y \rightarrow Y$ соответственно. Ясно, что $q \circ i = q_1 \circ j$. Пользуясь теоремой двойственности и функториальностью скрученного обратного образа, получаем

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om(\mathcal{E}_1, \omega_{\mathcal{X}_1}[\dim \mathcal{X}_1]) &\cong R\mathcal{H}om(j_*\mathcal{E}, q_1^!\mathcal{O}_Y) \cong j_*R\mathcal{H}om(\mathcal{E}, j^!q_1^!\mathcal{O}_Y) \\ &\cong j_*R\mathcal{H}om(\mathcal{E}, i^!q^!\mathcal{O}_Y) \cong j_*R\mathcal{H}om(\mathcal{E}, i^!\omega_X[\dim X]) \\ &\cong j_*R\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \omega_X(1, 1)[\dim X - 1]) \cong j_*\mathcal{E}^*(1 - i, 1)[\dim X - 1], \end{aligned}$$

так как $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(-i)$ по условию (C.2).

Подкручивая точную последовательность (3.6) на $\mathcal{O}(1 + t - i, 1)$ и учитывая обозначения (3.4), получаем точный треугольник

$$E_2^*(t - i) \boxtimes F_2^* \xrightarrow{e^*} E_1^*(t - i) \boxtimes F_1^* \rightarrow i_* \mathcal{E}^{\#t}. \quad (3.7)$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} Y \times \mathcal{X}_1 & \xleftarrow{p_{12}} & Y \times \mathcal{X}_1 \times Y & \xrightarrow{p_{23}} & \mathcal{X}_1 \times Y \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ Y \times (X \times \mathbf{P}) & \xleftarrow{p_{12}} & Y \times (X \times \mathbf{P}) \times Y & \xrightarrow{p_{23}} & (X \times \mathbf{P}) \times Y \\ & & \downarrow q & & \\ & & Y \times \mathbf{P} \times Y & & \\ & & \downarrow \pi & & \\ & & Y \times Y & & \end{array} \quad (3.8)$$

где π – проекция вдоль $\mathbf{P}$. Рассмотрим следующие объекты в $\mathcal{D}(Y \times \mathbf{P} \times Y)$:

$$\mathcal{C}_t = q_* \alpha_* (p_{12}^* \mathcal{E}_1^{\#t} \otimes p_{23}^* \mathcal{E}_1), \quad \tilde{\mathcal{C}}_t = q_* (\alpha_* p_{12}^* \mathcal{E}_1^{\#t} \otimes \alpha_* p_{23}^* \mathcal{E}_1). \quad (3.9)$$

ЛЕММА 3.7. *Имеем изоморфизм $\mathcal{E}_1 \circ \mathcal{E}_1^{\#t} \cong \pi_* \mathcal{C}_t \in \mathcal{D}(Y \times Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться определением свертки и заметить, что $p_{13} = \pi \circ q \circ \alpha$.

ЛЕММА 3.8. *Существует число $M \in \mathbb{Z}$ такое, что $\mathcal{C}_t \in \mathcal{D}^{[-M, 0]}(Y \times \mathbf{P} \times Y)$ при всех $t \in \mathbb{Z}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{E}_1$ – совершенный комплекс по лемме 3.5, заключаем, что $p_{23}^* \mathcal{E}_1$ – также совершенный комплекс. Следовательно, тензорное произведение $p_{12}^* \mathcal{E}_1^{\#t} \otimes p_{23}^* \mathcal{E}_1$ кохомологически ограничено. Более того, поскольку $\mathcal{E}_1^{\#t} \cong \mathcal{E}_1^{\#0} \otimes (\mathcal{L}^{*\otimes t} \otimes \mathcal{O}_X(t))$, левая кохомологическая граница не зависит от t . Таким образом, существует число $M \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$p_{12}^* \mathcal{E}_1^{\#t} \otimes p_{23}^* \mathcal{E}_1 \in \mathcal{D}^{\geq -M}(Y \times \mathcal{X}_1 \times Y).$$

С другой стороны, $p_{12}^* \mathcal{E}_1^{\#t} \in \mathcal{D}^{1 - \dim X}(Y \times \mathcal{X}_1 \times Y)$ в силу (3.4) и леммы 3.4, а $p_{23}^* \mathcal{E}_1 \in \mathcal{D}^0(Y \times \mathcal{X}_1 \times Y)$ в силу (3.4). Поэтому

$$p_{12}^* \mathcal{E}_1^{\#t} \otimes p_{23}^* \mathcal{E}_1 \in \mathcal{D}^{[-M, 1 - \dim X]}(Y \times \mathcal{X}_1 \times Y).$$

Так как $q \circ \alpha$ проективен и имеет относительную размерность $\dim X - 1$ по лемме 3.2, то лемма доказана.

ЛЕММА 3.9. *В категории $\mathcal{D}^b(Y \times \mathbf{P} \times Y)$ существует точный треугольник*

$$\tilde{\mathcal{C}}_t \rightarrow \mathcal{C}_t \rightarrow \mathcal{C}_{t-1}[2]. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\alpha: \mathcal{X}_1 \rightarrow X \times \mathbf{P}$ – дивизориальное вложение ($\mathcal{X}_1$ – схема нулей сечения линейного расслоения $\mathcal{O}_X(1) \boxtimes \mathcal{L}^*$), для всякого объекта $\mathcal{F}$ на $Y \times \mathcal{X}_1 \times Y$ существует точный треугольник

$$\alpha^* \alpha_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes (\mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \mathcal{L})[2].$$

Подставляя $\mathcal{F} = p_{23}^* \mathcal{E}_1$, тензорно умножая на $p_{12}^* \mathcal{E}_1^{\#t}$, применяя $q_* \alpha_*$ и пользуясь формулой проекции

$$\alpha_* (p_{12}^* \mathcal{E}_1^{\#t} \otimes \alpha^* \alpha_* p_{23}^* \mathcal{E}_1) \cong \alpha_* p_{12}^* \mathcal{E}_1^{\#t} \otimes \alpha_* p_{23}^* \mathcal{E}_1$$

и определением $\mathcal{C}_t$ и $\tilde{\mathcal{C}}_t$ (3.9), получаем искомый треугольник.

Обозначим через $\beta': Y \rightarrow Y \times \mathbf{P}$ композицию отображения β с транспозицией $\mathbf{P} \times Y \rightarrow Y \times \mathbf{P}$. Рассмотрим отображения $\text{id}_Y \times \beta, \beta' \times \text{id}_Y: Y \times Y \rightarrow Y \times \mathbf{P} \times Y$ и обозначим их через β и β' для краткости. Пусть

$$\mathfrak{D} := \beta'_* \mathcal{O}_{Y \times Y} \otimes \beta_* \mathcal{O}_{Y \times Y} \in \mathcal{D}(Y \times \mathbf{P} \times Y). \quad (3.11)$$

ЛЕММА 3.10. *Имеем $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}^{[\text{codim } Y \times \mathbf{P} Y - \dim \mathbf{P}, 0]}(Y \times \mathbf{P} \times Y)$. Более того, $\mathfrak{D}$ сосредоточен на инфинитезимальной окрестности подсхемы $Y \times_{\mathbf{P}} Y \subset Y \times \mathbf{P} \times Y$ и $\mathcal{H}^0(\mathfrak{D}) \cong \mathcal{O}_{Y \times_{\mathbf{P}} Y}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} Y \times_{\mathbf{P}} Y & \longrightarrow & Y \times Y & \xrightarrow{g_2} & Y \times \mathbf{P} \\ \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow \text{id}_Y \times \Delta_{\mathbf{P}} \\ Y \times Y & \xrightarrow{\beta'} & Y \times \mathbf{P} \times Y & \xrightarrow{g_3} & Y \times \mathbf{P} \times \mathbf{P} \end{array}$$

где $g_2 = \text{id}_Y \times g$, $g_3 = \text{id}_Y \times \text{id}_{\mathbf{P}} \times g$ и $\Delta_{\mathbf{P}}$ – диагональное вложение $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \mathbf{P}$. Оба квадрата декартовы. Более того, так как $\mathbf{P}$ гладко, правая вертикальная стрелка является вложением, образ которого есть локально полное пересечение. Поскольку

$$\text{codim}_{Y \times \mathbf{P} \times Y}(Y \times Y) = \text{codim}_{Y \times \mathbf{P} \times \mathbf{P}}(Y \times \mathbf{P}) = \dim \mathbf{P},$$

то правый декартов квадрат точен по следствию 2.27. Далее, локально по $Y \times \mathbf{P} \times \mathbf{P}$ мы можем отождествить подсхему $Y \times \mathbf{P}$ со схемой нулей регулярного сечения s некоторого векторного расслоения на $Y \times \mathbf{P} \times \mathbf{P}$ ранга, равного $\dim \mathbf{P}$. Значит, имеем локальные изоморфизмы $(\text{id}_Y \times \Delta_{\mathbf{P}})_* \mathcal{O}_{Y \times \mathbf{P}} \cong \text{Kosz}_{Y \times \mathbf{P} \times \mathbf{P}}(s)$. Следовательно,

$$\beta_* \mathcal{O}_{Y \times Y} \cong \beta_* g_2^* \mathcal{O}_{Y \times \mathbf{P}} \cong g_3^* (\text{id}_Y \times \Delta_{\mathbf{P}})_* \mathcal{O}_{Y \times \mathbf{P}} \cong g_3^* \text{Kosz}_{Y \times \mathbf{P} \times \mathbf{P}}(s),$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \beta'_* \mathcal{O}_{Y \times Y} \otimes \beta_* \mathcal{O}_{Y \times Y} \cong \beta'_* \beta'^* \beta_* \mathcal{O}_{Y \times Y} \\ &\cong \beta'_* \beta'^* g_3^* \text{Kosz}_{Y \times \mathbf{P} \times \mathbf{P}}(s) \cong \beta'_* \text{Kosz}_{Y \times Y}(\beta'^* g_3^* s). \end{aligned}$$

Остается заметить, что схема нулей сечения $\beta'^* g_3^* s$ на $Y \times Y$ совпадает с $Y \times_{\mathbf{P}} Y$, и воспользоваться леммой 2.16.

Рассмотрим на $Y \times Y$ объекты $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{D}(Y \times Y)$, определяемые из следующих точных треугольников:

$$\begin{aligned} W \otimes F_2^* \boxtimes F_1 &\xrightarrow{\text{ad}(\phi)} F_2^* \boxtimes F_2 \oplus F_1^* \boxtimes F_1 \longrightarrow \mathcal{S}, \\ F_2^* \boxtimes F_2 \oplus F_1^* \boxtimes F_1 &\xrightarrow{\text{ad}(\phi)} W^* \otimes F_1^* \boxtimes F_2 \longrightarrow \mathcal{T}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

ЛЕММА 3.11. *Имеем $\tilde{\mathcal{C}}_t \in \mathcal{D}^{[-1-B, 1]}(Y \times \mathbf{P} \times Y)$ при всех $t \in \mathbb{Z}$, где B – число, определенное в (3.5). Более того,*

$$\tilde{\mathcal{C}}_t = \begin{cases} \pi^* \mathcal{S} \otimes \mathcal{D} & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } 1 \leq t \leq i-1, \\ \pi^* \mathcal{T} \otimes \mathcal{L}^{*\otimes i} \otimes \mathcal{D}[\dim X - 1] & \text{при } t = i. \end{cases}$$

В частности, $\tilde{\mathcal{C}}_i \in \mathcal{D}^{[-B, 1-\dim X]}(Y \times \mathbf{P} \times Y)$, и $\mathcal{H}^0(\tilde{\mathcal{C}}_0) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & Y \times \mathcal{X}_1 & \xleftarrow{p_{12}} & Y \times \mathcal{X}_1 \times Y & \xrightarrow{p_{23}} & \mathcal{X}_1 \times Y \\ & \nearrow j & \downarrow \alpha & \boxed{\text{EC}} & \downarrow \alpha & \boxed{\text{EC}} & \downarrow \alpha & \nwarrow j \\ Q(X, Y) & & Y \times (X \times \mathbf{P}) & \xleftarrow{p_{12}} & Y \times (X \times \mathbf{P}) \times Y & \xrightarrow{p_{23}} & (X \times \mathbf{P}) \times Y & & Q(X, Y) \\ \downarrow i & \nearrow \beta' & \downarrow \alpha & \boxed{\text{EC}} & \downarrow q & \nwarrow \beta & \downarrow i & & \downarrow i \\ Y \times X & \xleftarrow{p_{12}} & Y \times X \times Y & & Y \times \mathbf{P} \times Y & & Y \times X \times Y & \xrightarrow{p_{23}} & X \times Y \\ & & & & \downarrow \pi & & & & \\ & & & & Y \times Y & & & & \end{array} \quad (3.13)$$

Заметим, что квадраты, помеченные знаком $\boxed{\text{EC}}$, являются точными декартовыми в силу следствия 2.27. Поэтому имеем

$$\alpha_* p_{23}^* \mathcal{E}_1 \cong p_{23}^* \alpha_* \mathcal{E}_1 = p_{23}^* \alpha_* j_* \mathcal{E} \cong p_{23}^* \beta_* i_* \mathcal{E} \cong \beta_* p_{23}^* i_* \mathcal{E}$$

и, аналогично, $\alpha_* p_{12}^* \mathcal{E}_1^{\#t} \cong \beta'_* p_{12}^* i_* \mathcal{E}^{\#t} \otimes \mathcal{L}^{*\otimes t}[\dim X - 1]$. Значит,

$$\tilde{\mathcal{C}}_t \cong q_*(\beta'_* p_{12}^* i_* \mathcal{E}^{\#t} \otimes \mathcal{L}^{*\otimes t}[\dim X - 1] \otimes \beta_* p_{23}^* i_* \mathcal{E}).$$

Применяя функтор $\beta_* p_{23}^*$ к (3.1) и функтор $\beta'_* p_{12}^*$ к (3.7), получаем точные треугольники

$$\begin{aligned} \beta_*(\mathcal{O} \boxtimes E_1 \boxtimes F_1) &\xrightarrow{e} \beta_*(\mathcal{O} \boxtimes E_2 \boxtimes F_2) \rightarrow \beta_* p_{23}^* i_* \mathcal{E}, \\ \beta'_*(F_2^* \boxtimes E_2^*(t-i) \boxtimes \mathcal{O}) &\xrightarrow{e^*} \beta'_*(F_1^* \boxtimes E_1^*(t-i) \boxtimes \mathcal{O}) \rightarrow \beta'_* p_{12}^* i_* \mathcal{E}^{\#t}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Итак, получаем резольвенту

$$\{\tilde{\mathcal{C}}_t^{2,1} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_t^{1,1} \oplus \tilde{\mathcal{C}}_t^{2,2} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_t^{1,2}\} \cong \tilde{\mathcal{C}}_t, \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{C}}_t^{k,l} &:= q_*(\beta'_*(F_k^* \boxtimes E_k^*(t-i) \boxtimes \mathcal{O}) \otimes \mathcal{L}^{*\otimes t}[\dim X - 1] \otimes \beta_*(\mathcal{O} \boxtimes E_l \boxtimes F_l)) \\ &\cong q_*((F_k^* \boxtimes (E_k^*(t-i) \otimes E_l) \boxtimes \mathcal{L}^{*\otimes t} \boxtimes F_l) \\ &\quad \otimes \beta'_*\mathcal{O}_{Y \times X \times Y} \otimes \beta_*\mathcal{O}_{Y \times X \times Y})[\dim X - 1]\end{aligned}$$

для $k, l = 1, 2$ (точнее, следовало бы рассмотреть три точных треугольника, получающиеся тензорным умножением первого из треугольников (3.14) на члены второго треугольника). Для вычисления объектов $\tilde{\mathcal{C}}_t^{k,l}$ заметим, что квадраты диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} Y \times X \times Y & \xrightarrow{\beta'} & Y \times (X \times \mathbf{P}) \times Y & \xleftarrow{\beta} & Y \times X \times Y \\ \downarrow q & & \downarrow q & & \downarrow q \\ Y \times Y & \xrightarrow{\beta'} & Y \times \mathbf{P} \times Y & \xleftarrow{\beta} & Y \times Y \end{array}$$

являются точными декартовыми в силу следствия 2.23, значит,

$$\begin{aligned}\beta'_*\mathcal{O}_{Y \times X \times Y} \otimes \beta_*\mathcal{O}_{Y \times X \times Y} &\cong \beta'_*q^*\mathcal{O}_{Y \times Y} \otimes \beta_*q^*\mathcal{O}_{Y \times Y} \\ &\cong q^*\beta'_*\mathcal{O}_{Y \times Y} \otimes q^*\beta_*\mathcal{O}_{Y \times Y} \cong q^*\mathfrak{D}.\end{aligned}$$

Подставляя это в формулу для $\tilde{\mathcal{C}}_t^{k,l}$, получаем

$$\tilde{\mathcal{C}}_t^{k,l} \cong (F_k^* \boxtimes (H^\bullet(X, E_k^*(t-i) \otimes E_l) \otimes \mathcal{L}^{*\otimes t}) \boxtimes F_l) \otimes \mathfrak{D}[\dim X - 1].$$

Поскольку $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}^{[\text{codim}_{Y \times Y} Y \times_{\mathbf{P}} Y - \dim \mathbf{P}, 0]}(Y \times \mathbf{P} \times Y)$ по лемме 3.10, $H^\bullet(X, E_k^*(t-i) \otimes E_l) \in \mathcal{D}^{[0, \dim X]}(\mathcal{A}b)$ и $(\text{codim}_{Y \times Y} Y \times_{\mathbf{P}} Y - \dim \mathbf{P}) - (\dim X - 1) = 1 - B$, то по (3.5) заключаем, что $\tilde{\mathcal{C}}_t^{k,l} \in \mathcal{D}^{[1-B, 1]}(Y \times \mathbf{P} \times Y)$ при всех $t \in \mathbb{Z}$, $k, l = 1, 2$. Пользуясь резольвентой (3.15), мы видим, что $\tilde{\mathcal{C}}_t \in \mathcal{D}^{[-1-B, 1]}(Y \times \mathbf{P} \times Y)$ при всех $t \in \mathbb{Z}$. Более того, при $1 \leq t \leq i-1$ имеем

$$H^\bullet(X, E_k^*(t-i) \otimes E_l) \cong \text{Hom}^\bullet(E_k, E_l(t-i)) = 0,$$

поэтому $\tilde{\mathcal{C}}_t^{k,l} = 0$ при $k, l = 1, 2$, следовательно, $\tilde{\mathcal{C}}_t = 0$ при $1 \leq t \leq i-1$.

Наконец, при $t = 0$ имеем

$$\begin{aligned}H^\bullet(X, E_k^*(t-i) \otimes E_l) &\cong \text{Hom}^\bullet(E_k, E_l(-i)) \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{k}[-\dim X] & \text{при } k = l, \\ W[-\dim X] & \text{при } l = 1, \quad k = 2, \\ 0 & \text{при } l = 2, \quad k = 1, \end{cases}\end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{C}}_0^{2,1} &= \pi^*(W \otimes F_2^* \boxtimes F_1) \otimes \mathfrak{D}[-1], & \tilde{\mathcal{C}}_0^{1,1} &= \pi^*(F_1^* \boxtimes F_1) \otimes \mathfrak{D}[-1], \\ \tilde{\mathcal{C}}_0^{2,2} &= \pi^*(F_2^* \boxtimes F_2) \otimes \mathfrak{D}[-1],\end{aligned}$$

и резольвента (3.15) дает точный треугольник

$$\pi^*(W \otimes F_2^* \boxtimes F_1) \otimes \mathfrak{D} \rightarrow \pi^*(F_2^* \boxtimes F_2 \oplus F_1^* \boxtimes F_1) \otimes \mathfrak{D} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_0,$$

из которого следует, что $\tilde{\mathcal{C}}_0 \cong \pi^* \mathcal{S} \otimes \mathfrak{D}$. Заметим также, что $\mathcal{H}^0(\mathcal{S}) = \text{Coker ad}(\phi) \cong \Delta_{Y*} \mathcal{O}_Y$ по условию (C.5), а $\mathcal{H}^0(\mathfrak{D}) \cong \mathcal{O}_{Y \times_{\mathbf{P}} Y}$ по лемме 3.10, т. е. $\mathcal{H}^0(\tilde{\mathcal{C}}_0) \neq 0$.

Аналогично, при $t = i$ имеем

$$H^\bullet(X, E_k^*(t - i) \otimes E_l) \cong \text{Hom}^\bullet(E_k, E_l) \cong \begin{cases} \mathbb{k} & \text{при } k = l, \\ W^* & \text{при } l = 2, \quad k = 1, \\ 0 & \text{при } l = 1, \quad k = 2, \end{cases}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}_i^{1,1} &= \pi^*(F_1^* \boxtimes F_1) \otimes \mathcal{L}^{*\otimes i} \otimes \mathfrak{D}[\dim X - 1], \\ \tilde{\mathcal{C}}_i^{2,2} &= \pi^*(F_2^* \boxtimes F_2) \otimes \mathcal{L}^{*\otimes i} \otimes \mathfrak{D}[\dim X - 1], \\ \tilde{\mathcal{C}}_i^{1,2} &= \pi^*(W \otimes F_1^* \boxtimes F_2) \otimes \mathcal{L}^{*\otimes i} \otimes \mathfrak{D}[\dim X - 1], \end{aligned}$$

и резольвента (3.15) дает точный треугольник

$$\begin{aligned} &\pi^*(F_2^* \boxtimes F_2 \oplus F_1^* \boxtimes F_1) \otimes \mathcal{L}^{*\otimes i} \otimes \mathfrak{D}[\dim X - 1] \\ &\xrightarrow{(e^*, e)} \pi^*(W^* \otimes F_1^* \boxtimes F_2) \otimes \mathcal{L}^{*\otimes i} \otimes \mathfrak{D}[\dim X - 1] \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_i, \end{aligned}$$

из которого следует, что $\tilde{\mathcal{C}}_i \cong \pi^* \mathcal{T} \otimes \mathcal{L}^{*\otimes i} \otimes \mathfrak{D}[\dim X - 1]$. В частности, $\tilde{\mathcal{C}}_i \in \mathcal{D}^{[-B, 1 - \dim X]}(Y \times \mathbf{P} \times Y)$, так как $\tilde{\mathcal{C}}_i^{2,1} = 0$.

3.3. Доказательство теоремы 3.1. Для доказательства теоремы 3.1 предварительно приведем следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.12. *Выполнено неравенство $B \geq 2i - 1$. Более того, если $B = 2i - 1$, то*

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1[-2] = \cdots = \mathcal{C}_{i-1}[2 - 2i] \cong \mathcal{H}^0(\tilde{\mathcal{C}}_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что для всех $t \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\mathcal{C}_t \in \mathcal{D}^{[-B, 0]}(Y \times \mathbf{P} \times Y). \quad (3.16)$$

Действительно, из треугольника (3.10) и леммы 3.11 следует, что для всех $l \leq -1 - B$ существует точная последовательность

$$0 = \mathcal{H}^{l-2}(\tilde{\mathcal{C}}_t) \rightarrow \mathcal{H}^{l-2}(\mathcal{C}_t) \rightarrow \mathcal{H}^{l-2}(\mathcal{C}_{t-1}[2]) \rightarrow \mathcal{H}^{l-1}(\tilde{\mathcal{C}}_t) = 0.$$

Следовательно, $\mathcal{H}^l(\mathcal{C}_{t-1}) = \mathcal{H}^{l-2}(\mathcal{C}_{t-1}[2]) \cong \mathcal{H}^{l-2}(\mathcal{C}_t)$. Таким образом, если $\mathcal{H}^l(\mathcal{C}_t) \neq 0$ при $l \leq -1 - B$, то $\mathcal{H}^{l-2s}(\mathcal{C}_{t+s}) \neq 0$ при всех s , что противоречит утверждению леммы 3.8.

Далее, пользуясь треугольником (3.10) и леммой 3.11 при $t = i - 1, \dots, 1$, заключаем, что

$$\mathcal{C}_{i-1} = \mathcal{C}_{i-2}[2] = \cdots = \mathcal{C}_0[2i - 2].$$

Следовательно, $\mathcal{C}_{i-1}[2] = \mathcal{C}_0[2i]$, и, значит,

$$\mathcal{C}_{i-1}[2] \in \mathcal{D}^{\leq -2i} \quad (3.17)$$

по лемме 3.8. Пользуясь треугольником (3.10) при $t = i$: $\{\tilde{\mathcal{C}}_i \rightarrow \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}_{i-1}[2]\}$, и учитывая, что $\tilde{\mathcal{C}}_i \in \mathcal{D}^{\geq -B}$ в силу леммы 3.11 и $\mathcal{C}_i \in \mathcal{D}^{\geq -B}$ в силу (3.16), заключаем, что

$$\mathcal{C}_{i-1}[2] \in \mathcal{D}^{\geq -1-B}. \quad (3.18)$$

Теперь если $B < 2i - 1$, то $-2i < -1 - B$. Сравнивая (3.17) с (3.18), получаем $\mathcal{C}_{i-1} = 0$. Значит, также $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{i-1}[2 - 2i] = 0$. Однако из треугольника (3.10) при $t = 0$: $\{\tilde{\mathcal{C}}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_{-1}[2]\}$, следовало бы, что $\mathcal{C}_{-1} = \tilde{\mathcal{C}}_0[-1]$, т. е. $\mathcal{H}^1(\mathcal{C}_{-1}) = \mathcal{H}^0(\tilde{\mathcal{C}}_0) \neq 0$ по лемме 3.11, что противоречит лемме 3.8. Значит, $B \geq 2i - 1$.

Если $B = 2i - 1$, то $-2i = -1 - B$. Сравнивая (3.17) с (3.18), заключаем, что $\mathcal{C}_{i-1}[2] \in \mathcal{D}^{-2i}$. Значит, $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{i-1}[2 - 2i] \in \mathcal{D}^0$. Поскольку в силу леммы 3.8 имеем $\mathcal{C}_{-1}[2] \in \mathcal{D}^{\leq -2}$, из треугольника (3.10) при $t = 0$ следует, что $\mathcal{C}_0 = \mathcal{H}^0(\tilde{\mathcal{C}}_0)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.13. Если $B = 2i - 1$, то

$$\pi_* \mathcal{C}_0 = \pi_* \mathcal{C}_1[-2] = \cdots = \pi_* \mathcal{C}_{i-1}[2 - 2i] \cong \Delta_{Y*} \mathcal{O}_Y.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\pi_* \tilde{\mathcal{C}}_0 \cong \pi_*(\pi^* \mathcal{S} \otimes \mathcal{D}) \cong \mathcal{S} \otimes \pi_* \mathcal{D}$. С другой стороны, по лемме 3.10 объект $\mathcal{D}$ сосредоточен на инфинитезимальной окрестности подсхемы $Y \times_{\mathbf{P}} Y \subset Y \times \mathbf{P} \times Y$. Но ограничение проекции $\pi: Y \times \mathbf{P} \times Y \rightarrow Y \times Y$ на инфинитезимальную окрестность $Y \times_{\mathbf{P}} Y \subset Y \times \mathbf{P} \times Y$ конечно, поэтому

$$\pi_* \mathcal{C}_0 \cong \pi_* \mathcal{H}^0(\tilde{\mathcal{C}}_0) \cong \mathcal{H}^0(\pi_* \tilde{\mathcal{C}}_0) \cong \mathcal{H}^0(\mathcal{S} \otimes \pi_* \mathcal{D}).$$

Наконец,

$$\mathcal{H}^0(\mathcal{S}) = \text{Coker}(W \otimes F_2^* \boxtimes F_1 \xrightarrow{\text{ad}(\phi)} F_2^* \boxtimes F_2 \oplus F_1^* \boxtimes F_1) \cong \Delta_{Y*} \mathcal{O}_Y$$

в силу (3.12) и условия (С.5), а $\mathcal{H}^0(\pi_* \mathcal{D}) \cong \mathcal{H}^0(\pi_* \mathcal{O}_{Y \times_{\mathbf{P}} Y}) \cong \mathcal{O}_{Y \times_{\mathbf{P}} Y}$ по лемме 3.10, значит,

$$\pi_* \mathcal{C}_0 \cong \mathcal{H}^0(\Delta_{Y*} \mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{O}_{Y \times_{\mathbf{P}} Y}) \cong \Delta_{Y*} \mathcal{O}_Y,$$

так как $\Delta_Y(Y) \subset Y \times_{\mathbf{P}} Y$.

СЛЕДСТВИЕ 3.14. Если $B = 2i - 1$, то функтор $\Phi_{\mathcal{E}_1^{\#t}} \circ \Phi_{\mathcal{E}_1}$ изоморфен функтору сдвига на $[2t]$ при $t = 0, 1, \dots, i - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получаем, используя лемму 3.7 и следствие 3.13.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Неравенство $B \geq 2i - 1$ доказано в предложении 3.12. Предположим, что $B = 2i - 1$. Поскольку функтор $\Phi_{\mathcal{E}_1^{\#0}}$ сопряжен слева к $\Phi_{\mathcal{E}_1}$ по лемме 3.6, пользуясь следствием 3.14, заключаем, что $\Phi_{\mathcal{E}_1}$ строго полон. Остается показать, что Y гладко. Для этого заметим, что $\mathcal{X}_1$ гладко по лемме 3.2, следовательно, категория $\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1)$ Ext-ограничена по лемме 10.19. С другой стороны, мы убедились, что категория $\mathcal{D}^b(Y)$ вкладывается как полная подкатегория в $\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1)$, значит, $\mathcal{D}^b(Y)$ также Ext-ограничена. Еще раз применяя лемму 10.19, заключаем, что Y гладко.

В следующем параграфе нам понадобится

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.15. Если $B = 2i - 1$, то

$$\Phi_{\mathcal{E}_1}(\mathcal{D}^b(Y)) \subset \langle E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}), \dots, E_2(i-1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}) \rangle^\perp \subset \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо проверить, что $\mathrm{Hom}(E_s(k) \otimes F, \Phi_{\mathcal{E}_1}(G)) = 0$ для всех $F \in \mathcal{D}^b(\mathbf{P})$, $G \in \mathcal{D}^b(Y)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} E_s(k) \otimes F &\cong \alpha^*(E_s(k) \boxtimes F), \\ \mathrm{Hom}(\alpha^*(E_s(k) \boxtimes F), \Phi_{\mathcal{E}_1}(G)) &\cong \mathrm{Hom}(E_s(k) \boxtimes F, \alpha_* \Phi_{\mathcal{E}_1}(G)). \end{aligned}$$

Далее, $\alpha_* \Phi_{\mathcal{E}_1}$ – ядерный функтор с ядром $\alpha_* j_* \mathcal{E} \cong \beta_* i_* \mathcal{E}$, а

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{X \times \mathbf{P}}(E_s(k) \boxtimes F, \Phi_{\beta_* i_* \mathcal{E}}(G)) &= \mathrm{Hom}_{X \times \mathbf{P}}(E_s(k) \boxtimes F, p_*(\beta_* i_* \mathcal{E} \otimes q^* G)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{X \times \mathbf{P} \times Y}(E_s(k) \boxtimes F \boxtimes G^*, \beta_* i_* \mathcal{E}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{X \times Y}(E_s(k) \boxtimes (g^* F \otimes G^*), i_* \mathcal{E}). \end{aligned}$$

Последний член равен нулю, так как $i_* \mathcal{E} \in \langle E_1 \boxtimes \mathcal{D}^b(Y), E_2 \boxtimes \mathcal{D}^b(Y) \rangle$, а по условию (C.3) имеем $E_1, E_2 \in \langle E_1(1), \dots, E_2(i-1) \rangle^\perp$.

§ 4. Полуортогональные разложения

В настоящем параграфе завершается доказательство теоремы 1.2. Как говорилось во введении, вместо отдельных линейных сечений многообразий X и Y мы рассматриваем *универсальные семейства* линейных сечений и доказываем все утверждения для них. Затем теорема 1.2 выводится из теоремы о строгой замене базы.

4.1. Универсальные семейства линейных сечений. Все r -мерные подпространства $L \subset V^*$ параметризуются грассманианом $\mathrm{Gr}(r, V^*)$. Те из них, для которых линейные сечения $X_L = X \times_{\mathbb{P}(V)} \mathbb{P}(L^\perp)$ и $Y_L = Y \times_{\mathbb{P}(V^*)} \mathbb{P}(L)$ компактны, параметризуются открытым подмножеством грассманиана $\mathbf{P}_r \subset \mathrm{Gr}(r, V^*)$, состоящим из всех r -мерных подпространств $L \subset V^*$ таких, что $L \cap \mathbf{Z} = \emptyset$. Обозначим через $\mathcal{L}_r$ ограничение тавтологического подрасслоения ранга r с грассманиана $\mathrm{Gr}(r, V^*)$ на $\mathbf{P}_r$, а через $\mathcal{L}_r^\perp := (V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_r} / \mathcal{L}_r)^* \subset V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_r}$ – ортогональное подрасслоение. Подмногообразия

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_r &= (X \times \mathbf{P}_r) \times_{\mathbb{P}(V) \times \mathbf{P}_r} \mathbb{P}_{\mathbf{P}_r}(\mathcal{L}_r^\perp) \subset X \times \mathbf{P}_r, \\ \mathcal{Y}_r &= (Y \times \mathbf{P}_r) \times_{\mathbb{P}(V^*) \times \mathbf{P}_r} \mathbb{P}_{\mathbf{P}_r}(\mathcal{L}_r) \subset Y \times \mathbf{P}_r \end{aligned}$$

являются универсальными семействами компактных линейных сечений многообразий X и Y .

Рассмотрим расслоенное произведение $\mathcal{X}_r \times_{\mathbf{P}_r} \mathcal{Y}_r$ и проекцию $\pi_r: \mathcal{X}_r \times_{\mathbf{P}_r} \mathcal{Y}_r \rightarrow X \times Y$. Поскольку для всякого векторного подпространства $L \subset V^*$ произведение $\mathbb{P}(L^\perp) \times \mathbb{P}(L)$ содержится в квадрике инцидентности $Q \subset \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$, заключаем, что проекция π_r пропускается через отображение $\zeta_r: \mathcal{X}_r \times_{\mathbf{P}_r} \mathcal{Y}_r \rightarrow Q(X, Y) \subset X \times Y$.

Рассмотрим объект $\mathcal{E}_r = \zeta_r^* \mathcal{E} \in \mathcal{D}(\mathcal{X}_r \times_{\mathbf{P}_r} \mathcal{Y}_r)$ как ядро на $\mathcal{X}_r \times \mathcal{Y}_r$. Он задает ядерные функторы $\Phi_r = \Phi_{\mathcal{E}_r}: \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)$ и $\Phi_r^! = \Phi_{\mathcal{E}_r}^!: \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)$. В настоящем параграфе будет показано, что функтор Φ_r строго полон при $r \leq i$, функтор $\Phi_r^!$ строго полон при $r \geq i$ и существуют полуортогональные разложения

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r) &= \langle \Phi_r(\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)), E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots, E_2(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r) &= \langle \Phi_r^!(\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)), F_2^*(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots, F_1^*(-1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r) \rangle. \end{aligned}$$

Затем, пользуясь теоремой 2.46 о строгой замене базы, из этих результатов выводится основная теорема 1.2.

Для доказательства строгой полноты функторов используется индукция по r (база индукции задана теоремой 3.1). Для сравнения универсальных семейств $\mathcal{X}_{r-1}$, $\mathcal{Y}_{r-1}$ и $\mathcal{X}_r$, $\mathcal{Y}_r$ производится замена базы на

$$\mathbf{S}_r = \text{Fl}(r-1, r; V^*) \cap (\mathbf{P}_{r-1} \times \mathbf{P}_r),$$

где $\text{Fl}(r-1, r; V^*) \subset \text{Gr}(r-1, V^*) \times \text{Gr}(r, V^*)$ – частичное флаговое многообразие. Схема $\mathbf{S}_r$ параметризует флаги $L_{r-1} \subset L_r \subset V^*$ такие, что $\dim L_{r-1} = r-1$, $\dim L_r = r$ и $\mathbb{P}(L_r) \cap \mathbf{Z} = \emptyset$.

Обозначим через $\phi: \mathbf{S}_r \rightarrow \mathbf{P}_{r-1}$ и $\psi: \mathbf{S}_r \rightarrow \mathbf{P}_r$ естественные проекции. Положим $\tilde{\mathcal{L}}_{r-1} = \phi^* \mathcal{L}_{r-1}$, $\tilde{\mathcal{L}}_r = \psi^* \mathcal{L}_r$, $\tilde{\mathcal{L}}_{r-1}^\perp = \phi^* \mathcal{L}_{r-1}^\perp$, $\tilde{\mathcal{L}}_r^\perp = \psi^* \mathcal{L}_r^\perp$. Тогда

$$\tilde{\mathcal{L}}_{r-1} \subset \tilde{\mathcal{L}}_r \subset V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{S}_r}, \quad \tilde{\mathcal{L}}_r^\perp \subset \tilde{\mathcal{L}}_{r-1}^\perp \subset V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{S}_r}. \quad (4.1)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}}_{r-1} &= \mathcal{X}_{r-1} \times_{\mathbf{P}_{r-1}} \mathbf{S}_r \subset X \times \mathbf{S}_r, & \tilde{\mathcal{X}}_r &= \mathcal{X}_r \times_{\mathbf{P}_r} \mathbf{S}_r \subset X \times \mathbf{S}_r, \\ \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1} &= \mathcal{Y}_{r-1} \times_{\mathbf{P}_{r-1}} \mathbf{S}_r \subset Y \times \mathbf{S}_r, & \tilde{\mathcal{Y}}_r &= \mathcal{Y}_r \times_{\mathbf{P}_r} \mathbf{S}_r \subset Y \times \mathbf{S}_r. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}}_{r-1} &= (X \times \mathbf{S}_r) \times_{\mathbb{P}(V) \times \mathbf{S}_r} \mathbb{P}_{\mathbf{S}_r}(\tilde{\mathcal{L}}_{r-1}^\perp), & \tilde{\mathcal{X}}_r &= (X \times \mathbf{S}_r) \times_{\mathbb{P}(V) \times \mathbf{S}_r} \mathbb{P}_{\mathbf{S}_r}(\tilde{\mathcal{L}}_r^\perp), \\ \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1} &= (Y \times \mathbf{S}_r) \times_{\mathbb{P}(V^*) \times \mathbf{S}_r} \mathbb{P}_{\mathbf{S}_r}(\tilde{\mathcal{L}}_{r-1}), & \tilde{\mathcal{Y}}_r &= (Y \times \mathbf{S}_r) \times_{\mathbb{P}(V^*) \times \mathbf{S}_r} \mathbb{P}_{\mathbf{S}_r}(\tilde{\mathcal{L}}_r). \end{aligned}$$

Следовательно, вложения (4.1) индуцируют вложения $\xi: \tilde{\mathcal{X}}_r \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}_{r-1}$ и $\eta: \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1} \rightarrow \tilde{\mathcal{Y}}_r$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму (квадраты, помеченные знаком $\boxed{\text{EC}}$, – точные декартовы, так как отображения ϕ и ψ плоские):

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{S}_r & \xleftarrow{g_r} & \tilde{\mathcal{Y}}_r & \xleftarrow{\eta} & \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1} & \xrightarrow{g_{r-1}} & \mathbf{S}_r \\ \psi \downarrow & & \boxed{\text{EC}} & \psi \downarrow & \swarrow \hat{\psi} & \downarrow \phi & \boxed{\text{EC}} & \downarrow \phi \\ \mathbf{P}_r & \xleftarrow{g_r} & \mathcal{Y}_r & & \mathcal{Y}_{r-1} & \xrightarrow{g_{r-1}} & \mathbf{P}_{r-1} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \mathbf{S}_r & \xleftarrow{f_r} & \tilde{\mathcal{X}}_r & \xrightarrow{\xi} & \tilde{\mathcal{X}}_{r-1} & \xrightarrow{f_{r-1}} & \mathbf{S}_r \\ \psi \downarrow & & \boxed{\text{EC}} & \psi \downarrow & \swarrow \hat{\phi} & \downarrow \phi & \boxed{\text{EC}} & \downarrow \phi \\ \mathbf{P}_r & \xleftarrow{f_r} & \mathcal{X}_r & & \mathcal{X}_{r-1} & \xrightarrow{f_{r-1}} & \mathbf{P}_{r-1} \end{array} \quad (4.2)$$

где f_{r-1} , f_r , g_{r-1} и g_r – естественные проекции, а $\hat{\phi} = \phi \circ \xi$, $\hat{\psi} = \psi \circ \eta$.

