Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Романюк, Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 2, 69–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/im558>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:27:26

УДК 517.5

А. С. Романюк

Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных

Получены точные по порядку оценки билинейных приближений периодических функций $2d$ переменных вида $f(x, y) = f(x - y)$, $x, y \in \pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi, \pi]$, порождающихся из функций $f(x) \in B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p < \infty$, сдвигами аргумента $x \in \pi_d$ на всевозможные векторы $y \in \pi_d$. Исследованы также отклонения ступенчатых гиперболических сумм Фурье на классах функций $B_{1,\theta}^r$ и наилучшие ортогональные тригонометрические приближения функций из этих же классов в пространстве L_q , $1 < q < \infty$.

Библиография: 28 наименований.

Введение

Настоящая работа состоит из двух параграфов. В § 1 изучаются билинейные приближения периодических функций $2d$ переменных вида $f(x, y) = f(x - y)$, $x, y \in \pi_d$, порождающихся из функций $f(x) \in B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p < \infty$, сдвигами аргумента $x \in \pi_d$ на всевозможные векторы $y \in \pi_d$. Билинейные приближения такого рода функций связаны с колмогоровскими поперечниками соответствующих функциональных классов. В § 2 исследовано приближение функций из классов $B_{1,\theta}^r$ в пространстве L_q , $1 < q < \infty$, ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье, которые в данной ситуации реализуют наилучшие по порядку приближения этих классов полиномами с “номерами” гармоник из ступенчатого гиперболического креста. Здесь устанавливаются также точные порядки наилучших ортогональных тригонометрических приближений функций из классов $B_{1,\theta}^r$ в пространстве L_q , $1 < q < \infty$, и функций из классов $B_{p,\theta}^r$, $1 < p < \infty$, в пространстве L_1 .

Определения исследуемых аппроксимационных характеристик будут даны в соответствующих частях работы, а сначала приведем необходимые в дальнейшем обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{R}^d$ – d -мерное пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d)$, $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$, и $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi, \pi]$, – простран-

ство 2π -периодических по каждому аргументу функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty, \quad p = \infty,$$

$$L_p^0(\pi_d) = \left\{ f(x) \mid f \in L_p(\pi_d), \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d} \right\}.$$

Далее будет удобно пользоваться определением классов $B_{p,\theta}^r$, введенных О. В. Бесовым [1], базирующимся на так называемой декомпозиционной нормировке (см., например, [2]).

Для векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, и $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, положим

$$\rho(s) = \{k \mid 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1, d}\}$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$ обозначим

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

где $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k, t)} dt$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Пусть $1 < p < \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Тогда в принятых обозначениях классы $B_{p,\theta}^r$ определяются следующим образом:

$$B_{p,\theta}^r = \left\{ f(x) \mid \|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}$$

при $1 \leq \theta < \infty$ и

$$B_{p,\infty}^r = \left\{ f(x) \mid \|f\|_{B_{p,\infty}^r} = \sup_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(f, x)\|_p \leq 1 \right\}.$$

Отметим, что классы $B_{p,\infty}^r$ совпадают с классами H_p^r (см. [3, с. 31]), которые являются аналогами известных классов С. М. Никольского (см. [4, с. 189]).

Приведенное определение классов $B_{p,\theta}^r$ можно распространить и на крайние значения $p = 1$ и $p = \infty$, соответствующим образом видоизменив “блоки” $\delta_s(f, x)$.

Пусть $V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, – ядро Валле-Пуссена порядка $2l - 1$:

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^l \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l} \right) \cos kt.$$

Сопоставим каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j}-1}(x_j))$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$ обозначим

$$A_s(f, x) = f(x) * A_s(x),$$

где $*$ – операция свертки. Тогда при каждом $1 \leq p \leq \infty$ для $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, классы $B_{p, \theta}^r$ определяются следующим образом:

$$B_{p, \theta}^r = \left\{ f(x) \mid \|f\|_{B_{p, \theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}$$

при $1 \leq \theta < \infty$ и

$$B_{p, \infty}^r = \left\{ f(x) \mid \|f\|_{B_{p, \infty}^r} = \sup_s 2^{(s, r)} \|A_s(f, x)\|_p \leq 1 \right\}.$$

Поскольку в комментариях к полученным в работе результатам мы будем проводить сравнение их с соответствующими результатами на классах $W_{p, \alpha}^r$, то для удобства напомним определение и этих классов.

Пусть $F_r(x, \alpha)$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, – многомерные аналоги ядер Бернулли, т. е.

$$F_r(x, \alpha) = 2^d \sum_k \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \quad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

и в сумме участвуют только те векторы $k = (k_1, \dots, k_d)$, для которых $k_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Обозначим (см., например, [3, с. 31]) через $W_{p, \alpha}^r$ класс функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \varphi(x) * F_r(x, \alpha) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \varphi(y) F_r(x - y, \alpha) dy,$$

где $\varphi \in L_p(\pi_d)$, $\|\varphi\|_p \leq 1$.

Всюду далее будем предполагать, что координаты векторов $r = (r_1, \dots, r_d)$, участвующих в приведенных определениях классов, упорядочены в виде $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_d$ и $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ – вектор с координатами $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1, d}$. Полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений и при этом функции $\mu_1(l)$ и $\mu_2(l)$ называть *функциями одного порядка* и записывать $\mu_1 \asymp \mu_2$, если существуют постоянные $0 < C_1 \leq C_2$ такие, что $C_1 \mu_2(l) \leq \mu_1(l) \leq C_2 \mu_2(l)$. Аналогично определяются порядковые неравенства $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_1 \gg \mu_2$. Все постоянные C_i , $i = 1, 2, \dots$, используемые в настоящей работе, могут зависеть только от тех параметров, которые присутствуют в определениях классов, метрик и размерности пространства $\mathbb{R}^d$. Если A – конечное множество, то через $|A|$ будем обозначать количество его элементов.

При доказательстве результатов будут использоваться следующие хорошо известные утверждения.

ТЕОРЕМА А (Литтлвуда–Пэли [4, с. 65]). Пусть задано $p \in (1, \infty)$. Существуют положительные числа C_1 и C_2 такие, что для каждой функции $f \in L_p^0(\pi_d)$ справедлива оценка

$$C_1 \|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_2 \|f\|_p.$$

ТЕОРЕМА Б [5]. Пусть $n = (n_1, \dots, n_d)$, n_j – целые неотрицательные числа, $j = \overline{1, d}$, и

$$t(x) = \sum_{|k_j| \leq n_j} c_k e^{i(k, x)}.$$

Тогда при $1 \leq q < p \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|t\|_p \leq 2^d \prod_{j=1}^d n_j^{\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)} \|t\|_q.$$

Отметим, что это неравенство было установлено С. М. Никольским и получило название *неравенство разных метрик*. В случае $d = 1$ и $p = \infty$ соответствующее неравенство доказал Д. Джексон [6].

ТЕОРЕМА В [3, с. 32]. Для того чтобы $f \in H_p^r$, $1 \leq p \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \|\delta_s(f, x)\|_p &\ll 2^{-(s, r)}, & 1 < p < \infty, \\ \|A_s(f, x)\|_p &\ll 2^{-(s, r)}, & 1 \leq p \leq \infty. \end{aligned}$$

§ 1. Наилучшие билинейные приближения функций из классов $B_{p, \theta}^r$

Сначала дадим определение величины, которая здесь будет изучаться, и приведем историю ее исследования.

Пусть $L_q(\pi_{2d})$, $q = (q_1, q_2)$, – множество функций $f(x, y)$, $x, y \in \pi_d$, с конечной смешанной нормой

$$\|f(x, y)\|_{q_1, q_2} = \|f(\cdot, y)\|_{q_1} \|_{q_2},$$

где норма вычисляется сначала в пространстве $L_{q_1}(\pi_d)$ по переменной $x \in \pi_d$, а затем от результата – по переменной $y \in \pi_d$ в пространстве $L_{q_2}(\pi_d)$. Для $f \in L_q(\pi_{2d})$ определим наилучшее билинейное приближение порядка M :

$$\tau_M(f)_{q_1, q_2} = \inf_{u_i(x), v_i(y)} \left\| f(x, y) - \sum_{i=1}^M u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1, q_2},$$

где $u_i \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_i \in L_{q_2}(\pi_d)$.

Если F – класс функций, то полагаем

$$\tau_M(F)_{q_1, q_2} = \sup_{f \in F} \tau_M(f)_{q_1, q_2}. \quad (1.1)$$

Пусть F – некоторый функциональный класс и f – фиксированная функция из F . Обозначим через F_f множество, состоящее из функций вида $f(x - y)$, получающихся из $f(x)$ сдвигами ее аргумента на произвольный вектор $y \in \pi_d$. В таком случае имеет место равенство (см., например, [3, с. 85])

$$\tau_M(f(x - y))_{q_1, \infty} = d_M(F_f, L_{q_1}), \quad (1.2)$$

где $d_M(F_f, L_{q_1})$ – колмогоровский поперечник¹ множества F_f в пространстве L_{q_1} .

Таким образом, если класс F инвариантен относительно сдвига аргумента содержащихся в нем функций, то в силу (1.2) значения величин $\tau_M(f(x-y))_{q_1, \infty}$ могут служить оценками снизу для колмогоровского поперечника $d_M(F, L_{q_1})$.

Отметим, что вопрос об изучении величин $d_M(F_f, L_q)$ для $f \in W_{p, \alpha}^r$, $\alpha = r$, был поставлен Р. С. Исмаиловым в [7], где фактически получены порядки этих величин для $1 \leq p \leq 2$, $q = 2$. Классический результат, касающийся исследования непосредственно билинейных приближений, принадлежит Шмидту [8]. В несколько более общей, чем в [8], форме этот результат может быть сформулирован в виде следующего утверждения (см., например, [3, с. 10]).

ТЕОРЕМА Г. Пусть функция $f(x, y)$, $x \in \pi_d$, $y \in \pi_d$, такова, что $\|f(x, y)\|_{2,2} < \infty$. Тогда

$$\tau_M(f)_{2,2} = \left(\sum_{j=M+1}^{\infty} \lambda_j \right)^{\frac{1}{2}},$$

где λ_j – невозрастающая последовательность собственных чисел оператора $\mathcal{J}_f^* \mathcal{J}_f$, $\mathcal{J}_f$ – интегральный оператор с ядром $f(x, y)$, а $\mathcal{J}_f^*$ – сопряженный ему оператор.

В работе [9] исследовалось приближение функций $f(x, y) = (x - y)_+^{r-1}$ на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ и полученные результаты были применены для нахождения точных значений поперечников классов непериодических дифференцируемых функций. Затем в работе [10] были получены оценки сверху и снизу величин $\tau_M(f)_{2,2}$ для функций $f(x, y)$ двух переменных, принадлежащих некоторому классу.

Исследованию величин (1.1), где вместо F рассматривают классы $W_{p, \alpha}^r$ и H_p^r функций $f(x)$, $x \in \pi_d$, и $f(x, y) = f(x - y)$, $x, y \in \pi_d$, соответственно, посвящен цикл работ В. Н. Темлякова [11]–[14] (см. также [3]). Более конкретно результаты этих работ мы рассмотрим в комментариях к полученным результатам на классах $B_{p, \theta}^r$.

В непериодическом случае отметим также работы М.-Б. А. Бабаева [15], [16], в которых можно найти соответствующую библиографию о билинейных приближениях в этом направлении.

Основной целью в этом параграфе является получение точных по порядку оценок величин

$$\tau_M(B_{p, \theta}^r)_{q_1, q_2} = \sup_{f \in B_{p, \theta}^r} \tau_M(f)_{q_1, q_2} \quad (1.3)$$

в предположении того, что $f(x) \in B_{p, \theta}^r$, а билинейные приближения $\tau_M(f)_{q_1, q_2}$ рассматриваются для функции вида $f(x - y)$, $x, y \in \pi_d$. При доказательстве основных утверждений используются подходы, которые применялись в работах [11]–[14] (см. также [3]), с соответствующей модификацией, позволяющей учитывать более тонкую градацию функций из классов $B_{p, \theta}^r$.

¹Если Φ – некоторое (центрально-симметричное) множество банахова пространства $\mathcal{X}$, то M -мерным колмогоровским поперечником Φ называется величина

$$d_M(\Phi, \mathcal{X}) = \inf_{L_M} \sup_{f \in \Phi} \inf_{a \in L_M} \|f - a\|_{\mathcal{X}},$$

где L_M – подпространство размерности M пространства $\mathcal{X}$.