Обозначим через $\tilde{\mathcal{E}}_{r-1} \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1})$ и $\tilde{\mathcal{E}}_r \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r)$ обратные образы объектов $\mathcal{E}_{r-1}$ и $\mathcal{E}_r$ относительно проекций $\tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1} \rightarrow \mathcal{X}_{r-1} \times_{\mathbf{P}_{r-1}}$

$\mathcal{Y}_{r-1}$, $\tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r \rightarrow \mathcal{X}_r \times_{\mathbf{P}_r} \mathcal{Y}_r$. Они дают соответствующие ядерные функторы $\tilde{\Phi}_{r-1}$, $\tilde{\Phi}_r$, $\tilde{\Phi}_{r-1}^!$ и $\tilde{\Phi}_r^!$ между производными категориями многообразий $\tilde{\mathcal{X}}_{r-1}$, $\tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}$, $\tilde{\mathcal{X}}_r$ и $\tilde{\mathcal{Y}}_r$.

Шаг индукции основан на соотношениях между функторами Φ_{r-1} , Φ_r , $\tilde{\Phi}_{r-1}$ и $\tilde{\Phi}_r$, функторами замены базы ψ^* , ψ_* и функторами прямого и обратного образов относительно вложений ξ и η . Соотношения с функторами ψ^* и ψ_* описываются леммой 2.42, а соотношения с функторами ξ и η являются ключевыми для доказательства теоремы 1.2. Мы доказываем, что $\xi^* \tilde{\Phi}_{r-1} \cong \tilde{\Phi}_r \eta_*$ и что “разность” между $\xi_* \tilde{\Phi}_r$ и $\tilde{\Phi}_{r-1} \eta^!$ является очень простым функтором, ядро которого обладает резольвентой вида $E_1 \boxtimes F_1 \rightarrow E_2 \boxtimes F_2$ (с точностью до сдвига и подкрутки) на $\tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r$.

Остальные результаты настоящего параграфа (в том числе и указанные выше полуортогональные разложения) доказываются похожими рассуждениями с помощью (либо возрастающей, либо убывающей) индукции по r .

Сначала проведем необходимую подготовку, завершающуюся доказательством соотношений между функторами $\tilde{\Phi}_{r-1}$ и $\tilde{\Phi}_r$ и функторами прямого и обратного образов относительно ξ и η . Затем с помощью индукции по r докажем, что функтор Φ_r строго полон при $r \leq i$, и, используя предложение 2.51 (трюк Бриджлэнда в относительной ситуации), получим полуортогональное разложение при $r = i$. Далее с помощью убывающей индукции по r выведем полуортогональные разложения для $\mathcal{X}_r$ при $r \leq i$. Затем докажем, что набор $(F_1(1), F_2(1), \dots, F_1(N-i), F_2(N-i))$ на Y является в некотором смысле исключительным (при $\mathbf{Z} = \emptyset$ он исключителен в обычном смысле), и с помощью индукции по r установим полуортогональные разложения для $\mathcal{Y}_r$ при $r \geq i$. Наконец, докажем основную теорему 1.2 и проверим, что множество критических значений отображения $g: Y \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \setminus \mathbf{Z}$ совпадает с проективно двойственным многообразием $X^\vee \setminus \mathbf{Z}$.

4.2. Предварительные результаты. Напомним, что $\mathbf{P}_r \subset \mathrm{Gr}(r, V^*)$ – открытое подмножество, параметризующее компактные линейные сечения X и Y , а $\mathcal{X}_r$, $\mathcal{Y}_r$ – универсальные семейства линейных сечений над $\mathbf{P}_r$.

ЛЕММА 4.1. *Предположим, что $\mathbf{P}_r \neq \emptyset$. Тогда $\mathcal{X}_r$ и $\mathcal{Y}_r$ гладкие,*

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{X}_r &= \dim X + \dim \mathbf{P}_r - r, & \dim \mathcal{Y}_r &= \dim Y + \dim \mathbf{P}_r + r - N, \\ \dim \mathcal{X}_r \times_{\mathbf{P}_r} \mathcal{Y}_r &= \dim X + \dim Y + \dim \mathbf{P}_r - N, \end{aligned}$$

а отображения $f_r: \mathcal{X}_r \rightarrow \mathbf{P}_r$ и $g_r: \mathcal{Y}_r \rightarrow \mathbf{P}_r$ проективны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что существуют открытые вложения в относительные грассманианы

$$\mathcal{X}_r \subset \mathrm{Gr}_X(r, \mathcal{V}_X), \quad \mathcal{Y}_r \subset \mathrm{Gr}_Y(r-1, \mathcal{V}_Y), \quad \mathcal{X}_r \times_{\mathbf{P}_r} \mathcal{Y}_r \subset \mathrm{Gr}_{Q(X,Y)}(r-1, \mathcal{V}_Q),$$

где расслоения $\mathcal{V}_X$, $\mathcal{V}_Y$ определяются из точных последовательностей

$$0 \rightarrow \mathcal{V}_X \rightarrow V^* \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(1) \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-1) \rightarrow V^* \otimes \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{V}_Y \rightarrow 0,$$

а расслоение $\mathcal{V}_Q$ является средней когомологией комплекса

$$\mathcal{O}_{Q(X,Y)}(0, -1) \rightarrow V^* \otimes \mathcal{O}_{Q(X,Y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Q(X,Y)}(1, 0).$$

Отсюда легко выводится гладкость и вычисляются размерности. Кроме того, ясно, что слои проекций $\mathcal{X}_r \rightarrow \mathbf{P}_r$ и $\mathcal{Y}_r \rightarrow \mathbf{P}_r$ являются линейными сечениями X и Y , соответствующими подпространствам $L \in \mathbf{P}_r$, и поэтому проективны.

Напомним, что мы определили объекты $\mathcal{E}_r$ на $\mathcal{X}_r \times_{\mathbf{P}_r} \mathcal{Y}_r$ как обратные образы $\mathcal{E} \in D^b(Q(X, Y))$ относительно отображения $\zeta_r: \mathcal{X}_r \times_{\mathbf{P}_r} \mathcal{Y}_r \rightarrow Q(X, Y)$, а объекты $\tilde{\mathcal{E}}_{r-1}$ и $\tilde{\mathcal{E}}_r$ как обратные образы $\mathcal{E}_{r-1}$ и $\mathcal{E}_r$ относительно проекций $\phi: \tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1} \rightarrow \mathcal{X}_{r-1} \times_{\mathbf{P}_{r-1}} \mathcal{Y}_{r-1}$ и $\psi: \tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r \rightarrow \mathcal{X}_r \times_{\mathbf{P}_r} \mathcal{Y}_r$. Функторы Φ_{r-1} , Φ_r , $\Phi_{r-1}^!$, $\Phi_r^!$, $\tilde{\Phi}_{r-1}$, $\tilde{\Phi}_r$, $\tilde{\Phi}_{r-1}^!$ и $\tilde{\Phi}_r^!$ – соответствующие ядерные функторы первого и второго типов с ядрами $\mathcal{E}_{r-1}$, $\mathcal{E}_r$, $\tilde{\mathcal{E}}_{r-1}$ и $\tilde{\mathcal{E}}_r$ соответственно.

ЛЕММА 4.2. *Функторы Φ_{r-1} , Φ_r , $\Phi_{r-1}^!$, $\Phi_r^!$, $\tilde{\Phi}_{r-1}$, $\tilde{\Phi}_r$, $\tilde{\Phi}_{r-1}^!$ и $\tilde{\Phi}_r^!$ переводят ограниченные производные категории в ограниченные производные категории. Более того, функторы с восклицательным знаком сопряжены справа к соответствующим функторам без восклицательного знака.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{X}_r$ и $\mathcal{Y}_r$ гладкие, заключаем, что прямой образ объекта $\mathcal{E}_r$ на $\mathcal{X}_r \times \mathcal{Y}_r$ является совершенным комплексом. Следовательно, $\mathcal{E}_r$ имеет конечную Тог- и Ext-амплитуду над $\mathcal{X}_r$ и $\mathcal{Y}_r$ по лемме 10.40. Аналогично, $\mathcal{E}_{r-1}$ имеет конечную Тог- и Ext-амплитуду над $\mathcal{X}_{r-1}$ и $\mathcal{Y}_{r-1}$. Так как ϕ и ψ плоские, из следствия 10.47 вытекает, что $\tilde{\mathcal{E}}_{r-1}$ и $\tilde{\mathcal{E}}_r$ также имеют конечную Тог- и Ext-амплитуду. С другой стороны, проекции произведений $\mathcal{X}_{r-1} \times_{\mathbf{P}_{r-1}} \mathcal{Y}_{r-1}$, $\mathcal{X}_r \times_{\mathbf{P}_r} \mathcal{Y}_r$, $\tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}$ и $\tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r$ на сомножители проективны, так как проекции $\mathcal{X}_{r-1}$, $\mathcal{Y}_{r-1}$ на $\mathbf{P}_{r-1}$ и $\mathcal{X}_r$, $\mathcal{Y}_r$ на $\mathbf{P}_r$ проективны. Остается воспользоваться леммой 2.4.

ЛЕММА 4.3. *Пусть $k = r - 1$ или $k = r$. Тогда:*

- (i) $\tilde{\mathcal{X}}_k$ – схема нулей сечения векторного расслоения $\mathcal{O}_X(1) \boxtimes \tilde{\mathcal{L}}_k^*$ на $X \times \mathbf{S}_r$;
- (ii) $\tilde{\mathcal{Y}}_k$ – схема нулей сечения векторного расслоения $\mathcal{O}_Y(1) \boxtimes \tilde{\mathcal{L}}_k^*$ на $Y \times \mathbf{S}_r$;
- (iii) $\tilde{\mathcal{X}}_r$ – схема нулей сечения векторного расслоения $\mathcal{O}_X(1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^*$ на $\tilde{\mathcal{X}}_{r-1}$;
- (iv) $\tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}$ – схема нулей сечения векторного расслоения $\mathcal{O}_Y(1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_{r-1}^\perp / \tilde{\mathcal{L}}_r^\perp)^* \cong \mathcal{O}_Y(1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})$ на $\tilde{\mathcal{Y}}_r$.

Все эти сечения регулярны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (i) и (ii) очевидно следуют из определения подмногообразий $\tilde{\mathcal{X}}_k \subset X \times \mathbf{S}_r$ и $\tilde{\mathcal{Y}}_k \subset Y \times \mathbf{S}_r$. Утверждения (iii) и (iv) вытекают из точных последовательностей

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^* \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_r^* \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{r-1}^* \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow (\tilde{\mathcal{L}}_{r-1}^\perp / \tilde{\mathcal{L}}_r^\perp)^* \rightarrow (\tilde{\mathcal{L}}_{r-1}^\perp)^* \rightarrow (\tilde{\mathcal{L}}_r^\perp)^* \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Наконец, в силу леммы 4.1 имеем

$$\dim \tilde{\mathcal{X}}_{r-1} = \dim X + \dim \mathbf{S}_r - (r - 1), \quad \dim \tilde{\mathcal{X}}_r = \dim X + \dim \mathbf{S}_r - r.$$

Поэтому сечения из пп. (i) и (iii) регулярны. По тем же причинам регулярны и сечения из пп. (ii) и (iv).

Опишем теперь морфизмы ψ и $\hat{\psi}$.

ЛЕММА 4.4. *Морфизмы ψ и $\hat{\psi}$ являются проективизациями векторных расслоений. Точнее, ψ – проективизация расслоения $\mathcal{L}_r^*$, а $\hat{\psi}$ – проективизация расслоения $(\mathcal{L}_r/\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-1))^*$, где вложение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-1) \rightarrow \mathcal{L}_r$ индуцировано проекцией $\mathcal{Y}_r \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{P}_r}(\mathcal{L}_r) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению схемы $\mathbf{S}_r$ слой ψ – это множество всех гиперплоскостей в L_r . Аналогично, слой $\hat{\psi}$ – это множество всех гиперплоскостей в L_r , проходящих через фиксированную точку $y \in \mathbb{P}(L_r)$.

Применяя результаты работы [22], получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.5. *Функторы ψ^* и $\hat{\psi}^*$ строго полные. В частности, существуют изоморфизмы $\psi_*\psi^* \cong \text{id}$, $\hat{\psi}_*\hat{\psi}^* \cong \text{id}$.*

Ситуация с морфизмами ϕ и $\hat{\phi}$ чуть более сложная из-за условия $L \cap \mathbf{Z} = \emptyset$, входящего в определение множества $\mathbf{P}_r$. Легко показать, что оба эти отображения представляются в виде композиции открытого вложения и проективизации векторного расслоения. Точнее говоря, верна

ЛЕММА 4.6. *Морфизм ϕ является композицией открытого вложения и проективизации векторного расслоения $V^*/\mathcal{L}_{r-1}$, причем все дивизориальные компоненты дополнения $\mathbb{P}_{\mathbf{P}_{r-1}}(V^*/\mathcal{L}_{r-1}) \setminus \mathbf{S}_r$ обильны над $\mathbf{P}_{r-1}$. Аналогично, морфизм $\hat{\phi}$ является композицией открытого вложения и проективизации векторного расслоения $\mathcal{V}_X/\mathcal{L}_{r-1}$, где расслоение $\mathcal{V}_X$ определялось в лемме 4.1. Более того, морфизм $\hat{\phi}$ сюръективен при $r \leq i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению схемы $\mathbf{S}_r$ слой морфизма ϕ – это множество всех L_r , содержащих данное L_{r-1} и не пересекающих $\mathbf{Z}$. Таким образом, этот слой является открытым подмножеством в $\mathbb{P}(V^*/\mathcal{L}_{r-1})$. Более того, дополнение совпадает с прообразом множества всех $L_r \in \text{Gr}(r, V^*)$ таких, что $\mathbb{P}(L_r) \cap \mathbf{Z} \neq \emptyset$, и остается заметить, что всякий эффективный дивизор в $\text{Gr}(r, V^*)$ обилён.

Аналогично, слой морфизма $\hat{\phi}$ – это множество всех L_r , содержащих данное L_{r-1} , содержащихся в слое $\mathcal{V}_x$ расслоения $\mathcal{V}_X$ в данной точке x и не пересекающих множество $\mathbf{Z}$. Он является открытым подмножеством в $\mathbb{P}(\mathcal{V}_X/\mathcal{L}_{r-1})$. Остается проверить сюръективность. Предположим, что точка $(x, L_{r-1}) \in \mathcal{X}_{r-1}$ не лежит в образе многообразия $\tilde{\mathcal{X}}_r$. Это означает, что для всякого подпространства $L_r \subset V^*$ такого, что $L_{r-1} \subset L_r \subset \mathcal{V}_x$, имеем $\mathbb{P}(L_r) \cap \mathbf{Z} \neq \emptyset$. Следовательно, линейная проекция из $\mathbf{Z} \cap \mathbb{P}(\mathcal{V}_x) \subset \mathbb{P}(\mathcal{V}_x) \setminus \mathbb{P}(L_{r-1})$ в $\mathbb{P}(\mathcal{V}_x/\mathcal{L}_{r-1})$ сюръективна. Но это означает, что

$$\dim(\mathbf{Z} \cap \mathbb{P}(\mathcal{V}_x)) \geq \dim(\mathbb{P}(\mathcal{V}_x/\mathcal{L}_{r-1})) = (N-1) - (r-1) - 1 = N-r-1 \geq N-i-1,$$

что противоречит условию (C.8), так как $\mathcal{V}_x$ – гиперплоскость в V^* .

Функторы ϕ^* и $\hat{\phi}^*$ не являются строго полными, однако они удовлетворяют следующим свойствам.

СЛЕДСТВИЕ 4.7. *Если $\phi^*\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}}$ для некоторого линейного расслоения $\mathcal{L}$ на $\mathcal{Y}_{r-1}$ и $r \leq i$, то $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{r-1}}$. Если $\hat{\phi}^*F = 0$ для некоторого $F \in \mathcal{D}(\mathcal{X}_{r-1})$ и $r \leq i$, то $F = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ядро гомоморфизма $\text{Pic}(\mathbb{P}_{\mathcal{Y}_{r-1}}(V^*/\mathcal{L}_{r-1})) \rightarrow \text{Pic}(\tilde{\mathcal{Y}}_{r-1})$ порождается дивизориальными компонентами дополнения $\mathbb{P}_{\mathcal{Y}_{r-1}}(V^*/\mathcal{L}_{r-1}) \setminus \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}$, которые обильны над $\tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}$. Следовательно, это ядро не пересекает образ $\text{Pic}(\mathcal{Y}_{r-1})$ в $\text{Pic}(\mathbb{P}_{\mathcal{Y}_{r-1}}(V^*/\mathcal{L}_{r-1}))$. Второе утверждение очевидно.

Теперь изучим соотношения между функторами $\tilde{\Phi}_{r-1}$ и $\tilde{\Phi}_r$ и функторами прямого и обратного образов относительно ξ и η .

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1} & \xrightarrow{\eta} & \tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r \\ \xi \downarrow & & \xi \downarrow \\ \tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1} & \xrightarrow{\eta} & \tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r \end{array}$$

и проекцию $\tilde{\pi}: \tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r \subset (X \times \mathbf{S}_r) \times (Y \times \mathbf{S}_r) \rightarrow X \times Y$.

ЛЕММА 4.8. *Морфизмы ξ и η в диаграмме являются дивизориальными вложениями. Выполняются следующие теоретико-схемные равенства:*

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}) \cap (\tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r) &= \tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}, \\ (\tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}) \cup (\tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r) &= \tilde{\pi}^{-1}(Q(X, Y)). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Квадрат

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}) \cup (\tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r) & \xrightarrow{i} & \tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r \\ \downarrow \tilde{\zeta} & \boxed{EC} & \downarrow \tilde{\pi} \\ Q(X, Y) & \xrightarrow{i} & X \times Y \end{array} \quad (4.4)$$

является точным декартовым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим проекции произведений $\tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}$, $\tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}$, $\tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r$ и $\tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r$ на $X \times Y$. Легко проверить, что их слои над точкой $(x, y) \in (X, Y)$ открыты в подмножествах флагового многообразия $\text{Fl}(r-1, r; V^*)$, состоящих из всех флагов $L_{r-1} \subset L_r$, удовлетворяющих условиям инцидентности

$$\begin{array}{ccc} y \subset L_{r-1} & & y \subset L_{r-1} \subset \mathcal{V}_x \\ \cap & & \cap \\ L_r & \subset \mathcal{V}_x & L_r \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} L_{r-1} & & L_{r-1} \subset \mathcal{V}_x \\ \cap & & \cap \\ y \subset L_r & \subset \mathcal{V}_x & y \subset L_r \end{array}$$

соответственно. В частности, первые три слоя пусты, если $(x, y) \notin Q(X, Y)$. С другой стороны, над $Q(X, Y)$ первые три слоя неприводимы, имеют размерности $(r-1)(N-r)-1$, $(r-1)(N-r)$ и $(r-1)(N-r)$ соответственно, и первый

из них является пересечением второго и третьего. Напротив, четвертый слой неприводим и имеет размерность $(r-1)(N-r)$, если $(x, y) \notin Q(X, Y)$, а при $(x, y) \in Q(X, Y)$ он совпадает с объединением второго и третьего слоев (если $y \subset \mathcal{V}_x$ и $y \not\subset L_{r-1}$, то $L_r = \langle y, L_{r-1} \rangle \subset \mathcal{V}_x$). Это означает, что образы ξ и η имеют чистую коразмерность 1. Поскольку они также являются схемами нулей сечений линейных расслоений в силу леммы 4.3, (iii), (iv), заключаем, что ξ и η являются дивизориальными вложениями.

Приведенные рассуждения доказывают также первое из равенств (4.3) на теоретико-схемном уровне и второе равенство на теоретико-множественном уровне. Принимая во внимание тот факт, что правая часть второго равенства является схемой нулей сечения линейного расслоения $\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{O}_Y(1)$ по определению $Q(X, Y)$, а левая часть этого равенства является схемой нулей сечения линейного расслоения $(\mathcal{O}_X(1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^*) \otimes (\mathcal{O}_Y(1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1}))$ по лемме 4.3, (iii), (iv), и замечая, что расслоения изоморфны, заключаем, что второе равенство верно также и на теоретико-схемном уровне.

Наконец, заметим, что квадрат (4.4) является точным декартовым по следствию 2.27, так как $X \times Y$ и $Q(X, Y)$ – коэн-макколеевы многообразия.

Рассмотрим обратный образ $\hat{\mathcal{E}} = \zeta^* \mathcal{E}$ пучка $\mathcal{E}$ с $Q(X, Y)$ на $(\tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}) \cup (\tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r)$. Обозначим также $\mathcal{O}(k, l) := \mathcal{O}_X(k) \otimes \mathcal{O}_Y(l)$ для краткости. Следующая лемма описывает связь между объектами $\tilde{\mathcal{E}}_{r-1}$ и $\tilde{\mathcal{E}}_r$.

ЛЕММА 4.9. *На $\tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r$ существуют следующие точные треугольники:*

$$E_1 \otimes F_1 \rightarrow E_2 \otimes F_2 \rightarrow i_* \hat{\mathcal{E}}, \quad (4.5)$$

$$\xi_* \tilde{\mathcal{E}}_r(0, -1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^* \rightarrow i_* \hat{\mathcal{E}} \rightarrow \eta_* \tilde{\mathcal{E}}_{r-1}, \quad (4.6)$$

$$\eta_* \tilde{\mathcal{E}}_{r-1}(-1, 0) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1}) \rightarrow i_* \hat{\mathcal{E}} \rightarrow \xi_* \tilde{\mathcal{E}}_r. \quad (4.7)$$

Кроме того, на $\tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}$ существуют изоморфизмы

$$\eta^* \tilde{\mathcal{E}}_r \cong \xi^* \tilde{\mathcal{E}}_{r-1}. \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку квадрат (4.4) является точным декартовым, имеем равенство $i_* \hat{\mathcal{E}} = i_* \zeta^* \mathcal{E} = \tilde{\pi}^* i_* \mathcal{E}$. Применяя функтор $\tilde{\pi}^*$ к последовательности (3.1), получаем (4.5). Треугольники (4.7) и (4.6) получаются умножением точных последовательностей

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r}(0, -1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^* \\ &\rightarrow \mathcal{O}_{(\tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}) \cup (\tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r)} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}} \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}}(-1, 0) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1}) \\ &\rightarrow \mathcal{O}_{(\tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}) \cup (\tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r)} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

на $\hat{\mathcal{E}}$ и применением функтора i_* , так как обратный образ $\hat{\mathcal{E}}$ на $\tilde{\mathcal{X}}_{r-1} \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}$ и $\tilde{\mathcal{X}}_r \times_{\mathbf{S}_r} \tilde{\mathcal{Y}}_r$ совпадает с $\tilde{\mathcal{E}}_{r-1}$ и $\tilde{\mathcal{E}}_r$ соответственно. Наконец, изоморфизм (4.8) очевиден, так как обе части изоморфны обратному образу пучка $\mathcal{E}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.10. *Существуют следующие точные треугольники функторов между категориями $\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{X}}_{r-1})$ и $\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{Y}}_r)$:*

$$\tilde{\Phi}_{r-1}\eta^! \rightarrow \xi_*\tilde{\Phi}_r \rightarrow \Phi_{i_*\hat{\mathcal{E}}(0,1)\otimes(\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})}, \quad (4.9)$$

$$\tilde{\Phi}_r^!\xi^* \rightarrow \eta_*\tilde{\Phi}_{r-1}^! \rightarrow \Phi_{i_*\hat{\mathcal{E}}(1,0)\otimes(\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})}^!, \quad (4.10)$$

и изоморфизмы функторов между категориями $\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{X}}_r)$ и $\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{Y}}_{r-1})$:

$$\xi^*\tilde{\Phi}_{r-1} \cong \tilde{\Phi}_r\eta_*, \quad \eta^!\tilde{\Phi}_r^! \cong \tilde{\Phi}_{r-1}^!\xi_*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подкручивая треугольник (4.6) на $\mathcal{O}(0,1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})$ и перемещая его третий член на первое место со сдвигом на $[-1]$, получаем

$$\eta_*\tilde{\mathcal{E}}_{r-1}(0,1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})[-1] \rightarrow \xi_*\tilde{\mathcal{E}}_r \rightarrow i_*\hat{\mathcal{E}}(0,1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1}).$$

Пользуясь леммой 4.3, (iv), заключаем, что ядерный функтор, соответствующий первому члену этого треугольника, равен $\tilde{\Phi}_{r-1}\eta^!$. Кроме того, ясно, что ядерный функтор, соответствующий второму члену этого треугольника, равен $\xi_*\tilde{\Phi}_r$. Применяя лемму 2.7, получаем треугольник (4.9). Аналогично, из треугольника (4.7) получаем треугольник (4.10), а из изоморфизма (4.8) – искомые изоморфизмы.

ЛЕММА 4.11. *Имеем:*

- (i) $\Phi_{i_*\hat{\mathcal{E}}(0,1)\otimes(\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})}(\langle F_1^*(-1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), F_2^*(-1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle^\perp) = 0$;
- (ii) $\Phi_{i_*\hat{\mathcal{E}}(0,1)\otimes(\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})}(\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{Y}}_r)) \subset \langle E_1 \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), E_2 \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle$;
- (iii) $\Phi_{i_*\hat{\mathcal{E}}(1,0)\otimes(\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})}^!(\langle E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), E_2(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle^\perp) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при $k = 1$ или $k = 2$

$$\begin{aligned} \Phi_{E_k \boxtimes F_k(1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})}(G) &\cong E_k \otimes H^\bullet(\tilde{\mathcal{Y}}_r, F_k(1) \otimes G) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1}) \\ &\cong E_k \otimes \mathrm{RHom}(F_k^*(-1), G) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1}). \end{aligned}$$

Тензорно умножая точный треугольник (4.5) на $\mathcal{O}(0,1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})$, выводим отсюда утверждения (i) и (ii). Аналогично, имеем

$$\Phi_{E_k(1) \boxtimes F_k \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})}^!(G) \cong \mathrm{RHom}(E_k(1), G) \otimes F_k^* \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1}) \otimes \omega_{\tilde{\mathcal{Y}}_r}[\dim \tilde{\mathcal{Y}}_r],$$

откуда выводится утверждение (iii).

4.3. Полуортогональные наборы для линейных сечений многообразия X . Докажем, что производная категория $\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)$ содержит полуортогональный набор вида

$$\begin{aligned} &(\Phi_r(\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)), E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), E_2(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots \\ &\dots, E_1(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), E_2(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r)). \end{aligned}$$

Это доказывается индукцией по r . Сначала сформулируем лемму.

ЛЕММА 4.12. Если $r < i$, то функторы $G \mapsto E_s(k) \otimes f_r^* G$ из $\mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r)$ в $\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)$ строго полны при всех k и $s = 1, 2$. Более того, наборы

$$\langle E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), E_2(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots, E_1(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), E_2(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r) \rangle,$$

$$\langle E_1 \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), E_2 \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots, E_1(i-r-1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), E_2(i-r-1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r) \rangle$$

в $\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)$ полуортогональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную пару $E_s(k)$, $E_t(l)$ такую, что либо $0 < k - l < i - r$, либо $k = l$ и $s \geq t$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(E_s(k) \otimes f_r^* G, E_t(l) \otimes f_r^* G') &\cong H(\mathcal{X}_r, E_s^*(-k) \otimes E_t(l) \otimes f_r^* G^* \otimes f_r^* G') \\ &\cong H(X \times \mathbf{P}_r, (E_s^* \otimes E_t(l-k)) \boxtimes (G^* \otimes G') \otimes i_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}_r}), \end{aligned}$$

однако пучок $i_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}_r}$ по лемме 4.3, (i) обладает резольвентой Кошуля $i_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}_r} \cong \Lambda^\bullet(\mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \mathcal{L}_r)$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} H(X \times \mathbf{P}_r, (E_s^* \otimes E_t(l-k)) \boxtimes (G^* \otimes G') \otimes \Lambda^p(\mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \mathcal{L}_r)) \\ \cong H(X \times \mathbf{P}_r, (E_s^* \otimes E_t(l-k-p)) \boxtimes (G^* \otimes G' \otimes \Lambda^p \mathcal{L}_r)) \\ \cong H(X, E_s^* \otimes E_t(l-k-p)) \otimes H(\mathbf{P}_r, G^* \otimes G' \otimes \Lambda^p \mathcal{L}_r) \\ \cong \mathrm{Hom}_X(E_s, E_t(l-k-p)) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_r}(G, G' \otimes \Lambda^p \mathcal{L}_r). \end{aligned}$$

Пользуясь условием (С.3), получаем $\mathrm{Hom}_X(E_s, E_t(l-k-p)) = 0$ при $0 \leq p \leq r$ во всех случаях, за исключением случая $k = l$, $s = t$ и $p = 0$, когда $\mathrm{Hom}_X(E_s, E_t(l-k-p)) = \mathbb{k}$. Таким образом, набор полуортогонален, и выполняется равенство

$$\mathrm{Hom}(E_s(k) \otimes f_r^* G, E_s(k) \otimes f_r^* G') \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_r}(G, G'),$$

которое означает, что функтор $G \mapsto E_s(k) \otimes f_r^* G$ строго полон.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.13. При всех $1 \leq r \leq i$ имеем:

- (i) $\Phi_r(\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)) \subset \langle E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots, E_2(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r) \rangle^\perp$;
- (ii) функтор $\Phi_r: \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)$ строго полон.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по r . Основание индукции, $r = 1$, дается теоремой 3.1 и предложением 3.15.

Предположим, что утверждения (i) и (ii) выполняются для $r - 1$, и рассмотрим первую диаграмму (4.2). Прежде всего заметим, что

$$\tilde{\Phi}_{r-1}(\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{Y}}_{r-1})) \subset \langle E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), \dots, E_2(i-r+1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle_{\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{X}}_{r-1})}^\perp \quad (4.11)$$

по предположению индукции и предложению 2.44. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \Phi_{i_* \hat{\mathcal{E}}(0,1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})}(\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{Y}}_r)) &\subset \langle E_1 \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), E_2 \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle \\ &\subset \langle E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), \dots, E_2(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle_{\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{X}}_{r-1})}^\perp \end{aligned}$$

по леммам 4.11 и 4.12. Принимая во внимание точный треугольник (4.9), заключаем, что

$$\xi_* \tilde{\Phi}_r(\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{Y}}_r)) \subset \langle E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), \dots, E_2(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle_{\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{X}}_{r-1})}^\perp,$$

следовательно, по сопряженности имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_r(\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{Y}}_r)) &\subset \xi^*(\langle E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), \dots, E_2(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle_{\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{X}}_{r-1})}^\perp) \\ &= \langle E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), \dots, E_2(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle_{\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{X}}_r)}^\perp \\ &\subset \psi^*(\langle E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots, E_2(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r) \rangle_{\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)}^\perp).\end{aligned}$$

Также в силу сопряженности имеем

$$\psi_*\tilde{\Phi}_r(\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{Y}}_r)) \subset \langle E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots, E_2(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r) \rangle_{\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)}^\perp.$$

Согласно следствию 4.5 имеем $\psi_*\psi^* \cong \text{id}_{\mathcal{Y}_r}$. Применяя лемму 2.42, получаем

$$\Phi_r(\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)) = \psi_*\psi^*\Phi_r(\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)) = \psi_*\tilde{\Phi}_r\psi^*(\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)) \subset \psi_*\tilde{\Phi}_r(\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{Y}}_r)).$$

Вместе с предыдущим включением это доказывает утверждение (i) для r .

Для доказательства утверждения (ii) заметим, что в силу формулы (4.11) и леммы 4.11, (iii) имеем

$$\Phi_{i_*\tilde{\mathcal{E}}(1,0) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^*}^! \circ \tilde{\Phi}_{r-1} = 0.$$

Поэтому из треугольника (4.10) следует, что $\tilde{\Phi}_r^!\xi^*\tilde{\Phi}_{r-1} \cong \eta_*\tilde{\Phi}_{r-1}^!\tilde{\Phi}_{r-1}$. Учитывая следствие 4.10 и предположение индукции, получаем

$$\tilde{\Phi}_r^!\tilde{\Phi}_r\eta_* \cong \tilde{\Phi}_r^!\xi^*\tilde{\Phi}_{r-1} \cong \eta_*\tilde{\Phi}_{r-1}^!\tilde{\Phi}_{r-1} \cong \eta_*.$$

Наконец, применяя следствие 4.5 и лемму 2.42, выводим

$$\Phi_r^!\Phi_r \cong \Phi_r^!\Phi_r\hat{\psi}_*\hat{\psi}^* \cong \Phi_r^!\Phi_r\psi_*\eta_*\hat{\psi}^* \cong \psi_*\tilde{\Phi}_r^!\tilde{\Phi}_r\eta_*\hat{\psi}^* \cong \psi_*\eta_*\hat{\psi}^* \cong \hat{\psi}_*\hat{\psi}^* \cong \text{id}_{\mathcal{Y}_r}.$$

Таким образом, функтор Φ_r строго полон. Тем самым утверждение (ii) доказано для r .

Из доказанных результатов получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.14. Если $r \leq i$, то набор

$$\begin{aligned}\langle \Phi_r(\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)), E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), E_2(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots \\ \dots, E_1(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), E_2(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r) \rangle\end{aligned}\tag{4.12}$$

полуортогонален в $\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)$.

4.4. Полнота. Установим полноту полуортогонального набора (4.12). Вначале воспользуемся предложением 2.51 в относительной ситуации для доказательства того, что $\Phi_i: \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_i) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_i)$ – эквивалентность категорий. Затем докажем полноту для всех $r \leq i$ убывающей индукцией по r . Также мы вычислим каноническое расслоение на Y .

ЛЕММА 4.15. Имеем $\mathbf{P}_i \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из лемм 4.4 и 4.6 индукцией по r .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.16. *Функтор $\Phi_i: \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_i) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_i)$ является эквивалентностью категорий. Более того, $\dim \mathcal{Y}_i - \dim \mathbf{P}_i = \dim X - i$ и $\omega_{\mathcal{Y}_i} \cong \omega_{\mathbf{P}_i} \otimes \det \mathcal{L}_i^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что многообразие $\mathcal{X}_i$ гладко и связно по лемме 4.1, функтор Φ_i строго полон по предложению 4.13, (ii), а по формуле присоединения и лемме 4.3, (i) имеем

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{X}_i} &\cong (\omega_{X \times \mathbf{P}_i} \otimes \det(\mathcal{O}_X(1) \boxtimes \mathcal{L}_i^*))|_{\mathcal{X}_i} \\ &\cong ((\mathcal{O}_X(-i) \boxtimes \omega_{\mathbf{P}_i}) \otimes (\mathcal{O}_X(i) \boxtimes \det \mathcal{L}_i^*))|_{\mathcal{X}_i} \cong \omega_{\mathbf{P}_i} \otimes \det \mathcal{L}_i^* \end{aligned}$$

и $\dim \mathcal{X}_i - \dim \mathbf{P}_i = \dim X - i$. Заметим, что линейное расслоение $\omega_{\mathbf{P}_i} \otimes \det \mathcal{L}_i^*$ является обратным образом расслоения на $\mathbf{P}_i$, значит, по предложению 2.51 функтор Φ_i – эквивалентность категорий, $\dim \mathcal{Y}_i - \dim \mathbf{P}_i = \dim X - i$ и $\omega_{\mathcal{Y}_i} \cong \omega_{\mathbf{P}_i} \otimes \det \mathcal{L}_i^*$.

Теперь вычислим относительные канонические расслоения многообразий $\mathcal{Y}_r$ над $\mathbf{P}_r$ посредством убывающей индукции по r . Это позволит нам вычислить каноническое расслоение Y .

ЛЕММА 4.17. *При всех $r \leq i$ имеем $\omega_{\mathcal{Y}_r/\mathbf{P}_r} \cong \det \mathcal{L}_r^*(i - r)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся убывающей индукцией по r . Основание индукции, $r = i$, вытекает из предложения 4.16. Действительно, $\omega_{\mathcal{Y}_i/\mathbf{P}_i} \cong \omega_{\mathcal{Y}_i} \otimes g^* \omega_{\mathbf{P}_i}^{-1} \cong \det \mathcal{L}_i^*$. Предположим теперь, что наше утверждение верно для r , и рассмотрим диаграммы (4.2). С помощью формулы присоединения и леммы 4.3, (iv) получаем

$$\begin{aligned} \omega_{\tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}/\mathbf{S}_r} &\cong \omega_{\tilde{\mathcal{Y}}_r/\mathbf{S}_r} \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})(1) \cong \det \tilde{\mathcal{L}}_r^*(i - r) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})(1) \\ &\cong \det \tilde{\mathcal{L}}_{r-1}^*(i - (r - 1)) \cong \phi^* \det \mathcal{L}_{r-1}^*(i - (r - 1)). \end{aligned}$$

С другой стороны, $\omega_{\tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}/\mathbf{S}_r} \cong \phi^* \omega_{\mathcal{Y}_{r-1}/\mathbf{P}_{r-1}}$, так как ϕ плоско. Сравнивая последние два изоморфизма и пользуясь следствием 4.7, получаем искомым изоморфизм $\omega_{\mathcal{Y}_{r-1}/\mathbf{P}_{r-1}} \cong \det \mathcal{L}_{r-1}^*(i - (r - 1))$.

СЛЕДСТВИЕ 4.18. *Имеем $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(i - N)$ и $\dim Y = \dim X + N - 2i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\mathcal{Y}_1 = Y$, $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}$ и $\det \mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_1 \cong \mathcal{O}_Y(-1)$. Значит,

$$\omega_Y \cong \omega_{Y/\mathbf{P}} \otimes \omega_{\mathbf{P}} \cong \omega_{\mathcal{Y}_1/\mathbf{P}_1} \otimes \omega_{\mathbf{P}} \cong (\mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathcal{O}_Y(i - 1)) \otimes \mathcal{O}_Y(-N) \cong \mathcal{O}_Y(i - N).$$

С другой стороны, по лемме 4.1 имеем $\dim \mathcal{Y}_i - \dim \mathbf{P}_i = \dim Y + i - N$, следовательно, по предложению 4.16 имеем $\dim Y + i - N = \dim X - i$, откуда $\dim Y = \dim X + N - 2i$.

Теперь докажем полноту построенных полуортогональных наборов в производных категориях $\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)$ при $r \leq i$.