Прежде чем перейти непосредственно к изложению полученных результатов, отметим, что во всех случаях, в которых удалось установить точные порядки величин (1.3), оценки сверху получены как следствия соответствующих оценок величин наилучших M -членных тригонометрических приближений $e_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1}$ [17]. Напомним, что если $f \in L_{q_1}(\pi_d)$, то ее *наилучшим M -членным тригонометрическим приближением* называется величина

$$e_M(f)_{q_1} = \inf_{k^j, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^M c_j e^{i(k^j, \cdot)} \right\|_{q_1},$$

где $\{k^j\}_{j=1}^M$ – система векторов $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$ с целочисленными координатами, c_j – произвольные числа.

Если $F \subset L_{q_1}(\pi_d)$ – некоторый класс функций, то полагают

$$e_M(F)_{q_1} = \sup_{f \in F} e_M(f)_{q_1}.$$

Таким образом, мы сначала докажем для величин $\tau_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1, \infty}$, $1 \leq p \leq 2 < q_1 < \infty$, только оценки сверху и тем самым проиллюстрируем технику их получения из соответствующих оценок величин $e_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1}$.

Справедливо утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $1 \leq p \leq 2 < q_1 < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Тогда имеют место соотношения

$$\tau_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1, \infty} \ll \begin{cases} M^{-\frac{1}{2}} (\log^\nu M)^{\frac{1}{\theta'}}, & r_1 = \frac{1}{p}, \\ (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}, & r_1 > \frac{1}{p}, \\ M^{-\frac{q_1}{2} (r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q_1})} (\log^{\nu-1} M)^{(q_1-1)(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q_1'}{q_1 \theta'})}, & \frac{1}{p} - \frac{1}{q_1} < r_1 < \frac{1}{p}, \end{cases}$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, пусть $r_1 = \frac{1}{p}$. Тогда, с одной стороны, согласно оценке $e_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1}$ [17, теорема 1.1] для произвольной функции $f(x)$ из класса $B_{p,\theta}^r$ найдется множество векторов $k^1, \dots, k^M$, $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$, $k_i^j \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1, d}$, и чисел $c_1, \dots, c_M$ таких, что

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^M c_j e^{i(k^j, x)} \right\|_{q_1} \ll M^{-\frac{1}{2}} (\log^\nu M)^{\frac{1}{\theta'}}, \quad (1.4)$$

с другой стороны, для левой части (1.4) можно записать

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - \sum_{j=1}^M c_j e^{i(k^j, x)} \right\|_{q_1} &= \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^M c_j e^{i(k^j, (x-y))} \right\|_{q_1, \infty} \\ &= \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^M c_j e^{i(k^j, x)} e^{-i(k^j, y)} \right\|_{q_1, \infty}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Сопоставив (1.4) и (1.5), будем иметь

$$\left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^M c_j e^{i(k^j, x)} e^{-i(k^j, y)} \right\|_{q_1, \infty} \ll M^{-\frac{1}{2}} (\log^\nu M)^{\frac{1}{\theta'}}. \quad (1.6)$$

Наконец, полагая в (1.6) $c_j e^{i(k^j, x)} = u_j(x)$ и $e^{-i(k^j, y)} = v_j(y)$, приходим к искомой оценке в случае $r_1 = \frac{1}{p}$. В оставшихся двух случаях оценки устанавливаются аналогично. Теорема доказана.

Таким образом, как следует из проведенного доказательства, если известны оценки сверху величин $e_M(B_{p, \theta}^r)_{q_1}$, то они дают возможность записать соответствующие оценки сверху для наилучших билинейных приближений $\tau_M(f(x-y))_{q_1, \infty}$, $f(x) \in B_{p, \theta}^r$.

Ниже мы сосредоточим внимание только на тех случаях, где удалось установить точные по порядку оценки для $\tau_M(B_{p, \theta}^r)_{q_1, q_2}$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $1 \leq p \leq 2$, $1 \leq \theta < \infty$ и $r_1 > \frac{1}{p}$. Тогда при $2 \leq q_1 < \infty$ и $1 \leq q_2 \leq \infty$

$$\tau_M(B_{p, \theta}^r)_{q_1, q_2} \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}. \quad (1.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху следует из теоремы 1.1:

$$\tau_M(B_{p, \theta}^r)_{q_1, q_2} \leq \tau_M(B_{p, \theta}^r)_{q_1, \infty} \ll (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}.$$

Заметим, что соответствующую оценку снизу достаточно получить в случае $\nu = d$.

Покажем, что при $1 \leq p \leq 2$, $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ и $1 \leq \theta < \infty$ справедлива оценка

$$\tau_M(B_{p, \theta}^r)_{2, 1} \gg (M^{-1} \log^{d-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}, \quad (1.8)$$

из которой, очевидно, будет следовать оценка снизу и в (1.7).

Итак, рассмотрим сначала случай $p = 1$. По заданному числу M подберем $n \in \mathbb{N}$ таким образом, чтобы для количества элементов множества $Q_n = \bigcup_{(s, 1)=n} \rho(s)$ выполнялись соотношения

$$|Q_n| > M, \quad |Q_n| \asymp M.$$

(Заметим, что $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.)

Рассмотрим функцию

$$g(x) = C_1 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{n \leq (s, 1) \leq n+d} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \cos(k_j x_j),$$

где $\rho^+(s) = \{k: k = (k_1, \dots, k_d), 2^{s_j-1} \leq k_j < 2^{s_j}, j = \overline{1, d}\}$ и $C_1 > 0$ – некоторая постоянная. Покажем, что функция $g(x)$ при соответствующем выборе постоянной $C_1 > 0$ принадлежит классу $B_{1, \theta}^r$.

Действительно, поскольку функция

$$F_{r_1}(x) = \sum_{k>0} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \cos(k_j x_j)$$

принадлежит классу H_1^r , $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$ (см., например, [3, с. 53]), то согласно теореме В для нее выполняется соотношение

$$\|A_s(F_{r_1}, x)\|_1 \ll 2^{-(s,r)}, \quad s \in \mathbb{N}^d. \quad (1.9)$$

Следовательно, согласно определению $\|g\|_{B_{1,\theta}^r}$ и в силу (1.9) можно записать

$$\begin{aligned} \|g\|_{B_{1,\theta}^r} &\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(F_{r_1}, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1, \end{aligned}$$

т. е. $g \in B_{1,\theta}^r$.