ТЕОРЕМА 4.19. *При всех $r \leq i$ имеем полуортогональные разложения*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r) &= \langle \Phi_r(\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)), E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), E_2(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots \\ &\quad \dots, E_1(i - r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), E_2(i - r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r) \rangle. \end{aligned} \quad (4.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся убывающей индукцией по r . Основание индукции, $r = i$, доказывается в предложении 4.16. Предположим, что (4.13) верно для r . Тогда по теореме 2.46 о строгой замене базы имеем

$$\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{X}}_r) = \langle \tilde{\Phi}_r(\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{Y}}_r)), E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), \dots, E_2(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle. \quad (4.14)$$

Возьмем произвольный объект

$$G \in \langle \Phi_{r-1}(\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_{r-1})), E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_{r-1}), \dots, E_2(i-r+1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_{r-1}) \rangle^\perp.$$

Рассмотрим диаграмму (4.2). В силу леммы 2.37 выполнено равенство $f_{r-1*} R\mathcal{H}om(E_s(k), G) = 0$ при $s = 1, 2$ и $1 \leq k \leq i-r+1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} f_{r-1*} R\mathcal{H}om(\phi^* E_s(k), \phi^* G) &= f_{r-1*} \phi^* R\mathcal{H}om(E_s(k), G) \\ &= \phi^* f_{r-1*} R\mathcal{H}om(E_s(k), G) = 0, \end{aligned}$$

так как правый декартов квадрат в (4.2) точен, значит,

$$\phi^* G \in \langle E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), \dots, E_2(i-r+1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle^\perp \quad (4.15)$$

С другой стороны, из леммы 4.3, (iii) следует существование резольвенты

$$0 \rightarrow E_s(k) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1}) \rightarrow E_s(k+1) \rightarrow \xi_* E_s(k+1) \rightarrow 0.$$

Отсюда имеем

$$\phi^* G \in \langle \xi_* E_1(2) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), \dots, \xi_* E_2(i-r+1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle^\perp,$$

и по сопряженности

$$\xi^! \phi^* G \in \langle E_1(2) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), \dots, E_2(i-r+1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle^\perp.$$

Далее, $\xi^! \phi^* G \cong \xi^* \phi^* G \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^*(1)[-1] \cong \hat{\phi}^* G \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^*(1)[-1]$, следовательно,

$$\hat{\phi}^* G \in \langle E_1(1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), \dots, E_2(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle^\perp. \quad (4.16)$$

С другой стороны, в силу (4.15) и леммы 4.11, (iii) следует, что

$$\Phi_{i* \hat{\mathcal{E}}(1,0) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^*}^! (\phi^* G) = 0.$$

Поэтому, применяя точный треугольник функторов (4.10) к объекту $\phi^* G$, заключаем, что $\tilde{\Phi}_r^! \xi^* \phi^* G \cong \eta_* \tilde{\Phi}_{r-1}^! \phi^* G$. Однако $\tilde{\Phi}_{r-1}^! \phi^*(G) \cong \phi^* \tilde{\Phi}_{r-1}^!(G) = 0$, так как $G \in \Phi_{r-1}(\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_{r-1}))^\perp$ по предположению. Таким образом, мы показали, что $\tilde{\Phi}_r^! \hat{\phi}^*(G) = 0$, значит,

$$\hat{\phi}^* G \in \tilde{\Phi}_r(\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{Y}}_r))^\perp.$$

Сравнивая это включение с (4.16) и (4.14), заключаем, что $\hat{\phi}^* G = 0$. Следовательно, $G = 0$ по следствию 4.7, и полнота набора (4.13) для $r-1$ доказана.

4.5. Исключительный набор на Y . Покажем, что набор объектов $(F_1(1), F_2(1), \dots, F_1(N-i), F_2(N-i))$ на Y является в некотором смысле исключительным. Идея доказательства вполне проста. Легко видеть, что если набор расслоений $(E(1), \dots, E(i))$ на многообразии Фано X индекса i исключителен, то ограничение расслоения E на линейное сечение X коразмерности i (являющееся многообразием Калаби–Яу) тоже исключительно. Оказывается, что верно и обратное: если ограничение векторного расслоения на любое линейное сечение X Калаби–Яу исключительно, то набор $(E(1), \dots, E(i))$ на X тоже исключителен. Этот факт используется следующим образом. Сначала мы рассматриваем исключительную пару $(E_0(1), E_1(1))$ на X , получающуюся из пары (E_1, E_2) перестройкой и подкруткой, и проверяем, что функтор $\Phi_1^!$ переводит ее в пару (F_2^*, F_1^*) на $\mathcal{Y}$ с точностью до подкрутки и сдвига. Поскольку Φ_1 – эквивалентность, то сопряженный функтор $\Phi_1^!$ также является эквивалентностью, поэтому пара (F_2^*, F_1^*) на $\mathcal{Y}$ исключительна. Однако эта пара получается ограничением пары (F_2^*, F_1^*) с Y на универсальное семейство линейных сечений Калаби–Яу, значит, набор $(F_2^*(1), F_1^*(1), \dots, F_2^*(N-i), F_1^*(N-i))$ на Y исключителен.

Теперь приведем подробное доказательство. Определим объект $E_0 \in \mathcal{D}(X)$ как перестройку E_2 через E_1 (см. [2]). Таким образом, имеем точный треугольник

$$E_0 \rightarrow \mathrm{RHom}(E_1, E_2) \otimes E_1 \rightarrow E_2. \quad (4.17)$$

ЛЕММА 4.20 (ср. [2]). *Имеем*

$$\begin{aligned} \mathrm{RHom}(E_1, E_0(k)) &= 0 \quad \text{при } 1-i \leq k \leq 0, \\ \mathrm{RHom}(E_2, E_0(k)) &= \begin{cases} 0 & \text{при } 1-i \leq k \leq -1, \\ \mathbb{k}[-1] & \text{при } k = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем функторы $\mathrm{RHom}(E_1, -)$ и $\mathrm{RHom}(E_2, -)$ к треугольнику (4.17).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.21. *При всех $1 \leq r \leq i$ и $s = 0, 1$ имеем*

$$\Phi_r^!(E_s(k)) = \begin{cases} 0 & \text{при } r+1-i \leq k \leq 0, \\ F_{2-s}^*(i-r-1) \otimes \det \mathcal{L}_r^*[\dim Y - N + r] & \text{при } k = 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по r . Прежде всего рассмотрим случай $r = 1$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}_1 \times Y & \xleftarrow{j} & Q(X, Y) & \xrightarrow{i} & X \times Y \\ p_1 \swarrow & & \searrow p & & \downarrow q \\ \mathcal{X}_1 & \xrightarrow{\pi} & X & \xleftarrow{p} & Y \end{array}$$

Заметим, что расслоение $E_s(k)$ на $\mathcal{X}_1$ является обратным образом относительно π . Однако

$$\Phi_1^!(\pi^*G) \cong \Phi_1^!(\pi^!G \otimes \omega_{\mathcal{X}_1/X}^{-1}[\dim X - \dim \mathcal{X}_1]),$$

и так как по формуле присоединения и лемме 4.3, (i) $\omega_{\mathcal{X}_1/X} \cong \omega_{\mathbf{P}} \otimes (\mathcal{O}_X(1) \boxtimes \mathcal{L}_1^*)$, $\dim \mathcal{X}_1 = \dim X + N - 2$ и функтор $\Phi_1^!$ $\mathbf{P}$ -линеен, получаем

$$\Phi_1^!(\pi^*G) \cong \Phi_1^!(\pi^!(G(-1))) \otimes \omega_{\mathbf{P}}^{-1} \otimes \mathcal{L}_1[2 - N]. \quad (4.18)$$

С другой стороны, ясно, что функтор $\Phi_1^! \circ \pi^!$ является ядерным функтором второго типа с ядром $(\pi \times \text{id}_Y)_* \mathcal{E}_1 \cong (\pi \times \text{id}_Y)_* j_* \mathcal{E} \cong i_* \mathcal{E}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi_1^!(\pi^!G(-1)) &\cong \Phi_{i_* \mathcal{E}}^!(G(-1)) = q_* R\mathcal{H}om(i_* \mathcal{E}, p^!(G(-1))) \\ &\cong q_* R\mathcal{H}om(i_* \mathcal{E}, G(-1) \boxtimes \omega_Y[\dim Y]). \end{aligned}$$

Пользуясь резольвентой (3.1) и леммой 4.20, получаем $\Phi_1^!(\pi^!E_s(k-1)) = 0$ при $s = 0, 1$ и $2 - i \leq k \leq 0$, а при $k = 1$ мы получаем следующие точные треугольники:

$$\begin{aligned} \Phi_1^!(\pi^!(E_0(-1))) &\rightarrow F_2^* \otimes \omega_Y[\dim Y - 1] \rightarrow 0, \\ \Phi_1^!(\pi^!(E_1(-1))) &\rightarrow 0 \rightarrow F_1^* \otimes \omega_Y[\dim Y]. \end{aligned}$$

В итоге мы получаем

$$\Phi_1^!(\pi^!E_s(k-1)) \cong \begin{cases} 0 & \text{при } 2 - i \leq k \leq 0, \quad s = 0, 1, \\ F_{2-s}^* \otimes \omega_Y[\dim Y - 1] & \text{при } k = 1, \quad s = 0, 1. \end{cases}$$

Подставляя эти равенства в (4.18) и учитывая изоморфизмы $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(i - N)$ (см. следствие 4.18), $\omega_{\mathbf{P}}^{-1} \cong \mathcal{O}_Y(N)$ и $\det \mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_1 \cong \mathcal{O}_Y(-1)$, выводим утверждение для $r = 1$.

Теперь предположим, что утверждение верно для $r - 1$. Рассмотрим диаграмму (4.2). Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{r-1}^!(E_s(k)) &\cong \tilde{\Phi}_{r-1}^! \phi^*(E_s(k)) \cong \phi^* \Phi_{r-1}^!(E_s(k)) \\ &\cong \begin{cases} 0 & \text{при } r - i \leq k \leq 0, \quad s = 0, 1, \\ \phi^* F_{2-s}^*(i - r) \otimes \det \mathcal{L}_{r-1}^*[\dim Y - N + r - 1] & \text{при } k = 1, \quad s = 0, 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.19)$$

по лемме 2.42 и предположению индукции. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^* \Phi_r^!(E_s(k)) &\cong \eta^* \psi^* \Phi_r^!(E_s(k)) \cong \eta^* \tilde{\Phi}_r^!(\psi^* E_s(k)) \\ &\cong \eta^* \tilde{\Phi}_r^!(E_s(k)) \otimes \mathcal{O}_Y(-1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^*[1] \\ &\cong \tilde{\Phi}_{r-1}^!(\xi_* E_s(k)) \otimes \mathcal{O}_Y(-1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^*[1] \end{aligned}$$

по лемме 2.42, лемме 4.3, (iv) и следствию 4.10. Пользуясь резольвентой

$$0 \rightarrow E_s(k-1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1}) \rightarrow E_s(k) \rightarrow \xi_* E_s(k) \rightarrow 0$$

и формулой (4.19), получаем изоморфизм

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^* \Phi_r^!(E_s(k)) &\cong \\ &\cong \begin{cases} 0 & \text{при } r + 1 - i \leq k \leq 0, \quad s = 0, 1, \\ F_{2-s}^*(i - r - 1) \otimes \det \tilde{\mathcal{L}}_r^*[\dim Y - N + r] & \text{при } k = 1, \quad s = 0, 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Наконец, применяя следствие 4.5, выводим утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.22. Пусть $s, t = 1, 2$. Тогда

$$g_{i*}R\mathcal{H}om_{\mathcal{Y}_i}(F_s, F_t) \cong \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_i} \oplus \det \mathcal{L}_i[i - \dim X] & npu \quad s = t, \\ W \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_i} & npu \quad s = 1, \quad t = 2, \\ W^* \otimes \det \mathcal{L}_i[i - \dim X] & npu \quad s = 2, \quad t = 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложений 4.21, 2.38 и 4.16 имеем

$$\begin{aligned} g_{i*}R\mathcal{H}om_{\mathcal{Y}_i}(F_s, F_t) &\cong g_{i*}R\mathcal{H}om_{\mathcal{Y}_i}(F_t^*(-1) \otimes \det \mathcal{L}_i^*[\dim Y - N + i], F_s^*(-1) \otimes \det \mathcal{L}_i^*[\dim Y - N + i]) \\ &\cong g_{i*}R\mathcal{H}om_{\mathcal{Y}_i}(\Phi_i^!(E_{2-t}(1)), \Phi_i^!(E_{2-s}(1))) \cong f_{i*}R\mathcal{H}om_{\mathcal{X}_i}(\Phi_i \Phi_i^!(E_{2-t}(1)), E_{2-s}(1)) \\ &\cong f_{i*}R\mathcal{H}om_{\mathcal{X}_i}(E_{2-t}(1), E_{2-s}(1)) \cong f_{i*}R\mathcal{H}om_{\mathcal{X}_i}(E_{2-t}, E_{2-s}). \end{aligned}$$

С другой стороны, $f_{i*}R\mathcal{H}om_{\mathcal{X}_i}(E_{2-t}, E_{2-s}) \cong f_{i*}(E_{2-t}^* \otimes E_{2-s})$. Тензорно умножая резольвенту Кошуля структурного пучка $\mathcal{X}_i$ в $X \times \mathbf{P}_i$ (см. лемму 4.3, (i)) на $E_{2-t}^* \otimes E_{2-s}$, мы видим, что прямой образ расслоения $E_{2-t}^* \otimes E_{2-s}$ с $\mathcal{X}_i$ на $X \times \mathbf{P}_i$ квазиизоморфен комплексу

$$\begin{aligned} (E_{2-t}^* \otimes E_{2-s}(-i)) \boxtimes \det \mathcal{L}_i &\rightarrow (E_{2-t}^* \otimes E_{2-s}(1-i)) \boxtimes \mathcal{L}_i^{i-1} \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow (E_{2-t}^* \otimes E_{2-s}(-1)) \boxtimes \mathcal{L}_i \rightarrow E_{2-t}^* \otimes E_{2-s}. \end{aligned}$$

Применяя функтор f_{i*} и пользуясь формулой Кюннета на $X \times \mathbf{P}_i$ и условием (C.3), получаем утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.23. Если $r \geq i$ и $\mathbf{P}_r \neq \emptyset$, то

$$\mathcal{H}^p(g_{r*}R\mathcal{H}om_{\mathcal{Y}_r}(F_s(k), F_t(l))) \cong \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_r} & npu \quad s = t, \quad k = l \\ & u \quad p = 0, \\ \det \mathcal{L}_r & npu \quad s = t, \quad k - l = r - i \\ & u \quad p = \dim X + r - 2i, \\ W \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_r} & npu \quad s = 1, \quad t = 2, \\ & k = l \quad u \quad p = 0, \\ W^* \otimes \det \mathcal{L}_r & npu \quad s = 2, \quad t = 1, \\ & k - l = r - i \\ & u \quad p = \dim X + r - 2i, \\ 0 & npu \quad 0 \leq k - l \leq r - i. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по r . Основание индукции, $r = i$, вытекает из следствия 4.22. Предположим теперь, что утверждение верно для $r - 1$, и рассмотрим диаграмму (4.2). Обозначим

$$\mathcal{F}_{s,k,t,l}^r = g_{r*}R\mathcal{H}om_{\mathcal{Y}_r}(F_s(k), F_t(l)), \quad \tilde{\mathcal{F}}_{s,k,t,l}^r = g_{r*}R\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{Y}}_r}(F_s(k), F_t(l)).$$

Сначала заметим, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}_{s,k,t,l}^{r-1} &= g_{r-1*}R\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}}(F_s(k), F_t(l)) \cong g_{r-1*}\phi^*R\mathcal{H}om_{\mathcal{Y}_{r-1}}(F_s(k), F_t(l)) \\ &\cong \phi^*g_{r-1*}R\mathcal{H}om_{\mathcal{Y}_{r-1}}(F_s(k), F_t(l)) = \phi^*\mathcal{F}_{s,k,t,l}^{r-1}. \end{aligned}$$

Аналогично, $\tilde{\mathcal{F}}_{s,k,t,l}^r \cong \psi^* \mathcal{F}_{s,k,t,l}^r$. С другой стороны, в силу леммы 4.3, (iv) мы имеем резольвенту

$$0 \rightarrow F_t(l-1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^* \rightarrow F_t(l) \rightarrow \eta_* F_t(l) \rightarrow 0.$$

Применяя к ней функтор $g_{r*} R\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{Y}}_r}(F_s(k), -)$ и учитывая изоморфизмы

$$\begin{aligned} g_{r*} R\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{Y}}_r}(F_s(k), \eta_* F_t(l)) &\cong g_{r*} \eta_* R\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}}(\eta^* F_s(k), F_t(l)) \\ &\cong g_{r-1*} R\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}}(F_s(k), F_t(l)) = \tilde{\mathcal{F}}_{s,k,t,l}^{r-1}, \end{aligned}$$

получаем следующий точный треугольник на $\mathbf{S}_r$:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{s,k,t,l-1}^r \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^* \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{s,k,t,l}^r \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{s,k,t,l}^{r-1}.$$

Поскольку $\tilde{\mathcal{F}}_{s,k,t,l}^{r-1} \cong \phi^* \mathcal{F}_{s,k,t,l}^{r-1}$, $\tilde{\mathcal{F}}_{s,k,t,l}^r \cong \psi^* \mathcal{F}_{s,k,t,l}^r$, можно переписать этот треугольник в виде

$$\psi^*(\mathcal{F}_{s,k,t,l-1}^r) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^* \rightarrow \psi^*(\mathcal{F}_{s,k,t,l}^r) \rightarrow \phi^* \mathcal{F}_{s,k,t,l}^{r-1}. \quad (4.20)$$

Наконец, заметим, что

$$\psi_*(\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^{\otimes(-m)} = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_r} & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } 1 \leq m \leq r-1, \\ \det \mathcal{L}_r^*[1-r] & \text{при } m = r \end{cases} \quad (4.21)$$

по лемме 4.4 (так как $\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1}$ — линейное расслоение Гротендика на $\mathbf{S}_r = \mathbb{P}_{\mathbf{P}_r}(\mathcal{L}_r^*)$). Следовательно, применяя функтор ψ_* к треугольнику (4.20), получаем

$$\mathcal{F}_{s,k,t,l}^r \cong \psi_* \phi^* \mathcal{F}_{s,k,t,l}^{r-1}$$

по следствию 4.5. Применяя тот же функтор ψ_* к треугольнику (4.20), тензорно умноженному на $(\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^{\otimes(1-r)}$, получаем

$$\mathcal{F}_{s,k,t,l-1}^r \otimes \det \mathcal{L}_r^*[2-r] \cong \psi_*(\phi^* \mathcal{F}_{s,k,t,l}^{r-1} \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^{\otimes(1-r)}).$$

Теперь можно использовать первую из этих формул и предположение индукции для вычисления $\mathcal{F}_{s,k,t,l}^r$ при $0 \leq k-l \leq r-1-i$, а вторую формулу и предположение индукции для вычисления $\mathcal{F}_{s,k,t,l}^r$ при $k-l = r-i$.

СЛЕДСТВИЕ 4.24. Если $\mathbf{Z} = \emptyset$, то $(F_1(1), F_2(1), \dots, F_1(N-i), F_2(N-i))$ — исключительный набор на Y , причем $R\mathcal{H}om(F_1, F_2) = W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathbf{Z} = \emptyset$, то $\mathcal{Y}_N = Y$ и $g_{N*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{Y}_N}(F_s(k), F_t(l)) = R\mathcal{H}om_Y(F_s(k), F_t(l))$.

4.6. Полуортогональные разложения для линейных сечений многообразия Y . Построим полуортогональные разложения производных категорий многообразий $\mathcal{Y}_r$ при $r \geq i$.

Прежде всего, необходимо убедиться в том, что категория $\Phi_r^!(\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r))$ ортогональна к объектам $F_s^*(k)$ при $i-r \leq k \leq -1$. Это вытекает из следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.25. Если $r \geq i$ и $\mathbf{P}_r \neq \emptyset$, то

$$\Phi_r(F_s^*(k)) \cong \begin{cases} 0 & \text{при } i - r \leq k \leq -1, \\ E_{2-s}(1) \otimes \det \mathcal{L}_r[N - r - \dim Y] & \text{при } k = i - r - 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теми же рассуждениями, что и при доказательстве предложения 4.23. Основание индукции, $r = i$, вытекает из предложения 4.21, так как $\Phi_i^!$ – эквивалентность категорий по предложению 4.16. Предположим теперь, что утверждение верно для $r - 1$, и рассмотрим диаграмму (4.2). Обозначим

$$\mathcal{G}_{s,k}^r = \Phi_r(F_s^*(k)), \quad \tilde{\mathcal{G}}_{s,k}^r = \tilde{\Phi}_r(F_s^*(k)).$$

Сначала заметим, что

$$\tilde{\mathcal{G}}_{s,k}^{r-1} = \tilde{\Phi}_{r-1}(F_s^*(k)) \cong \tilde{\Phi}_{r-1}(\phi^* F_s^*(k)) \cong \phi^* \Phi_{r-1}(F_s^*(k)) = \phi^* \mathcal{G}_{s,k}^{r-1}.$$

Аналогично, $\tilde{\mathcal{G}}_{s,k}^r \cong \psi^* \mathcal{G}_{s,k}^r$. С другой стороны, в силу леммы 4.3, (iv) мы имеем резольвенту

$$0 \rightarrow F_s^*(k-1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^* \rightarrow F_s^*(k) \rightarrow \eta_* F_s^*(k) \rightarrow 0.$$

Применяя к ней функтор $\tilde{\Phi}_r$ и учитывая следствие 4.10, получаем на $\mathbf{S}_r$ точный треугольник

$$\tilde{\mathcal{G}}_{s,k-1}^r \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^* \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_{s,k}^r \rightarrow \xi^* \tilde{\mathcal{G}}_{s,k}^{r-1}.$$

Поскольку $\tilde{\mathcal{G}}_{s,k}^{r-1} \cong \phi^* \mathcal{G}_{s,k}^{r-1}$, $\tilde{\mathcal{G}}_{s,k}^r \cong \psi^* \mathcal{G}_{s,k}^r$, можно переписать этот треугольник в виде

$$\psi^*(\mathcal{G}_{s,k-1}^r) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^* \rightarrow \psi^*(\mathcal{G}_{s,k}^r) \rightarrow \phi^* \mathcal{G}_{s,k}^{r-1}. \quad (4.22)$$

Наконец, воспользуемся формулами (4.21). Применяя функтор ψ_* к треугольнику (4.22), получаем

$$\mathcal{G}_{s,k}^r \cong \psi_* \phi^* \mathcal{G}_{s,k}^{r-1}$$

по следствию 4.5. Применяя тот же функтор ψ_* к треугольнику (4.22), тензорно умноженному на $(\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^{\otimes(1-r)}$, получаем

$$\mathcal{G}_{s,k-1}^r \otimes \det \mathcal{L}_r^*[2-r] \cong \psi_*(\phi^* \mathcal{G}_{s,k}^{r-1} \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^{\otimes(1-r)}).$$

Теперь можно использовать первую из этих формул и предположение индукции для вычисления $\mathcal{G}_{s,k}^r$ при $i - r \leq k \leq -1$, а вторую формулу и предположение индукции для вычисления $\mathcal{G}_{s,k}^r$ при $k = i - r - 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.26. При всех $r \geq i$ таких, что $\mathbf{P}_r \neq \emptyset$, следующий набор подкатегорий

$$\langle \Phi_r^!(\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)), F_2^*(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots, F_1^*(-1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r) \rangle$$

полуортogonalен в $\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $G, G' \in \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}_r}(g_r^* G \otimes F_t^*(l), g_r^* G' \otimes F_s^*(k)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}_r}(g_r^* G, g_r^* G' \otimes F_s^*(k) \otimes F_t(l)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_r}(G, g_{r*}(g_r^* G' \otimes F_s^*(k) \otimes F_t(l))) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_r}(G, G' \otimes g_{r*} \mathrm{RHom}_{\mathcal{Y}_r}(F_s(k), F_t(l))). \end{aligned}$$

Применяя предложение 4.23, немедленно получаем, что функторы $G \mapsto g_r^* G \otimes F_t^*(l)$ строго полные и что набор подкатегорий $\langle F_2^*(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots, F_1^*(-1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r) \rangle$ в $\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)$ полуортогонален. Далее, для всех $G \in \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r)$, $H \in \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)$, так как $\Phi_r^!$ сопряжен справа к Φ_r , а Φ_r $\mathbf{S}$ -линеен, имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}_r}(g_r^* G \otimes F_s^*(k), \Phi_r^!(H)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}_r}(\Phi_r(g_r^* G \otimes F_s^*(k)), H) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}_r}(f_r^* G \otimes \Phi_r(F_s^*(k)), H), \end{aligned}$$

что равно нулю при $i-r \leq k \leq -1$ по предложению 4.25. Следовательно, весь наш набор полуортогонален.

Докажем теперь полноту построенных полуортогональных наборов.

ТЕОРЕМА 4.27. Если $r \geq i$ и $\mathbf{P}_r \neq \emptyset$, то существует полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r) = \langle \Phi_r^!(\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)), F_2^*(i-r) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots, F_1^*(-1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r) \rangle. \quad (4.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 4.26 достаточно проверить, что функтор $\Phi_r^!$ строго полон и что правая часть формулы (4.23) порождает $\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)$. Воспользуемся индукцией по r . Основание индукции, $r = i$, доказано в предложении 4.16. Предположим теперь, что утверждение верно для $r-1$, и рассмотрим диаграмму (4.2). По теореме 2.46 о строгой замене базы мы получаем полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}) = \langle \tilde{\Phi}_{r-1}^!(\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{X}}_{r-1})), F_2^*(i-r+1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), \dots, F_1^*(-1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle. \quad (4.24)$$

По предложению 4.26 имеем

$$\tilde{\Phi}_r^!(\mathcal{D}^b(\tilde{\mathcal{X}}_r)) \subset \langle F_2^*(-1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), F_1^*(-1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle^\perp.$$

Пользуясь леммой 4.11, (i), заключаем, что $\Phi_{i*} \hat{\mathcal{E}}(0,1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r / \tilde{\mathcal{L}}_{r-1}) \circ \tilde{\Phi}_r^! = 0$. Поэтому композируя точный треугольник (4.9) с функтором $\tilde{\Phi}_r^!$, получаем изоморфизм $\tilde{\Phi}_{r-1} \eta^! \tilde{\Phi}_r^! \cong \xi_* \tilde{\Phi}_r \tilde{\Phi}_r^!$. Применяя теперь следствие 4.10 и предположение индукции, выводим

$$\xi_* \tilde{\Phi}_r \tilde{\Phi}_r^! \cong \tilde{\Phi}_{r-1} \eta^! \tilde{\Phi}_r^! \cong \tilde{\Phi}_{r-1} \tilde{\Phi}_r^! \xi_* \cong \xi_*.$$

Далее, из леммы 2.8, b) вытекает, что $\tilde{\Phi}_r \tilde{\Phi}_r^! \cong \mathrm{id}_{\tilde{\mathcal{X}}_r}$. Пользуясь теперь леммой 2.42 и следствием 4.5, получаем

$$\Phi_r \Phi_r^! \cong \psi_* \psi^* \Phi_r \Phi_r^! \cong \psi_* \tilde{\Phi}_r \psi^* \Phi_r^! \cong \psi_* \tilde{\Phi}_r \tilde{\Phi}_r^! \psi^* \cong \psi_* \psi^* \cong \mathrm{id}_{\mathcal{X}_r}.$$

Значит, функтор $\Phi_r^!$ строго полон.

Наконец, предположим, что объект $G \in \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)$ находится в левом ортогонале к правой части формулы (4.23), так что

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}_r}(G, F_s^*(k)) = 0 \quad \text{при} \quad i - r \leq k \leq -1 \quad \text{и} \quad \Phi_r(G) = 0. \quad (4.25)$$

Поскольку функтор $\hat{\psi}^*$ строго полон по следствию 4.5, для всех $i - r + 1 \leq k \leq -1$ имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}}(\hat{\psi}^*G(1), F_s^*(k)) &\cong \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{Y}}_{r-1}}(\hat{\psi}^*G, \hat{\psi}^*F_s^*(k-1)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}_r}(G, F_s^*(k-1)) = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как

$$\hat{\psi}^*G(1) \cong \eta^*\psi^*G(1) \cong \eta^!\psi^*G \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^*[1]$$

в силу леммы 4.3, (iv) и, кроме того, $\psi^*G \in \langle F_2^*(-1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r), F_1^*(-1) \otimes \mathcal{D}^b(\mathbf{S}_r) \rangle^\perp$ в силу строгой полноты функтора ψ^* (следствие 4.5), по лемме 4.11 имеем равенство $\Phi_{i_*\hat{\mathcal{E}}(0,1) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})}(\psi^*G) = 0$. Принимая во внимание треугольник (4.9), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{r-1}(\hat{\psi}^*G(1)) &\cong \tilde{\Phi}_{r-1}(\eta^!\psi^*G \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^*[1]) \cong (\tilde{\Phi}_{r-1}\eta^!\psi^*G) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^*[1] \\ &\cong (\xi_*\tilde{\Phi}_r\psi^*G) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^*[1] \cong (\xi_*\psi^*\Phi_r(G)) \otimes (\tilde{\mathcal{L}}_r/\tilde{\mathcal{L}}_{r-1})^*[1] = 0 \end{aligned}$$

в силу (4.25). Таким образом, объект $\hat{\psi}^*G(1)$ находится в левом ортогонале к правой части формулы (4.24). По предположению индукции получаем $\hat{\psi}^*G(1) = 0$. Но тогда $G(1) = \hat{\psi}_*\hat{\psi}^*G(1) = 0$, значит, $G = 0$. Этим заканчивается индукционный шаг.

4.7. Доказательство теоремы 1.2. Выберем допустимое подпространство $L \subset V^*$ размерности $\dim L = r$.

ЛЕММА 4.28. *Морфизм схем $\varphi: \mathrm{Spec} \mathbb{k} \rightarrow \mathbf{P}_r$, соответствующий подпространству L , является строгой заменой базы относительно пары $(\mathcal{X}_r, \mathcal{Y}_r)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следствием 2.27 и леммами 4.3, 4.1 и определением допустимого подпространства.

Теперь воспользуемся теоремой 2.46 о строгой замене базы. Теорема 1.2 немедленно следует из нее и из теорем 4.19 и 4.27.

СЛЕДСТВИЕ 4.29. *Пусть $L \subset V^*$ – допустимое подпространство. Многообразие Y_L гладко тогда и только тогда, когда гладко X_L .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 10.19 следует, что X_L гладко тогда и только тогда, когда категория $\mathcal{D}^b(X_L)$ Ext-ограничена, а Y_L гладко тогда и только тогда, когда категория $\mathcal{D}^b(Y_L, \mathcal{A}_Y)$ Ext-ограничена. С другой стороны, одна из этих категорий вкладывается как полная подкатегория в другую категорию, а ортогонал к ней порождается исключительным набором. Поэтому категория $\mathcal{D}^b(X_L)$ Ext-ограничена тогда и только тогда, когда категория $\mathcal{D}^b(Y_L, \mathcal{A}_Y)$ Ext-ограничена.

Обозначим через $\text{sing}(g) \subset \mathbb{P}(V^*) \setminus \mathbf{Z}$ множество критических значений морфизма $g: Y \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \setminus \mathbf{Z}$. Обозначим через $X^\vee \subset \mathbb{P}(V^*)$ проективно двойственное к X многообразие.

СЛЕДСТВИЕ 4.30. *Если морфизм g плоский, то $\text{sing}(g) = X^\vee \setminus \mathbf{Z}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если морфизм g плоский, то всякое одномерное подпространство $H \subset V^*$ допустимо, поэтому

$$\text{sing}(g) = \{H \in \mathbb{P}(V^*) \setminus \mathbf{Z} \mid Y_H \text{ особо}\} = \{H \in \mathbb{P}(V^*) \setminus \mathbf{Z} \mid Y_H \text{ особо}\} = X^\vee \setminus \mathbf{Z}.$$

§ 5. Общая конструкция многообразия Y

В настоящем параграфе предлагается подход к построению многообразия Адзумаи Y , соответствующего данному многообразию X . Подход основан на использовании многообразий модулей представлений колчанов. Основной ссылкой по этой теме является работа [16]. Мы будем часто использовать обозначения и терминологию из этой работы.

Итак, зафиксируем данные (D.1) и (D.2), удовлетворяющие условиям (C.1)–(C.3). Предположим также, что

$$\text{Ext}^{>0}(E_2(-1), E_1) = \text{Ext}^{>0}(E_2(-1), E_2) = 0. \quad (5.1)$$

Рассмотрим колчан $Q = \bullet \xrightarrow{W} \bullet$ с двумя вершинами и $\dim W$ стрелками из первой вершины во вторую. Рассмотрим также функцию наклона $\theta: K_0(Q) \rightarrow \mathbb{Z}$, заданную формулой

$$\theta(d_1, d_2) = d_2 \text{rank}(E_2) - d_1 \text{rank}(E_1). \quad (5.2)$$

Для всякого вектора размерности $(d_1, d_2) \in K_0(Q)$ рассмотрим пару векторных пространств R_1, R_2 размерностей d_1 и d_2 соответственно и векторное пространство $\mathbf{R} = \mathbf{R}_Q(d_1, d_2) = \text{Hom}(R_1 \otimes W, R_2)$, параметризующее все (d_1, d_2) -мерные представления колчана Q . Обозначим через $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ тривиальные векторные расслоения на $\mathbf{R}$ со слоями R_1 и R_2 соответственно. Естественное отображение $\rho: W \otimes \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2$ на $\mathbf{R}$ является универсальным семейством представлений колчана. Рассмотрим на $X \times \mathbf{R}$ отображение $e: E_1 \boxtimes \mathcal{R}_1 \rightarrow E_2 \boxtimes \mathcal{R}_2$, определяемое как композиция:

$$e: E_1 \boxtimes \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\rho^*} E_1 \boxtimes (W^* \otimes \mathcal{R}_2) \cong (W^* \otimes E_1) \boxtimes \mathcal{R}_2 \xrightarrow{\text{ev}} E_2 \boxtimes \mathcal{R}_2,$$

где $\text{ev}: W^* \otimes E_1 = \text{Hom}(E_1, E_2) \otimes E_1 \rightarrow E_2$ – отображение вычисления. Для всякого представления $\rho \in \mathbf{R}$ обозначим через e_ρ ограничение e на $X \cong X \times \{\rho\} \subset X \times \mathbf{R}$. Пусть

$$C = \text{Coker } e, \quad C_\rho = \text{Coker } e_\rho \cong C|_{X \times \{\rho\}}.$$

Вложение $V^* \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \subset \text{Hom}(E_2(-1) \boxtimes \mathcal{R}_2, E_2 \boxtimes \mathcal{R}_2)$ в композиции с проекцией $E_2 \boxtimes \mathcal{R}_2 \rightarrow C$ дает морфизм $V^* \otimes \mathcal{O}_{X \times \mathbf{R}} \rightarrow (E_2^*(1) \boxtimes \mathcal{R}_2^*) \otimes C$.

Применяя функтор прямого образа относительно проекции $q: X \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, получаем гомоморфизм

$$\nu: V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{R}} \rightarrow R^0 q_*((E_2^*(1) \boxtimes \mathcal{R}_2^*) \otimes C). \quad (5.3)$$

Далее предположим, что вектор размерности (d_1, d_2) удовлетворяет условию

$$\theta(d_1, d_2) = 0.$$

Вектор размерности определяется этим условием с точностью до константы. Положим $\gcd(d_1, d_2) = m$ и обозначим соответствующее пространство представлений $\mathbf{R}_Q(d_1, d_2)$ через $\mathbf{R}_m$. Рассмотрим следующие подмножества в $\mathbf{R}_m$:

- множество θ -стабильных точек $\mathbf{R}_m^s$;
- множество θ -полустабильных точек $\mathbf{R}_m^{ss}$;
- открытое подмножество $\mathbf{R}_m^\circ = \{\rho \in \mathbf{R}_m \mid \text{Ker } e_\rho = 0\} \subset \mathbf{R}_m$;
- подмножество $\mathbf{R}_m^1 = \{\rho \in \mathbf{R}_m \mid \text{Ker } \nu_\rho \neq 0\} \subset \mathbf{R}_m$;
- подмножество $\tilde{\mathbf{R}}_m^1 = \{(\rho, H) \in \mathbf{R}_m \times \mathbb{P}(V^*) \mid \nu_\rho(H) = 0\} \subset \mathbf{R}_m \times \mathbb{P}(V^*)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Имеем следующие вложения: $\tilde{\mathbf{R}}_m^1 \subset \mathbf{R}_m^1 \times \mathbb{P}(V^*)$ и $\mathbf{R}_m^1 \subset \mathbf{R}_m^\circ \subset \mathbf{R}_m^{ss}$. Более того, пучок $R^0 q_*((E_2^*(1) \boxtimes \mathcal{R}_2^*) \otimes C)$ локально свободен на $\mathbf{R}_m^\circ$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое вложение очевидно. Пусть $\rho \in \mathbf{R}_m^1$ и $0 \neq H \in \text{Ker } \nu_\rho$. Заметим, что композиция отображения ν_ρ с каноническим отображением

$$(R^0 q_*((E_2^*(1) \boxtimes \mathcal{R}_2^*) \otimes C))_\rho \rightarrow H^0(X, (E_2^*(1) \boxtimes \mathcal{R}_2^*) \otimes C_\rho) \cong \text{Hom}(E_2(-1) \otimes R_2, C_\rho)$$

совпадает с композицией $V^* \rightarrow \text{Hom}(E_2(-1) \otimes R_2, E_2 \otimes R_2) \rightarrow \text{Hom}(E_2(-1) \otimes R_2, C_\rho)$. Наше предположение означает, что морфизм, обозначенный пунктирной стрелкой, в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} E_2(-1) \otimes R_2 & \longrightarrow & C_\rho(-1) \\ \downarrow H & \searrow & \downarrow H \\ E_2 \otimes R_2 & \longrightarrow & C_\rho \end{array}$$

равен нулю. Однако, поскольку верхний морфизм сюръективен, отображение $C_\rho(-1) \xrightarrow{H} C_\rho$ равно нулю, следовательно, пучок C сосредоточен теоретико-схемно на гиперплоском сечении X_H многообразия X . Таким образом,

$$\rho \in \mathbf{R}_m^1 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \text{supp}(C_\rho) \subset H \in |\mathcal{H}|, \quad (5.4)$$

где $|\mathcal{H}|$ – линейная система гиперплоских сечений многообразия $X \subset \mathbb{P}(V)$. В частности, отсюда следует, что для $\rho \in \mathbf{R}_m^1$ выполнено $\text{rank}(C_\rho) = 0$, значит,

$$\text{rank Ker } e_\rho = \text{rank}(E_1 \otimes R_1) - \text{rank}(E_2 \otimes R_2) = -\theta(d_1, d_2) = 0,$$

т.е. e_ρ – мономорфизм, так что $\mathbf{R}_m^1 \subset \mathbf{R}_m^\circ$. Более того, для всякого $\rho \in \mathbf{R}_m^1$ имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow E_1 \otimes R_1 \xrightarrow{e_\rho} E_2 \otimes R_2 \rightarrow C_\rho \rightarrow 0. \quad (5.5)$$

Заметим также, что морфизм $e|_{X \times \mathbf{R}_m^\circ}$ также является мономорфизмом, поэтому на $X \times \mathbf{R}_m^\circ$ имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow E_1 \boxtimes \mathcal{R}_1 \xrightarrow{e} E_2 \boxtimes \mathcal{R}_2 \rightarrow C \rightarrow 0. \quad (5.6)$$

Теперь покажем, что $\mathbf{R}_m^\circ \subset \mathbf{R}_m^{ss}$. Предположим, что $\rho \in \mathbf{R}_m^\circ$, но не является полустабильным. Тогда существуют подпространства $R'_1 \subset R_1$, $R'_2 \subset R_2$ такие, что $\theta(\dim R'_1, \dim R'_2) < 0$. Значит,

$$\text{rank Ker } e_{\rho'} \geq \text{rank}(E_1 \boxtimes R'_1) - \text{rank}(E_2 \boxtimes R'_2) = -\theta(\dim R'_1, \dim R'_2) > 0,$$

следовательно, $\text{Ker}(e_{\rho'}: E_1 \boxtimes R'_1 \rightarrow E_2 \boxtimes R'_2) \neq 0$. С другой стороны, ясно, что $\text{Ker } e_{\rho'} \subset \text{Ker } e_\rho = 0$. Противоречие.

Сравнивая последовательности (5.5) и (5.6), мы видим, что $C \otimes \mathcal{O}_{X \times \rho} \cong C_\rho$. Следовательно, пучок C (а значит, и $(E_2^*(1) \boxtimes \mathcal{R}_2^*) \otimes C$) плоский над $\mathbf{R}_m^\circ$. Далее, пользуясь последовательностью (5.5) и учитывая условия (5.1), заключаем, что $H^p(X, (E_2^*(1) \otimes R_2^*) \otimes C_\rho) = 0$ при $p > 0$, а размерность нулевых когомологий не зависит от ρ . Наконец, для всякой замкнутой точки $\rho \in \mathbf{R}_m^\circ$ имеем

$$q_*((E_2^*(1) \boxtimes \mathcal{R}_2^*) \otimes C) \otimes \mathcal{O}_\rho \cong H^\bullet(X, (E_2^*(1) \otimes R_2^*) \otimes C \otimes \mathcal{O}_{X \times \rho}).$$

Следовательно, $q_*((E_2^*(1) \boxtimes \mathcal{R}_2^*) \otimes C) = R^0 q_*((E_2^*(1) \boxtimes \mathcal{R}_2^*) \otimes C)$ является векторным расслоением.