Далее, пусть G – интегральный оператор,

$$(Gf)(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} g(x-y) f(y) dy,$$

G^* – оператор, сопряженный к G , и λ_l – собственные числа оператора G^*G , которые расположены в невозрастающем порядке. Поскольку числа λ_l совпадают с числами $bn^{-\frac{2(d-1)}{\theta}} \prod_{j=1}^d k_j^{-2r_1}$, $b > 0$, расположенными в порядке невозрастания, то в силу теоремы А будем иметь

$$\begin{aligned} \inf_{u_i(x), v_i(y)} \left\| g(x-y) - \sum_{i=1}^M u_i(x) v_i(y) \right\|_{2,2} &= \left(\sum_{l \geq M+1} \lambda_l \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1) \geq n+1} \prod_{j=1}^d \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} k_j^{-2r_1} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1) \geq n+1} 2^{-\|s\|_1(2r_1-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{2})} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \asymp M^{-(r_1-\frac{1}{2})} (\log^{d-1} M)^{r_1-\frac{1}{\theta}}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Далее, пусть заданы некоторые системы функций $\{u_i(x)\}_{i=1}^M \in L_2(\pi_d)$ и $\{v_i(y)\}_{i=1}^M \in L_1(\pi_d)$. Не ограничивая общности, мы можем считать функции $v_i(y)$, $i = \overline{1, M}$, непрерывными. Обозначим через $u_g(x, y)$ ортогональную проекцию функции $g(x-y)$ при фиксированном y на подпространство $U = \mathcal{L}(\{u_i(x)\}_{i=1}^M)$ – линейную оболочку функций $u_i(x)$, $i = \overline{1, M}$, и положим

$$r(x, y) = g(x-y) - u_g(x, y).$$

Поскольку функция $u_g(x, y)$ имеет вид

$$u_g(x, y) = \sum_{i=1}^M u_i(x) \varphi_i(y),$$

то для любого $y \in \pi_d$ будем иметь

$$\left\| g(\cdot - y) - \sum_{i=1}^M u_i(\cdot) v_i(y) \right\|_2 \geq \|r(\cdot, y)\|_2, \quad (1.11)$$

$$\|r(\cdot, y)\|_2 \leq \|g(\cdot - y)\|_2. \quad (1.12)$$

Далее воспользуемся неравенством

$$\|r(x, y)\|_{2,2}^2 \leq \|r(x, y)\|_{2,1} \|r(x, y)\|_{2,\infty}. \quad (1.13)$$

С одной стороны, принимая во внимание, что

$$u_g(x, y) = \sum_{i=1}^M u_i(x) \varphi_i(y),$$

и повторяя те же рассуждения, что и при выводе соотношения (1.10), получим

$$\|r(x, y)\|_{2,2} = \|g(x - y) - u_g(x, y)\|_{2,2} \gg M^{-r_1 + \frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{r_1 - \frac{1}{\theta}}. \quad (1.14)$$

С другой стороны, нетрудно оценить $\|r(x, y)\|_{2,\infty}$ сверху. Для этого воспользуемся неравенством (1.12), в силу которого

$$\|r(x, y)\|_{2,\infty} \leq \|g\|_2. \quad (1.15)$$

Оценим $\|g\|_2$. Имеем

$$\begin{aligned} \|g\|_2 &\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} \prod_{j=1}^d \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} k_j^{-2r_1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{l=n}^{n+d} \sum_{(s,1)=l} \prod_{j=1}^d \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} k_j^{-2r_1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{l=n}^{n+d} \sum_{(s,1)=l} \prod_{j=1}^d 2^{-s_j(2r_1-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{l=n}^{n+d} 2^{-l(2r_1-1)} l^{d-1} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{-n(r_1 - \frac{1}{2})} n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})} \\ &\asymp M^{-r_1 + \frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{r_1 - \frac{1}{\theta}}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Таким образом, согласно (1.15) и (1.16) можно записать

$$\|r(x, y)\|_{2,\infty} \leq \|g\|_2 \asymp M^{-r_1 + \frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{r_1 - \frac{1}{\theta}}. \quad (1.17)$$

Сопоставив оценки (1.13), (1.14) и (1.17), приходим к соотношению

$$\|r(x, y)\|_{2,1} \gg M^{-r_1 + \frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{r_1 - \frac{1}{\theta}}.$$

Наконец, для завершения оценки осталось воспользоваться неравенством (1.11). Оценка (1.8) в случае $p = 1$ установлена.

Теперь перейдем к рассмотрению случая $1 < p \leq 2$. По заданному M подберем n таким, чтобы для количества элементов множества $Q_n = \bigcup_{(s,1)=n} \rho(s)$ выполнялись соотношения

$$|Q_n| > 4M, \quad |Q_n| \asymp M. \quad (1.18)$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} f_1(x) &= C_2 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{k \in Q_n} e^{i(k,x)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} C_2 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} d_n(x), \quad C_2 > 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Нетрудно проверить, что $f_1 \in B_{p,\theta}^r$. Действительно, поскольку

$$\begin{aligned} \|\delta_s(d_n, x)\|_p &= \left\| \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)} \right\|_p = \prod_{j=1}^d \left\| \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} e^{ik_j x_j} \right\|_p \\ &\asymp \prod_{j=1}^d 2^{s_j(1-\frac{1}{p})} = 2^{(s,1)(1-\frac{1}{p})}, \end{aligned}$$

то согласно определению $\|f_1\|_{B_{p,\theta}^r}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{B_{p,\theta}^r} &= \left(\sum_{(s,1)=n} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f_1, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\asymp 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1)=n} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(d_n, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1)=n} \|\delta_s(d_n, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\asymp 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1)=n} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{p})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} = n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1)=n} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1. \end{aligned}$$

Далее нам понадобится вспомогательное утверждение (см., например, [3, с. 98]).

ЛЕММА А. Пусть множество $Q_n = \bigcup_{(s,1)=n} \rho(s)$ удовлетворяет условиям (1.18). Тогда для любой функции $g(x)$ вида

$$g(x) = \sum_{k \in Q_n} \hat{g}(k) e^{i(k,x)}, \quad |\hat{g}(k)| = 1,$$

справедлива оценка

$$\inf_{u_i(x), v_i(y)} \left\| g(x-y) - \sum_{i=1}^M u_i(x) v_i(y) \right\|_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, поскольку функция $d_n(x)$ удовлетворяет условиям леммы А, то для $\tau_M(f_1)_{2,1}$ будем иметь

$$\begin{aligned}\tau_M(f_1)_{2,1} &\gg M^{\frac{1}{2}} 2^{-n} \left(r_1 + 1 - \frac{1}{p}\right) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \\ &\asymp (M^{-1} \log^{d-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}.\end{aligned}$$

Оценки снизу, а вместе с ними и теорема доказаны.