ЛЕММА 5.2. Если выполняется условие

$$\text{codim}_{\mathbf{R}_m}(\mathbf{R}_m \setminus \mathbf{R}_m^\circ) \geq 2, \quad (5.7)$$

то множество $\mathbf{R}_m^1$ замкнуто в $\mathbf{R}_m$, а $\tilde{\mathbf{R}}_m^1$ замкнуто в $\mathbf{R}_m \times \mathbb{P}(V^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что $\tilde{\mathbf{R}}_m^1$ замкнуто в $\mathbf{R}_m^1 \times \mathbb{P}(V^*)$, очевидно. Кроме того, ясно, что $\mathbf{R}_m^1$ является множеством вырождения морфизма $\nu: V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{R}_m} \rightarrow R^0 q_*((E_2^*(1) \boxtimes \mathcal{R}_2^*) \otimes C)$, поэтому достаточно проверить, что пучок $R^0 q_*((E_2^*(1) \boxtimes \mathcal{R}_2^*) \otimes C)$ не имеет кручения.

Из условия (5.1) и последовательности (5.6) следует, что на $\mathbf{R}_m$ существует точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Hom}(E_2(-1), E_1) \otimes \mathcal{R}_2^* \otimes \mathcal{R}_1 \\ &\rightarrow \text{Hom}(E_2(-1), E_2) \otimes \mathcal{R}_2^* \otimes \mathcal{R}_2 \rightarrow R^0 q_*((E_2^*(1) \boxtimes \mathcal{R}_2^*) \otimes C) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так что интересующий нас пучок обладает левой локально свободной резольвентой длины 2. Следовательно, он не имеет кручения тогда и только тогда, когда он локально свободен вне подмножества коразмерности 2 (см. [20]). Но мы уже доказали в предложении 5.1, что он локально свободен на $\mathbf{R}_m^\circ$.

Следующая лемма полезна для проверки условия (5.7).

ЛЕММА 5.3. Если $\text{codim}_{\mathbf{R}_1}(\mathbf{R}_1 \setminus \mathbf{R}_1^\circ) \geq 2$, то $\text{codim}_{\mathbf{R}_m}(\mathbf{R}_m \setminus \mathbf{R}_m^\circ) \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вложение $(\mathbf{R}_1)^m \rightarrow \mathbf{R}_m$, $(\rho_1, \dots, \rho_m) \mapsto \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_m$. Поскольку $\mathbf{R}_m$ – векторное пространство, а $\mathbf{R}_m^\circ$ инвариантно относительно растяжений, достаточно проверить, что $\text{codim}_{(\mathbf{R}_1)^m}((\mathbf{R}_1)^m \setminus (\mathbf{R}_m^\circ \cap (\mathbf{R}_1)^m)) \geq 2$. Однако, очевидно, что $(\mathbf{R}_m^\circ \cap (\mathbf{R}_1)^m) = (\mathbf{R}_1^\circ)^m$, откуда следует утверждение леммы.

Для любого класса дивизоров D такого, что обе линейные системы $|D|$ и $|\mathcal{H} - D|$ непусты, обозначим через $Z^{|D|} \subset \mathbb{P}(V^*)$ образ произведения $|D| \times |\mathcal{H} - D|$ в $|\mathcal{H}| = \mathbb{P}(V^*)$. Обозначим через $\tilde{g}_m$ проекцию $\tilde{\mathbf{R}}_m^1 \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$, а через p – проекцию $\tilde{\mathbf{R}}_m^1 \rightarrow \mathbf{R}_m^1$. Рассмотрим открытое подмножество

$$U := \tilde{\mathbf{R}}_m^1 \setminus \bigcup_{0 < D < \mathcal{H}} \tilde{g}_m^{-1}(Z^{|D|}) \subset \tilde{\mathbf{R}}_m^1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. *Проекция $p: U \rightarrow p(U) \subset \mathbf{R}_m^1$ является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что векторные пространства $\text{Ker } \nu|_{p(U)}$ образуют линейное подрасслоение в $V^* \otimes \mathcal{O}_{p(U)}$. Поскольку $\mathbf{R}_m^1$ – множество вырождения морфизма векторных расслоений $\nu: V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{R}_m^o} \rightarrow R^0 q_*((E_2^*(1) \boxtimes \mathcal{R}_2^*) \otimes C)$ на $\mathbf{R}_m^o$, достаточно проверить, что $\dim \text{Ker } \nu_\rho = 1$ для всех $\rho \in p(U)$.

Предположим, что $\dim \text{Ker } \nu_\rho \geq 2$, и пусть $\langle H, H' \rangle$ – 2-мерное подпространство в $\text{Ker } \nu_\rho$. Тогда из (5.4) следует, что $\text{supp}(C_\rho) \subset H \cap H'$. С другой стороны, из (5.5) имеем либо $C_\rho = 0$, что невозможно в силу условия (С.3) (из $C_\rho = 0$ следует, что $\text{Hom}(E_2, E_1) \neq 0$), либо $D = \text{supp}(C_\rho)$ – дивизор на X . Так как $D \subset H \cap H'$, получаем $H \in Z^{|D|}$, значит, $(\rho, H) \in \tilde{g}_m^{-1}(Z^{|D|})$.

Рассмотрим отображение $p(U) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$, задаваемое линейным подрасслоением $\text{Ker } \nu|_{p(U)} \subset V^* \otimes \mathcal{O}_{p(U)}$. Используя также вложение $p(U) \subset \mathbf{R}_m^1$, получаем отображение $p(U) \rightarrow U \subset \mathbf{R}_m^1 \times \mathbb{P}(V^*)$, которое, очевидно, обратно к проекции p .

Рассмотрим группу $G = (\text{GL}(R_1) \times \text{GL}(R_2)) / \mathbb{k}^*$. Обозначим через $\chi: G \rightarrow \mathbb{k}^*$ характер группы G :

$$\chi(g_1, g_2) = \det(g_1)^{-\text{rank}(E_1)} \det(g_2)^{\text{rank}(E_2)},$$

соответствующий функции наклона (5.2). Рассмотрим действие группы G на $\mathbf{R}_m$ изоморфизмами представлений, линеаризованное с помощью характера χ , а также тривиальное действие группы G на $\mathbb{P}(V^*)$. Заметим, что $\mathbf{R}_m^1 \subset \mathbf{R}_m^{ss}$ и $\tilde{\mathbf{R}}_m^1 \subset \mathbf{R}_m^{ss} \times \mathbb{P}(V^*)$ – G -инвариантные замкнутые подсхемы (если выполнено условие (5.7)). Рассмотрим следующие факторы (в смысле теории инвариантов):

- $\mathcal{M}_m^{ss} = \mathbf{R}_m^{ss} //_\chi G$ – многообразие модулей полустабильных представлений;
- $\mathcal{M}_m^s = \mathbf{R}_m^s //_\chi G \subset \mathcal{M}_m^{ss}$ – многообразие модулей стабильных представлений;
- $\bar{Y}_m = \tilde{\mathbf{R}}_m^1 //_\chi G \subset \mathcal{M}_m^{ss} \times \mathbb{P}(V^*)$.

Обозначим через $\bar{g}_m: \bar{Y}_m \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ проекцию на $\mathbb{P}(V^*)$. Пусть

$$Z_m = \bar{g}_m(\bar{Y}_m) \subset \mathbb{P}(V^*), \quad \bar{Z}_m = \left(\bigcup_{k=1}^{[m/2]} Z_k \right) \cup \left(\bigcup_{0 < D < \mathcal{H}} Z^{|D|} \right).$$

Тогда $\bar{Z}_m$ замкнуто в $\mathbb{P}(V^*)$. Рассмотрим $Y_m = \bar{Y}_m \setminus \bar{g}_m^{-1}(\bar{Z}_m) = \bar{g}_m^{-1}(\mathbb{P}(V^*) \setminus \bar{Z}_m)$ и обозначим через $g_m: Y_m \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ ограничение проекции $\bar{g}_m$ на Y_m .

ЛЕММА 5.5. *Морфизм $g_m: Y_m \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \setminus \bar{Z}_m$ проективен, а отображение $Y_m \rightarrow \mathcal{M}_m^s$ является вложением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из того, что $\tilde{\mathbf{R}}_m^1$ замкнуто в $\mathbf{R}_m^{ss} \times \mathbb{P}(V^*)$, следует, что $\bar{Y}_m$ замкнуто в многообразии $\mathcal{M}_m^{ss} \times \mathbb{P}(V^*)$, которое является проективным согласно результатам, полученным в работе [16]. Поэтому $\bar{Y}_m$ проективно, а значит, и морфизм $\bar{g}_m$ проективен. С другой стороны, морфизм g_m получается из морфизма $\bar{g}_m$ заменой базы $\mathbb{P}(V^*) \setminus \bar{Z}_m \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ и, значит, тоже является проективным.

Далее, заметим, что в фильтрации Жордана–Гёльдера всякого (d_1, d_2) -мерного строго полустабильного представления ρ колчана Q с $\gcd(d_1, d_2) = m$ содержится (d'_1, d'_2) -мерный подфактор с $\gcd(d'_1, d'_2) \leq [m/2]$. Значит, имеем $\bar{g}_m(\rho) \in \bar{Z}_m$ и $\rho \notin Y_m$. Поэтому образ Y_m в $\mathcal{M}_m^{ss}$ содержится в $\mathcal{M}_m^s$. Наконец, согласно предложению 5.4 это отображение является вложением (сравним определения $Y_m \subset \bar{Y}_m$ и $U \subset \tilde{\mathbf{R}}_m^1$).

ЛЕММА 5.6. *На многообразии $\mathcal{M}_m^s$ существует пучок алгебр Адзумаи $\mathcal{A}_m$ такой, что универсальное семейство $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ представлений колчана Q на $\mathbf{R}_m^s$ опускается до универсального семейства (F_1, F_2) в категории когерентных $\mathcal{A}_m$ -модулей на $\mathcal{M}_m^s$. Более того, последовательность на $\mathcal{M}_m^s \times \mathcal{M}_m^s$*

$$W \otimes F_2^* \boxtimes F_1 \rightarrow F_2^* \boxtimes F_2 \oplus F_1^* \boxtimes F_1 \rightarrow \Delta_* \mathcal{A}_m \rightarrow 0$$

точна справа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку действие группы G на $\mathbf{R}_m^s$ свободно, $(\mathrm{GL}(R_1) \times \mathrm{GL}(R_2))$ -эквивариантное векторное расслоение на $\mathbf{R}_m^s$ опускается на $\mathcal{M}_m^s$ тогда и только тогда, когда диагональная подгруппа $\mathbb{k}^* \subset \mathrm{GL}(R_1) \times \mathrm{GL}(R_2)$ действует на нем тривиально. Однако как на $\mathcal{R}_1$, так и на $\mathcal{R}_2$ диагональная подгруппа действует с весом 1. Чтобы избавиться от этого действия, выберем какое-то представление R_0 группы $\mathrm{GL}(R_1) \times \mathrm{GL}(R_2)$, на котором диагональная подгруппа действует с весом 1, и рассмотрим тривиальное векторное расслоение $\mathcal{R}_0$ со слоем R_0 на $\mathbf{R}$. На семействе $(\mathcal{R}_0^* \otimes \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0^* \otimes \mathcal{R}_2)$ диагональная подгруппа действует тривиально, поэтому это семейство опускается на $\mathcal{M}_m^s = \mathbf{R}_m^s //_{\chi} G$ и дает семейство (F_1, F_2) представлений колчана Q на $\mathcal{M}_m^s$, являющееся квазиуниверсальным. Более того, $\mathrm{End}(\mathcal{R}_0)$ – G -эквивариантный пучок алгебр Адзумаи, который опускается до пучка алгебр Адзумаи $\mathcal{A}_m$ на $\mathcal{M}_m^s$. Ясно, что (F_1, F_2) – универсальное семейство представлений колчана Q в категории когерентных $\mathcal{A}_m$ -модулей.

Остается проверить точность справа указанной последовательности. Действие группы G на $\mathbf{R}_m^s$ дает отображение $\pi: \mathbf{R}_m^s \times G \rightarrow \mathbf{R}_m^s \times \mathbf{R}_m^s$, $(\rho, g) \mapsto (\rho, g\rho)$. Проверим, что комплекс

$$\mathcal{C} = \{ W \otimes \mathcal{R}_2^* \boxtimes \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\mathrm{ad}(\rho)} \mathcal{R}_2^* \boxtimes \mathcal{R}_2 \oplus \mathcal{R}_1^* \boxtimes \mathcal{R}_1 \rightarrow \pi_* \mathcal{O} \}$$

на $\mathbf{R}_m^s \times \mathbf{R}_m^s$ ацикличен в среднем и правом членах. Для всякой точки $(\rho_1, \rho_2) \in \mathbf{R}_m^s \times \mathbf{R}_m^s$ имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathrm{Hom}_Q(\rho_2, \rho_1) \rightarrow \mathcal{R}_{2\rho_1} \otimes \mathcal{R}_{2\rho_2}^* \oplus \mathcal{R}_{1\rho_1} \otimes \mathcal{R}_{1\rho_2}^* \\ &\rightarrow W^* \otimes \mathcal{R}_{2\rho_1} \otimes \mathcal{R}_{1\rho_2}^* \rightarrow \mathrm{Ext}_Q^1(\rho_2, \rho_1) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поскольку представления ρ_1 и ρ_2 стабильны, имеем $\mathrm{Hom}_Q(\rho_2, \rho_1) = 0$ при $(\rho_1, \rho_2) \notin \pi(\mathbf{R}_m^s \times G)$ и $\mathrm{Hom}_Q(\rho_2, \rho_1) = \mathbb{k}$ при $(\rho_1, \rho_2) \in \pi(\mathbf{R}_m^s \times G)$. Поэтому $\mathcal{H}^0(\mathcal{C})$ и $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{C})$ теоретико-множественно сосредоточены на $\pi(\mathbf{R}_m^s \times G)$.

Сравним две спектральные последовательности, вычисляющие $\mathcal{H}^n(\pi^*\mathcal{C})$. Первый член первой последовательности $E_1^{p,q} = \mathcal{H}^q(\pi^*(\mathcal{C}^p)) \Rightarrow \mathcal{H}^{p+q}(\pi^*\mathcal{C})$ имеет вид

$$\begin{array}{ccc} W \otimes \mathcal{R}_2^* \otimes \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\text{ad}(\rho)} & \mathcal{R}_2^* \otimes \mathcal{R}_2 \oplus \mathcal{R}_1^* \otimes \mathcal{R}_1 \longrightarrow \mathcal{O} \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \end{array} \begin{array}{c} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{H}^{-1}(\pi^*\pi_*\mathcal{O}) \\ \mathcal{H}^{-2}(\pi^*\pi_*\mathcal{O}) \end{array}$$

Заметим, что верхняя строка ациклична в среднем и правом членах, ее когомология в левом члене в точке $(\rho, g) \in \mathbf{R}_m^s \times G$ равна $\text{Ext}_{\mathbf{Q}}^1(\rho, \rho)^* \cong T_{\rho}^*\mathcal{M}_m^s \cong (\mathcal{H}^{-1}(\pi^*\pi_*\mathcal{O}))_{(\rho, g)}$, а пунктирная стрелка является изоморфизмом. Следовательно, $\pi^*\mathcal{C} \in \mathcal{D}^{\leq -2}(\mathbf{R}_m^s \times G)$. Из второй спектральной последовательности $E_2^{p,q} = \mathcal{H}^q(\pi^*(\mathcal{H}^p(\mathcal{C}))) \Rightarrow \mathcal{H}^{p+q}(\pi^*\mathcal{C})$ следует, что $\mathcal{H}^0(\pi^*\mathcal{H}^0(\mathcal{C})) = \mathcal{H}^0(\pi^*\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{C})) = 0$, значит, $\mathcal{H}^0(\mathcal{C}) = \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{C}) = 0$, так как оба эти пучка сосредоточены на $\pi(\mathbf{R}_m^s \times G)$. Тензорно умножая комплекс $\mathcal{C}$ на $\mathcal{R}_0 \boxtimes \mathcal{R}_0^*$, получаем комплекс

$$\begin{aligned} & W \otimes (\mathcal{R}_0^* \otimes \mathcal{R}_2)^* \boxtimes (\mathcal{R}_0^* \otimes \mathcal{R}_1) \\ & \xrightarrow{\text{ad}(\rho)} (\mathcal{R}_0^* \otimes \mathcal{R}_2)^* \boxtimes (\mathcal{R}_0^* \otimes \mathcal{R}_2) \oplus (\mathcal{R}_0^* \otimes \mathcal{R}_1)^* \boxtimes (\mathcal{R}_0^* \otimes \mathcal{R}_1) \rightarrow \pi_* \mathcal{E}nd(\mathcal{R}_0), \end{aligned}$$

являющийся ацикличным в среднем и правом членах. Следовательно, после спуска на $\mathcal{M}_m^s \times \mathcal{M}_m^s$ получаем комплекс

$$W \otimes F_2^* \boxtimes F_1 \xrightarrow{\text{ad}(\rho)} F_2^* \boxtimes F_2 \oplus F_1^* \boxtimes F_1 \rightarrow \Delta_* \mathcal{A}_{\mathcal{M}},$$

являющийся ацикличным в среднем и правом членах.

Ограничим пучок алгебр Адзумаи $\mathcal{A}_m$ и $\mathcal{A}_m$ -модули (F_1, F_2) с $\mathcal{M}_m^s$ на Y_m и будем использовать для этих ограничений те же обозначения.

ТЕОРЕМА 5.7. *Допустим, данные (D.1), (D.2) удовлетворяют условиям (C.1)–(C.3). Предположим, что выполнены еще и условия (5.1) и (5.7). Тогда многообразие Адзумаи $(Y_m, \mathcal{A}_m)$ с отображением $g_m: Y_m \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \setminus \bar{Z}_m$, пара $\mathcal{A}_m$ -модулей (F_1, F_2) и канонический морфизм $W \rightarrow \text{Hom}(F_1, F_2)$ удовлетворяют условиям (C.4)–(C.6).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнение условия (C.4) доказано в лемме 5.5, а выполнение условия (C.5) – в лемме 5.6. Остается проверить выполнение условия (C.6). Для этого обозначим $\tilde{U} = \tilde{\mathbf{R}}_m^1 \setminus \tilde{g}_m^{-1}(\bar{Z}_m) = \mathbf{R}_m^1 \setminus q(\tilde{g}_m^{-1}(\bar{Z}_m))$, так что $Y_m = \tilde{U} \parallel_X G$, и напомним, что композиция

$$\tilde{g}_m^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-1) \rightarrow V^* \otimes \mathcal{O}_U \xrightarrow{\nu} q_*((E_2^*(1) \boxtimes \mathcal{R}_2^*) \otimes \mathcal{C})$$

на $\tilde{U}$ равна нулю. По сопряженности получаем, что композиция

$$q^* \tilde{g}_m^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-1) \rightarrow V^* \otimes \mathcal{O}_{X \times U} \xrightarrow{\nu} (E_2^*(1) \boxtimes \mathcal{R}_2^*) \otimes \mathcal{C} \quad (5.8)$$

на $X \times \tilde{U}$ также равна нулю. Тензорно умножая (5.8) на $q^* \tilde{g}_m^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(1)$, заключаем, что под действием морфизма ν образ λ канонического элемента $\text{id}_V \in V^* \otimes V = H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \otimes H^0(\mathbb{P}(V^*), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(1))$ в $H^0(X \times U, \mathcal{O}_X(1) \boxtimes \tilde{g}_m^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(1))$ переводит в $0 \in H^0(X \times U, (E_2^*(1) \boxtimes \mathcal{R}_2^* \otimes \tilde{g}_m^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(1)) \otimes C)$. Это означает, что композиция левой и нижней стрелок в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} E_2(-1) \boxtimes (\mathcal{R}_2 \otimes \tilde{g}_m^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-1)) & \longrightarrow & C \otimes (\mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \tilde{g}_m^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-1)) \\ \downarrow \lambda & & \downarrow \lambda \\ E_2 \boxtimes \mathcal{R}_2 & \longrightarrow & C \end{array}$$

равна нулю. Но верхняя стрелка является эпиморфизмом. Значит, правая стрелка также равна нулю. Следовательно, пучок C сосредоточен теоретико-схемно на схеме нулей сечения λ . Однако легко видеть, что после перехода к фактору $X \times Y_m = (X \times \tilde{U}) //_{\chi} G$ расслоение $\mathcal{O}_X(1) \boxtimes \tilde{g}_m^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(1)$ принимает вид $\mathcal{O}_X(1) \boxtimes \mathcal{O}_{Y_m}(1)$, а его сечение λ становится каноническим сечением в $\mathcal{O}_X(1) \boxtimes \mathcal{O}_{Y_m}(1)$.

Таким образом, проблема построения многообразия Y сводится к выбору числа m такого, чтобы выполнялись условия (С.7) и (С.8). Как производить этот выбор в общей ситуации – непонятно. Однако в приведенных ниже примерах такой выбор сделать удалось.

§ 6. Примеры

Примеры в настоящем параграфе упорядочены по возрастанию сложности многообразия Y . В примерах, рассмотренных в пп. 6.1 и 6.2, многообразие Y удастся описать явно, а пучок алгебр Адзумаи на нем тривиален, $\mathcal{A}_Y = \mathcal{O}_Y$. В примерах, приведенных в пп. 6.3–6.5, мы пользуемся подходом, развитым в § 5, рассматриваем построенные там многообразия Y_2 , Y_3 и Y_4 соответственно и только затем даем их описание.

6.1. Грассманиан. Пусть $W = \mathbb{K}^5$ и

$$X = \text{Gr}(2, W) = \text{Gr}(2, 5), \quad (E_1, E_2) = (\mathcal{O}_X, \mathcal{U}_X^*),$$

где $\mathcal{U}_X \subset W \otimes \mathcal{O}_X$ – тавтологическое подрасслоение ранга 2. Обозначим $V = \Lambda^2 W = \mathbb{K}^{10}$, а $f: X \rightarrow \mathbb{P}(V)$ – вложение П्लюккера. Рассмотрим

$$Y = \text{Gr}(2, W^*) = \text{Gr}(2, 5), \quad \mathcal{A}_Y = \mathcal{O}_Y, \quad (F_1, F_2) = (\mathcal{U}_Y, \mathcal{O}_Y),$$

где $\mathcal{U}_Y \subset W^* \otimes \mathcal{O}_Y$ – тавтологическое подрасслоение ранга 2. Пусть $g: Y \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ – вложение П्लюккера (таким образом, $\mathbf{Z} = \emptyset$). Тогда $\text{Hom}(E_1, E_2) = W^*$, $\text{Hom}(F_1, F_2) = W$ и можно положить $\phi = \text{id}_W$.

Легко проверить, что условия (С.1)–(С.8) выполняются, поэтому можно применить теорему 1.2. В результате получаем следующие полуортогональные разложения (заметим, что $\text{codim}_{\mathbb{P}(V^*)}(Y) = 3$, поэтому для всякого допустимого

подпространства $L \subset V^*$ размерности $\dim L \leq 3$ имеем $Y_L = \emptyset$):

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^b(X) &= \langle E_1(1), E_2(1), E_1(2), E_2(2), E_1(3), E_2(3), E_1(4), E_2(4), E_1(5), E_2(5) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(X_1) &= \langle E_1(1), E_2(1), E_1(2), E_2(2), E_1(3), E_2(3), E_1(4), E_2(4) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(X_2) &= \langle E_1(1), E_2(1), E_1(2), E_2(2), E_1(3), E_2(3) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(X_3) &= \langle E_1(1), E_2(1), E_1(2), E_2(2) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(X_4) &= \langle \mathcal{D}^b(Y_4), E_1(1), E_2(1) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(X_5) &= \mathcal{D}^b(Y_5),\end{aligned}$$

где $Y_r = Y \cap \mathbb{P}(L)$ – линейное сечение Y допустимым подпространством $L \subset V^*$ размерности r , а $X_r = X \cap \mathbb{P}(L^\perp)$ – соответствующее ортогональное линейное сечение X коразмерности r .

Заметим, что X_1 , X_2 и X_3 всегда гладкие, X_3 – трехмерное многообразие Фано индекса 2 и степени 5 (многообразие V_5), X_4 – поверхность дель Пеццо степени 5 (возможно, особая), Y_4 – нульмерная схема длины $\deg Y = 5$, а X_5 , Y_5 – эллиптические кривые степени 5 (возможно, особые).

В частности, из теоремы 1.2 следуют результаты, полученные Д. Орловым [21], о производной категории трехмерного многообразия Фано V_5 .

6.2. Ортогональный грассманиан. Пусть $W = \mathbb{k}^{10}$ и

$$X = \mathrm{OGr}_+(5, W), \quad (E_1, E_2) = (\mathcal{O}_X, \mathcal{U}_X^*),$$

где $\mathrm{OGr}_+(5, W)$ – связная компонента грассманиана 5-мерных подпространств в W , изотропных относительно фиксированной невырожденной квадратичной формы $\mathbf{q} \in S^2 W^*$, а $\mathcal{U}_X \subset W \otimes \mathcal{O}_X$ – тавтологическое подрасслоение ранга 5. Пусть $V \cong \mathbb{k}^{16}$ – соответствующее полуспинорное представление спинорной группы $\mathrm{Spin}(W)$ (см. [9]), и пусть $f: X \rightarrow \mathbb{P}(V)$ обозначает каноническое вложение. Рассмотрим

$$Y = \mathrm{OGr}_-(5, W), \quad \mathcal{A}_Y = \mathcal{O}_Y, \quad (F_1, F_2) = (\mathcal{U}_Y, \mathcal{O}_Y),$$

где $\mathcal{U}_Y \subset W \otimes \mathcal{O}_Y$ – тавтологическое подрасслоение ранга 5. Обозначим через $g: Y \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ композицию вложения $Y \rightarrow \mathbb{P}(V)$ и изоморфизма $\mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$, задаваемого формой $\mathbf{q}$. Тогда $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \cong W^*$, $\mathrm{Hom}(F_1, F_2) \cong W^*$ и можно положить $\phi = \mathbf{q}^{-1}$.

Легко проверить, что условия (C.1)–(C.8) выполняются, поэтому можно применить теорему 1.2. В результате получаем следующие полуортогональные разложения (заметим, что $\mathrm{codim}_{\mathbb{P}(V^*)}(Y) = 5$, поэтому для всякого допустимого подпространства $L \subset V^*$ размерности $\dim L \leq 5$ имеем $Y_L = \emptyset$):

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^b(X) &= \langle E_1(1), E_2(1), E_1(2), E_2(2), E_1(3), E_2(3), E_1(4), E_2(4), \\ &\quad E_1(5), E_2(5), E_1(6), E_2(6), E_1(7), E_2(7), E_1(8), E_2(8) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(X_1) &= \langle E_1(1), E_2(1), E_1(2), E_2(2), E_1(3), E_2(3), E_1(4), E_2(4), \\ &\quad E_1(5), E_2(5), E_1(6), E_2(6), E_1(7), E_2(7) \rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^b(X_2) &= \langle E_1(1), E_2(1), E_1(2), E_2(2), E_1(3), E_2(3), E_1(4), E_2(4), \\
&\quad E_1(5), E_2(5), E_1(6), E_2(6) \rangle, \\
\mathcal{D}^b(X_3) &= \langle E_1(1), E_2(1), E_1(2), E_2(2), E_1(3), E_2(3), E_1(4), E_2(4), E_1(5), E_2(5) \rangle, \\
\mathcal{D}^b(X_4) &= \langle E_1(1), E_2(1), E_1(2), E_2(2), E_1(3), E_2(3), E_1(4), E_2(4) \rangle, \\
\mathcal{D}^b(X_5) &= \langle E_1(1), E_2(1), E_1(2), E_2(2), E_1(3), E_2(3) \rangle, \\
\mathcal{D}^b(X_6) &= \langle \mathcal{D}^b(Y_6), E_1(1), E_2(1), E_1(2), E_2(2) \rangle, \\
\mathcal{D}^b(X_7) &= \langle \mathcal{D}^b(Y_7), E_1(1), E_2(1) \rangle, \\
\mathcal{D}^b(X_8) &= \mathcal{D}^b(Y_8),
\end{aligned}$$

где $Y_r = Y \cap \mathbb{P}(L)$ – линейное сечение Y допустимым подпространством $L \subset V^*$ размерности r , а $X_r = X \cap \mathbb{P}(L^\perp)$ – соответствующее ортогональное линейное сечение X коразмерности r . Заметим, что X_1, X_2, X_3, X_4 и X_5 всегда гладкие, X_6 – четырехмерное многообразие Фано индекса 2 (возможно, особое), Y_6 – нульмерная схема длины $\deg Y = 12$, X_7 – трехмерное многообразие Фано V_{12} (возможно, особое), Y_7 – кривая рода 7 (возможно, особая), а X_8, Y_8 – КЗ-поверхности степени 12 (возможно, особые).

В частности, из теоремы 1.2 следуют результаты, полученные в работе [17], о производной категории трехмерного многообразия Фано V_{12} . Действительно, если X_7 – гладкое многообразие V_{12} , то Y_7 – гладкая кривая C_7 рода 7 и разложение имеет вид

$$\mathcal{D}^b(V_{12}) = \langle \mathcal{D}^b(C_7), \mathcal{O}, \mathcal{U}^* \rangle.$$

6.3. Лагранжев грассманиан. Пусть $W = \mathbb{k}^6$ и

$$X = \text{LGr}(3, W), \quad (E_1, E_2) = (\mathcal{O}_X, \mathcal{U}_X^*),$$

где $\text{LGr}(3, W)$ – грассманиан 3-мерных подпространств в W , лагранжевых относительно фиксированной симплектической формы $\sigma \in \Lambda^2 W^*$, а $\mathcal{U}_X \subset W \otimes \mathcal{O}_X$ – тавтологическое подрасслоение ранга 3. Естественное представление группы $\text{Sp}(W)$ в пространстве $\Lambda^3 W$ раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений:

$$\Lambda^3 W = W \oplus V.$$

Плюккерovo вложение $\text{Gr}(3, W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^3 W)$ при ограничении на X дает вложение $f: X \rightarrow \mathbb{P}(V)$. Теперь воспользуемся конструкцией, приведенной в § 5, и рассмотрим $Y = Y_2$, $\mathcal{A}_Y = \mathcal{A}_2$, $\mathbf{Z} = \overline{\mathbf{Z}}_2$, $g = g_2$, соответствующее универсальное семейство (F_1, F_2) и отображение ϕ , индуцированное структурой представления колчана Q на (F_1, F_2) .

Далее, в § 7, показано, что условия (C.1)–(C.8) выполняются, причем

$$\mathbf{Z} = \mu(\text{Gr}(3, W^*)) = \mu(\text{Gr}(3, 6)),$$

где $\mu: \mathbb{P}(\Lambda^3 W^*) \dashrightarrow \mathbb{P}(V^*)$ – линейная проекция из $\mathbb{P}(\sigma \wedge W^*)$, а

$$Y = X^\vee \setminus \mathbf{Z},$$

где $X^\vee$ – проективно двойственное многообразие к X , которое является гиперповерхностью степени 4, особой вдоль подмногообразия $\mathbf{Z} \subset \mathbb{P}(V^*)$ (см. [13]). В результате получаем следующие полуортогональные разложения (заметим, что $\text{codim}_{\mathbb{P}(V^*)}(Y) = 1$, поэтому для всякого допустимого подпространства $L \subset V^*$ размерности $\dim L \leq 1$ имеем $Y_L = \emptyset$):

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^b(X) &= \langle E_1(1), E_2(1), E_1(2), E_2(2), E_1(3), E_2(3), E_1(4), E_2(4) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(X_1) &= \langle E_1(1), E_2(1), E_1(2), E_2(2), E_1(3), E_2(3) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(X_2) &= \langle \mathcal{D}^b(Y_2), E_1(1), E_2(1), E_1(2), E_2(2) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(X_3) &= \langle \mathcal{D}^b(Y_3, \mathcal{A}_Y), E_1(1), E_2(1) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(X_4) &= \mathcal{D}^b(Y_4, \mathcal{A}_Y),\end{aligned}$$

где $Y_r = Y \cap \mathbb{P}(L)$ – линейное сечение Y допустимым подпространством $L \subset V^*$ размерности r , а $X_r = X \cap \mathbb{P}(L^\perp)$ – соответствующее ортогональное линейное сечение X коразмерности r . Заметим, что X_1 всегда гладкое, X_2 – четырехмерное многообразие Фано индекса 2 (возможно, особое), Y_2 – нульмерная схема длины $\deg Y = 4$, X_3 – трехмерное многообразие Фано V_{16} (возможно, особое), Y_3 – плоская кватрика (возможно, особая), а X_4, Y_4 – КЗ-поверхности степени 16 и 4 соответственно (возможно, особые).

В частности, из теоремы 1.2 следуют результаты [24], [25] о производной категории лагранжева грассманиана X и его гиперплоского сечения X_1 . Более того, если X_3 – гладкое многообразие V_{16} , то Y_3 – гладкая кривая C_3 рода 3, следовательно, $\mathcal{D}^b(Y_3, \mathcal{A}_Y) \cong \mathcal{D}^b(Y_3)$ (группа Брауэра гладкой кривой тривиальна), и разложение имеет вид

$$\mathcal{D}^b(V_{16}) = \langle \mathcal{D}^b(C_3), \mathcal{O}, \mathcal{U}^* \rangle.$$

6.4. G_2 -грассманиан. Пусть $W = \mathbb{k}^7$ и

$$X = G_2 \text{ Gr}(2, W), \quad (E_1, E_2) = (\mathcal{O}_X, \mathcal{U}_X^*),$$

где $G_2 \text{ Gr}(2, W)$ – грассманиан простой группы Ли типа G_2 , представленный как схема нулей сечения $s_\lambda \in H^0(\text{Gr}(2, W), \mathcal{U}^\perp(1)) \cong \Lambda^3 W^*$, соответствующего единственной G_2 -инвариантной 3-форме λ в тавтологическом G_2 -представлении W , $\mathcal{U} \subset W \otimes \mathcal{O}_{\text{Gr}(2, W)}$ – тавтологическое подрасслоение ранга 2, а $\mathcal{U}_X$ – ограничение $\mathcal{U}$ на X . Естественное представление группы G_2 в пространстве $\Lambda^2 W$ раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений:

$$\Lambda^2 W = W^* \oplus V$$

(проекция $\Lambda^2 W \rightarrow W^*$ задается формой λ). Плуккерово вложение $\text{Gr}(2, W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 W)$ при ограничении на X дает вложение $f: X \rightarrow \mathbb{P}(V)$. Теперь воспользуемся конструкцией, приведенной в § 5, и рассмотрим $Y = Y_3$, $\mathcal{A}_Y = \mathcal{A}_3$, $\mathbf{Z} = \overline{Z}_3$, $g = g_3$, соответствующее универсальное семейство (F_1, F_2) и отображение ϕ , индуцированное структурой представления колчана Q на (F_1, F_2) .

Далее, в § 8, показано, что условия (C.1)–(C.8) выполняются, причем

$$\mathbf{Z} = \mu(\text{Gr}(2, W^*)) = \mu(\text{Gr}(2, 7)),$$

где $\mu: \mathbb{P}(\Lambda^2 W^*) \dashrightarrow \mathbb{P}(V^*)$ – линейная проекция из подпространства $\mathbb{P}(\lambda(W))$, а $g: Y \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}(V^*) \setminus \mathbf{Z}$ – двулистное накрытие, разветвленное в $X^\vee \setminus \mathbf{Z} \subset \mathbb{P}(V^*) \setminus \mathbf{Z}$, где $X^\vee$ – проективно двойственное многообразие к X , которое является гиперповерхностью степени 6, особой вдоль $\mathbf{Z} \subset \mathbb{P}(V^*)$ (см. [13]). В результате получаем следующие полуортогональные разложения:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^b(X) &= \langle E_1(1), E_2(1), E_1(2), E_2(2), E_1(3), E_2(3) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(X_1) &= \langle \mathcal{D}^b(Y_1), E_1(1), E_2(1), E_1(2), E_2(2) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(X_2) &= \langle \mathcal{D}^b(Y_2, \mathcal{A}_Y), E_1(1), E_2(1) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(X_3) &= \mathcal{D}^b(Y_3, \mathcal{A}_Y),\end{aligned}$$

где $Y_r = Y \cap \mathbb{P}(L)$ – линейное сечение Y допустимым подпространством $L \subset V^*$ размерности r , а $X_r = X \cap \mathbb{P}(L^\perp)$ – соответствующее ортогональное линейное сечение X коразмерности r . Заметим, что X_1 – четырехмерное многообразие Фано индекса 2 (возможно, особое), Y_1 – нульмерная схема длины $\deg Y = 2$, X_2 – трехмерное многообразие Фано V_{18} (возможно, особое), Y_2 – кривая рода 2 (возможно, особая), а X_3, Y_3 – КЗ-поверхности степени 18 и 2 соответственно (возможно, особые).

В частности, из теоремы 1.2 следуют результаты о производной категории G_2 -грассманиана X . Более того, если X_2 – гладкое многообразие V_{18} , то Y_2 – гладкая кривая C_2 рода 2, следовательно, $\mathcal{D}^b(Y_2, \mathcal{A}_Y) \cong \mathcal{D}^b(Y_2)$ (группа Брауэра гладкой кривой тривиальна), и разложение имеет вид

$$\mathcal{D}^b(V_{18}) = \langle \mathcal{D}^b(C_2), \mathcal{O}, \mathcal{U}^* \rangle.$$

6.5. Пересечение квадратик. Пусть $W = \mathbb{k}^6$ и $X = \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}^5$, $(E_1, E_2) = (\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1))$. Пусть $V = S^2 W = \mathbb{k}^{21}$ и $f: X \rightarrow \mathbb{P}(V)$ – двойное вложение Веронезе.

Теперь воспользуемся конструкцией, приведенной в § 5, и рассмотрим $Y = Y_4$, $\mathcal{A}_Y = \mathcal{A}_4$, $\mathbf{Z} = \overline{Z}_4$, $g = g_4$, соответствующее универсальное семейство (F_1, F_2) и отображение ϕ , индуцированное структурой представления колчана Q на (F_1, F_2) .

Далее, в § 9, показано, что условия (C.1)–(C.8) выполняются, причем $\mathbf{Z} \subset \mathbb{P}(S^2 W^*)$ – множество квадратичных форм ранга 4 (коранга 2), а $g: Y \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}(V^*) \setminus \mathbf{Z}$ – двулистное накрытие, разветвленное в $X^\vee \setminus \mathbf{Z} \subset \mathbb{P}(V^*) \setminus \mathbf{Z}$, где $X^\vee$ – проективно двойственное многообразие к X , которое является детерминантной гиперповерхностью степени 6, особой вдоль $\mathbf{Z} \subset \mathbb{P}(V^*)$. В результате получаем следующие полуортогональные разложения:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^b(X) &= \langle \mathcal{O}_X(1), \mathcal{O}_X(2), \mathcal{O}_X(3), \mathcal{O}_X(4), \mathcal{O}_X(5), \mathcal{O}_X(6) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(X_1) &= \langle \mathcal{D}^b(Y_1), \mathcal{O}_X(1), \mathcal{O}_X(2), \mathcal{O}_X(3), \mathcal{O}_X(4) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(X_2) &= \langle \mathcal{D}^b(Y_2, \mathcal{A}_Y), \mathcal{O}_X(1), \mathcal{O}_X(2) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(X_3) &= \mathcal{D}^b(Y_3, \mathcal{A}_Y),\end{aligned}$$

где $Y_r = Y \cap \mathbb{P}(L)$ – линейное сечение Y допустимым подпространством $L \subset V^*$ размерности r , а $X_r = X \cap \mathbb{P}(L^\perp)$ – соответствующее ортогональное линейное сечение X коразмерности r . Заметим, что X_1 – четырехмерная квадрака

(возможно, особая), Y_1 – нульмерная схема длины 2, X_2 – трехмерное многообразие Фано индекса 2 и степени 4 (пересечение двух четырехмерных квадрик, возможно, особое), Y_2 – кривая рода 2 (возможно, особая), а X_3, Y_3 – КЗ-поверхности степени 8 и 2 соответственно (возможно, особые).