Перед тем как перейти к формулировке следующего результата, сделаем некоторые замечания, из которых видно различие в поведении классов $W_{p,\alpha}^r$, H_p^r и $B_{p,\theta}^r$ в смысле билинейных приближений и колмогоровских поперечников.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. При $1 \leq p \leq 2$, $2 \leq q_1 < \infty$ и $1 \leq q_2 \leq \infty$ точные порядки величин $\tau_M(H_p^r)_{q_1,q_2}$, $r_1 > \frac{1}{p}$, а также величин $\tau_M(W_{p,\alpha}^r)_{q_1,q_2}$, $r_1 > \frac{2}{p} - \frac{1}{2}$, установлены В. Н. Темляковым (см., например, [3, с. 96, 100]).

Для случая $\frac{1}{p} < r_1 \leq \frac{2}{p} - \frac{1}{2}$ оценка снизу величины $\tau_M(W_{p,\alpha}^r)_{q_1,q_2}$ установлена В. Н. Темляковым (см. [3, с. 96]), а сверху она является следствием оценки величины $e_M(W_{p,\alpha}^r)_{q_1}$, полученной Э. С. Белинским [18].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Сопоставив результат теоремы 1.2 при $q_2 = \infty$ с соответствующей оценкой колмогоровского поперечника $d_M(B_{p,\theta}^r, L_{q_1})$ [19], получим

$$\tau_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1,\infty} \asymp d_M(B_{p,\theta}^r, L_{q_1})$$

при $2 \leq \theta < \infty$ и

$$\tau_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1,\infty} \asymp d_M(B_{p,\theta}^r, L_{q_1}) (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}$$

при $1 \leq \theta < 2$.

На классах $W_{p,\alpha}^r$ и H_p^r имеет место следующая ситуация. Сопоставив результаты, приведенные в замечании 1.1, с соответствующими оценками колмогоровских поперечников (см. [3, с. 69, 76]), находим, что

$$\begin{aligned}\tau_M(H_p^r)_{q_1,\infty} &\asymp d_M(H_p^r, L_{q_1}), \\ \tau_M(W_{p,\alpha}^r)_{q_1,\infty} &\asymp d_M(W_{p,\alpha}^r, L_{q_1}) (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $1 \leq \theta < \infty$ и $r_1 > \frac{1}{2}$. Тогда при $2 \leq p < q_1 < \infty$ и $1 \leq q_2 \leq \infty$ имеет место порядковое соотношение

$$\tau_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 1.2 оценка сверху следует из оценки величины $e_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1}$, $2 \leq p < q_1 < \infty$ [17].

Для того чтобы установить нужную оценку снизу, подберем по заданному M число n таким образом, чтобы выполнялись следующие соотношения:

- а) $M \asymp 2^n n^{d-1}$;
- б) $2^n n^{d-1} > 4M$.

Рассмотрим функцию

$$f_2(x) = C_3 2^{-n(r_1 + \frac{1}{2})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^d R_{s_j}(x_j), \quad C_3 > 0,$$

где

$$R_{s_j}(x_j) = \sum_{l=2^{s_j}-1}^{2^{s_j}-1} \varepsilon_l e^{ilx_j}, \quad \varepsilon_l = \pm 1, \quad j = \overline{1, d},$$

– полиномы Рудина–Шапиро (см., например, [20, с. 155]), обладающие свойством $\|R_{s_j}\|_\infty \ll 2^{\frac{s_j}{2}}$.

Нетрудно убедиться в том, что $f_2 \in B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$. Действительно, поскольку

$$\delta_s(f_2, x) = C_3 2^{-n(r_1 + \frac{1}{2})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \prod_{j=1}^d R_{s_j}(x_j),$$

то согласно определению $\|f_2\|_{B_{p,\theta}^r}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|f_2\|_{B_{p,\theta}^r} &= \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f_2, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\asymp 2^{-n(r_1 + \frac{1}{2})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1)=n} 2^{(s,r)\theta} \left\| \prod_{j=1}^d R_{s_j}(x_j) \right\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\ll 2^{-n(r_1 + \frac{1}{2})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1)=n} 2^{(s,r)\theta} 2^{(s,1)\frac{\theta}{2}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= 2^{-n(r_1 + \frac{1}{2})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{n(r_1 + \frac{1}{2})} \left(\sum_{(s,1)=n} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1, \end{aligned}$$

т. е. $f_2 \in B_{p,\theta}^r$.

Далее, учитывая, что функция

$$v(x) = \sum_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^d R_{s_j}(x_j)$$

удовлетворяет условиям леммы А, имеем

$$\tau_M(f_2)_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}} 2^{-n(r_1 + \frac{1}{2})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. При тех же условиях на параметры p , q_1 , q_2 и r_1 , что и в теореме 1.3, точные по порядку оценки величин $\tau_M(W_{p,\alpha}^r)_{q_1,q_2}$ и $\tau_M(H_p^r)_{q_1,q_2}$ установлены В. Н. Темляковым (см., например, [3, с. 96, 100]). Сопоставив эти оценки с соответствующими оценками колмогоровских поперечников $d_M(W_{p,\alpha}^r, L_{q_1})$ и $d_M(H_p^r, L_{q_1})$ (см. [3, с. 69, 76]), получаем

$$\tau_M(W_{p,\alpha}^r)_{q_1,\infty} \asymp d_M(W_{p,\alpha}^r, L_{q_1}), \quad \tau_M(H_p^r)_{q_1,\infty} \asymp d_M(H_p^r, L_{q_1}).$$

На классах $B_{p,\theta}^r$ ситуация несколько иная. Именно (см. [19]), при $2 \leq \theta < \infty$

$$\tau_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1,\infty} \asymp d_M(B_{p,\theta}^r, L_{q_1}),$$

тогда, как при $1 \leq \theta < 2$,

$$\tau_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1,\infty} \asymp d_M(B_{p,\theta}^r, L_{q_1})(\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

Теперь рассмотрим соотношения между параметрами p, q_1, q_2 , для которых величины $\tau_M(F_p^r)_{q_1,q_2}$ не были изучены не только для классов $F_p^r = B_{p,\theta}^r$, но и, по-видимому, для классов $F_p^r = W_{p,\alpha}^r$ и $F_p^r = H_p^r$.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $1 \leq \theta \leq \infty$, $r_1 > 0$. Тогда при $2 \leq q_1 \leq p < \infty$, $1 \leq q_2 \leq \infty$ имеет место порядковая оценка

$$\tau_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху следует из [17, теорема 1.2], где установлен порядок величины $e_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1}$, $1 < q_1 < p < \infty$, $p \geq 2$. Оценка снизу легко получается из следующих соображений.