В частности, из теоремы 1.2 следуют результаты [4] о производной категории пересечения двух четырехмерных квадрик.

Отметим, что пучок алгебр Адзумаи $\mathcal{A}_Y$ на Y можно построить иным способом. А именно, можно проверить, что пучок алгебр $g_*\mathcal{A}_Y$ изоморфен четной части универсальной алгебры Клиффорда (см. введение).

§ 7. Приложение А. Лагранжев грассманиан

В настоящем приложении доказывается, что некоторая гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}^{13}$ гомологически проективно двойственна лагранжеву грассманиану $\mathrm{LGr}(3, 6)$.

Напомним обозначения. Пусть $W = \mathbb{K}^6$ и

$$X = \mathrm{LGr}(3, W), \quad (E_1, E_2) = (\mathcal{O}_X, \mathcal{U}_X^*),$$

где $\mathrm{LGr}(3, W)$ – грассманиан 3-мерных подпространств в W , лагранжевых относительно фиксированной симплектической формы $\sigma \in \Lambda^2 W^*$, а $\mathcal{U}_X \subset W \otimes \mathcal{O}_X$ – тавтологическое подрасслоение ранга 3. Естественное представление группы $\mathrm{Sp}(W)$ в пространстве $\Lambda^3 W$ раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений:

$$\Lambda^3 W = W \oplus V.$$

Плюккерovo вложение $\mathrm{Gr}(3, W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^3 W)$ при ограничении на X дает вложение $f: X \rightarrow \mathbb{P}(V)$.

ЛЕММА 7.1. *Имеем $\dim X = 6$, $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(-4)$. Кроме того, для X выполняются условия (С.1)–(С.3), а также дополнительные условия (5.1) и (5.7).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $X \subset \mathrm{Gr}(3, W)$ представляется как схема нулей регулярного сечения $s_\sigma \in H^0(\mathrm{Gr}(3, W), \Lambda^2 \mathcal{U}^*)$. Значит,

$$\begin{aligned} \dim X &= \dim \mathrm{Gr}(3, W) - \mathrm{rank}(\Lambda^2 \mathcal{U}^*) = 9 - 3 = 6, \\ \omega_X &\cong \omega_{\mathrm{Gr}(3, W)|X} \otimes \det(\Lambda^2 \mathcal{U}^*) \cong \mathcal{O}_X(-6) \otimes \mathcal{O}_X(2) \cong \mathcal{O}_X(-4). \end{aligned}$$

В частности, условие (С.2) выполняется и $i = 4$. Далее, пользуясь резольвентой Кошуля $\Lambda^\bullet(\Lambda^2 \mathcal{U}) \cong \mathcal{O}_X$ многообразия X в $\mathrm{Gr}(3, W)$, легко проверить, что $H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \cong V^*$, значит, $f(X)$ не содержится в гиперплоскости, т. е. условие (С.1) выполнено. Опять пользуясь резольвентой Кошуля, вычисляем $\mathrm{Hom}(E_s(k), E_t(l))$, используя теорему Бореля–Ботта–Вейля, и проверяем, что условия (С.3) и (5.1) выполнены. Наконец, замечаем, что $\mathbf{R}_1 = \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^3, W^*)$ и $\mathbf{R}_1^\circ \subset \mathbf{R}_1$ соответствует множеству вложений $\mathbb{K}^3 \subset W^*$. Следовательно, $\mathrm{codim}_{\mathbf{R}_1}(\mathbf{R}_1 \setminus \mathbf{R}_1^\circ) = 4$ и условие (5.7) выполнено в силу леммы 5.3.

Теперь воспользуемся конструкцией, приведенной в § 5, и найдем явное описание пространства $Y = Y_2$. На самом деле, эта задача весьма сложна. Оказывается, что проще описать пространство $\mathbb{P}_{Y_2, \mathcal{A}_2}(F_2^*)$ – многообразие модулей фактормодулей ранга 1 пучка $\mathcal{A}_2$. А именно, слой пространства $\mathbb{P}_{Y_2, \mathcal{A}_2}(F_2^*)$ над точкой многообразия Y_2 , соответствующей $(6, 2)$ -мерному представлению $\rho = (R_1, R_2)$ колчана Q , совпадает с $\mathbb{P}(R_2)$. Мы доказываем, что всякая прямая $R'_2 \subset R_2$ единственным образом продолжается до $(1, 1)$ -мерного подпредставления $\rho' = (R'_1, R'_2)$. Многообразие модулей $(1, 1)$ -мерных представлений колчана Q есть $\mathbb{P}(W)$. Утверждается, что определенное таким образом отображение $\mathbb{P}_{Y_2, \mathcal{A}_2}(F_2^*) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ отождествляет $\mathbb{P}_{Y_2, \mathcal{A}_2}(F_2^*)$ с открытым подмножеством некоторого $\mathbb{P}^8$ -расслоения над $\mathbb{P}(W)$, а именно $\tilde{Y} = \mathbb{P}_{\mathbb{P}(W)}(\Omega_{\mathbb{P}(W)}^3(3)/\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1))$. Чтобы доказать это, рассмотрим пространство $\tilde{Y}$ и отождествим его открытое подмножество с $\mathbb{P}_{Y_2, \mathcal{A}_2}(F_2^*)$.

Докажем сначала несколько полезных утверждений.

ЛЕММА 7.2. *Имеем $\bar{Y}_1 = \bar{Z}_1 = \mu(\text{Gr}(3, W^*))$, где $\mu: \mathbb{P}(\Lambda^3 W^*) \dashrightarrow \mathbb{P}(V^*)$ – линейная проекция из $\mathbb{P}(\sigma \wedge W^*) \subset \mathbb{P}(\Lambda^3 W^*)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m = 1$, то $(d_1, d_2) = (3, 1)$. Легко видеть, что $(3, 1)$ -мерное представление $\rho: W \otimes R_1 \rightarrow R_2$ является χ -полустабильным тогда и только тогда, когда соответствующее отображение $R_1 \otimes R_2^* \rightarrow W^*$ является вложением. Поэтому $\mathcal{M}_1^{ss}$ отождествляется с $\text{Gr}(3, W^*)$. Более того, легко видеть, что в этом случае любое гиперплоское сечение многообразия X неприводимо, поэтому $\tilde{\mathbf{R}}_1^1 = \mathbf{R}_1^1 = \mathbf{R}_1^o = \mathbf{R}_1^{ss}$ и лемма доказана.

Рассмотрим произведение $X \times \mathbb{P}(W)$ и подмногообразие $\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X) \subset X \times \mathbb{P}(W)$.

ЛЕММА 7.3. *Следующие последовательности на $X \times \mathbb{P}(W)$ точны:*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-3) &\rightarrow \Lambda^2 \mathcal{U}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-2) \\ &\rightarrow \mathcal{U}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X)} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-3) &\rightarrow \mathcal{U}_X^*(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-2) \\ &\rightarrow \mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \rightarrow \mathcal{U}_X^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая последовательность – это резольвента Кошуля подмногообразия $\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X)$ в $X \times \mathbb{P}(W)$ (заметим, что $\mathcal{U}_X^\perp \cong \mathcal{U}_X$, изоморфизм задается формой σ). Далее, из диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow \mathcal{U}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) & \longrightarrow & W^* \otimes \mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) & \longrightarrow & \mathcal{U}_X^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \parallel & & \\ 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} & \longrightarrow & W^* \otimes \mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

строки которой точны, следует, что ядра и коядра композиций

$$\mathcal{U}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}, \quad \mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \rightarrow \mathcal{U}_X^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1)$$

совпадают. Принимая во внимание изоморфизм $\Lambda^2 \mathcal{U}_X \cong \mathcal{U}_X^*(-1)$, получаем из первой последовательности вторую.

Рассмотрим обрезанную первую последовательность леммы 7.3 как резольвенту пучка идеалов $J_{\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X)}$. Тензорно умножая ее на $\mathcal{O}_X(1)$ и применяя прямой образ на $\mathbb{P}(W)$, получаем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-3) \rightarrow W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-2) \\ \rightarrow (\Lambda^2 W^* / \mathbb{K}\sigma) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \rightarrow p_{2*}(J_{\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X)} \otimes \mathcal{O}_X(1)) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $p_2: X \times \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ – проекция. Используя точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-3) \rightarrow W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-2) \rightarrow \Lambda^2 W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}(W)}^3(3) \rightarrow 0,$$

получаем

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \xrightarrow{\sigma} \Omega_{\mathbb{P}(W)}^3(3) \rightarrow p_{2*}(J_{\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X)} \otimes \mathcal{O}_X(1)) \rightarrow 0.$$

ЛЕММА 7.4. *Морфизм $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \xrightarrow{\sigma} \Omega_{\mathbb{P}(W)}^3(3)$ является вложением векторных расслоений на $\mathbb{P}(W)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот морфизм $\mathrm{Sp}(W)$ -эквивариантен, а группа $\mathrm{Sp}(W)$ действует на $\mathbb{P}(W)$ транзитивно.

Рассмотрим проективизацию факторрасслоения

$$\tilde{Y} = \mathbb{P}_{\mathbb{P}(W)}(\Omega_{\mathbb{P}(W)}^3(3)/\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1)) = \mathbb{P}_{\mathbb{P}(W)}(p_{2*}(J_{\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X)} \otimes \mathcal{O}_X(1))).$$

Естественное вложение $p_{2*}(J_{\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X)} \otimes \mathcal{O}_X(1)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} = V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}$ индуцирует морфизм $\tilde{Y} \xrightarrow{\tilde{g}} \mathbb{P}(V^*)$. Обозначим через $\pi: \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{P}(W)$ каноническую проекцию. Обозначим также

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H) &:= \tilde{g}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(1), & \tilde{g}: \tilde{Y} &\rightarrow \mathbb{P}(V^*); \\ \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(h) &:= \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1), & \pi: \tilde{Y} &\rightarrow \mathbb{P}(W). \end{aligned}$$

Рассмотрим произведение $X \times \tilde{Y}$, проекцию $\mathrm{id}_X \times \pi: X \times \tilde{Y} \rightarrow X \times \mathbb{P}(W)$, подсхемы

$$\Sigma = (\mathrm{id}_X \times \pi)^{-1}(\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X)), \quad \tilde{Q} = Q(X, \tilde{Y}) = (X \times \tilde{Y}) \times_{\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)} Q$$

и уравнение

$$s_{\tilde{Q}} \in H^0(X \times \tilde{Y}, \mathcal{O}_X(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H)) = H^0(X \times \tilde{Y}, (f \times \tilde{g})^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)}(1, 1)) \cong V^* \otimes V$$

подсхемы $\tilde{Q}$ в $X \times \tilde{Y}$.

ЛЕММА 7.5. *Сечение $s_{\tilde{Q}}$ обращается в нуль на схеме Σ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На многообразии $\tilde{Y}$ существует каноническое вложение

$$\mathcal{O}_{\tilde{Y}}(-H) \rightarrow \pi^* p_{2*}(J_{\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X)} \otimes \mathcal{O}_X(1)) \cong p_{2*}(J_{\Sigma} \otimes \mathcal{O}_X(1)).$$

Тензорно умножая его на $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H)$, получаем канонический морфизм $\mathcal{O}_{X \times \tilde{Y}} \rightarrow J_{\Sigma} \otimes (\mathcal{O}_X(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H))$. Ясно, что композиция этого морфизма с вложением $J_{\Sigma} \otimes (\mathcal{O}_X(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H)) \rightarrow \mathcal{O}_X(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H)$ совпадает с $s_{\tilde{Q}}$.

Рассмотрим обратный образ второй точной последовательности леммы 7.3 на $X \times \tilde{Y}$. Рассмотрим конус G' первого морфизма, подкрученного на $\mathcal{O}_X(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H)$, и конус G'' третьего морфизма как объекты производной категории $\mathcal{D}^b(X \times \tilde{Y})$. По построению имеем точные треугольники

$$\begin{aligned} E_1 \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H - 3h) &\xrightarrow{\tilde{e}'} E_2 \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H - 2h) \longrightarrow G', \\ E_1 \boxtimes \pi^* \Omega_{\mathbb{P}(W)} &\xrightarrow{\tilde{e}''} E_2 \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(-h) \longrightarrow G''. \end{aligned}$$

Ясно, что обратный образ второй последовательности леммы 7.3 можно переписать в виде точного треугольника

$$G' \otimes (\mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(-H))[1] \rightarrow G'' \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma. \quad (7.1)$$

Поскольку $\text{Hom}(E_1, E_2) = W^*$, морфизмы $\tilde{e}'$ и $\tilde{e}''$ задают структуру представления колчана Q в семействах $(\mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H - 3h), \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H - 2h))$ и $(\pi^* \Omega_{\mathbb{P}(W)}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(-h))$ на $\tilde{Y}$.

ЛЕММА 7.6. *Существует единственное расширение*

$$0 \rightarrow (\mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H - 3h), \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H - 2h)) \rightarrow (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2) \rightarrow (\pi^* \Omega_{\mathbb{P}(W)}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(-h)) \rightarrow 0 \quad (7.2)$$

в категории семейств представлений колчана Q на $\tilde{Y}$ такое, что конус индуцированного морфизма $\tilde{e}: E_1 \boxtimes \tilde{F}_1 \rightarrow E_2 \boxtimes \tilde{F}_2$ является когерентным пучком, сосредоточенным теоретико-схемно на $\tilde{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку (E_1, E_2) – исключительная пара, причем $\text{Hom}(E_1, E_2) = W^*$ и, кроме того, пучок гомоморфизмов представлений колчана Q из $(\pi^* \Omega_{\mathbb{P}(W)}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(-h))$ в $(\mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H - 3h), \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H - 2h))$ равен нулю, то существует биекция между множеством всех расширений (7.2) в категории семейств представлений колчана Q на $\tilde{Y}$ и пространством $\text{Ext}^1(G'', G') = \text{Hom}(G''[-1], G')$. Более того, ясно, что конус морфизма $\tilde{e}$ изоморфен конусу соответствующего морфизма $\varepsilon: G''[-1] \rightarrow G'$. Таким образом, необходимо построить морфизм $\varepsilon: G''[-1] \rightarrow G'$ такой, что его конус является пучком, сосредоточенным теоретико-схемно на $\tilde{Q}$. Это можно сделать следующим образом.

Пусть $\tilde{i}: \tilde{Q} \rightarrow X \times \tilde{Y}$ – вложение. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & \tilde{i}_* \tilde{i}^* G' & & & & \\ & \nearrow \varepsilon' & \downarrow & & & & \\ \mathcal{O}_\Sigma[-1] & \longrightarrow & G' \otimes (\mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(-H))[1] & \longrightarrow & G'' & \longrightarrow & \mathcal{O}_\Sigma \\ & \searrow & \downarrow s_{\tilde{Q}} & & \nwarrow \varepsilon[1] & & \\ & & G'[1] & & & & \end{array}$$

(средняя строка – это точный треугольник (7.1), а средний столбец – точный треугольник, полученный тензорным умножением резольвенты пучка $\tilde{i}_* \mathcal{O}_{\tilde{Q}}$ на G'). Из леммы 7.5 следует, что морфизм, соответствующий пунктирной

стрелке, равен нулю. Следовательно, существуют стрелки из точек, делающие диаграмму коммутативной. Более того, из равенства $\text{codim}_{X \times \tilde{Y}} \Sigma = 3$ следует, что функтор $\text{Ext}^{\leq 2}(\mathcal{O}_\Sigma, -)$ равен нулю на всяком локально свободном пучке на $X \times \tilde{Y}$, значит, $\text{Hom}(\mathcal{O}_\Sigma, G'[1]) = \text{Ext}^1(\mathcal{O}_\Sigma, G') = 0$, так как G' обладает локально свободной резольвентой длины 2. Поэтому стрелки из точек единственны.

Далее, из аксиомы октаэдра следует, что конус морфизма ε изоморфен конусу морфизма ε' . Поэтому остается проверить два факта: $\varepsilon' = \tilde{i}_* \varepsilon''$ для некоторого $\varepsilon'' \in \text{Hom}(\mathcal{O}_\Sigma[-1], \tilde{i}^* G')$ и $\tilde{i}^* G'$ – когерентный пучок. Но по определению морфизм ε' получен из элемента пространства

$$\begin{aligned} & \text{Hom}(\tilde{i}_* \mathcal{O}_\Sigma[-1], G' \otimes (\mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(-H))[1]) \\ &= \text{Hom}(\mathcal{O}_\Sigma[-1], \tilde{i}^!(G' \otimes (\mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(-H))[1])) \cong \text{Hom}(\mathcal{O}_\Sigma[-1], \tilde{i}^* G'), \end{aligned}$$

так что первый факт верен. Для проверки второго необходимо убедиться, что $\text{Ker } \tilde{i}^* \tilde{\varepsilon}' = 0$. Но вторая точная последовательность леммы 7.3 показывает, что $\text{Ker } \tilde{i}^* \tilde{\varepsilon}' \cong \mathcal{H}^{-3}(\tilde{i}^*(\mathcal{O}_\Sigma \otimes (\mathcal{O}_X(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H))))$ равно нулю, так как Тог-размерность морфизма $\tilde{i}$ равна 1.

Согласно лемме 7.6 семейство $(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ на $\tilde{Y}$ является семейством представлений колчана $\mathbf{Q}$ и на $X \times \tilde{Y}$ существует точная последовательность

$$0 \rightarrow E_1 \boxtimes \tilde{F}_1 \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} E_2 \boxtimes \tilde{F}_2 \rightarrow \tilde{i}_* \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow 0,$$

где $\tilde{\mathcal{E}}$ – когерентный пучок на $\tilde{Q}$.

ЛЕММА 7.7. Семейство $(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ индуцирует морфизм $\phi: \tilde{Y} \rightarrow \bar{Y}_2$ такой, что $\tilde{g} = \bar{g}_2 \circ \phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякой точки $y \in \tilde{Y}$ выбираем тривиализации расщеплений F_1 и F_2 в маленькой окрестности точки y . Возникнет морфизм $\tilde{\phi}$ этой окрестности в пространство представлений колчана $\mathbf{Q}$. Поскольку $\text{rank}(\tilde{F}_1) = 6$, $\text{rank}(\tilde{F}_2) = 2$ и $\text{gcd}(6, 2) = 2$, то это пространство есть $\mathbf{R}_2$ (см. §5). Пусть $y' \in \tilde{Y}$ – произвольная точка из этой окрестности. Проверим, что $\tilde{\phi}(y') \in \mathbf{R}_2^\circ$. Действительно, это равносильно инъективности отображения $\eta^* \tilde{\varepsilon}$, где $\eta: X \times y' \rightarrow X \times \tilde{Y}$ – вложение, иначе говоря, тому, что $\eta^* \tilde{i}_* \tilde{\mathcal{E}} \in \mathcal{D}^{\geq 0}$. Однако в доказательстве леммы 7.6 было показано, что существует точный треугольник

$$\mathcal{O}_\Sigma[-1] \xrightarrow{\varepsilon'} \tilde{i}_* \tilde{i}^* G' \rightarrow \tilde{i}_* \tilde{\mathcal{E}}.$$

Поэтому достаточно доказать включения $\eta^* \tilde{i}_* \tilde{i}^* G' \in \mathcal{D}^{\geq 0}$ и $\eta^* \mathcal{O}_\Sigma \in \mathcal{D}^{\geq 0}$. Заметим, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X_{y'} & \xrightarrow{i'} & X \times y' \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ Q(X, \tilde{Y}) & \xrightarrow{\tilde{i}} & X \times \tilde{Y} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Sigma \cap X & \longrightarrow & X \times y' \\ \downarrow & & \downarrow \eta \\ \Sigma & \longrightarrow & X \times \tilde{Y} \end{array}$$

являются точными декартовыми в силу следствия 2.27 и что верхние морфизмы являются замкнутыми вложениями. Отсюда сразу следует второе включение.

Для доказательства первого включения заметим, что из треугольника (7.1) следует равенство

$$\mathcal{H}^{-1}(\eta^* \tilde{i}_* \tilde{i}^* G' \otimes \mathcal{O}_X(-1) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(-H)) = \mathcal{H}^{-3}(\eta^* \tilde{i}_* \tilde{i}^* \mathcal{O}_\Sigma),$$

и, с другой стороны, имеем

$$\eta^* \tilde{i}_* \tilde{i}^* \mathcal{O}_\Sigma = i'_* \eta^* \tilde{i}^* \mathcal{O}_\Sigma = i'_* i'^* \eta^* \mathcal{O}_\Sigma = i'_* i'^* \mathcal{O}_{\Sigma \cap X} \in \mathcal{D}^{\geq -1}.$$

Таким образом, $\tilde{\phi}(y') \in \mathbf{R}_2^\circ$.

Далее, $\text{supp } \eta^* \tilde{i}_* \tilde{\mathcal{E}} = \text{supp } i'_* \eta^* \tilde{\mathcal{E}} = X_{y'}$ – гиперплоское сечение многообразия X , значит, $\tilde{\phi}(y') \in \mathbf{R}_2^1$.

Компонируя $\tilde{\phi}$ с морфизмом факторизации $\mathbf{R}_2^1 \rightarrow \bar{Y}_2 = \mathbf{R}_2^1 //_\chi G$, получаем отображение ϕ_y из окрестности точки $y \in \tilde{Y}$ в $\bar{Y}_2$. Легко видеть, что ϕ_y не зависит от выбора тривиализаций, поэтому построенные отображения ϕ_y склеиваются в морфизм $\phi: \tilde{Y} \rightarrow \bar{Y}_2$. Наконец, так как пучок $\tilde{i}_* \tilde{\mathcal{E}}$ сосредоточен на $\tilde{Q}$, заключаем, что $\tilde{g} = \tilde{g}_2 \circ \phi$.

Пусть $\tilde{Y}^\circ = \tilde{Y} \setminus \tilde{g}^{-1}(Z_1)$. Обозначим ограничение морфизмов $\tilde{g}$ и ϕ на $\tilde{Y}^\circ$ теми же символами.

ЛЕММА 7.8. *Отображение $\tilde{g}: \tilde{Y}^\circ \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \setminus Z_1$ пропускается через $X^\vee \setminus Z_1$, где $X^\vee \subset \mathbb{P}(V^*)$ – проективно двойственная к X гиперповерхность степени 4. Более того, общий слой морфизма $\tilde{g}: \tilde{Y}^\circ \rightarrow X^\vee \setminus Z_1$ – коника.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H_{\tilde{g}(y')} \subset \mathbb{P}(V)$ – гиперплоскость, соответствующая точке $\tilde{g}(y') \in \mathbb{P}(V^*)$. Из доказательства леммы 7.7 следует, что для всякой точки $y' \in \tilde{Y}$ имеем

$$X \cap H_{\tilde{g}(y')} = X_{y'} = \eta^{-1}(\tilde{Q}) \supset \eta^{-1}(\Sigma) = \text{LGr}(2, 4).$$

Однако гладкое гиперплоское сечение многообразия $X = \text{LGr}(3, 6)$ не может содержать многообразие $\text{LGr}(2, 4)$ по теореме Лефшеца. Значит, $X \cap H_{\tilde{g}(y')}$ особо для всех $y' \in \tilde{Y}$, т.е. $\tilde{g}(\tilde{Y}) \subset X^\vee \subset \mathbb{P}(V^*)$. Более того, легко посчитать индекс пересечения $H^{12} \cdot h = 8$ на $\tilde{Y}$, откуда следует, что отображение $\tilde{g}: \tilde{Y} \rightarrow X^\vee$ сюръективно, а его общий слой является коникой в $\mathbb{P}(W)$, так как $X^\vee$ – гиперповерхность степени 4 в силу [13].

Напомним, что на многообразии Y_2 был построен пучок алгебр $\mathcal{A}_2$, так что F_2 является локально проективным $\mathcal{A}_2$ -модулем на Y_2 ранга 2. Обозначим через $\mathbb{P}_{Y_2, \mathcal{A}_2}(F_2^*)$ многообразие модулей локально проективных фактормодулей ранга 1 пучка $\mathcal{A}_2$. Тогда $\mathbb{P}_{Y_2, \mathcal{A}_2}(F_2^*)$ – расслоение на коники над Y_2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.9. *Имеем $\tilde{Y}^\circ = \mathbb{P}_{Y_2, \mathcal{A}_2}(F_2^*)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in \tilde{Y}^\circ$. Тогда $\phi(y) \in \bar{Y}_2$ и $\bar{g}_2(\phi(y)) = \tilde{g}(y) \notin Z_1$, значит, $\phi(y) \in Y_2$. Следовательно, ϕ отображает $\tilde{Y}^\circ$ в Y_2 . Более того, из построения отображения ϕ в лемме 7.7 и из построения семейства (F_1, F_2) на Y_2 в лемме 7.6 следует, что

$$\phi^* F_2 \cong \tilde{F}_0^* \otimes \tilde{F}_2 \quad \text{и} \quad \phi^* \mathcal{A}_2 \cong \mathcal{E}nd(\tilde{F}_0)$$

для некоторого векторного расслоения $\tilde{F}_0$ на $\tilde{Y}^\circ$. Эпиморфизм $\tilde{F}_2 \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(-h)$ из последовательности (7.2) индуцирует эпиморфизм $\mathcal{E}nd(\tilde{F}_0)$ -модулей $\tilde{F}_0^* \otimes \tilde{F}_2 \rightarrow \tilde{F}_0^*(-h)$ и, значит, морфизм $\tilde{Y}^\circ \rightarrow \mathbb{P}_{Y_2, \mathcal{A}_2}(F_2^*)$.

Обратно, выберем точку $\tilde{y} \in \mathbb{P}_{Y_2, \mathcal{A}_2}(F_2^*)$. Пусть $y \in Y_2$ – ее проекция, $\rho: W \otimes R_1 \rightarrow R_2$ – соответствующее $(6, 2)$ -мерное представление колчана Q , а $R_2 \rightarrow \mathbb{k}$ – соответствующее одномерное факторпространство. Пусть $R'_2 \subset R_2$ – соответствующее одномерное подпространство и рассмотрим композицию $E_1 \otimes R_1 \xrightarrow{e_\rho} E_2 \otimes R_2 \rightarrow E_2$. Применяя функтор $\text{Hom}(E_1, -)$, получаем отображение $R_1 \rightarrow W^*$. Пусть R'_1 – ядро этого отображения. Получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & E_1 \otimes R'_1 & \xrightarrow{e'_\rho} & E_2 \otimes R'_2 & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & E_1 \otimes R_1 & \xrightarrow{e_\rho} & E_2 \otimes R_2 & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & K'' \longrightarrow E_1 \otimes R_1/R'_1 & \xrightarrow{e''_\rho} & E_2 & \longrightarrow & C'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \quad (7.3)$$

которая дает точную последовательность

$$0 \rightarrow K'' \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0. \quad (7.4)$$

Заметим, что пучок C сосредоточен на гиперплоском сечении

$$X_y = H_{g_2(y)} \cap X \subset X$$

и его ранг в общей точке X_y равен $c_1(E_2 \otimes R_2) - c_1(E_1 \otimes R_1) = 2$.

Докажем, что $\dim R' = 1$. Для этого разберем все возможные случаи.

Поскольку (R'_1, R'_2) – подпредставление в (R_1, R_2) , а представление (R_1, R_2) стабильно по лемме 5.5, то $\dim R'_1 < 3$, поэтому необходимо рассмотреть лишь случаи $\dim R'_1 = 2$ и $\dim R'_1 = 0$.

Допустим, что $\dim R'_1 = 2$, $\dim R_1/R'_1 = 4$. Тогда нижняя строка диаграммы (7.3) имеет вид

$$0 \rightarrow K'' \rightarrow (R_1/R'_1) \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{e''} \mathcal{U}_X^* \rightarrow C'' \rightarrow 0.$$

Так как C'' – фактор пучка C по (7.4), имеем $\text{rank}(C'') = 0$, значит, $\text{rank}(K'') = 4 - 3 = 1$. Таким образом, K'' – рефлексивный пучок ранга 1, значит, K'' – линейное расслоение согласно [20]. Поскольку $\text{Pic } X$ порождается расслоением $\mathcal{O}_X(1)$, имеем $K'' \cong \mathcal{O}_X(-k)$, $k \geq 0$. Более того, $k \neq 0$, так как отображение $H^0(e'')$ является вложением (по определению пространства R'_1). С другой стороны, $-k = c_1(K'') = c_1(C'') - c_1(\mathcal{U}_X^*) \geq -c_1(\mathcal{U}_X)^* = -1$, значит, $k = 1$ и $c_1(C'') = c_1(K'') + c_1(\mathcal{U}_X^*) = 0$. Следовательно, ранг пучка C'' в общей точке X_y равен нулю.

Далее, верхняя строка диаграммы (7.3) имеет вид

$$0 \rightarrow R'_1 \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{e'} \mathcal{U}_X^* \rightarrow C' \rightarrow 0.$$

Имеем $\text{rank}(C') = \text{rank}(\mathcal{U}_X^*) - \dim R'_1 = 1$ и $c_1(C') = c_1(\mathcal{U}_X^*) = 1$. Обозначим через $T(C')$ подпучок кручения в C' . Тогда $C'/T(C')$ – пучок без кручения ранга 1, значит, $C'/T(C') \cong J_S(k)$ (см. [20]), где $S \subset X$ – подсхема коразмерности ≥ 2 в X . Значит, $c_1(C') = c_1(T(C')) + k \geq k$, т.е. $k \leq 1$. С другой стороны, $k \geq 1$, так как существует нетривиальный морфизм $\mathcal{U}_X^* \rightarrow C' \rightarrow J_S(k) \rightarrow \mathcal{O}_X(k)$. Следовательно, $k = 1$, $c_1(T(C')) = c_1(C') - k = 0$, и, значит, кручение в C' сосредоточено в коразмерности ≥ 2 , и ранг пучка C' в общей точке X_y равен 1.

Итак, мы показали, что ранг пучка C'' в общей точке X_y равен 0, а ранг пучка C' в общей точке X_y равен 1. Из вида последовательности (7.4) следует, что это противоречит тому, что ранг пучка C в общей точке X_y равен 2. Таким образом, случай $\dim R'_1 = 2$ невозможен.

Допустим теперь, что $R'_1 = 0$. Значит, отображение $R_1 \rightarrow W^*$ инъективно, т.е. является изоморфизмом, так как $\dim R_1 = 6 = \dim W^*$. Значит, $R_1/R'_1 \cong W^*$, и отображение e''_ρ отождествляется с каноническим морфизмом $W^* \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{U}_X^*$. Следовательно, $C'' = 0$ и $K'' = \mathcal{U}_X^* \cong \mathcal{U}_X$. С другой стороны, ясно, что $C' = R'_2 \otimes \mathcal{U}_X^* \cong \mathcal{U}_X^*$. Итак, последовательность (7.4) имеет вид

$$0 \rightarrow \mathcal{U}_X \rightarrow \mathcal{U}_X^* \rightarrow C \rightarrow 0.$$

Заметим, что $\text{Hom}(\mathcal{U}_X, \mathcal{U}_X^*) \cong S^2 W^* \oplus \Lambda^2 W^*/\mathbb{k}$. Если гомоморфизм имеет нетривиальную компоненту в $S^2 W^*$, то его коядро сосредоточено на гиперповерхности степени 2 в X , а если гомоморфизм лежит в $\Lambda^2 W^*/\mathbb{k}$, то он кососимметричен, следовательно, вырожден в общей точке (так как $\mathcal{U}_X$ имеет нечетный ранг). Итак, C не может быть пучком ранга 2 на гиперплоском сечении X , поэтому случай $\dim R'_1 = 2$ также невозможен.

Следовательно, $\dim R'_1 = 1$, $\dim R_1/R'_1 = 5$. Верхняя и нижняя строки диаграммы (7.3) имеют вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_X &\xrightarrow{e'} \mathcal{U}_X^* \rightarrow C' \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow K'' &\rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus 5} \xrightarrow{e''} \mathcal{U}_X^* \rightarrow C'' \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Отображение e' задается элементом $w' \in \mathbb{P}(\text{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{U}_X^*)) = \mathbb{P}(W^*)$, а отображение e'' – гиперплоскостью в $\mathbb{P}(W^*)$, т.е. точкой $w'' \in \mathbb{P}(W)$. Более того, из точной последовательности $0 \rightarrow \mathcal{U}_X \rightarrow W^* \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{U}_X^* \rightarrow 0$ следует точная последовательность

$$0 \rightarrow K'' \rightarrow \mathcal{U}_X \xrightarrow{w''} \mathcal{O}_X \rightarrow C'' \rightarrow 0. \quad (7.6)$$

В частности, пучок K'' рефлексивен и $\text{supp } C'' = \text{LGr}(2, 4)$ имеет коразмерность 3. Более того, из последовательности (7.5) следует, что пучок C' рефлексивен и $\text{rank}(C') = 2$. Поэтому $C'|_{X_y}$ – пучок без кручения ранга 2 на X_y и следующая последовательность точна:

$$0 \rightarrow C'(-1) \rightarrow C' \rightarrow C'|_{X_y} \rightarrow 0.$$

Теперь заметим, что так как пучок C сосредоточен на X_y , морфизм $C' \rightarrow C$ пропускается через $C'_{|X_y}$. Поскольку ранги обоих пучков $C'_{|X_y}$ и C в общей точке X_y равны 2, а ранг пучка C'' в общей точке X_y равен 0, заключаем, что морфизм $C'_{|X_y} \rightarrow C$ является вложением. Следовательно, композиция $K'' \rightarrow C' \rightarrow C'_{|X_y}$ равна нулю, значит, морфизм $K'' \rightarrow C'$ пропускается через морфизм $K'' \rightarrow C'(-1)$. Этот морфизм, будучи вложением рефлексивных пучков одинакового ранга и первого класса Черна c_1 , является изоморфизмом. Изоморфизм $K'' \cong C'(-1)$ позволяет склеить последовательность (7.5), подкрученную на $\mathcal{O}_X(-1)$, с последовательностью (7.6) в длинную точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{w'} \mathcal{U}_X^*(-1) \rightarrow \mathcal{U}_X \xrightarrow{w''} \mathcal{O}_X \rightarrow C'' \rightarrow 0.$$

Далее, эта последовательность является комплексом Кошуля w'' , значит, $w' = w''$ и $C'' \cong \mathcal{O}_{Z(w'')}$, где $Z(w'')$ – схема нулей сечения $w'' \in H^0(X, \mathcal{U}_X^*)$. Легко проверить, что пространство гиперплоских сечений многообразия X , проходящих через $Z(w'')$, совпадает со слоем расслоения $\Omega_{\mathbb{P}(W)}^3(3)/\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \subset V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}$ в w'' . С другой стороны, носитель X_y пучка C содержит $\text{supp}(C'') = Z(w'')$, поэтому отображение

$$\mathbb{P}_{Y_2, \mathcal{A}_2}(F_2^*) \rightarrow \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(V^*), \quad \tilde{y} \mapsto (w'', g_2(y))$$

пропускается через $\tilde{Y} = \mathbb{P}_{\mathbb{P}(W)}(\Omega_{\mathbb{P}(W)}^3(3)/\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1)) \subset \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(V^*)$. Более того, ясно, что его образ лежит в $\tilde{Y}^\circ$.

Итак, мы построили отображение $\mathbb{P}_{Y_2, \mathcal{A}_2}(F_2^*) \rightarrow \tilde{Y}^\circ$. Остается заметить, что построенные отображения взаимно обратны.

ТЕОРЕМА 7.10. *Имеем $Y_2 = X^\vee \setminus Z_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку многообразие $\tilde{Y}^\circ$ гладко, из предложения 7.9 следует, что Y_2 тоже гладко, причем $\dim Y_2 = \dim \tilde{Y}^\circ - 1 = 12$. С другой стороны, так как $\tilde{g} = \bar{g}_2 \circ \phi$, а $\tilde{g}$ и ϕ собственные и доминантные и $\tilde{g}$ отображает $\tilde{Y}^\circ$ в $X^\vee \setminus Z_1$, то g_2 – собственное доминантное отображение $Y_2 \rightarrow X^\vee \setminus Z_1$. С другой стороны, согласно [13] имеем $Z_1 = \text{sing}(X^\vee)$, значит, $X^\vee \setminus Z_1$ также гладко. Кроме того, $\dim(X^\vee \setminus Z_1) = \dim \mathbb{P}(V^*) - 1 = 12$. Итак, $g_2: Y_2 \rightarrow X^\vee \setminus Z_1$ – собственный доминантный морфизм гладких многообразий одинаковой размерности. Следовательно, либо $Y_2 = X^\vee \setminus Z_1$, либо $\text{rank Pic } Y_2 = \text{rank Pic } X^\vee + 1 = 2$. Допустим, что имеет место второе соотношение. Заметим, что так как ϕ – расслоение на коники, то $\text{rank Pic } \tilde{Y}^\circ = \text{rank Pic } Y_2 + 1 = 3$. С другой стороны, легко видеть, что $\text{rank Pic } \tilde{Y}^\circ \leq \text{rank Pic } \tilde{Y} = 2$. Противоречие. Значит, $Y_2 = X^\vee \setminus Z_1$.

СЛЕДСТВИЕ 7.11. *Если данные (D.3)–(D.5) – это $Y = Y_2$, $\mathcal{A}_Y = \mathcal{A}_2$, $\mathbf{Z} = \bar{Z}_2 = Z_1$, $g = g_2$, (F_1, F_2) – универсальное семейство, а ϕ индуцировано структурой представления колчана Q на (F_1, F_2) , то все условия (C.1)–(C.8) выполнены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку условия (C.1)–(C.3), (5.1) и (5.7) выполняются по лемме 7.1, из теоремы 5.7 следует, что условия (C.4)–(C.6) тоже выполнены. С другой стороны, условие (C.8) выполнено, так как $\mathbf{Z} = \mu(\text{Gr}(3, W^*))$

по лемме 7.2, и $\dim \mathbf{Z} \cap H = \dim \operatorname{Gr}(3, W^*) - 1 = 8$, в то время как $N - i - 2 = 14 - 4 - 2 = 8$. Наконец, по теореме 7.10 отображение $Y = Y_2 \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ является вложением и $\operatorname{codim}_{Y \times Y}(Y \times_{\mathbb{P}(V^*)} Y) = \dim Y = \dim X^\vee = \dim \mathbb{P}(V^*) - 1 = 12$, значит, $\dim X + N - \operatorname{codim}_{Y \times Y}(Y \times_{\mathbb{P}(V^*)} Y) = 6 + 14 - 12 = 8 = 2i$, и условие (C.7) выполнено.

§ 8. Приложение В. G_2 -грассманиан

В настоящем приложении доказывается, что двулистное накрытие $\mathbb{P}^{13}$, разветвленное в некоторой гиперповерхности степени 6 гомологически проективно двойственно грассманиану $G_2 \operatorname{Gr}(3, 6)$ простой группы Ли типа G_2 .