В случае $r_1 \geq \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$ искомая оценка устанавливается при помощи тех же рассуждений, что и при доказательстве теоремы 1.3. Если же имеет место случай $0 < r_1 < \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$, то, с одной стороны, в силу независимости оценки сверху от размерности пространства $\mathbb{R}^d$ оценку снизу достаточно установить в одномерном случае, т. е. при $d = 1$, с другой стороны, в одномерном случае необходимая оценка доказывается с помощью тех же рассуждений, что и при $r_1 \geq \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$. Теорема доказана.

Теперь приведем следствия из доказанной теоремы и известных результатов. Так, полагая $\theta = \infty$ в теореме 1.4, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.1. При $2 \leq q_1 \leq p < \infty$, $1 \leq q_2 \leq \infty$ и $r_1 > 0$

$$\tau_M(H_p^r)_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть $2 \leq q_1 \leq p < \infty$, $1 \leq q_2 \leq \infty$ и $r_1 > 0$. Тогда

$$\tau_M(W_{p,\alpha}^r)_{q_1,q_2} \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху следует из соответствующей оценки сверху величины $e_M(W_{p,\alpha}^r)_{q_1}$, $1 < q_1 \leq p < \infty$, $p \geq 2$, $r_1 > 0$, которая, в свою очередь, является следствием оценки приближения функций из классов $W_{p,\alpha}^r$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье [21]. Оценка снизу следует из теоремы 1.4 при $\theta = 2$ согласно вложению $B_{p,2}^r \subset W_{p,\alpha}^r$, $2 \leq p < \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Сопоставив результаты следствий 1.1 и 1.2 с соответствующими оценками колмогоровских поперечников $d_M(H_p^r, L_{q_1})$ и $d_M(W_{p,\alpha}^r, L_{q_1})$, установленными Э. М. Галеевым [22], видим, что

$$\begin{aligned}\tau_M(H_p^r)_{q_1,\infty} &\asymp d_M(H_p^r, L_{q_1}), \\ \tau_M(W_{p,\alpha}^r)_{q_1,\infty} &\asymp d_M(W_{p,\alpha}^r, L_{q_1}).\end{aligned}$$

На классах $B_{p,\theta}^r$ так же, как и в предыдущем случае, ситуация иная. Так, сопоставив оценку колмогоровского поперечника $d_M(B_{p,\theta}^r, L_{q_1})$ [23] с результатом теоремы 1.4, обнаруживаем, что при $2 \leq \theta < \infty$

$$\tau_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1,\infty} \asymp d_M(B_{p,\theta}^r, L_{q_1}).$$

Если $1 \leq \theta < 2$, то имеем

$$\tau_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1,\infty} \asymp d_M(B_{p,\theta}^r, L_{q_1})(\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}$$

при $r_1 > \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$ и

$$\tau_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1,\infty} \asymp d_M(B_{p,\theta}^r, L_{q_1})(\log^{\nu-1} M)^{-r_1}$$

при $0 < r_1 \leq \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть $1 < p \leq q_1 \leq 2$, $1 \leq q_2 \leq \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1} < r_1 \leq \frac{1}{p} - \frac{2}{q_1} + \frac{1}{\theta}$. Тогда

$$\tau_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1,q_2} \asymp M^{-(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q_1})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху следует из [17, теорема 3.1]. В силу ее независимости от размерности пространства $\mathbb{R}^d$ соответствующую оценку снизу достаточно доказать при $d = 1$.

По заданному числу M подберем n таким, чтобы выполнялось неравенство $2^{n-1} \leq M < 2^n$, и рассмотрим функцию

$$f_3(x) = C_5 2^{-n(r_1 + 1 - \frac{1}{p})} \sum_{|k| \leq 2M} e^{ikx} = C_5 2^{-n(r_1 + 1 - \frac{1}{p})} \mathcal{D}_M(x),$$

где $C_5 > 0$. Легко проверить, что при соответствующем выборе постоянной $C_5 > 0$ имеем $f_3 \in B_{p,\theta}^{r_1}$, $1 < p < \infty$.

Итак, предположим сначала, что $q_1 = 2$. Тогда поскольку функция $\mathcal{D}_M(x)$ удовлетворяет условиям леммы А, то

$$\tau_M(\mathcal{D}_M(x-y))_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}} \quad (1.20)$$

и, следовательно,

$$\tau_M(f_3(x-y))_{2,1} \gg 2^{-n(r_1 + 1 - \frac{1}{p})} M^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{-n(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \asymp M^{-(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2})}.$$

Пусть теперь $1 < q_1 < 2$ и системы функций $\{u_i(x)\}_{i=1}^M$ и $\{v_i(y)\}_{i=1}^M$, $x, y \in [-\pi, \pi]$, таковы, что

$$\left\| \mathcal{D}_M(x-y) - \sum_{i=1}^M u_i(x)v_i(y) \right\|_{q_1,1} \leq 2\tau_M(\mathcal{D}_M(x-y))_{q_1,1}.$$

Хорошо известно (см., например, [20, с. 132]), что если $V_{2M}(x)$ – ядро Валле-Пуссена и $V_{2M}f = f(x) * V_{2M}(x)$, то

$$\|V_{2M}f\|_p \leq 3\|f\|_p, \quad f \in L_p[-\pi, \pi], \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Кроме того, легко видеть, что $V_{2M}\mathcal{D}_M(x) = \mathcal{D}_M(x)$. Следовательно, не умаляя общности, можно считать, что функции $u_i(x)$ и $v_i(y)$ являются тригонометрическими полиномами порядка $4M$ и для них справедлива оценка

$$\left\| \mathcal{D}_M(x-y) - \sum_{i=1}^M u_i(x)v_i(y) \right\|_{q_1,1} \ll \tau_M(\mathcal{D}_M(x-y))_{q_1,1}. \quad (1.21)$$

Далее, согласно неравенству разных метрик С. М. Никольского и соотношению (1.21) получаем

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{D}_M(x-y) - \sum_{i=1}^M u_i(x)v_i(y) \right\|_{2,1} &\ll 2^{n(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} \left\| \mathcal{D}_M(x-y) - \sum_{i=1}^M u_i(x)v_i(y) \right\|_{q_1,1} \\ &\ll 2^{n(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} \tau_M(\mathcal{D}_M(x-y))_{q_1,1}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Теперь, учитывая соотношение (1.20) и то, что $M \asymp 2^n$, из (1.22) находим

$$\tau_M(\mathcal{D}_M(x-y))_{q_1,1} \gg 2^{-n(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} M^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{-n(\frac{1}{q_1}-1)}.$$

Отсюда согласно определению функции $f_3(x)$ приходим к искомой оценке :

$$\tau_M(f_3(x-y))_{q_1,q_2} \gg 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} 2^{-n(\frac{1}{q_1}-1)} = 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q_1})} \asymp M^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q_1})}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Сравнив результат теоремы 1.5 с соответствующей оценкой колмогоровского поперечника $d_M(B_{p,\theta}^r, L_{q_1})$ [24], видим, что имеет место соотношение

$$\tau_M(B_{p,\theta}^r)_{q_1,\infty} \asymp d_M(B_{p,\theta}^r, L_{q_1})(\log^{\nu-1} M)^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q_1})}.$$

В заключение параграфа приведем утверждение, аналогичное теореме 1.5, для классов $W_{p,\alpha}^r$.

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть $1 < p \leq q_1 \leq 2$, $1 \leq q_2 \leq \infty$ и $\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1} < r_1 \leq 2(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1})$. Тогда

$$\tau_M(W_{p,\alpha}^r)_{q_1,q_2} \asymp M^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q_1})}. \quad (1.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху следует из соответствующей оценки сверху величины $e_M(W_{p,\alpha}^r)_{q_1}$ [18]. Оценка снизу в (1.23) следует из теоремы 1.5 согласно включению $B_{p,p}^r \subset W_{p,\alpha}^r$, $1 < p \leq 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Сопоставив (1.23) с соответствующей оценкой колмогоровского поперечника $d_M(W_{p,\alpha}^r, L_{q_1})$ (см., например, [3, с. 69]), находим, что

$$\tau_M(W_{p,\alpha}^r)_{q_1,\infty} \asymp d_M(W_{p,\alpha}^r, L_{q_1})(\log^{\nu-1} M)^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q_1})}.$$

§ 2. Наилучшие тригонометрические приближения

В этом параграфе мы исследуем приближения функций из классов $B_{1,\theta}^r$ с целью получения порядковых оценок двух аппроксимативных характеристик. Сначала устанавливаем точные по порядку оценки наилучших приближений функций из классов $B_{1,\theta}^r$ тригонометрическими полиномами с “номерами” гармоник из ступенчатого гиперболического креста в пространстве L_q , $1 < q < \infty$. Затем, используя полученный результат, находим точные порядки наилучших ортогональных тригонометрических приближений функций из тех же классов также в метрике L_q , $1 < q < \infty$. Полученные здесь результаты дополняют соответствующие результаты для функций классов $B_{p,\theta}^r$, $1 < p < \infty$, из работы [25]. Одновременно нами установлены также точные порядки наилучших ортогональных тригонометрических приближений функций из классов $B_{p,\theta}^r$, $1 < p < \infty$, в пространстве L_1 .

Прежде чем сформулировать первое утверждение, приведем необходимые обозначения.

Пусть Q_n^r – множество вида

$$Q_n^r = \bigcup_{(s,\gamma) < n} \rho(s).$$

Тогда множество векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$ таких, что $k \in Q_n^r$, называют *ступенчатым гиперболическим крестом*. Через $T(Q_n^r)$ обозначим множество тригонометрических полиномов вида

$$t(x) = \sum_{k \in Q_n^r} c_k e^{i(k,x)}.$$

Для $f \in L_q^0(\pi_d)$ определим величину

$$E_{Q_n^r}(f)_q = \inf_{t \in T(Q_n^r)} \|f - t\|_q, \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

– наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами из $T(Q_n^r)$. Если F – некоторый функциональный класс, то полагаем

$$E_{Q_n^r}(F)_q = \sup_{f \in F} E_{Q_n^r}(f)_q.$$

Через $S_n^\gamma(f, x)$ обозначим полином

$$S_n^\gamma(f, x) = \sum_{k \in Q_n^r} \hat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

который называют *ступенчатой гиперболической суммой Фурье*.

Исследуем сначала величину $E_{Q_n^r}(B_{1,\theta}^r)_q$, $1 < q < \infty$.

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $1 \leq \theta < \infty$, $1 < q < \infty$ и $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$. Тогда

$$E_{Q_n^r}(B_{1,\theta}^r)_q \asymp 2^{-n(r_1 - 1 + \frac{1}{q})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})_+}. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде чем перейти к доказательству оценки (2.1), отметим следующее. Поскольку в силу следствия из теоремы А (см. [3, с. 7]) для $f \in L_q^0(\pi_d)$, $1 < q < \infty$, выполнено

$$\|S_n^\gamma(f, x)\|_q \ll \|f\|_q,$$

то отсюда следует, что

$$E_{Q_n^r}(f)_q \asymp \|f(x) - S_n^\gamma(f, x)\|_q.$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно получить необходимую оценку уклонений ступенчатых гиперболических сумм Фурье $S_n^\gamma(f, x)$ на классе $B_{1,\theta}^r$.

Итак, получим в (2.1) сначала оценку сверху. Пусть q_0 – произвольное число, удовлетворяющее условию $1 < q_0 < q$. Тогда для $f \in B_{1,\theta}^r$ согласно соотношению [3, с. 25]

$$\|f\|_q \ll \left(\sum_s \left(\|\delta_s(f, x)\|_p 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq p < q < \infty, \quad (2.2)$$

имеем

$$\begin{aligned} E_{Q_n^r}(f)_q &\asymp \|f(x) - S_n^\gamma(f, x)\|_q = \left\| \sum_{(s,\gamma) \geq n} \delta_s(f, x) \right\|_q \\ &\ll \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} \left(\|\delta_s(f, x)\|_{q_0} 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q} \right)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\asymp \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} \left(\|A_s(f, x)\|_{q_0} 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q} \right)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Далее, применив к $A_s(f, x)$ как к полиному степени 2^{s_j} по переменной x_j неравенство разных метрик (теорема Б), продолжим оценку (2.3):

$$\begin{aligned} &\ll \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} \left(\|A_s(f, x)\|_1 2^{\|s\|_1 \left(1 - \frac{1}{q_0} \right)} 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q} \right)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} \left(\|A_s(f, x)\|_1 2^{\|s\|_1 \left(1 - \frac{1}{q} \right)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \mathcal{J}_1. \end{aligned}$$