Напомним обозначения. Пусть $W = \mathbb{k}^7$ – неприводимое представление простой группы Ли типа G_2 и

$$X = G_2 \operatorname{Gr}(2, W), \quad (E_1, E_2) = (\mathcal{O}_X, \mathcal{U}_X^*),$$

где $G_2 \operatorname{Gr}(2, W)$ – грассманиан группы G_2 , представленный как схема нулей регулярного сечения $s_\lambda \in H^0(\operatorname{Gr}(2, W), \mathcal{U}^\perp(1)) \cong \Lambda^3 W^*$, соответствующего единственной G_2 -инвариантной 3-форме λ на W , $\mathcal{U} \subset W \otimes \mathcal{O}_{\operatorname{Gr}(2, W)}$ – тавтологическое подрасслоение ранга 2, а $\mathcal{U}_X$ – ограничение $\mathcal{U}$ на X . Естественное представление группы G_2 в пространстве $\Lambda^2 W$ раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений:

$$\Lambda^2 W = W^* \oplus V$$

(проекция $\Lambda^2 W \rightarrow W^*$ задается формой λ). Плуккерово вложение $\operatorname{Gr}(2, W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 W)$ при ограничении на X дает вложение $f: X \rightarrow \mathbb{P}(V)$.

ЛЕММА 8.1. *Имеем $\dim X = 5$, $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(-3)$. Кроме того, для X выполняются условия (C.1)–(C.3), а также дополнительные условия (5.1) и (5.7).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тем, что $X \subset \operatorname{Gr}(2, W)$ – схема нулей регулярного сечения $s_\lambda \in H^0(\operatorname{Gr}(2, W), \mathcal{U}^\perp(1))$. Поэтому

$$\dim X = \dim \operatorname{Gr}(2, W) - \operatorname{rank}(\mathcal{U}^\perp(1)) = 10 - 5 = 5,$$

$$\omega_X \cong \omega_{\operatorname{Gr}(2, W)|_X} \otimes \det(\mathcal{U}^\perp(1))^* \cong \mathcal{O}_X(-7) \otimes \mathcal{O}_X(4) \cong \mathcal{O}_X(-3).$$

В частности, условие (C.2) выполняется, причем $i_X = 3$. Далее, пользуясь резольвентой Кошуля $\Lambda^\bullet(\mathcal{U}^\perp(1)) \cong \mathcal{O}_X$ многообразия X в $\operatorname{Gr}(2, W)$, легко проверить, что $H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \cong V^*$, значит, $f(X)$ не содержится в гиперплоскости, т.е. условие (C.1) выполнено. Опять пользуясь резольвентой Кошуля, вычисляем $\operatorname{Hom}(E_s(k), E_t(l))$ с помощью теоремы Бореля–Ботта–Вейля и проверяем, что условия (C.3) и (5.1) выполнены. Наконец, замечаем, что $\mathbf{R}_1 = \operatorname{Hom}(\mathbb{k}^2, W^*)$ и $\mathbf{R}_1^\circ \subset \mathbf{R}_1$ соответствует множеству вложений $\mathbb{k}^2 \subset W^*$. Следовательно, $\operatorname{codim}_{\mathbf{R}_1}(\mathbf{R}_1 \setminus \mathbf{R}_1^\circ) = 6$, и условие (5.7) выполнено в силу леммы 5.3.

Теперь воспользуемся конструкцией, приведенной в § 5, и найдем явное описание пространства $Y = Y_3$. Воспользуемся тем же подходом, что и в § 7.

Большинство утверждений доказываются с использованием тех же рассуждений. Чтобы не повторяться, мы ограничимся описанием различий.

Вместо пространства Y_3 мы опишем $\mathbb{P}_{Y_3, \mathcal{A}_3}(F_2^*)$ – многообразие модулей фактормодулей ранга 1 пучка $\mathcal{A}_3$. Слой расслоения $\mathbb{P}_{Y_3, \mathcal{A}_3}(F_2^*)$ над точкой пространства Y_3 , соответствующей $(6, 3)$ -мерному представлению $\rho = (R_1, R_2)$ колчана Q , совпадает с $\mathbb{P}(R_2^*)$. Мы покажем, что всякая плоскость $R'_2 \subset R_2$ единственным образом продолжается до $(1, 2)$ -мерного подпредставления $\rho' = (R'_1, R'_2)$. Многообразие модулей $(1, 2)$ -мерных представлений колчана Q есть $\text{Gr}(2, W^*)$. Утверждается, что определенное таким образом отображение $\mathbb{P}_{Y_3, \mathcal{A}_3}(F_2^*) \rightarrow \text{Gr}(2, W^*)$ отождествляет $\mathbb{P}_{Y_3, \mathcal{A}_3}(F_2^*)$ с открытым подмножеством некоторого $\mathbb{P}^8$ -расслоения над изотропным грассманианом $\text{OGr}(2, W^*) \subset \text{Gr}(2, W^*)$.

ЛЕММА 8.2. *Имеем $\bar{Y}_1 = \bar{Z}_1 = \mu(\text{Gr}(2, W^*))$, где $\mu: \mathbb{P}(\Lambda^2 W^*) \dashrightarrow \mathbb{P}(V^*)$ – линейная проекция из $\mathbb{P}(\lambda(W)) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 W^*)$.*

Напомним, что группа G_2 является подгруппой группы $O(W)$. Рассмотрим соответствующую G_2 -инвариантную невырожденную квадратичную форму на W , и пусть $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}(W)$, $\text{OGr}(2, W) \subset \text{Gr}(2, W)$ и $\text{OF}(1, 2; W) \subset \text{Fl}(1, 2; W)$ обозначают соответствующую квадрику, изотропный грассманиан и частичное пространство изотропных флагов. Обозначим через $\tilde{p}: \text{OF}(1, 2; W) \rightarrow \text{OGr}(2, W)$ и $\tilde{q}: \text{OF}(1, 2; W) \rightarrow \mathcal{Q}$ проекции. Пусть $S_{\mathcal{Q}}$ – спинорное расслоение на $\mathcal{Q}$, $\mathcal{U}_{\text{OGr}}$ – тавтологическое подрасслоение ранга 2 в $W \otimes \mathcal{O}_{\text{OGr}(2, W)}$, и пусть $M := \tilde{p}_* \tilde{q}^* S_{\mathcal{Q}} \in \mathcal{D}(\text{OGr}(2, W))$.

ЛЕММА 8.3. *Диаграмма*

коммутативна. Более того, M – расслоение ранга 2 на $\text{OGr}(2, W)$, существуют изоморфизм $M|_X \cong \mathcal{U}_X$ и точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\text{OGr}(2, W)}(-1) \rightarrow M \rightarrow \mathcal{O}_{\text{OGr}(2, W)} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X)$ является многообразием флагов группы G_2 . Вложение $G_2 \subset O(W)$ индуцирует вложение многообразий флагов $\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X) \rightarrow \text{OF}(1, 2; W)$ и грассманианов $X \rightarrow \text{OGr}(2, W)$, которое и дает коммутативную диаграмму (заметим, что квадрика $\mathcal{Q}$ также является грассманианом группы G_2).

Второе утверждение следует из того, что ограничение спинорного расслоения $S_{\mathcal{Q}}$ на всякую прямую $\mathbb{P}^1 \subset \mathcal{Q}$ расщепляется как $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$.

Для доказательства третьего утверждения заметим, что $\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X) \cong \mathbb{P}_{\mathcal{Q}}(K)$, где K – ядро ограничения на $\mathcal{Q}$ морфизма расслоений $T_{\mathbb{P}(W)}(-2) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}(W)}(1)$, задаваемого формой λ . С другой стороны, образ этого морфизма изоморфен спинорному расслоению, откуда получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow K \rightarrow T_{\mathbb{P}(W)}(-2)|_{\mathcal{Q}} \rightarrow S_{\mathcal{Q}} \rightarrow 0. \quad (8.1)$$

Учитывая точные последовательности

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow p^* \mathcal{O}_X(-1) \rightarrow q^* K \rightarrow p^* \mathcal{O}_X(1) \otimes q^* \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-3) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow q^* \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-1) \rightarrow p^* \mathcal{U}_X \rightarrow q^* \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(1) \otimes p^* \mathcal{O}_X(-1) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

получаем, что $\mathcal{H}^0(p_* q^* K) \cong \mathcal{O}_X(-1)$, $\mathcal{H}^1(p_* q^* K) \cong \mathcal{U}_X$ и $p_* q^* T_{\mathbb{P}(W)}(-2)|_{\mathcal{Q}} \cong \mathcal{O}_X(-1)$, откуда следует, что $p_* q^* S_{\mathcal{Q}} \cong \mathcal{U}_X$. Таким образом,

$$M|_X \cong (\tilde{p}_* \tilde{q}^* S_{\mathcal{Q}})|_X \cong p_* ((\tilde{q}^* S_{\mathcal{Q}})|_{\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X)}) \cong p_* q^* S_{\mathcal{Q}} \cong \mathcal{U}_X.$$

Наконец, из последовательности (8.1) следует, что многообразие $\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X) = \mathbb{P}_{\mathcal{Q}}(K)$ является схемой нулей сечения расслоения $\tilde{q}^* S_{\mathcal{Q}} \otimes \tilde{p}^* \mathcal{O}_{\text{Gr}(2,W)}(1)$ на $\mathbb{P}_{\mathcal{Q}}(T_{\mathbb{P}(W)}(-2)|_{\mathcal{Q}}) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{P}(W)}(T_{\mathbb{P}(W)}(-2)) = \text{Fl}(1, 2; W)$. Поскольку многообразие $\text{OF}(1, 2; W) = \mathbb{P}_{\text{Gr}(2,W)}(\mathcal{U}_{\text{Gr}})$ является подмногообразием $\mathbb{P}_{\mathcal{Q}}(T_{\mathbb{P}(W)}(-2)|_{\mathcal{Q}})$, мы видим, что $\mathbb{P}_X(\mathcal{U}_X)$ является схемой нулей сечения расслоения $\tilde{q}^* S_{\mathcal{Q}} \otimes \tilde{p}^* \mathcal{O}_{\text{Gr}(2,W)}(1)$, значит, многообразие X – схема нулей сечения расслоения

$$\tilde{p}_* (\tilde{q}^* S_{\mathcal{Q}} \otimes \tilde{p}^* \mathcal{O}_{\text{Gr}(2,W)}(1)) = M \otimes \mathcal{O}_{\text{Gr}(2,W)}(1) \cong M^*.$$

Следовательно, его структурный пучок допускает резольвенту Кошуля, которая имеет вид искомой точной последовательности.

Рассмотрим произведение $X \times \text{Gr}(2, W)$ и подсхему $\Sigma' \subset X \times \text{Gr}(2, W) \subset \text{Gr}(2, W) \times \text{Gr}(2, W)$ пар пересекающихся двумерных подпространств.

ЛЕММА 8.4. *На $X \times \text{Gr}(2, W)$ существуют точные последовательности*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{U}_X(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\text{Gr}(2,W)}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_X(-1) \boxtimes (W/\mathcal{U}_{\text{Gr}})(-1) \\ \rightarrow \mathcal{U}_X \boxtimes M \rightarrow \mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\text{Gr}(2,W)} \rightarrow \mathcal{O}_{\Sigma'} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\text{Gr}(2,W)}(-1) \rightarrow \mathcal{U}_X^*(-1) \boxtimes M \rightarrow \mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{U}_{\text{Gr}}^\perp \\ \rightarrow \mathcal{U}_X^* \boxtimes \mathcal{O}_{\text{Gr}(2,W)} \rightarrow \mathcal{F}_{\Sigma'} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $\mathcal{F}_{\Sigma'} = \text{Ext}^3(\mathcal{O}_{\Sigma'}, \mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\text{Gr}(2,W)}(-1))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разложение по исключительному набору

$$\langle \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-3), \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-2), \mathcal{S}_{\mathcal{Q}}(-1), \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-1), \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}, \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(1) \rangle = \mathcal{D}^b(\mathcal{Q})$$

структурного пучка многообразия $\text{OF}(1, 2; W) \subset \text{Gr}(2, W) \times \mathcal{Q}$. Легко видеть, что разложение имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Gr}(2,W)}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-3) \rightarrow (W/\mathcal{U}_{\text{Gr}})(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-2) \rightarrow M \boxtimes \mathcal{S}_{\mathcal{Q}}(-1) \\ \rightarrow \mathcal{U}_{\text{Gr}}^\perp \boxtimes \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Gr}(2,W)} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{OF}(1,2;W)} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Рассмотрим произведение $\mathrm{OGr}(2, W) \times \mathcal{Q} \times \mathrm{OGr}(2, W)$ и подмногообразие

$$\Sigma'' = \mathrm{OF}(1, 2; W) \times_{\mathcal{Q}} \mathrm{OF}(1, 2; W) \subset \mathrm{OGr}(2, W) \times \mathcal{Q} \times \mathrm{OGr}(2, W).$$

Ясно, что его проекция $\Sigma''' = p_{13}(\Sigma'') \subset \mathrm{OGr}(2, W) \times \mathrm{OGr}(2, W)$ является под-схемой пар пересекающихся двумерных подпространств. Тензорно перемножая обратные образы точной последовательности (8.2) относительно проекций $p_{12}: \mathrm{OGr}(2, W) \times \mathcal{Q} \times \mathrm{OGr}(2, W) \rightarrow \mathrm{OGr}(2, W) \times \mathcal{Q}$ и $p_{23}: \mathrm{OGr}(2, W) \times \mathcal{Q} \times \mathrm{OGr}(2, W) \rightarrow \mathcal{Q} \times \mathrm{OGr}(2, W)$ и применяя функтор p_{13*} , получаем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{U}_{\mathrm{OGr}}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathrm{OGr}(2, W)}(-1) &\rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{OGr}(2, W)}(-1) \boxtimes (W/\mathcal{U}_{\mathrm{OGr}})(-1) \\ &\rightarrow M \boxtimes M \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{OGr}(2, W)} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathrm{OGr}(2, W)} \rightarrow \mathcal{O}_{\Sigma'''} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ограничивая эту последовательность на $X \times \mathrm{OGr}(2, W)$ и учитывая, что $\mathcal{U}_{\mathrm{OGr}}|_X \cong M|_X \cong \mathcal{U}_X$, получаем первую последовательность. Применяя функтор $R\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathrm{OGr}(2, W)}(-1))$, получаем вторую последовательность.

Рассмотрим обрезанную первую последовательность леммы 8.4 как резольвенту пучка идеалов $J_{\Sigma'}$. Тензорно умножая ее на $\mathcal{O}_X(1)$ и применяя функтор прямого образа относительно проекции $p_2: X \times \mathrm{OGr}(2, W) \rightarrow \mathrm{OGr}(2, W)$, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow (W/\mathcal{U}_{\mathrm{OGr}})(-1) \rightarrow W^* \otimes M \rightarrow p_{2*}(J_{\Sigma'} \otimes \mathcal{O}_X(1)) \rightarrow 0. \quad (8.3)$$

ЛЕММА 8.5. *Объект $p_{2*}(J_{\Sigma'} \otimes \mathcal{O}_X(1))$ является векторным расслоением ранга 9 на $\mathrm{OGr}(2, W)$. Более того, его ограничение на X изоморфно расслоению $\mathfrak{p}$ на $X = G_2/P$ (здесь P – параболическая подгруппа в G_2 , а $\mathfrak{p}$ – подрасслоение параболических подалгебр Li).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что $p_{2*}(J_{\Sigma'} \otimes \mathcal{O}_X(1))$ является векторным расслоением. Слой многообразия Σ' над точкой $u \in \mathrm{OGr}(2, W)$ – это либо поверхность Хирцебруха F_1 (если $u \notin X$), либо конус над рациональной скрученной кубической кривой (если $u \in X$). В обоих случаях $H^0(\Sigma'_u, \mathcal{O}_X(1))$ 5-мерно, поэтому $p_{2*}(J_{\Sigma'} \otimes \mathcal{O}_X(1))$ – векторное расслоение ранга 5. Отсюда легко следует первое утверждение.

Ограничивая это расслоение на X , получаем G_2 -эквивариантное факторрасслоение ранга 5 расслоения $V^* \otimes \mathcal{O}_X \cong \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_X$. Но единственное такое расслоение – это касательное расслоение $T_X \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, значит, $p_{2*}(J_{\Sigma'} \otimes \mathcal{O}_X(1))|_X \cong \mathfrak{p}$.

Рассмотрим проективизацию

$$\tilde{Y} = \mathbb{P}_{\mathrm{OGr}(2, W)}(p_{2*}(J_{\Sigma'} \otimes \mathcal{O}_X(1))).$$

Естественное вложение $p_{2*}(J_{\Sigma'} \otimes \mathcal{O}_X(1)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{OGr}(2, W)} = V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{OGr}(2, W)}$ индуцирует морфизм $\tilde{Y} \xrightarrow{\tilde{g}} \mathbb{P}(V^*)$. Обозначим через $\pi: \tilde{Y} \rightarrow \mathrm{OGr}(2, W)$ проекцию. Обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H) &:= \tilde{g}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(1), & \tilde{g}: \tilde{Y} &\rightarrow \mathbb{P}(V^*), \\ \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(h) &:= \pi^* \mathcal{O}_{\mathrm{OGr}(2, W)}(1), & \pi: \tilde{Y} &\rightarrow \mathrm{OGr}(2, W). \end{aligned}$$

Рассмотрим произведение $X \times \tilde{Y}$, проекцию $\text{id}_X \times \pi: X \times \tilde{Y} \rightarrow X \times \text{OGr}(2, W)$, подсхемы

$$\Sigma = (\text{id}_X \times \pi)^{-1}(\Sigma'), \quad \tilde{Q} = Q(X, \tilde{Y}) = (X \times \tilde{Y}) \times_{\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)} Q$$

и уравнение

$$s_{\tilde{Q}} \in H^0(X \times \tilde{Y}, \mathcal{O}_X(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H)) = H^0(X \times \tilde{Y}, (f \times \tilde{g})^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)}(1, 1)) \cong V^* \otimes V$$

подсхемы $\tilde{Q}$ в $X \times \tilde{Y}$.

ЛЕММА 8.6. *Сечение $s_{\tilde{Q}}$ обращается в нуль на схеме Σ .*

Рассмотрим обратный образ второй точной последовательности леммы 8.4 на $X \times \tilde{Y}$. Рассмотрим конус G' первого морфизма, подкрученного на $\mathcal{O}_X(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H)$, и конус G'' третьего морфизма как объекты производной категории $\mathcal{D}^b(X \times \tilde{Y})$. По построению имеем точные треугольники

$$\begin{aligned} E_1 \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H - h) &\xrightarrow{\tilde{e}'} E_2 \boxtimes M(H) \longrightarrow G', \\ E_1 \boxtimes \mathcal{U}_{\text{OGr}}^\perp &\xrightarrow{\tilde{e}''} E_2 \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}} \longrightarrow G''. \end{aligned}$$

Ясно, что обратный образ второй последовательности леммы 8.4 можно переписать в виде точного треугольника

$$G' \otimes (\mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(-H))[1] \rightarrow G'' \rightarrow \mathcal{F}_\Sigma. \quad (8.4)$$

Поскольку $\text{Hom}(E_1, E_2) = W^*$, морфизмы $\tilde{e}'$ и $\tilde{e}''$ задают структуру представления колчана $\mathcal{Q}$ в семействах $(\mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H - h), M(H))$ и $(\mathcal{U}_{\text{OGr}}^\perp, \mathcal{O}_{\tilde{Y}})$ на $\tilde{Y}$.

ЛЕММА 8.7. *Существует единственное расширение*

$$0 \rightarrow (\mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H - h), M(H)) \rightarrow (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2) \rightarrow (\mathcal{U}_{\text{OGr}}^\perp, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}) \rightarrow 0 \quad (8.5)$$

в категории семейств представлений колчана $\mathcal{Q}$ на $\tilde{Y}$ такое, что конус индуцированного морфизма $\tilde{e}: E_1 \boxtimes \tilde{F}_1 \rightarrow E_2 \boxtimes \tilde{F}_2$ является когерентным пучком, сосредоточенным теоретико-схемно на $\tilde{Q}$.

Согласно лемме 8.7 семейство $(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ на $\tilde{Y}$ является семейством представлений колчана $\mathcal{Q}$ и на $X \times \tilde{Y}$ существует точная последовательность

$$0 \rightarrow E_1 \boxtimes \tilde{F}_1 \xrightarrow{\tilde{e}} E_2 \boxtimes \tilde{F}_2 \rightarrow \tilde{i}_* \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow 0,$$

где $\tilde{\mathcal{E}}$ – когерентный пучок на $\tilde{Q}$.

ЛЕММА 8.8. *Семейство $(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ индуцирует морфизм $\phi: \tilde{Y} \rightarrow \bar{Y}_3$ такой, что $\tilde{g} = \bar{g}_3 \circ \phi$.*

Пусть $\tilde{Y}^\circ = \tilde{Y} \setminus \tilde{g}^{-1}(Z_1)$. Обозначим ограничение морфизмов $\tilde{g}$ и ϕ на $\tilde{Y}^\circ$ теми же символами.

Напомним, что на многообразии Y_3 был построен пучок алгебр $\mathcal{A}_3$, так что F_2 является локально проективным $\mathcal{A}_3$ -модулем на Y_3 ранга 3. Обозначим через $\mathbb{P}_{Y_3, \mathcal{A}_3}(F_2^*)$ многообразие модулей локально проективных фактормодулей ранга 1 пучка $\mathcal{A}_3$. Тогда $\mathbb{P}_{Y_3, \mathcal{A}_3}(F_2^*)$ – скрученное $\mathbb{P}^2$ -расслоение над Y_3 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.9. Имеем $\tilde{Y}^\circ = \mathbb{P}_{Y_3, \mathcal{A}_3}(F_2^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\tilde{Y}^\circ \rightarrow \mathbb{P}_{Y_3, \mathcal{A}_3}(F_2^*)$ строится так же, как и в предложении 7.9. Остается построить обратное отображение. Выберем точку $\tilde{y} \in \mathbb{P}_{Y_3, \mathcal{A}_3}(F_2^*)$. Пусть $\rho: W \otimes R_1 \rightarrow R_2$ – соответствующее (6, 3)-мерное представление колчана $\mathcal{Q}$, а $R_2 \rightarrow \mathbb{k}$ – соответствующее одномерное факторпространство. Пусть $R'_2 \subset R_2$ – соответствующее двумерное подпространство, и рассмотрим композицию $E_1 \otimes R_1 \xrightarrow{e_\rho} E_2 \otimes R_2 \rightarrow E_2$. Применяя функтор $\text{Hom}(E_1, -)$, получаем отображение $R_1 \rightarrow W^*$. Пусть R'_1 – ядро этого отображения. Получаем диаграмму (7.3) и точную последовательность (7.4). Заметим, что пучок C сосредоточен на гиперплоском сечении $X_y = H_{g_3(y)} \cap X \subset X$ и его ранг в общей точке X_y равен $c_1(E_2 \otimes R_2) - c_1(E_1 \otimes R_1) = 3$.

Докажем, что $\dim R' = 1$. Для этого разберем все возможные случаи.

Поскольку (R'_1, R'_2) – подпредставление в (R_1, R_2) , а представление (R_1, R_2) стабильно по лемме 5.5, имеем

$$\dim R'_1 < 4,$$

так что необходимо рассмотреть лишь случаи $\dim R'_1 = 3$, $\dim R'_1 = 2$ и $\dim R'_1 = 0$.

Случаи $\dim R'_1 = 2$ и $\dim R'_1 = 3$ разбираются так же, как и случай $\dim R'_1 = 2$ в доказательстве предложения 7.9. Единственное различие заключается в том, что в случае $\dim R'_1 = 2$ пучок $T(C')$ может иметь ранг 1 в общей точке X_y , однако это возможно только в случае $C' \cong \mathcal{U}_X^* \oplus \mathcal{U}_X^* / (\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X)$, откуда следует, что $g_3(y) \in Z_1$.

Допустим теперь, что $R'_1 = 0$. Значит, отображение $R_1 \rightarrow W^*$ инъективно, так что можно рассматривать R_1 как гиперплоскость в $\mathbb{P}(W^*)$, или как точку $w_y \in \mathbb{P}(W)$. Если коядро морфизма $K'' \rightarrow C' = \mathcal{U}_X^* \oplus \mathcal{U}_X^*$ сосредоточено теоретико-схемно на гиперплоском сечении $X_y \subset X$, то морфизм

$$\mathcal{U}_X \oplus \mathcal{U}_X \cong (\mathcal{U}_X^* \oplus \mathcal{U}_X^*) \otimes \mathcal{O}_X(-1) \rightarrow \mathcal{U}_X^* \oplus \mathcal{U}_X^*$$

пропускается через K'' и коядро соответствующего морфизма $\mathcal{U}_X \oplus \mathcal{U}_X \rightarrow K''$ сосредоточено на том же гиперплоском сечении $X_y \subset X$. С другой стороны, легко проверить, что $\dim \text{Hom}(\mathcal{U}_X, K'') = 1$ для $w_y \notin \mathcal{Q}$ и $\dim \text{Hom}(\mathcal{U}_X, K'') = 4$ для $w_y \in \mathcal{Q}$. Следовательно, имеем $w_y \in \mathcal{Q}$. Более того, ясно, что размерность множества таких гиперплоских сечений $X_y \subset X$ имеет размерность не больше, чем $\dim \mathcal{Q} + \dim \text{Gr}(2, 4) = 5 + 4 = 9$. С другой стороны, очевидно, что множество таких гиперплоских сечений G_2 -инвариантно в $\mathbb{P}(V^*)$, следовательно, пользуясь описанием всех G_2 -инвариантных замкнутых подмножеств в $\mathbb{P}(V^*)$, легко увидеть, что это множество содержится в Z_1 .

Итак, мы проверили, что если $g_3(y) \notin Z_1$, то $\dim R'_1 = 1$, $\dim R_1/R'_1 = 5$. Верхняя и нижняя строки диаграммы (7.3) имеют вид

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{e'} \mathcal{U}_X^* \oplus \mathcal{U}_X^* \rightarrow C' \rightarrow 0, \quad (8.6)$$

$$0 \rightarrow K'' \rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus 5} \xrightarrow{e''} \mathcal{U}_X^* \rightarrow C'' \rightarrow 0. \quad (8.7)$$

Отображение e'' задается 5-мерным подпространством в W^* , т.е. точкой $u \in \text{Gr}(2, W)$. Рассуждая так же, как и в доказательстве предложения 7.9, получим, что последовательность (8.6), подкрученную на $\mathcal{O}_X(-1)$, можно склеить с последовательностью (8.7) в следующую точную последовательность:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{e'} \mathcal{U}_X^*(-1) \oplus \mathcal{U}_X^*(-1) \rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus 5} \xrightarrow{u} \mathcal{U}_X^* \rightarrow C'' \rightarrow 0.$$

Теперь легко показать, что эта последовательность обязана совпадать со второй последовательностью леммы 8.4, ограниченной на слой многообразия $X \times \text{OGr}(2, W)$ над некоторой точкой $u \in \text{OGr}(2, W)$. В частности, $u \in \text{OGr}(2, W)$. Сопоставляя точке $\tilde{y}$ точку $u \in \text{OGr}(2, W)$, получаем отображение $\mathbb{P}_{Y_3, A_3}(F_2^*) \rightarrow \text{OGr}(2, W)$. С другой стороны, носитель X_y пучка C содержит $\text{supp}(C'') = \Sigma'_u$, поэтому отображение

$$\mathbb{P}_{Y_3, A_3}(F_2^*) \rightarrow \text{OGr}(2, W) \times \mathbb{P}(V^*), \quad \tilde{y} \mapsto (u, g_3(y)),$$

пропускается через $\tilde{Y} = \mathbb{P}_{\text{OGr}(2, W)}(p_{2*}(J_{\Sigma'} \otimes \mathcal{O}_X(1))) \subset \text{OGr}(2, W) \times \mathbb{P}(V^*)$. Более того, ясно, что его образ лежит в $\tilde{Y}^\circ$.

Итак, мы построили отображение $\mathbb{P}_{Y_3, A_3}(F_2^*) \rightarrow \tilde{Y}^\circ$. Остается заметить, что построенные отображения взаимно обратны.

ТЕОРЕМА 8.10. *Отображение $g_3: Y_3 \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \setminus Z_1$ является двулистным накрытием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку многообразие $\tilde{Y}^\circ$ гладко, из предложения 8.9 следует, что Y_3 тоже гладко, причем $\dim Y_3 = \dim \tilde{Y}^\circ - 2 = 13$. С другой стороны, так как $\tilde{g} = \tilde{g}_3 \circ \phi$, а $\tilde{g}$ и ϕ собственные и доминантные, то g_3 – собственное доминантное отображение $Y_3 \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \setminus Z_1$. Поскольку Y_3 и $\mathbb{P}(V^*) \setminus Z_1$ – гладкие многообразия одинаковой размерности и $\text{rank Pic } Y_3 = \text{rank Pic } \tilde{Y}^\circ - 1 = 1 = \text{rank Pic}(\mathbb{P}(V^*) \setminus Z_1)$, следовательно, g_3 является конечным накрытием. Остается проверить, что $\deg g_3 = 2$. Это можно сделать либо прямым вычислением, пользуясь теорией пересечения на $\text{OGr}(2, W)$, либо следующим способом.

Рассмотрим расслоенное произведение $\tilde{Y}^\circ \times_{\text{OGr}(2, W)} X$. Из леммы 8.5 следует, что $\tilde{Y}^\circ \times_{\text{OGr}(2, W)} X$ – открытое подмножество в $\mathbb{P}_X(\mathfrak{p})$, поэтому ясно, что отображение $\hat{g}|_{\mathbb{P}_X(\mathfrak{p})}: \mathbb{P}_X(\mathfrak{p}) \rightarrow \mathbb{P}(V^*) = \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ является проективизацией частичного морфизма Гротендика–Спрингера $\text{Tot}(\mathfrak{p}) \rightarrow \mathfrak{g}$. Поэтому его степень равна $12/2 = 6$ (см. [14]). С другой стороны, так как $X \subset \text{OGr}(2, W)$ – схема нулей сечения векторного расслоения M^* , а ограничение расслоения M на слой $\mathbb{P}^2$ расслоения $\tilde{Y}^\circ$ над Y_3 изоморфно $\Omega_{\mathbb{P}^2}$ по (8.5), заключаем, что степень отображения $\phi|_{\mathbb{P}_X(\mathfrak{p})}: \mathbb{P}_X(\mathfrak{p}) \rightarrow Y_3$ равна $c_2(T_{\mathbb{P}^2}) = 3$. Значит, $\deg g_3 = 6/3 = 2$.

СЛЕДСТВИЕ 8.11. *Если данные (D.3)–(D.5) – это $Y = Y_3$, $A_Y = A_3$, $\mathbf{Z} = \bar{Z}_3 = Z_1$, $g = g_3$, (F_1, F_2) – универсальное семейство, а ϕ индуцировано структурой представления колчана $\mathbf{Q}$ на (F_1, F_2) , то все условия (C.1)–(C.8) выполнены. Более того, схема ветвления отображения $g: Y \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \setminus \mathbf{Z}$ совпадает с гиперповерхностью $X^\vee \setminus \mathbf{Z}$, где $X^\vee \subset \mathbb{P}(V^*)$ – проективно двойственная к X гиперповерхность степени 6.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку условия (C.1)–(C.3), (5.1) и (5.7) выполняются по лемме 8.1, из теоремы 5.7 следует, что условия (C.4)–(C.6) тоже выполнены. С другой стороны, условие (C.8) выполнено, так как $\mathbf{Z} = \mu(\text{Gr}(2, W))$

по лемме 8.2, и $\dim \mathbf{Z} \cap H = \dim \operatorname{Gr}(2, W) - 1 = 9$, в то время как $N - i - 2 = 14 - 3 - 2 = 9$. Наконец, по теореме 8.10 отображение $Y = Y_3 \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ является двулиственным накрытием и $\operatorname{codim}_{Y \times Y}(Y \times_{\mathbb{P}(V^*)} Y) = \dim Y = \dim \mathbb{P}(V^*) = 13$, значит, $\dim X + N - \operatorname{codim}_{Y \times Y}(Y \times_{\mathbb{P}(V^*)} Y) = 5 + 14 - 13 = 6 = 2i$, и условие (С.7) выполнено.

Наконец, заметим, что схема ветвления морфизма g есть не что иное, как множество критических значений g , следовательно, она совпадает с $X^\vee \setminus \mathbf{Z}$ в силу следствия 4.30.

§ 9. Приложение С. Пересечение квадрик в $\mathbb{P}^5$

В настоящем приложении доказывается, что двулистное накрытие $\mathbb{P}^{20}$, разветвленное в некоторой гиперповерхности степени 6, гомологически проективно двойственно подмногообразию Веронезе $\mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}^{20}$.

Напомним обозначения. Пусть $W = \mathbb{K}^6$ и

$$X = \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}^5, \quad (E_1, E_2) = (\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1)).$$

Пусть $V = S^2 W = \mathbb{K}^{21}$, и обозначим через $f: X \rightarrow \mathbb{P}(V)$ двукратное вложение Веронезе.

ЛЕММА 9.1. *Имеем $\dim X = 5$, $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(-6) \cong f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-3)$. Кроме того, для X выполняются условия (С.1)–(С.3), а также дополнительные условия (5.1) и (5.7).*

Теперь воспользуемся конструкцией, приведенной в § 5, и найдем явное описание пространства $Y = Y_4$. Воспользуемся тем же подходом, что и в § 7. Большинство утверждений доказываются при использовании тех же рассуждений. Чтобы не повторяться, мы ограничимся описанием различий.

Вместо пространства Y_4 мы опишем $\mathbb{P}_{Y_4, \mathcal{A}_4}(F_2^*)$ – многообразие модулей фактормодулей ранга 1 пучка F_2 . Слой расслоения $\mathbb{P}_{Y_4, \mathcal{A}_4}(F_2^*)$ над точкой пространства Y_4 , соответствующей $(4, 4)$ -мерному представлению $\rho = (R_1, R_2)$ колчана $\mathcal{Q}$, совпадает с $\mathbb{P}(R_2^*)$. Мы покажем, что всякая гиперплоскость $R'_2 \subset R_2$ единственным образом продолжается до $(1, 3)$ -мерного подпредставления $\rho' = (R'_1, R'_2)$. Многообразие модулей $(1, 3)$ -мерных представлений колчана $\mathcal{Q}$ есть $\operatorname{Gr}(3, W)$. Утверждается, что определенное таким образом отображение $\mathbb{P}_{Y_4, \mathcal{A}_4}(F_2^*) \rightarrow \operatorname{Gr}(3, W)$ отождествляет $\mathbb{P}_{Y_4, \mathcal{A}_4}(F_2^*)$ с открытым подмногообразием некоторого $\mathbb{P}^{14}$ -расслоения над $\operatorname{Gr}(3, W)$.

ЛЕММА 9.2. *Множество $Z_2 \subset \mathbb{P}(V^*)$ совпадает с множеством квадрик ранга 4, а множество $\bigcup_{0 < D < \mathcal{H}} Z^{|D|} \subset \mathbb{P}(V^*)$ – с множеством квадрик ранга 2.*

Рассмотрим произведение $X \times \operatorname{Gr}(3, W)$ и подсхему $\Sigma' = \operatorname{Fl}(1, 3; W) \subset X \times \operatorname{Gr}(3, W)$.

ЛЕММА 9.3. *На $X \times \operatorname{Gr}(3, W)$ существует точная последовательность*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-3) \boxtimes \mathcal{O}_{\operatorname{Gr}(3, W)}(-1) &\rightarrow \mathcal{O}_X(-2) \boxtimes \Lambda^2 \mathcal{U}_{\operatorname{Gr}(3, W)}^\perp \\ &\rightarrow \mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \mathcal{U}_{\operatorname{Gr}(3, W)}^\perp \rightarrow \mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\operatorname{Gr}(3, W)} \rightarrow \mathcal{O}_{\Sigma'} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данная последовательность является резольвентой Кошуля многообразия Σ' .

Рассмотрим обрезанную первую последовательность леммы 9.3 как резольвенту пучка идеалов $J_{\Sigma'}$. Тензорно умножая ее на $\mathcal{O}_X(2) = f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ и применяя функтор прямого образа относительно проекции $X \times \mathrm{Gr}(3, W) \rightarrow \mathrm{Gr}(3, W)$, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \Lambda^2 \mathcal{U}_{\mathrm{Gr}(3, W)}^\perp \rightarrow W^* \otimes \mathcal{U}_{\mathrm{Gr}(3, W)}^\perp \rightarrow p_{2*}(J_{\Sigma'} \otimes \mathcal{O}_X(2)) \rightarrow 0. \quad (9.1)$$

ЛЕММА 9.4. *Объект $p_{2*}(J_{\Sigma'} \otimes \mathcal{O}_X(2))$ является векторным расслоением ранга 15 на $\mathrm{Gr}(3, W)$. Более того, его ограничение на $\mathrm{LGr}(3, W) \subset \mathrm{Gr}(3, W)$ изоморфно расслоению $\mathfrak{p}$ на $\mathrm{LGr}(3, W) = \mathrm{Sp}(W)/P$ (здесь P – параболическая подгруппа в $\mathrm{Sp}(W)$), а $\mathfrak{p}$ – подрасслоение параболических подалгебр Ли).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что морфизм $\Lambda^2 \mathcal{U}_{\mathrm{Gr}(3, W)}^\perp \rightarrow W^* \otimes \mathcal{U}_{\mathrm{Gr}(3, W)}^\perp$ из последовательности (9.1) является вложением векторных расслоений, поэтому его коядро локально свободно. Более того, ограничивая коядро на $\mathrm{LGr}(3, W)$, мы получаем $\mathrm{Sp}(W)$ -эквивариантное подрасслоение ранга 15 в расслоении $V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{LGr}(3, W)} \cong \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{LGr}(3, W)}$. Но единственное такое подрасслоение – это $\mathfrak{p}$.

Рассмотрим проективизацию

$$\tilde{Y} = \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3, W)}(p_{2*}(J_{\Sigma'} \otimes \mathcal{O}_X(2))).$$

Естественное вложение

$$p_{2*}(J_{\Sigma'} \otimes \mathcal{O}_X(2)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}(3, W)} = V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}(3, W)}$$

индуцирует морфизм $\tilde{Y} \xrightarrow{\tilde{g}} \mathbb{P}(V^*)$. Обозначим через $\pi: \tilde{Y} \rightarrow \mathrm{Gr}(3, W)$ проекцию. Обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H) &= \tilde{g}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(1), & \tilde{g}: \tilde{Y} &\rightarrow \mathbb{P}(V^*), \\ \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(h) &= \pi^* \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}(3, W)}(1), & \pi: \tilde{Y} &\rightarrow \mathrm{Gr}(3, W). \end{aligned}$$

Рассмотрим произведение $X \times \tilde{Y}$, проекцию $\mathrm{id}_X \times \pi: X \times \tilde{Y} \rightarrow X \times \mathrm{Gr}(3, W)$, подсхемы

$$\Sigma = (\mathrm{id}_X \times \pi)^{-1}(\Sigma'), \quad \tilde{Q} = Q(X, \tilde{Y}) = (X \times \tilde{Y}) \times_{\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)} Q$$

и уравнение

$$s_{\tilde{Q}} \in H^0(X \times \tilde{Y}, \mathcal{O}_X(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H)) = H^0(X \times \tilde{Y}, (f \times \tilde{g})^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)}(1, 1)) \cong V^* \otimes V$$

подсхемы $\tilde{Q}$ в $X \times \tilde{Y}$.

ЛЕММА 9.5. *Сечение $s_{\tilde{Q}}$ обращается в нуль на схеме Σ .*

Рассмотрим обратный образ второй точной последовательности леммы 9.3 на $X \times \tilde{Y}$. Рассмотрим конус G' первого морфизма, подкрученного на $\mathcal{O}_X(3) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H)$, и конус G'' третьего морфизма, подкрученного на $\mathcal{O}_X(1)$, как объекты производной категории $\mathcal{D}^b(X \times \tilde{Y})$. По построению имеем точные треугольники

$$\begin{aligned} E_1 \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H - h) &\xrightarrow{\tilde{e}'} E_2 \boxtimes \Lambda^2 \mathcal{U}_{\text{Gr}(3, W)}^\perp(H) \longrightarrow G', \\ E_1 \boxtimes \mathcal{U}_{\text{Gr}(3, W)}^\perp &\xrightarrow{\tilde{e}''} E_2 \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}} \longrightarrow G''. \end{aligned}$$

Ясно, что обратный образ последовательности леммы 9.3 можно переписать в виде точного треугольника

$$G' \otimes (\mathcal{O}_X(-2) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(-H))[1] \rightarrow G'' \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma \otimes \mathcal{O}_X(1). \quad (9.2)$$

Поскольку $\text{Hom}(E_1, E_2) = W^*$, морфизмы $\tilde{e}'$ и $\tilde{e}''$ задают структуру представления колчана $\mathcal{Q}$ в семействах $(\mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H - h), \Lambda^2 \mathcal{U}_{\text{Gr}(3, W)}^\perp(H))$ и $(\mathcal{U}_{\text{Gr}(3, W)}^\perp, \mathcal{O}_{\tilde{Y}})$ на $\tilde{Y}$.

ЛЕММА 9.6. *Существует единственное расширение*

$$0 \rightarrow (\mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H - h), \Lambda^2 \mathcal{U}_{\text{Gr}(3, W)}^\perp(H)) \rightarrow (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2) \rightarrow (\mathcal{U}_{\text{Gr}(3, W)}^\perp, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}) \rightarrow 0 \quad (9.3)$$

в категории семейств представлений колчана $\mathcal{Q}$ на $\tilde{Y}$ такое, что конус индуцированного морфизма $\tilde{e}: E_1 \boxtimes \tilde{F}_1 \rightarrow E_2 \boxtimes \tilde{F}_2$ является когерентным пучком, сосредоточенным теоретико-схемно на $\tilde{Q}$.

Согласно лемме 9.6 семейство $(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ на $\tilde{Y}$ является семейством представлений колчана $\mathcal{Q}$ и на $X \times \tilde{Y}$ существует точная последовательность

$$0 \rightarrow E_1 \boxtimes \tilde{F}_1 \xrightarrow{\tilde{e}} E_2 \boxtimes \tilde{F}_2 \rightarrow \tilde{i}_* \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow 0,$$

где $\tilde{\mathcal{E}}$ – когерентный пучок на $\tilde{Q}$.

ЛЕММА 9.7. *Семейство $(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ индуцирует морфизм $\phi: \tilde{Y} \rightarrow \bar{Y}_4$ такой, что $\tilde{g} = \bar{g}_4 \circ \phi$.*

Пусть $\tilde{Y}^\circ = \tilde{Y} \setminus \tilde{g}^{-1}(Z_2)$. Обозначим ограничение морфизмов $\tilde{g}$ и ϕ на $\tilde{Y}^\circ$ теми же символами.

Напомним, что на многообразии Y_4 был построен пучок алгебр $\mathcal{A}_4$, так что F_2 является локально проективным $\mathcal{A}_4$ -модулем на Y_4 ранга 4. Обозначим через $\mathbb{P}_{Y_4, \mathcal{A}_4}(F_2^*)$ многообразие модулей локально проективных фактормодулей ранга 1 пучка $\mathcal{A}_4$. Тогда $\mathbb{P}_{Y_4, \mathcal{A}_4}(F_2^*)$ – скрученное $\mathbb{P}^3$ -расслоение над Y_4 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.8. *Имеем $\tilde{Y}^\circ = \mathbb{P}_{Y_4, \mathcal{A}_4}(F_2^*)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\tilde{Y}^\circ \rightarrow \mathbb{P}_{Y_4, \mathcal{A}_4}(F_2^*)$ строится так же, как и в предложении 7.9. Остается построить обратное отображение. Выберем точку $\tilde{y} \in \mathbb{P}_{Y_4, \mathcal{A}_4}(F_2^*)$. Пусть $\rho: W \otimes R_1 \rightarrow R_2$ – соответствующее $(4, 4)$ -мерное представление колчана $\mathcal{Q}$, а $R_2 \rightarrow \mathbb{k}$ – соответствующее одномерное факторпространство. Пусть $R_2' \subset R_2$ – соответствующее трехмерное подпространство, и рассмотрим композицию $E_1 \otimes R_1 \xrightarrow{e_\rho} E_2 \otimes R_2 \rightarrow E_2$. Применяя функтор

$\text{Hom}(E_1, -)$, получаем отображение $R_1 \rightarrow W^*$. Пусть R'_1 – ядро этого отображения. Получаем диаграмму (7.3) и точную последовательность (7.4). Заметим, что пучок C сосредоточен на квадрике $X_y = H_{g_4(y)} \cap X \subset X$ и его ранг в общей точке X_y равен $(c_1(E_2 \otimes R_2) - c_1(E_1 \otimes R_1))/2 = 2$.

Докажем, что $\dim R' = 1$. Для этого разберем все возможные случаи.

Поскольку (R'_1, R'_2) – подпредставление в (R_1, R_2) , а представление (R_1, R_2) стабильно по лемме 5.5, имеем

$$\dim R'_1 < 3,$$

так что необходимо рассмотреть лишь случаи $\dim R'_1 = 2$ и $\dim R'_1 = 0$.

Случай $\dim R'_1 = 2$ разбирается так же, как и случай $\dim R'_1 = 2$ в доказательстве предложения 7.9. Единственное различие заключается в том, что пучок $T(C')$ может иметь ранг 1 в общей точке X_y , однако это возможно только в случае $C' \cong \mathcal{O}_X(1) \oplus (\mathcal{O}_X(1) \oplus \mathcal{O}_X(1))/(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X)$, откуда следует, что $g_4(y) \in Z_2$.

Допустим теперь, что $R'_1 = 0$. Значит, отображение $R_1 \rightarrow W^*$ инъективно, так что можно рассматривать R_1 как 4-мерное подпространство в W^* . Если коядро морфизма $K'' \rightarrow C' = \mathcal{O}_X(1)^{\oplus 3}$ сосредоточено схемно на квадрике $X_y \subset X$, то морфизм $\mathcal{O}_X(-1)^{\oplus 3} \cong \mathcal{O}_X(1)^{\oplus 3} \otimes \mathcal{O}_X(-2) \rightarrow \mathcal{O}_X(1)^{\oplus 3}$ пропускается через K'' и коядро соответствующего морфизма $\mathcal{O}_X(-1)^{\oplus 3} \rightarrow K''$ сосредоточено на той же квадрике $X_y \subset X$. С другой стороны, легко проверить, что $\dim \text{Hom}(\mathcal{O}_X(-1), K'') = 6$. Следовательно, размерность множества таких квадрик $X_y \subset X$ не больше, чем $\dim \text{Gr}(4, W^*) + \dim \text{Gr}(3, 6) = 8 + 9 = 17$. Очевидно, что множество таких гиперплоских сечений $\text{GL}(W)$ -инвариантно в $\mathbb{P}(V^*) = \mathbb{P}(S^2 W^*)$, следовательно, пользуясь описанием всех $\text{GL}(W)$ -инвариантных замкнутых подмножеств в $\mathbb{P}(S^2 W^*)$, легко увидеть, что это множество содержится в Z_2 .

Итак, мы проверили, что если $g_4(y) \notin Z_2$, то $\dim R'_1 = 1$, $\dim R_1/R'_1 = 3$. Верхняя и нижняя строки диаграммы (7.3) имеют вид

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{e'} \mathcal{O}_X(1)^{\oplus 3} \rightarrow C' \rightarrow 0, \quad (9.4)$$

$$0 \rightarrow K'' \rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus 3} \xrightarrow{e''} \mathcal{O}_X(1) \rightarrow C'' \rightarrow 0. \quad (9.5)$$

Отображение e'' задается 3-мерным подпространством в W , т.е. точкой $u \in \text{Gr}(3, W)$. Те же рассуждения, что и в доказательстве предложения 7.9, показывают, что последовательность (9.4), подкрученную на $\mathcal{O}_X(-3)$, можно склеить с последовательностью (9.5), подкрученной на $\mathcal{O}_X(-1)$, в следующую точную последовательность:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-3) \xrightarrow{e'} \mathcal{O}_X(-2)^{\oplus 3} \rightarrow \mathcal{O}_X(-1)^{\oplus 3} \xrightarrow{e''} \mathcal{O}_X \rightarrow C'' \rightarrow 0.$$

Теперь, легко показать, что эта последовательность обязана совпадать с последовательностью леммы 9.3, ограниченной на слой многообразия $X \times \text{Gr}(3, W)$ над некоторой точкой $u \in \text{Gr}(3, W)$. Сопоставляя точке $\tilde{y}$ точку $u \in \text{Gr}(3, W)$, получаем отображение $\mathbb{P}_{Y_4, \mathcal{A}_4}(F_2^*) \rightarrow \text{Gr}(3, W)$. С другой стороны, носитель X_y пучка C содержит $\text{supp}(C'') = \Sigma'_u$, поэтому отображение

$$\mathbb{P}_{Y_4, \mathcal{A}_4}(F_2^*) \rightarrow \text{Gr}(3, W) \times \mathbb{P}(V^*), \quad \tilde{y} \mapsto (u, g_4(y)),$$

пропускается через $\tilde{Y} = \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,W)}(p_{2*}(J_{\Sigma'} \otimes \mathcal{O}_X(2))) \subset \mathrm{Gr}(3,W) \times \mathbb{P}(V^*)$. Более того, ясно, что его образ лежит в $\tilde{Y}^\circ$.

Итак, мы построили отображение $\mathbb{P}_{Y_4, \mathcal{A}_4}(F_2^*) \rightarrow \tilde{Y}^\circ$. Остается заметить, что построенные отображения взаимно обратны.

ТЕОРЕМА 9.9. *Отображение $g_4: Y_4 \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \setminus Z_2$ является двулистным накрытием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку многообразие $\tilde{Y}^\circ$ гладко, из предложения 9.8 следует, что Y_4 тоже гладко, причем $\dim Y_4 = \dim \tilde{Y}^\circ - 3 = 20$. С другой стороны, так как $\tilde{g} = \bar{g}_4 \circ \phi$, а $\tilde{g}$ и ϕ собственные и доминантные, то g_4 – собственное доминантное отображение $Y_4 \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \setminus Z_2$. Так как Y_4 и $\mathbb{P}(V^*) \setminus Z_2$ – гладкие многообразия одинаковой размерности и $\mathrm{rank} \mathrm{Pic} Y_4 = \mathrm{rank} \mathrm{Pic} \tilde{Y}^\circ - 1 = 1 = \mathrm{rank} \mathrm{Pic}(\mathbb{P}(V^*) \setminus Z_2)$, следовательно, g_4 является конечным накрытием. Остается проверить, что $\deg g_4 = 2$. Это можно сделать либо прямым вычислением, пользуясь теорией пересечения на $\mathrm{Gr}(3,W)$, либо следующим способом.

Выберем невырожденную 2-форму на W^* и рассмотрим схему нулей соответствующего сечения векторного расслоения $W/\mathcal{U}_{\mathrm{Gr}(3,W)}$ на $\mathrm{Gr}(3,W)$. Это будет лагранжев грассманиан $\mathrm{LGr}(3,W)$. Рассмотрим расслоенное произведение $\tilde{Y}^\circ \times_{\mathrm{Gr}(3,W)} \mathrm{LGr}(3,W)$. Из леммы 9.4 следует, что $\tilde{Y}^\circ \times_{\mathrm{Gr}(3,W)} \mathrm{LGr}(3,W)$ – открытое подмножество в $\mathbb{P}_{\mathrm{LGr}(3,W)}(\mathfrak{p})$, поэтому ясно, что отображение $\tilde{g}|_{\mathbb{P}_{\mathrm{LGr}(3,W)}(\mathfrak{p})}: \mathbb{P}_{\mathrm{LGr}(3,W)}(\mathfrak{p}) \rightarrow \mathbb{P}(V^*) = \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ является проективизацией частичного морфизма Гротендика–Спрингера $\mathrm{Tot}(\mathfrak{p}) \rightarrow \mathfrak{g}$, поэтому его степень есть $16/2 = 8$ (см. [14]). С другой стороны, так как ограничение расслоения $W/\mathcal{U}_{\mathrm{Gr}(3,W)}$ на слой $\mathbb{P}^3$ многообразия $\tilde{Y}^\circ$ над Y_4 изоморфно $\Omega_{\mathbb{P}^3}$, то по формуле (9.3) заключаем, что степень отображения $\phi|_{\mathbb{P}_{\mathrm{LGr}(3,W)}(\mathfrak{p})}: \mathbb{P}_{\mathrm{LGr}(3,W)}(\mathfrak{p}) \rightarrow Y_4$ есть $c_3(T_{\mathbb{P}^3}) = 4$. Значит, $\deg g_4 = 8/4 = 2$.

СЛЕДСТВИЕ 9.10. *Если данные (D.3)–(D.5) – это $Y = Y_4$, $\mathcal{A}_Y = \mathcal{A}_4$, $\mathbf{Z} = \bar{Z}_4 = Z_2$, $g = g_4$, (F_1, F_2) – универсальное семейство, а ϕ индуцировано структурой представления колчана $\mathbf{Q}$ на (F_1, F_2) , то все условия (C.1)–(C.8) выполнены. Более того, схема ветвления отображения $g: Y \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \setminus \mathbf{Z}$ совпадает с гиперповерхностью $X^\vee \setminus \mathbf{Z}$, где $X^\vee \subset \mathbb{P}(V^*)$ – проективно двойственная к X гиперповерхность степени 6.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку условия (C.1)–(C.3), (5.1) и (5.7) выполняются по лемме 9.1, из теоремы 5.7 следует, что условия (C.4)–(C.6) тоже выполнены. С другой стороны, условие (C.8) выполнено, так как $\mathbf{Z}$ – множество квадрик ранга 4 в силу леммы 9.2, и $\dim \mathbf{Z} \cap H = 17 - 1 = 16$, в то время как $N - i - 2 = 21 - 3 - 2 = 16$. Наконец, по теореме 9.9 отображение $Y = Y_4 \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ является двулистным накрытием и $\mathrm{codim}_{Y \times Y}(Y \times_{\mathbb{P}(V^*)} Y) = \dim Y = \dim \mathbb{P}(V^*) = 20$, значит, $\dim X + N - \mathrm{codim}_{Y \times Y}(Y \times_{\mathbb{P}(V^*)} Y) = 5 + 21 - 20 = 6 = 2i$, и условие (C.7) выполнено.

Заметим, что схема ветвления морфизма g есть не что иное, как множество критических значений g , следовательно, она совпадает с $X^\vee \setminus \mathbf{Z}$ в силу следствия 4.30.

§ 10. Приложение D. Многообразия Адзумаи

В настоящем приложении устанавливаются основные свойства многообразий Адзумаи. Все алгебраические многообразия в данном параграфе считаются вкладываемыми.

10.1. Пространства, категории и функторы. Приведем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. *Многообразие Адзумаи* над полем $\mathbb{k}$ – это пара $(X, \mathcal{A}_X)$, где X – алгебраическое многообразие конечного типа над полем $\mathbb{k}$, а $\mathcal{A}_X$ – алгебра Адзумаи над X , т.е. пучок $\mathcal{O}_X$ -алгебр, локально матричный в этальной топологии [18]. В частности, пучок $\mathcal{A}_X$ локально свободный $\mathcal{O}_X$ -модуль конечного ранга. *Морфизм многообразий Адзумаи* $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – это пара (f_*, f_A) , где $f_*: X \rightarrow Y$ – морфизм алгебраических многообразий, а $f_A: f_*^* \mathcal{A}_Y \rightarrow \mathcal{A}_X$ – гомоморфизм $(f_*^* \mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_X)$ -алгебр. Композиция морфизмов определяется очевидным способом.

Многообразия Адзумаи над полем $\mathbb{k}$ образуют категорию. Всякое алгебраическое многообразие X можно рассматривать как многообразие Адзумаи, положив $\mathcal{A}_X = \mathcal{O}_X$. Таким образом, категорию алгебраических многообразий можно рассматривать как полную подкатегорию категории многообразий Адзумаи. Для всякого многообразия Адзумаи $(X, \mathcal{A}_X)$ существует канонический *структурный морфизм* $\pi_X: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow X$.

Многообразию Адзумаи $(X, \mathcal{A}_X)$ сопоставим абелевы категории $\mathrm{Qcoh}(X, \mathcal{A}_X)$ и $\mathrm{Coh}(X, \mathcal{A}_X)$ квазикогерентных и когерентных пучков правых $\mathcal{A}_X$ -модулей на X , а также их ограниченные и неограниченные производные категории $\mathcal{D}_{\mathrm{qc}}^*(X, \mathcal{A}_X)$ и $\mathcal{D}^*(X, \mathcal{A}_X)$, где вместо $*$ можно подставлять $b, -, +$ или не записывать ничего. Легко видеть, что всякий квазикогерентный пучок $\mathcal{A}_X$ -модулей является фильтрованным прямым пределом когерентных пучков и что функтор забывания структуры $\mathcal{A}_X$ -модуля π_{X*} имеет левый сопряженный функтор $F \mapsto F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X$, сохраняющий когерентность. Поэтому стандартное доказательство [1, п.П.2.2] позволяет отождествить категорию $\mathcal{D}^-(X, \mathcal{A}_X)$ с подкатегорией категории $\mathcal{D}_{\mathrm{qc}}^-(X, \mathcal{A}_X)$, состоящей из объектов с когерентными когомологиями.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.2. Напомним, что эквивалентные по Морите алгебры $\mathcal{A}_X$ и $\mathcal{A}'_X$ дают эквивалентные категории $\mathrm{Coh}(X, \mathcal{A}_X)$ и $\mathrm{Coh}(X, \mathcal{A}'_X)$. В частности, если $\mathcal{A}_X \cong \mathcal{E}nd(\mathcal{V})$ – алгебра эндоморфизмов векторного расслоения $\mathcal{V}$, то $\mathrm{Coh}(X) \cong \mathrm{Coh}(X, \mathcal{A}_X)$ (эквивалентность задается тензорным умножением на $\mathcal{V}$). Однако мы предпочитаем различать эквивалентные по Морите многообразия Адзумаи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.3. Морфизм многообразий Адзумаи $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ называется *строгим*, если $\mathcal{A}_X \cong f_0^* \mathcal{A}_Y$ и f_A – тождественный морфизм. Аналогично, морфизм f называется *расширением*, если $X \cong Y$ и f_* – тождественный морфизм.

Всякий морфизм $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ допускает *каноническое разложение*:

$$(X, \mathcal{A}_X) \xrightarrow{f^e} (X, f_*^* \mathcal{A}_Y) \xrightarrow{f^s} (Y, \mathcal{A}_Y),$$

где f^e – расширение, а f^s – строгий морфизм.

Если $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – морфизм многообразий Адзумаи, а $F \in \text{Coh}(X, \mathcal{A}_X)$, определим $R^0 f_* F \in \text{Coh}(Y, \mathcal{A}_Y)$ как пучок $R^0 f_{o*} F$ со структурой $\mathcal{A}_Y$ -модуля, заданной гомоморфизмом

$$R^0 f_{o*} F \otimes \mathcal{A}_Y \cong R^0 f_{o*} (F \otimes f_*^* \mathcal{A}_Y) \xrightarrow{f^A} R^0 f_{o*} (F \otimes \mathcal{A}_X) \rightarrow R^0 f_{o*} F.$$

Ясно, что $R^0 f_*$ – функтор, обладающий такими же свойствами точности, что и функтор $R^0 f_{o*}$. Если $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow \text{Spec } \mathbb{k}$ – проекция в точку, соответствующий функтор прямого образа обозначается как $\Gamma(X, -)$. Заметим, что прямой образ относительно структурного морфизма π_X – это функтор забывания $\mathcal{A}_X$ -модульной структуры.

Аналогично, если $G \in \text{Coh}(Y, \mathcal{A}_Y)$, определим $L_0 f^* G \in \text{Coh}(X, \mathcal{A}_X)$ формулой

$$L_0 f^* G = L_0 f_o^* G \otimes_{f_o^* \mathcal{A}_Y} \mathcal{A}_X.$$

Ясно, что $L_0 f^*$ – функтор. Для строгого морфизма имеем $L_0 f^* = L_0 f_o^*$.

Если $F \in \text{Coh}(X, \mathcal{A}_X)$ и $F' \in \text{Coh}(X, \mathcal{A}_X^{\text{opp}})$, где $\mathcal{A}_X^{\text{opp}}$ – противоположная алгебра, то можно рассмотреть тензорное произведение над $\mathcal{A}_X$, $F \otimes_{\mathcal{A}_X} F' \in \text{Coh}(X)$. Если F (соответственно, F') обладает дополнительной структурой модуля, коммутирующей со структурой правого (соответственно, левого) $\mathcal{A}_X$ -модуля, то тензорное произведение $F \otimes_{\mathcal{A}_X} F'$ наследует эту структуру. Например, если F' – пучок $\mathcal{A}_X$ -бимодулей, то $F \otimes_{\mathcal{A}_X} F' \in \text{Coh}(X, \mathcal{A}_X)$.

Точно так же, если $F, F' \in \text{Coh}(X, \mathcal{A}_X)$, то можно рассмотреть пучок $\text{Hom}_{\mathcal{A}_X}(F, F') \in \text{Coh}(X)$ локальных гомоморфизмов $\mathcal{A}_X$ -модулей. Если F (соответственно, F') обладает дополнительной структурой модуля, коммутирующей со структурой правого (соответственно, левого) $\mathcal{A}_X$ -модуля, то пучок $\text{Hom}_{\mathcal{A}_X}(F, F')$ наследует эту структуру. Например, если F' – пучок $\mathcal{A}_X$ -бимодулей, то $\text{Hom}_{\mathcal{A}_X}(F, F') \in \text{Coh}(X, \mathcal{A}_X)$.

ЛЕММА 10.4. *Пучок $F \in \text{Coh}(X, \mathcal{A}_X)$ локально проективен над $\mathcal{A}_X$ в топологии Зариского тогда и только тогда, когда $\pi_{X*} F \in \text{Coh}(X)$ локально свободен, где $\pi_X: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow X$ – структурный морфизм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\mathcal{A}_X^{\text{opp}} \otimes \mathcal{A}_X \cong \text{End}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}_X)$ – пучок матричных алгебр [18, п. IV.2.1], поэтому $\mathcal{A}_X$, рассматриваемый как $(\mathcal{A}_X^{\text{opp}} \otimes \mathcal{A}_X)$ -модуль, локально проективен в топологии Зариского и, значит, локально является прямым слагаемым в $\mathcal{A}_X^{\text{opp}} \otimes \mathcal{A}_X$. Следовательно, $F \cong F \otimes_{\mathcal{A}_X} \mathcal{A}_X$ локально является прямым слагаемым в $F \otimes_{\mathcal{A}_X} (\mathcal{A}_X^{\text{opp}} \otimes \mathcal{A}_X) \cong F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X$, т. е. в свободном $\mathcal{A}_X$ -модуле.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.5. Многообразие Адзумаи $(X, \mathcal{A}_X)$ естественно рассматривать как *некоммутативное этальное накрытие* многообразия X .

Легко видеть, что в категории квазикогерентных $\mathcal{A}_X$ -модулей на многообразии Адзумаи $(X, \mathcal{A}_X)$ достаточно много инъективных и достаточно много

локально свободных объектов. Поэтому функторы прямого образа, обратного образа, тензорного произведения и функтор $\mathcal{H}om$ продолжаются естественным образом на производные категории. Далее мы используем обозначения f_* , f^* , $\otimes_{\mathcal{A}_X}$ и $R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}$ для производных функторов. Производный функтор от $\Gamma(X, -)$ обозначается $R\Gamma(X, -)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.6. Заметим, что

$$F \otimes_{\mathcal{A}_X} G \cong (F \otimes_{\mathcal{O}_X} G) \otimes_{\mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_X^{\text{opp}}} \mathcal{A}_X, \\ R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, G) \cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_X^{\text{opp}}}(\mathcal{A}_X, R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F, G)).$$

Поэтому баррезольвента

$$\dots \rightarrow \mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_X^{\otimes 2} \otimes \mathcal{A}_X^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_X^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_X^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{A}_X \rightarrow 0$$

дает баррезольвенты функторов $\otimes_{\mathcal{A}_X}$ и $R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}$:

$$\dots \rightarrow F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X^{\otimes 2} \otimes_{\mathcal{O}_X} G \rightarrow F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} G \rightarrow F \otimes_{\mathcal{O}_X} G \rightarrow F \otimes_{\mathcal{A}_X} G \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, G) \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F, G) \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X, G) \rightarrow \dots$$

Наконец, определим функтор скрученного обратного образа $f^!: \mathcal{D}^+(Y, \mathcal{A}_Y) \rightarrow \mathcal{D}^+(X, \mathcal{A}_X)$, продолжая обычный функтор скрученного обратного образа, определенный, например, в [12], на категорию многообразий Адзумай.

Определение для строгого морфизма такое же, как и в [12]. Если морфизм f строгий и гладкий, определим

$$f^!(G) = f^*G \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X/Y}[\dim X - \dim Y],$$

а если морфизм f_* строгий и конечный, определим

$$f^!G = R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(f_{*}\mathcal{A}_X, G)$$

(категория $\mathcal{D}^+(X, \mathcal{A}_X)$ отождествляется с категорией $\mathcal{D}^+(Y, f_{*}\mathcal{A}_X)$ функтором f_{*}). Далее, если морфизм f_* вкладываемый (что заведомо выполнено, если многообразие X вкладываемое), мы можем разложить f_* в композицию $f_* = f'_* \circ f''_*$, где f'_* – гладкий морфизм, а f''_* – конечный, и определить $f^! = f'^! \circ f''^!$. Стандартная проверка [13] показывает, что так определенный функтор не зависит от выбора разложения $f_* = f'_* \circ f''_*$.

Наконец, для произвольного морфизма $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ рассмотрим каноническое разложение $f = f^s \circ f^e$, где f^s – строгий морфизм, а f^e – расширение. Заметим, что для любого $G \in \mathcal{D}^+(Y, \mathcal{A}_Y)$ имеем $f^{s!}G \in \mathcal{D}^+(X, f^*\mathcal{A}_Y)$, и определим $f^!G$ формулой

$$f^!G = R\mathcal{H}om_{f^*\mathcal{A}_Y}(\mathcal{A}_X, f^{s!}G). \quad (10.1)$$

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 10.7. Если f – строгий морфизм, то $f^! = f'_*$. Более того,

$$f'_*F = f^*F \otimes_{\mathcal{O}_X} \det \mathcal{N}_{X/Y}[\dim X - \dim Y],$$

если f_* – замкнутое вложение, а его образ – локально полное пересечение, и

$$f'_*F = f^*F \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X/Y}[\dim X - \dim Y],$$

если f_* – гладкий морфизм.

10.2. Соотношения между функторами. Докажем следующие леммы.

ЛЕММА 10.8 (функториальность прямого образа). *Если*

$$(X, \mathcal{A}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{A}_Y) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{A}_Z)$$

– морфизмы многообразий Адзумаи, то существует изоморфизм функторов $g_* f_* \cong (gf)_*$ на $\mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X)$. В частности, $\mathrm{R}\Gamma(Y, f_*(-)) \cong \mathrm{R}\Gamma(X, -)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функтор прямого образа в категории Адзумаи совпадает с обычным функтором прямого образа, то пучки $R^0 g_* R^0 f_*(F)$ и $R^0(gf)_*(F)$ отождествляются в категории $\mathrm{Coh}(Z)$ естественным изоморфизмом для всех $F \in \mathrm{Coh}(X, \mathcal{A}_X)$. Более того, ясно, что этот изоморфизм согласован и с $\mathcal{A}_Z$ -модульными структурами на этих пучках. Получаем изоморфизм функторов $R^0 g_* R^0 f_* \cong R^0(gf)_* : \mathrm{Coh}(X, \mathcal{A}_X) \rightarrow \mathrm{Coh}(Z, \mathcal{A}_Z)$, из которого следует изоморфизм и на уровне производных функторов.

ЛЕММА 10.9 (функториальность обратного образа). *Если*

$$(X, \mathcal{A}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{A}_Y) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{A}_Z)$$

– морфизмы многообразий Адзумаи, то существует изоморфизм функторов $f^* g^* \cong (gf)^*$ на $\mathcal{D}^-(Z, \mathcal{A}_Z)$. Более того, если морфизмы f и g имеют конечную Тог-размерность, то $f^* g^* \cong (gf)^*$ на $\mathcal{D}(Z, \mathcal{A}_Z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в лемме 10.8, вначале строим функториальный изоморфизм

$$\begin{aligned} L_0 f^* L_0 g^*(F) &:= L_0 f_o^* (L_0 g_o^* F \otimes_{g_o^* \mathcal{A}_Z} \mathcal{A}_Y) \otimes_{f_o^* \mathcal{A}_Y} \mathcal{A}_X \\ &\cong L_0 f_o^* L_0 g_o^* F \otimes_{f_o^* g_o^* \mathcal{A}_Z} f_o^* \mathcal{A}_Y \otimes_{f_o^* \mathcal{A}_Y} \mathcal{A}_X \\ &\cong L_0 f_o^* L_0 g_o^* F \otimes_{f_o^* g_o^* \mathcal{A}_Z} \mathcal{A}_X = L_0 (gf)^*(F), \end{aligned}$$

из которого следует изоморфизм и на уровне производных функторов.

Доказательства следующих двух лемм аналогичны доказательству леммы 10.9.

ЛЕММА 10.10 (ассоциативность тензорного произведения). *Предположим, что $F \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{A}_1)$, $G \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{A}_1^{\mathrm{opp}} \otimes \mathcal{A}_2)$ и $H \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{A}_2^{\mathrm{opp}})$. Тогда $(F \otimes_{\mathcal{A}_1} G) \otimes_{\mathcal{A}_2} H \cong F \otimes_{\mathcal{A}_1} (G \otimes_{\mathcal{A}_2} H)$.*

ЛЕММА 10.11 (коммутативность тензорного произведения). *Предположим, что $F \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{A}_X)$ и $G \in \mathcal{D}^-(Y, \mathcal{A}_X^{\mathrm{opp}})$. Тогда $F \otimes_{\mathcal{A}_X} G \cong G \otimes_{\mathcal{A}_X^{\mathrm{opp}}} F$.*

ЛЕММА 10.12 (формула проекции). *Если $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – морфизм многообразий Адзумаи, $F \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{A}_X)$, $G \in \mathcal{D}^-(Y, \mathcal{A}_Y^{\mathrm{opp}})$ и $H \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{O}_X)$, то*

$$f_*(F \otimes_{\mathcal{A}_X} f^* G) \cong f_* F \otimes_{\mathcal{A}_Y} G, \quad f_*(f_o^* G \otimes_{\mathcal{O}_X} H) \cong G \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_* H.$$

Более того, если морфизм f строгий, $F \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{O}_X)$ и $G \in \mathcal{D}^-(Y, \mathcal{A}_Y)$, то

$$f_*(F \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* G) \cong f_* F \otimes_{\mathcal{O}_Y} G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале предположим, что морфизм f строгий, F – f_* -ациклический $\mathcal{A}_X$ -модуль, а G – локально проективный $\mathcal{A}_Y$ -модуль. Тогда $F \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*G$ и $f_*F \otimes_{\mathcal{O}_Y} G$ – чистые пучки и

$$\begin{aligned} F \otimes_{\mathcal{A}_X} f^*G &\cong (F \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*G) \otimes_{\mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_X^{\text{opp}}} \mathcal{A}_X, \\ f_*F \otimes_{\mathcal{A}_Y} G &\cong (f_*F \otimes_{\mathcal{O}_Y} G) \otimes_{\mathcal{A}_Y \otimes \mathcal{A}_Y^{\text{opp}}} \mathcal{A}_Y. \end{aligned}$$

Тензорно умножая их на баррезольвенты для $\mathcal{A}_X$ и $\mathcal{A}_Y$ соответственно и замечая, что $\mathcal{A}_X = f^*\mathcal{A}_Y$ в силу строгости f , получаем резольвенты

$$\begin{aligned} \{ \dots \rightarrow F \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* \mathcal{A}_Y^{\otimes 2} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*G \\ \rightarrow F \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* \mathcal{A}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*G \rightarrow F \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*G \} &\cong F \otimes_{\mathcal{A}_X} f^*G, \\ \{ \dots \rightarrow f_*F \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{A}_Y^{\otimes 2} \otimes_{\mathcal{O}_Y} G \\ \rightarrow f_*F \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{A}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} G \rightarrow f_*F \otimes_{\mathcal{O}_Y} G \} &\cong f_*F \otimes_{\mathcal{A}_Y} G. \end{aligned}$$

В силу обычной формулы проекции прямой образ первой резольвенты совпадает со второй резольвентой, откуда следует изоморфизм $f_*(F \otimes_{\mathcal{A}_X} f^*G) \cong f_*F \otimes_{\mathcal{A}_Y} G$ в указанных предположениях.

Далее, если морфизм f строгий, а объекты F и G любые, можно применить стандартные рассуждения [12, п. II.5.6] (заменить F на f_* -ациклическую резольвенту, а G – на локально свободную резольвенту). С другой стороны, если морфизм f – расширение, то первый изоморфизм леммы следует из $F \otimes_{\mathcal{A}_X} (\mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{A}_Y} G) \cong F \otimes_{\mathcal{A}_Y} G$. Наконец, раскладывая произвольный морфизм f каноническим образом в композицию строгого морфизма и расширения, выводим первый изоморфизм леммы из построенных выше изоморфизмов.

Второй изоморфизм по сути совпадает со стандартной формулой проекции. Необходимо лишь заметить, что он совместим с $\mathcal{A}_Y$ -модульными структурами.

ЛЕММА 10.13. *Предположим, что $F \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{A}_X)$, $G \in \mathcal{D}^+(X, \mathcal{A}_X)$. Тогда существует функториальный изоморфизм*

$$\text{RHom}_{\mathcal{A}_X}(F, G) \cong \text{R}\Gamma(X, \text{RHom}_{\mathcal{A}_X}(F, G)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, имеем $\text{Hom}_{\mathcal{A}_X}(F, G) \cong \Gamma(X, \text{Hom}_{\mathcal{A}_X}(F, G))$ для всех пучков $F, G \in \text{Coh}(X, \mathcal{A}_X)$. Стандартные рассуждения позволяют распространить этот изоморфизм на производные функторы.

ЛЕММА 10.14. *Если $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – морфизм многообразий Адзумай, $F \in \mathcal{D}^-(Y, \mathcal{A}_Y)$ и $G \in \mathcal{D}^+(X, \mathcal{A}_X)$, то*

$$f_*\text{RHom}_{\mathcal{A}_X}(f^*F, G) \cong \text{RHom}_{\mathcal{A}_Y}(F, f_*G).$$

В частности, функтор f^ сопряжен слева к функтору f_* .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для тривиальных алгебр Адзумай утверждение леммы является одним из стандартных соотношений между функторами [12], а для строгого морфизма f доказывается аналогично лемме 10.12. С другой стороны, если f – расширение, то изоморфизм леммы вытекает из

$$\begin{aligned} \text{RHom}_{\mathcal{A}_Y}(F, f_*G) &:= \text{RHom}_{\mathcal{A}_Y}(F, G) \\ &\cong \text{RHom}_{\mathcal{A}_X}(F \otimes_{\mathcal{A}_Y} \mathcal{A}_X, G) =: \text{RHom}_{\mathcal{A}_X}(f^*F, G), \end{aligned}$$

стандартной сопряженности между ограничением и расширением скаляров. Наконец, раскладывая произвольный морфизм f каноническим образом в композицию строгого морфизма и расширения, выводим изоморфизм леммы из построенных выше изоморфизмов, пользуясь функториальностью обратного и прямого образов.

10.3. Плоскость и гладкость. Приведем определения и сформулируем следующие леммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.15. Морфизм $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ многообразий Адзумаи называется *плоским*, если функтор обратного образа $f^*: \mathcal{D}(Y, \mathcal{A}_Y) \rightarrow \mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X)$ точен на абелевой категории $\mathrm{Coh}(Y, \mathcal{A}_Y)$.

ЛЕММА 10.16. *Морфизм $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ плоский тогда и только тогда, когда морфизм $f_*: X \rightarrow Y$ плоский.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi_X: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow X$ и $\pi_Y: (Y, \mathcal{A}_Y) \rightarrow Y$ – структурные морфизмы. Ясно, что функторы π_X^* и π_Y^* точны и консервативны (т.е. из $\pi_X^* F = 0$ следует $F = 0$). С другой стороны, имеем $\pi_Y \circ f = f_* \circ \pi_X$, значит, $f^* \pi_Y^* = \pi_X^* f_*^*$. Если f_* не плоский, то существует $G \in \mathrm{Coh}(Y)$ такой, что $\mathcal{H}^i(f_*^* G) \neq 0$ для некоторого $i < 0$. Тогда

$$\mathcal{H}^i(f^* \pi_Y^* G) = \mathcal{H}^i(\pi_X^* f_*^* G) = \pi_X^* \mathcal{H}^i(f_*^* G) \neq 0,$$

в то время как $\pi_Y^* G \in \mathrm{Coh}(Y, \mathcal{A}_Y)$. Значит, функтор f^* не точен. С другой стороны, допустим, что f_* плоский. Тогда строгая часть f^s морфизма f плоская. Однако расширение f^e тоже плоское, так как соответствующий функтор обратного образа совпадает с функтором $F \mapsto F \otimes_{f_*^* \mathcal{A}_Y} \mathcal{A}_X$, а пучок модулей $\mathcal{A}_X$ локально проективен над $f_*^* \mathcal{A}_Y$ в силу леммы 10.4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.17. Объект $F \in \mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X)$ называется *совершенным комплексом*, если он локально квазиизоморфен ограниченному комплексу проективных $\mathcal{A}_X$ -модулей конечного ранга. Обозначим через $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X, \mathcal{A}_X)$ полную подкатегорию категории $\mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X)$, образованную совершенными комплексами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.18. Триангулированная категория $\mathcal{D}$ называется *Ext-ограниченной*, если для любых объектов $F, F' \in \mathcal{D}$ существуют $p, q \in \mathbb{Z}$ такие, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F, F'[t]) = 0$ при $t \notin [p, q] \subset \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 10.19. *Следующие условия для многообразия Адзумаи $(X, \mathcal{A}_X)$ эквивалентны:*

- (i) *подлежащее алгебраическое многообразие X гладко;*
- (ii) $\mathcal{D}^b(X, \mathcal{A}_X) = \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X, \mathcal{A}_X)$;
- (iii) *ограниченная производная категория $\mathcal{D}^b(X, \mathcal{A}_X)$ Ext-ограничена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\implies$ (ii). Рассмотрим произвольный $F \in \mathcal{D}^b(X, \mathcal{A}_X)$. Поскольку категория $\mathrm{Coh}(X, \mathcal{A}_X)$ имеет достаточно много локально свободных объектов, можно построить локально свободную над $\mathcal{A}_X$ резольвенту $F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow F \rightarrow 0$ со сколь угодно большим n . С другой стороны, если n достаточно велико, то пучок $F_{n+1} := \mathrm{Ker}(F_n \rightarrow F_{n-1})$ локально свободен над $\mathcal{O}_X$, следовательно, локально проективен над $\mathcal{A}_X$ по лемме 10.4. Таким образом, F квазиизоморфен конечному комплексу локально проективных $\mathcal{A}_X$ -модулей, значит, F – совершенный комплекс.

(ii) $\implies$ (iii). Поскольку F – совершенный комплекс, имеем $\mathrm{R}\mathcal{H}om(F, F') \in \mathcal{D}^{[p, q]}(X)$ для некоторых $p, q \in \mathbb{Z}$, значит,

$$\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, F') = \mathrm{R}\Gamma(X, \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, F')) \in \mathcal{D}^{[p, q + \dim X]}(\mathcal{A}b).$$

(iii) $\implies$ (i). Пусть $\pi: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow X$ – структурный морфизм. Тогда

$$\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(\pi^* F, \pi^* F') \cong \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F, \pi_* \pi^* F') \cong \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F, F' \otimes \mathcal{A}_X)$$

для всех $F, F' \in \mathcal{D}^b(X, \mathcal{O}_X)$. Если X не гладко, рассмотрим $F = F'$ – структурный пучок особой точки. Тогда

$$F' \otimes \mathcal{A}_X \cong F'^{\oplus \mathrm{rank} \mathcal{A}_X}, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, F' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X[t]) \neq 0$$

для сколь угодно больших t . Значит, категория $\mathcal{D}^b(X, \mathcal{A}_X)$ не Ext-ограничена.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.20. Многообразие Адзумаи $(X, \mathcal{A}_X)$ называется *гладким*, если выполняется любое из эквивалентных условий леммы 10.19. Морфизм многообразий Адзумаи $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ называется *гладким*, если морфизм $f_\circ: X \rightarrow Y$ гладок.

Доказательство следующей леммы очевидно.

ЛЕММА 10.21. Если морфизм $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ гладок, а $(Y, \mathcal{A}_Y)$ гладкое многообразие Адзумаи, то $(X, \mathcal{A}_X)$ гладкое. Композиция гладких морфизмов многообразий Адзумаи – гладкий морфизм.

10.4. Дальнейшие соотношения. Сформулируем следующие леммы.

ЛЕММА 10.22. Для произвольных $F \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{A}_1)$, $G \in \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X, \mathcal{A}_2)$ и $H \in \mathcal{D}^+(X, \mathcal{A}_2^{\mathrm{opp}} \otimes \mathcal{A}_1)$ существует изоморфизм

$$\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_1}(F, G \otimes_{\mathcal{A}_2} H) \cong G \otimes_{\mathcal{A}_2} \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_1}(F, H).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко построить гомоморфизм из правой части в левую. Ясно, что он является изоморфизмом, когда G – локально проективный пучок $\mathcal{A}_2$ -модулей. Следовательно, он является изоморфизмом и в том случае, когда G – совершенный комплекс.

ЛЕММА 10.23. Если либо $F \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{A}_X)$, $G \in \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X, \mathcal{A}_X)$, либо $F \in \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X, \mathcal{A}_X)$, $G \in \mathcal{D}^+(X, \mathcal{A}_X)$, то существует изоморфизм

$$\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, G) \cong G \otimes_{\mathcal{A}_X} \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, \mathcal{A}_X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко построить гомоморфизм из правой части в левую. Ясно, что он является изоморфизмом, когда либо F , либо G – локально проективные пучки $\mathcal{A}_X$ -модулей. Следовательно, он является изоморфизмом и в том случае, когда либо F , либо G – совершенные комплексы.

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 10.24. Если $F \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{A}_1)$, $G \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{A}_1^{\text{opp}} \otimes \mathcal{A}_2)$ и $H \in \mathcal{D}^+(X, \mathcal{A}_2)$, то существует изоморфизм

$$\mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_1}(F, \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_2}(G, H)) \cong \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_2}(F \otimes_{\mathcal{A}_1} G, H).$$

Для всякого объекта $L \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{A}_X)$ определим двойственный объект $L_{\mathcal{A}_X}^* := \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(L, \mathcal{A}_X) \in \mathcal{D}^+(X, \mathcal{A}_X^{\text{opp}})$. Ясно, что двойственный объект к бимодулю – бимодуль, двойственный объект к совершенному комплексу – совершенный комплекс и $(L_{\mathcal{A}_X}^*)_{\mathcal{A}_X}^* \cong L$ (функториальный изоморфизм) для совершенных комплексов.

ЛЕММА 10.25. Для произвольных $F \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{A}_1)$, $G \in \mathcal{D}^+(X, \mathcal{A}_2)$ и $L \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(X, \mathcal{A}_2^{\text{opp}} \otimes \mathcal{A}_1)$ существует изоморфизм

$$\mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_1}(F, G \otimes_{\mathcal{A}_2} L) \cong \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_2}(F \otimes_{\mathcal{A}_1} L_{\mathcal{A}_2}^*, G).$$

Если $F \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{A}_X)$, $G \in \mathcal{D}^+(X, \mathcal{A}_X)$ и $L \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(X, \mathcal{O}_X)$, то существуют изоморфизмы

$$\mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, G \otimes_{\mathcal{O}_X} L) \cong \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F \otimes_{\mathcal{O}_X} L_{\mathcal{O}_X}^*, G) \cong \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, G) \otimes_{\mathcal{O}_X} L,$$

а если $F \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{O}_X)$, $G \in \mathcal{D}^+(X, \mathcal{A}_X)$ и $L \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(X, \mathcal{A}_X^{\text{opp}})$, то существуют изоморфизмы

$$\mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F, G \otimes_{\mathcal{A}_X} L) \cong \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F \otimes_{\mathcal{O}_X} L_{\mathcal{A}_X}^*, G) \cong \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F, G) \otimes_{\mathcal{A}_X} L.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 10.24 имеем

$$\mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_2}(F \otimes_{\mathcal{A}_1} L_{\mathcal{A}_2}^*, G) \cong \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_1}(F, \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_2}(L_{\mathcal{A}_2}^*, G)),$$

а в силу леммы 10.23 имеем

$$\mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_2}(L_{\mathcal{A}_2}^*, G) \cong G \otimes_{\mathcal{A}_2} \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_2}(L_{\mathcal{A}_2}^*, \mathcal{A}_2) \cong G \otimes_{\mathcal{A}_2} L.$$

Аналогично доказываются остальные утверждения.

ЛЕММА 10.26. Если $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – строгий морфизм такой, что f_* имеет конечную Тог-размерность и $F \in \mathcal{D}^-(Y, \mathcal{A}_Y)$, $G \in \mathcal{D}^+(Y, \mathcal{A}_Y)$, то $f_*^* \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(F, G) \cong \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(f^* F, f^* G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале заметим, что в случае $\mathcal{A}_Y = \mathcal{O}_Y$, $\mathcal{A}_X = \mathcal{O}_X$ – тривиальных алгебр Адзумаи – и плоского морфизма f утверждение леммы является одним из стандартных соотношений между функторами (см., например, [12]).

Предположим теперь, что морфизм f строгий и плоский, F – локально проективный пучок $\mathcal{A}_Y$ -модулей, а G – произвольный пучок $\mathcal{A}_Y$ -модулей. Тогда $\mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(F, G)$ и $\mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^* F, f^* G)$ – чистые пучки. Пользуясь изоморфизмами

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(F, G) &\cong \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y \otimes \mathcal{A}_Y^{\text{opp}}}(\mathcal{A}_Y, \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(F, G)), \\ \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(f^* F, f^* G) &\cong \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_X^{\text{opp}}}(\mathcal{A}_X, \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^* F, f^* G)), \end{aligned}$$

баррезольвентами пучков алгебр $\mathcal{A}_Y$ и $\mathcal{A}_X \cong f^*\mathcal{A}_X$ и утверждением для тривиальных алгебр Адзумай, получаем искомый изоморфизм в указанных предположениях.

Далее, от ограничений на F и G легко избавиться с помощью стандартных рассуждений [12, п. II.5.6] (заменяя F на локально свободную резольвенту). Пусть теперь F и G любые, а f – замкнутое вложение конечной Тог-размерности. В этом случае, пользуясь формулой проекции и леммами 10.25 и 10.14, получаем

$$\begin{aligned} f_* f^* R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(F, G) &\cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(F, G) \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_* \mathcal{O}_X \cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(F, G \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_* \mathcal{O}_X) \\ &\cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, f_* f^* G) \cong f_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(f^* F, f^* G) \end{aligned}$$

(комплекс $f_* \mathcal{O}_X$ совершенен, так как f имеет конечную Тог-размерность). Поскольку функтор f_* для замкнутого вложения консервативен, выводим утверждение леммы.

Наконец, произвольный морфизм конечной Тог-размерности легко разложить в композицию замкнутого вложения конечной Тог-размерности и плоского морфизма. Пользуясь функториальностью обратного образа, получаем утверждение леммы в полной общности.

ЛЕММА 10.27. *Если $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – строгий морфизм многообразий Адзумай, $F \in \mathcal{D}^-(Y, \mathcal{A}_Y)$ и $G \in \mathcal{D}^-(Y, \mathcal{A}_Y^{\text{opp}})$, то $f_*^*(F \otimes_{\mathcal{A}_Y} G) \cong f^* F \otimes_{\mathcal{A}_X} f^* G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично, для тривиальных алгебр Адзумай утверждение леммы является одним из стандартных соотношений между функторами [12], для локально проективных пучков F и G утверждение доказывается с помощью баррезольвенты, а для произвольных F и G – с помощью локально проективных резольвент.

ЛЕММА 10.28. *Если $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – морфизм многообразий Адзумай, $F \in \mathcal{D}^-(Y, \mathcal{A}_Y)$ и $G \in \mathcal{D}^-(Y, \mathcal{O}_Y)$, то $f^*(F \otimes_{\mathcal{O}_Y} G) \cong f^* F \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*^* G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} f^*(F \otimes_{\mathcal{O}_Y} G) &\cong f_*^*(G \otimes_{\mathcal{O}_Y} F) \otimes_{f_*^* \mathcal{A}_Y} \mathcal{A}_X \cong (f_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*^* F) \otimes_{f_*^* \mathcal{A}_Y} \mathcal{A}_X \\ &\cong f_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_X} (f_*^* F \otimes_{f_*^* \mathcal{A}_Y} \mathcal{A}_X) \cong f_*^* G \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* F \cong f^* F \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*^* G. \end{aligned}$$

ЛЕММА 10.29. *Если $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – морфизм многообразий Адзумай, $F \in \mathcal{D}^-(Y, \mathcal{A}_Y)$ и $G \in \mathcal{D}^+(Y, \mathcal{A}_Y)$, то существует изоморфизм*

$$f_!^* R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(F, G) \cong R\mathcal{H}om_{f_*^* \mathcal{A}_Y}(f_*^* F, f_!^* G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если морфизм f_* гладкий, то в силу лемм 10.26 и 10.25 и определения функтора $f_!$ имеем

$$\begin{aligned} f_!^* R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(F, G) &\cong f_*^* R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(F, G) \otimes \omega[d] \\ &\cong R\mathcal{H}om_{f_*^* \mathcal{A}_Y}(f_*^* F, f_*^* G \otimes \omega[d]) \cong R\mathcal{H}om_{f_*^* \mathcal{A}_Y}(f_*^* F, f_!^* G), \end{aligned}$$

где $\omega = \omega_{X/Y}$ и $d = \dim X - \dim Y$. Если же $f_\circ$ – замкнутое вложение, то в силу лемм 10.24 и 10.14 и определения функтора $f^!$ имеем

$$\begin{aligned} f_{\circ*} f_\circ^! \mathcal{R}Hom_{\mathcal{A}_Y}(F, G) &\cong \mathcal{R}Hom_{\mathcal{O}_Y}(f_{\circ*} \mathcal{O}_X, \mathcal{R}Hom_{\mathcal{A}_Y}(F, G)) \\ &\cong \mathcal{R}Hom_{\mathcal{A}_Y}(f_{\circ*} \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} F, G) \cong \mathcal{R}Hom_{\mathcal{A}_Y}(F, \mathcal{R}Hom_{\mathcal{O}_Y}(f_{\circ*} \mathcal{O}_X, G)) \\ &\cong \mathcal{R}Hom_{\mathcal{A}_Y}(F, f_{\circ*} f_\circ^! G) \cong f_{\circ*} \mathcal{R}Hom_{\mathcal{A}_Y}(f_\circ^* F, f_\circ^! G). \end{aligned}$$

Поскольку функтор $f_{\circ*}$ для замкнутого вложения консервативен, получаем искомое утверждение. Если же морфизм $f_\circ$ произвольный, разложим его в композицию замкнутого вложения и гладкого морфизма и воспользуемся функториальностью.

ЛЕММА 10.30. Если $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – морфизм многообразий Адзумай, $F \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(Y, \mathcal{A}_Y)$ и $G \in \mathcal{D}^+(Y, \mathcal{A}_Y^{\text{opp}})$, то существует изоморфизм

$$f_\circ^!(F \otimes_{\mathcal{A}_Y} G) \cong f_\circ^* F \otimes_{f_\circ^* \mathcal{A}_Y} f_\circ^! G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 10.29.

ЛЕММА 10.31 (функториальность скрученного обратного образа). Если $(X, \mathcal{A}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{A}_Y) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{A}_Z)$ – морфизмы многообразий Адзумай, то $f^! g^! \cong (gf)^!$ на $\mathcal{D}^+(Z, \mathcal{A}_Z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале рассмотрим случай, когда f и g являются расширениями, так что $X = Y = Z$. Тогда

$$f^! g^!(F) \cong \mathcal{R}Hom_{\mathcal{A}_Y}(\mathcal{A}_X, \mathcal{R}Hom_{\mathcal{A}_Z}(\mathcal{A}_Y, F)),$$

что изоморфно $\mathcal{R}Hom_{\mathcal{A}_Z}(\mathcal{A}_X, F) \cong (gf)^!(F)$ в силу леммы 10.24.

Теперь рассмотрим случай, когда f и g – строгие морфизмы. Тогда $f^! = f_\circ^!$, $g^! = g_\circ^!$ и искомый изоморфизм вытекает из функториальности обычного скрученного обратного образа. Поскольку $f^! g^! \cong (gf)^!$, если f – расширение, а g – строгий морфизм (по определению скрученного обратного образа), остается проверить, что $f^! g^! \cong (gf)^!$, когда f – строгий морфизм, а g – расширение. В этом случае $Z = Y$, $\mathcal{A}_X = f_\circ^* \mathcal{A}_Y$, каноническое разложение морфизма $gf: (X, f_\circ^* \mathcal{A}_Y) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Z)$ принимает вид

$$(X, f_\circ^* \mathcal{A}_Y) \xrightarrow{f_\circ^* g_{\mathcal{A}}} (X, f_\circ^* \mathcal{A}_Z) \xrightarrow{f_\circ} (Y, \mathcal{A}_Z),$$

существуют изоморфизмы

$$f^! g^!(G) = f_\circ^! \mathcal{R}Hom_{\mathcal{A}_Z}(\mathcal{A}_Y, G), \quad (gf)^!(G) = \mathcal{R}Hom_{f_\circ^* \mathcal{A}_Z}(f_\circ^* \mathcal{A}_Y, f_\circ^! G)$$

для всех $G \in \mathcal{D}^+(Z, \mathcal{A}_Z)$, так что нам остается применить лемму 10.29 при $F = \mathcal{A}_Y$.

ЛЕММА 10.32. Если $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – морфизм многообразий Адзумай, $F \in \mathcal{D}^+(Y, \mathcal{A}_Y)$ и $G \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(Y, \mathcal{O}_Y)$, то существует изоморфизм

$$f^!(F \otimes_{\mathcal{O}_Y} G) \cong f^! F \otimes_{\mathcal{O}_X} f_\circ^* G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу функториальности обратного образа и скрученного обратного образа достаточно доказать утверждение только для строгого морфизма и для расширения. Если морфизм f строгий, то $f^* = f_{\circ}^*$, $f^! = f_{\circ}^!$ и можно воспользоваться свойствами обычного скрученного обратного образа. Предположим теперь, что морфизм f – расширение. Тогда в силу леммы 10.22 имеем

$$\begin{aligned} f^!(F \otimes_{\mathcal{O}_Y} G) &\cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(\mathcal{A}_X, F \otimes_{\mathcal{O}_Y} G) \\ &\cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(\mathcal{A}_X, F) \otimes_{\mathcal{O}_Y} G \cong f^!F \otimes_{\mathcal{O}_X} f_{\circ}^*G, \end{aligned}$$

что и требовалось.

ЛЕММА 10.33. Если $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – морфизм многообразий Адзуми, $F \in \mathcal{D}^+(Y, \mathcal{A}_Y)$ и $G \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(Y, \mathcal{O}_Y)$, то существует изоморфизм

$$f^!R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(F, G) \cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*F, f_{\circ}^!G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу функториальности обратного образа и скрученного обратного образа достаточно доказать утверждение только для строгого морфизма и для расширения. Если морфизм f строгий, то $f^* = f_{\circ}^*$, $f^! = f_{\circ}^!$ и можно воспользоваться свойствами обычного скрученного обратного образа. Предположим теперь, что морфизм f – расширение. Тогда имеем

$$\begin{aligned} f^!R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(F, G) &\cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(\mathcal{A}_X, R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(F, G)) \cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{A}_Y} F, G) \\ &\cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(f^*F, G) \cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*F, f_{\circ}^!G), \end{aligned}$$

так как $X = Y$ и $f_{\circ} = \text{id}$.

ЛЕММА 10.34 (двойственность). Если $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – проективный морфизм многообразий Адзуми, $F \in \mathcal{D}^-(X, \mathcal{A}_X)$, $G \in \mathcal{D}^+(Y, \mathcal{A}_Y)$, то существует изоморфизм

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(f_*F, G) \cong f_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, f^!G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу функториальности прямого образа и скрученного обратного образа достаточно доказать двойственность только для строгого морфизма и для расширения. Если морфизм f строгий, то $f_* = f_{\circ*}$, $f^! = f_{\circ}^!$ и $R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(f_*F, G) \cong f_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F, f_{\circ}^!G)$ в силу обычной теоремы двойственности. Применяя баррезольвенту, получаем

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(f_*F, G) \cong f_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, f^!G).$$

Пусть теперь f – расширение. Тогда имеем

$$\begin{aligned} f_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, f^!G) &\cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(\mathcal{A}_X, G)) \\ &\cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(F \otimes_{\mathcal{A}_X} \mathcal{A}_X, G) \cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(F, G) \cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_Y}(f_*F, G), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 10.35. Если $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – проективный морфизм многообразий Адзуми, то функтор $f^!$ сопряжен справа функтору f_* на ограниченной производной категории.

10.5. Расслоенные произведения и замена базы. Рассмотрим многообразия Адзумаи $(X, \mathcal{A}_X)$ и $(Y, \mathcal{A}_Y)$. Если $F \in \mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X)$, $G \in \mathcal{D}(Y, \mathcal{A}_Y)$, обозначим

$$F \boxtimes G := p_o^* F \otimes_{\mathcal{O}_X} q_o^* G,$$

где $p_o: X \times Y \rightarrow X$ и $q_o: X \times Y \rightarrow Y$ – проекции.

Ясно, что $(X \times Y, \mathcal{A}_X \boxtimes \mathcal{A}_Y)$ – тоже многообразие Адзумаи, а проекции p_o и q_o с вложениями алгебр $\mathcal{A}_X \boxtimes \mathcal{O}_Y$ и $\mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{A}_Y$ в $\mathcal{A}_X \boxtimes \mathcal{A}_Y$ определяют морфизмы p и q из $(X \times Y, \mathcal{A}_X \boxtimes \mathcal{A}_Y)$ в $(X, \mathcal{A}_X)$ и $(Y, \mathcal{A}_Y)$. Заметим, что многообразие Адзумаи $(X \times Y, \mathcal{A}_X \boxtimes \mathcal{A}_Y)$ не является категорным произведением многообразий Адзумаи $(X, \mathcal{A}_X)$ и $(Y, \mathcal{A}_Y)$. Тем не менее, мы будем обозначать его $(X, \mathcal{A}_X) \times (Y, \mathcal{A}_Y)$.

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 10.36. Пусть $p: (X, \mathcal{A}_X) \times (Y, \mathcal{A}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{A}_X)$ – проекция. Имеем $p^* F \cong F \boxtimes \mathcal{A}_Y$ и $p^! F \cong F \boxtimes \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{A}_Y, \omega_Y)[\dim Y]$.

В случае расслоенных произведений возникают аналогичные проблемы. Легко видеть, что в общем случае расслоенных произведений (в категорном смысле) в категории многообразий Адзумаи не существует. Однако есть важный случай, когда они существуют.

Пусть $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (S, \mathcal{A}_S)$ и $g: (Y, \mathcal{A}_Y) \rightarrow (S, \mathcal{A}_S)$ – морфизмы многообразий Адзумаи. Обозначим через $p_o: X \times_S Y \rightarrow X$ и $q_o: X \times_S Y \rightarrow Y$ проекции.

ЛЕММА 10.37. Если морфизм f строгий, то $(X \times_S Y, q_o^* \mathcal{A}_Y)$ – расслоенное произведение $(X, \mathcal{A}_X)$ и $(Y, \mathcal{A}_Y)$ над $(S, \mathcal{A}_S)$. Если морфизм g строгий, то $(X \times_S Y, p_o^* \mathcal{A}_X)$ – расслоенное произведение $(X, \mathcal{A}_X)$ и $(Y, \mathcal{A}_Y)$ над $(S, \mathcal{A}_S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\phi: (Z, \mathcal{A}_Z) \rightarrow (X, \mathcal{A}_X)$ и $\psi: (Z, \mathcal{A}_Z) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – морфизмы многообразий Адзумаи такие, что $f \circ \phi = g \circ \psi$, то $f_o \circ \phi_o = g_o \circ \psi_o$, значит, существует морфизм $\xi_o: Z \rightarrow X \times_S Y$ такой, что $p_o \circ \xi_o = \phi_o$ и $q_o \circ \xi_o = \psi_o$. Далее, если f строгий, то отображение $\xi_o^* q_o^* \mathcal{A}_Y \cong \psi_o^* \mathcal{A}_Y \xrightarrow{\psi^A} \mathcal{A}_Z$ задает морфизм многообразий Адзумаи $(Z, \mathcal{A}_Z) \rightarrow (X \times_S Y, q_o^* \mathcal{A}_Y)$. Аналогично, если g строгий, то отображение $\xi_o^* p_o^* \mathcal{A}_X \cong \phi_o^* \mathcal{A}_X \xrightarrow{\phi^A} \mathcal{A}_Z$ задает морфизм $(Z, \mathcal{A}_Z) \rightarrow (X \times_S Y, p_o^* \mathcal{A}_X)$.

Строгий морфизм $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ можно рассматривать как замену базы.

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 10.38. Замена базы сохраняет такие свойства морфизма, как плоскость, гладкость, проективность и т.п.

Если алгебра $\mathcal{A}_X$ некоммутативна, умножение $\mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_X \rightarrow \mathcal{A}_X$ не является гомоморфизмом алгебр. Поэтому в категории многообразий Адзумаи нет “диагонального вложения”. Однако $\mathcal{A}_X$ является $(\mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_X^{\mathrm{opp}})$ -модулем, так что “структурный пучок диагонали” $\Delta_* \mathcal{A}_X$ на $X \times X$ можно рассматривать как объект категории $\mathrm{Coh}(X \times X, \mathcal{A}_X \boxtimes \mathcal{A}_X^{\mathrm{opp}})$.

10.6. Тог- и Ext-амплитуды. Пусть $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – морфизм многообразий Адзумаи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.39. Объект $F \in \mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X)$ имеет *конечную Тог-амплитуду над $(Y, \mathcal{A}_Y)$* , если существуют целые числа p, q такие, что для всякого объекта $G \in \mathcal{D}^{[s, t]}(Y, \mathcal{A}_Y)$ имеем $F \otimes_{\mathcal{A}_X} f^*G \in \mathcal{D}^{[p+s, q+t]}(X, \mathcal{O}_X)$. Морфизм f имеет *конечную Тог-размерность*, если пучок $\mathcal{A}_X$ имеет конечную Тог-амплитуду над $(Y, \mathcal{A}_Y)$. Аналогично, объект $F \in \mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X)$ имеет *конечную Ext-амплитуду над $(Y, \mathcal{A}_Y)$* , если существуют целые числа p, q такие, что для всякого объекта $G \in \mathcal{D}^{[s, t]}(Y, \mathcal{A}_Y)$ имеем $R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, f^!G) \in \mathcal{D}^{[p+s, q+t]}(X, \mathcal{O}_X)$. Морфизм f имеет *конечную Ext-размерность*, если пучок $\mathcal{A}_X$ имеет конечную Ext-амплитуду над $(Y, \mathcal{A}_Y)$.

Полная подкатегория в $\mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X)$, состоящая из объектов конечной Тог-амплитуды над $(Y, \mathcal{A}_Y)$, будет обозначаться $\mathcal{D}_{\text{fTd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X, \mathcal{A}_X)$. Полная подкатегория в $\mathcal{D}(X, \mathcal{A}_X)$, состоящая из объектов конечной Ext-амплитуды над $(Y, \mathcal{A}_Y)$, будет обозначаться $\mathcal{D}_{\text{fEd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X, \mathcal{A}_X)$. Обе являются триангулированными подкатегориями в $\mathcal{D}^b(X, \mathcal{A}_X)$.

ЛЕММА 10.40. Если $i: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (X', \mathcal{A}_{X'})$ – конечный морфизм многообразий Адзумаи над $(Y, \mathcal{A}_Y)$, то

$$\begin{aligned} F \in \mathcal{D}_{\text{fTd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X, \mathcal{A}_X) &\Leftrightarrow i_*F \in \mathcal{D}_{\text{fTd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X', \mathcal{A}_{X'}), \\ F \in \mathcal{D}_{\text{fEd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X, \mathcal{A}_X) &\Leftrightarrow i_*F \in \mathcal{D}_{\text{fEd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X', \mathcal{A}_{X'}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся точностью функтора прямого образа i_* , а также изоморфизмами

$$\begin{aligned} i_*F \otimes_{\mathcal{A}_{X'}} f'^*G &\cong i_*(F \otimes_{\mathcal{A}_X} i^*f'^*G) \cong i_*(F \otimes_{\mathcal{A}_X} f^*G), \\ R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_{X'}}(i_*F, f'^!G) &\cong i_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, i^!f'^!G) \cong i_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_X}(F, f^!G). \end{aligned}$$

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 10.41. Если морфизм $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ имеет конечную Тог-размерность, то всякий совершенный комплекс на $(X, \mathcal{A}_X)$ имеет конечную Тог-амплитуду над $(Y, \mathcal{A}_Y)$. Если морфизм $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ имеет конечную Ext-размерность, то всякий совершенный комплекс на $(X, \mathcal{A}_X)$ имеет конечную Ext-амплитуду над $(Y, \mathcal{A}_Y)$.

Докажем теперь обратные утверждения для гладких многообразий. Для этого нам потребуется следующее утверждение о совершенных комплексах на обычных алгебраических многообразиях. Это утверждение безусловно должно быть известно, однако автор не знает точной ссылки, поэтому для полноты изложения приведем доказательство.

ЛЕММА 10.42. Предположим, что $f: X \rightarrow S$ – гладкий морфизм алгебраических многообразий, а F – когерентный пучок на X . Если F либо плоский, либо локально проективный над S , то F является совершенным комплексом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение локально по X , поэтому можно считать, что многообразие X аффинно, а пучок идеалов диагонали $X \subset X \times_S X$ порождается регулярной последовательностью $s = (s_1, \dots, s_n)$ функций на X . Тогда $\Delta_* \mathcal{O}_X \cong \text{Kosz}_{X \times_S X}(s) \cong \Lambda^\bullet(\mathcal{O}_{X \times_S X}^{\oplus n})$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\Delta} & X \times_S X & \xrightarrow{q} & X \\ & & \downarrow p & & \downarrow f \\ & & X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

и заметим, что $q \circ \Delta = p \circ \Delta = \text{id}_X$, следовательно, для всякой замкнутой точки $x \in X$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_x &\cong q_* \Delta_* \Delta^* p^* \mathcal{O}_x \cong q_*(\Delta_* \mathcal{O}_X \otimes p^* \mathcal{O}_x) \cong q_*(\text{Kosz}_{X \times_S X}(s) \otimes p^* \mathcal{O}_x), \\ \mathcal{O}_x &\cong q_* \Delta_* \Delta^! p^! \mathcal{O}_x \cong q_* \text{RHom}(\Delta_* \mathcal{O}_X, p^! \mathcal{O}_x) \cong q_* \text{RHom}(\text{Kosz}_{X \times_S X}(s), p^! \mathcal{O}_x). \end{aligned}$$

Однако из плоской замены базы следует, что

$$\begin{aligned} q_*(\Lambda^r(\mathcal{O}_{X \times_S X}^{\oplus n}) \otimes p^* \mathcal{O}_x) &\cong q_*(\mathcal{O}_{X \times_S X}^{\oplus \binom{n}{r}} \otimes p^* \mathcal{O}_x) \\ &\cong q_* p^* \mathcal{O}_x^{\oplus \binom{n}{r}} \cong f^* f_* \mathcal{O}_x^{\oplus \binom{n}{r}} \cong f^* \mathcal{O}_{f(x)}^{\oplus \binom{n}{r}}, \\ q_* \text{RHom}(\Lambda^r(\mathcal{O}_{X \times_S X}^{\oplus n}), p^! \mathcal{O}_x) &\cong q_* \text{RHom}(\mathcal{O}_{X \times_S X}^{\oplus \binom{n}{r}}, p^! \mathcal{O}_x) \\ &\cong q_* p^! \mathcal{O}_x^{\oplus \binom{n}{r}} \cong f^! f_* \mathcal{O}_x^{\oplus \binom{n}{r}} \cong f^! \mathcal{O}_{f(x)}^{\oplus \binom{n}{r}}. \end{aligned}$$

Таким образом, всякий пучок $\mathcal{O}_x$ на X обладает резольвентой длины n , составленной из пучков, являющихся либо обратными образами пучков на S , либо скрученными обратными образами пучков на S . Значит, $\text{Tor}_{>n}(F, \mathcal{O}_x) = 0$ для всех $x \in X$, если F плоский над S , и $\text{Ext}^{>n}(F, \mathcal{O}_x) = 0$ для всех $x \in X$, если F локально проективный над S . С другой стороны, легко построить резольвенту пучка F на X вида

$$0 \rightarrow F' \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow F \rightarrow 0$$

с локально свободными F_i . Легко видеть, что $\text{Tor}_{>0}(F', \mathcal{O}_x) = 0$ для всех $x \in X$, если F плоский над S , и $\text{Ext}^{>0}(F', \mathcal{O}_x) = 0$ для всех $x \in X$, если F локально проективный над S . Значит, в обоих случаях F' локально свободен, а F является совершенным комплексом.

Опишем теперь категории объектов конечных Tor - и Ext -амплитуд в двух специальных случаях: гладкого морфизма $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ и гладкого многообразия Y .

ЛЕММА 10.43. Если $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – гладкий морфизм многообразий Адзумай, то выполняются равенства

$$\mathcal{D}_{\text{fTd}/(Y, \mathcal{A}_Y)}(X, \mathcal{A}_X) = \mathcal{D}^{\text{perf}}(X, \mathcal{A}_X) = \mathcal{D}_{\text{fEd}/(Y, \mathcal{A}_Y)}(X, \mathcal{A}_X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякий совершенный комплекс имеет конечную Тог-амплитуду по лемме 10.41. Рассмотрим $F \in \mathcal{D}_{\text{fTd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X, \mathcal{A}_X)$. Поскольку категория $\text{Coh}(X, \mathcal{A}_X)$ имеет достаточно много локально свободных объектов, можно построить локально свободную над $\mathcal{A}_X$ резольвенту

$$F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow F \rightarrow 0$$

для сколь угодно большого n . С другой стороны, если n достаточно велико, то пучок $F_n := \text{Ker}(F_{n-1} \rightarrow F_{n-2})$ плоский над $(Y, \mathcal{A}_Y)$, значит, F_n плоский над Y (так как структурный морфизм $(Y, \mathcal{A}_Y) \rightarrow Y$ плоский). Удлиняя резольвенту и пользуясь рассуждениями из доказательства леммы 10.42, можно добиться того, чтобы пучок F_n был локально свободен над $\mathcal{O}_X$ и, следовательно, локально проективен над $\mathcal{A}_X$ по лемме 10.4. Отсюда заключаем, что F квазиизоморфен конечному комплексу локально проективных $\mathcal{A}_X$ -модулей, значит, F совершенный комплекс. Те же рассуждения доказывают равенство $\mathcal{D}_{\text{fEd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X, \mathcal{A}_X) = \mathcal{D}^{\text{perf}}(X, \mathcal{A}_X)$.

ЛЕММА 10.44. Пусть $(Y, \mathcal{A}_Y)$ – гладкое многообразие Адзумаи. Тогда выполняются равенства

$$\mathcal{D}_{\text{fTd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X, \mathcal{A}_X) = \mathcal{D}^b(X, \mathcal{A}_X) = \mathcal{D}_{\text{fEd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X, \mathcal{A}_X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $F \in \mathcal{D}_{\text{fTd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X, \mathcal{A}_X)$, то объект $F \cong F \otimes_{\mathcal{A}_X} \mathcal{A}_X \cong F \otimes_{\mathcal{A}_X} f^* \mathcal{A}_Y$ ограничен, поэтому имеем $\mathcal{D}_{\text{fTd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X, \mathcal{A}_X) \subset \mathcal{D}^b(X, \mathcal{A}_X)$. С другой стороны, возьмем любой $F \in \mathcal{D}^{[p, q]}(X, \mathcal{A}_X)$. Поскольку Y гладко, то всякий $G \in \mathcal{D}^{[s, t]}(Y, \mathcal{A}_Y)$ локально квазиизоморфен комплексу локально проективных $\mathcal{A}_Y$ -модулей, сосредоточенному в степенях $[s - \dim Y, t]$. Значит, $F \otimes_{\mathcal{A}_X} f^* G \in \mathcal{D}^{[p+s-\dim Y, q+t]}(X, \mathcal{A}_X)$ и $F \in \mathcal{D}_{\text{fTd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X, \mathcal{A}_X)$.

Частным случаем гладкого морфизма является тождественный морфизм. Применяя лемму 10.43, получаем

СЛЕДСТВИЕ 10.45. Имеем

$$\mathcal{D}_{\text{fTd}}/(X, \mathcal{A}_X)(X, \mathcal{A}_X) = \mathcal{D}^{\text{perf}}(X, \mathcal{A}_X) = \mathcal{D}_{\text{fEd}}/(X, \mathcal{A}_X)(X, \mathcal{A}_X).$$

Теперь дадим описание категории объектов конечной Тог- и Ext-амплитуды в случае произвольного морфизма $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.46. Пусть $f = f' \circ f''$ – разложение морфизма многообразий Адзумаи $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ с гладким $f': (X', \mathcal{A}_{X'}) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ и конечным $f'': (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (X', \mathcal{A}_{X'})$. Тогда

$$F \in \mathcal{D}_{\text{fTd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X, \mathcal{A}_X) \Leftrightarrow f''_* F \in \mathcal{D}^{\text{perf}}(X', \mathcal{A}_{X'}) \Leftrightarrow F \in \mathcal{D}_{\text{fEd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X, \mathcal{A}_X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 10.43 и леммой 10.40.

СЛЕДСТВИЕ 10.47. Если $\phi: (W, \mathcal{A}_W) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ – строгая замена базы относительно морфизма $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$, а $(Z, \mathcal{A}_Z) = (X, \mathcal{A}_X) \times_{(Y, \mathcal{A}_Y)} (W, \mathcal{A}_W)$ – расслоенное произведение, то

$$\begin{aligned} \phi^*(\mathcal{D}_{\text{fTd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X, \mathcal{A}_X)) &\subset \mathcal{D}_{\text{fTd}}/(W, \mathcal{A}_W)(Z, \mathcal{A}_Z), \\ \phi^*(\mathcal{D}_{\text{fEd}}/(Y, \mathcal{A}_Y)(X, \mathcal{A}_X)) &\subset \mathcal{D}_{\text{fEd}}/(W, \mathcal{A}_W)(Z, \mathcal{A}_Z). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим $f: (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ в произведение гладкого морфизма $f': (X', \mathcal{A}_{X'}) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_Y)$ и конечного морфизма $f'': (X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (X', \mathcal{A}_{X'})$ и обозначим через $(Z', \mathcal{A}_{Z'}) = (X', \mathcal{A}_{X'}) \times_{(Y, \mathcal{A}_Y)} (W, \mathcal{A}_W)$ расслоенное произведение. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} (Z, \mathcal{A}_Z) & \xrightarrow{f''} & (Z', \mathcal{A}_{Z'}) & \xrightarrow{f'} & (W, \mathcal{A}_W) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ (X, \mathcal{A}_X) & \xrightarrow{f''} & (X', \mathcal{A}_{X'}) & \xrightarrow{f'} & (Y, \mathcal{A}_Y) \end{array}$$

Ее правый квадрат точный декартов, так как f' гладкий, значит, ее левый квадрат точный декартов по лемме 2.25. Следовательно, $f''_* \phi^* F \cong \phi^* f'_* F$, и наше утверждение вытекает из критерия 10.46.

Список литературы

1. Berthelot P., Grothendieck A., Illusie L., *Theorie des reductions et theoreme de Riemann-Roch*, Lect. Not. Math., **225**, Springer-Verlag, Heidelberg, 1971.
2. Бондал А. И., “Представления ассоциативных алгебр и когерентные пучки”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:1 (1989), 25–44.
3. Бондал А. И., Капранов М. М., “Представимые функторы, функторы Серра и перестройки”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:6 (1989), 1183–1205.
4. Bondal A., Orlov D., *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, Preprint, [math.AG/9506012](https://arxiv.org/abs/math/9506012).
5. Bondal A., Orlov D., “Derived categories of coherent sheaves”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Beijing, 2002)*, V. II, Higher Ed. Press, Beijing, 2002, 47–56.
6. Bondal A., Orlov D., “Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences”, *Compositio Math.*, **125**:3 (2001), 327–344.
7. Bridgeland T., “Equivalences of triangulated categories and Fourier-Mukai transforms”, *Bull. London Math. Soc.*, **31**:1 (1999), 25–34.
8. Bridgeland T., King A., Ried M., “The McKay correspondence as an equivalence of derived categories”, *J. Amer. Math. Soc.*, **14**:3 (2001), 535–554.
9. Chevalley C., *The algebraic theory of spinors*, Columbia University Press, N. Y., 1954.
10. Desale U., Ramanan S., “Classification of vector bundles of rank 2 on hyperelliptic curves”, *Invent. Math.*, **38**:2 (1976), 161–185.
11. Gonzalez-Sprinberg G., Verdier J.-L., “Construction géométrique de la correspondance de McKay”, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., Ser. 4*, **16**:3 (1983), 409–449.
12. Hartshorne R., “Residues and duality”, *Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. (Lect. Not. Math.)*, **20**, Springer-Verlag, Berlin–N. Y., 1966.
13. Holweck F., *Lieu singulier des variétés duales: approche géométrique et applications aux variétés homogènes*, Ph. D., Université Paul Sabatier, Toulouse, 2004.
14. Humphreys J., *Conjugacy classes in semisimple algebraic groups*, Mathematical Surveys and Monographs, **43**, AMS, Providence, 1995.
15. Kapranov M., Vasserot E., “Kleinian singularities, derived categories and Hall algebras”, *Math. Ann.*, **316**:3 (2000), 565–576.
16. King A., “Moduli of representations of finite-dimensional algebras”, *Quart. J. Math. Oxford. Ser. (2)*, **45**:180 (1994), 515–530.
17. Кузнецов А. Г., “Производные категории трехмерных многообразий Фано V_{12} ”, *Матем. заметки*, **78**:4 (2005), 579–594.

18. Милн Дж., *Этальные когомологии*, Мир, М., 1983.
19. McKay J., “Graphs, singularities and finite groups”, *Proc. Symp. Pure Math.*, **37** (1980), 183–186..
20. Оконек К., Шнейдер М., Шпиндлер Х., *Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах*, Мир, М., 1984.
21. Орлов Д. О., “Исключительный набор векторных расслоений на многообразии V_5 ”, *Вестн. МГУ. Сер. I. Матем., мех.*, 1991, № 5, 69–71.
22. Орлов Д. О., “Проективные расслоения, моноидальные преобразования и производные категории когерентных пучков”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:4 (1992), 852–862.
23. Орлов Д. О., “Триангулированные категории особенностей и D-браны в моделях Ландау–Гинзбурга”, *Тр. МИРАН*, **246** (2004), 240–262.
24. Самохин А. В., “Производная категория когерентных пучков на LG_3^C ”, *УМН*, **56**:3 (2001), 177–178.
25. Samokhin A., “On the derived category of coherent sheaves on a 5-dimensional Fano variety”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **340**:12 (2005), 889–893.
26. Тюрин А. Н., “О пересечении квадрик”, *УМН*, **30**:6 (1975), 51–99.

А. Г. КУЗНЕЦОВ (A. G. KUZNETSOV)
Математический ин-т им. В. А. Стеклова
E-mail: akuznet@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
26.04.2005