Для последующей оценки величины $\mathcal{J}_1$ необходимо рассмотреть два случая. Пусть сначала $1 \leq \theta \leq q$. Тогда, воспользовавшись неравенством

$$\left(\sum_k |a_k|^{\mu_2} \right)^{\frac{1}{\mu_2}} \leq \left(\sum_k |a_k|^{\mu_1} \right)^{\frac{1}{\mu_1}}, \quad 1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 < \infty \quad (2.4)$$

(см. [26, с. 43]), будем иметь

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_1 &\leq \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} \|A_s(f, x)\|_1^\theta 2^{\|s\|_1(1-\frac{1}{q})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
 &\leq \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_1^\theta 2^{-(s,\gamma)(r_1-1+\frac{1}{q})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
 &\leq 2^{-n(r_1-1+\frac{1}{q})} \|f\|_{B_{1,\theta}^r} \leq 2^{-n(r_1-1+\frac{1}{q})}.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Пусть теперь $q < \theta < \infty$. В таком случае, применив к $\mathcal{J}_1$ неравенство Гёльдера с показателем $\frac{\theta}{q}$, находим

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_1 &\leq \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{-((s,r)-\|s\|_1(1-\frac{1}{q}))\frac{\theta q}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \\
 &\ll \|f\|_{B_{1,\theta}^r} \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{-\left(s, (r-1+\frac{1}{q})\right)\frac{\theta q}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \\
 &\leq \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{-\left(s, \bar{\gamma}\right)\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)\frac{\theta q}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}},
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $r-1+\frac{1}{q}$ – вектор с координатами $r_j-1+\frac{1}{q}$, $j = \overline{1, d}$, а $\bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_d)$ – вектор с координатами $\bar{\gamma}_j = (r_j - 1 + \frac{1}{q}) / (r_1 - 1 + \frac{1}{q})$, $j = \overline{1, d}$. Поскольку $\bar{\gamma}_j = \gamma_j$, $j = \overline{1, \nu}$, и $1 < \bar{\gamma}_j \leq \gamma_j$, $j = \overline{\nu+1, d}$, то, воспользовавшись соотношением [3, с. 11]

$$\sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{-\alpha(s,\bar{\gamma})} \asymp 2^{-\alpha n} n^{\nu-1}, \quad \alpha > 0, \tag{2.7}$$

из неравенств (2.6) приходим к следующей оценке:

$$\mathcal{J}_1 \ll 2^{-n(r_1-1+\frac{1}{q})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}. \tag{2.8}$$

Таким образом, сопоставив в зависимости от значения θ соотношения (2.3) и (2.5) или (2.3) и (2.8), получаем требуемую оценку сверху в (2.1).

Для нахождения оценки снизу заметим, что ее достаточно получить в случае $\nu = d$.

Пусть сначала $q \leq \theta < \infty$. Рассмотрим функцию

$$f_{r_1,n}(x) = C_6 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{(s,1)=n} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \sin(k_j x_j),$$

где $C_6 > 0$ – некоторая постоянная.

Нетрудно убедиться в том, что при соответствующем выборе постоянной $C_6 > 0$ эта функция принадлежит классу $B_{1,\theta}^r$, $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$. Действительно, поскольку функция

$$F_{r_1}(x, \alpha) = \sum_{k>0} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

принадлежит классу H_1^r , $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$ (см., например, [3, с. 53]), то согласно теореме В справедливо соотношение

$$\|A_s(F_{r_1}, x, \alpha)\|_1 \ll 2^{-\|s\|_1 r_1}, \quad s \in \mathbb{N}^d.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|f_{r_1, n}\|_{B_{1, \theta}^r} &\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_s 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f_{r_1, n}, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s, 1)=n} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(F_{r_1}, x, \alpha)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s, 1)=n} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1, \end{aligned}$$

т. е. $f_{r_1, n} \in B_{1, \theta}^r$.

Далее, положим

$$\Delta_s = \{x = (x_1, \dots, x_d) : 2^{-s_j} \leq x_j < 2^{-s_j+1}, j = \overline{1, d}\}$$

и заметим, что $\Delta_s \cap \Delta_{s'} = \emptyset$ при $s \neq s'$. Тогда в силу теоремы А будем иметь

$$\begin{aligned} E_{Q_n^r}(f_{r_1, n})_q &\asymp \|f_{r_1, n}(x) - S_n^\gamma(f_{r_1, n}, x)\|_q = \|f_{r_1, n}\|_q \\ &\gg \left\| \left(\sum_{(s, 1)=n} |\delta_s(f_{r_1, n}, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \gg n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s, 1)=n} \int_{\Delta_s} |\delta_s(g_{r_1, n}, x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$g_{r_1, n}(x) = \sum_{(s, 1)=n} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \sin(k_j x_j).$$

Для того чтобы продолжить оценку, проведем оценки снизу для интегралов, которые входят в (2.9). Поскольку при $2^{s_j-1} \leq k_j < 2^{s_j}$ и $2^{-s_j} \leq x_j < 2^{-s_j+1}$ выполнено неравенство $\frac{1}{2} \leq k_j x_j < 2$, то $\forall s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, справедлива оценка

$$\left| \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} k_j^{-r_1} \sin(k_j x_j) \right| \geq 2^{s_j-1} \cdot 2^{-s_j r_1} \sin \frac{1}{2} \asymp 2^{-s_j(r_1-1)},$$

и, следовательно,

$$\int_{\Delta_s} |\delta_s(g_{r_1, n}, x)|^q dx \gg 2^{-\|s\|_1(r_1-1)q} 2^{-\|s\|_1} = 2^{-\|s\|_1(r_1-1+\frac{1}{q})q}. \quad (2.10)$$

Таким образом, подставив результат (2.10) в формулу (2.9), приходим к оценке

$$\begin{aligned} E_{Q_n^r}(f_{r_1, n})_q &\gg n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s, 1)=n} 2^{-\|s\|_1(r_1-1+\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\asymp 2^{-n(r_1-1+\frac{1}{q})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s, 1)=n} 1 \right)^{\frac{1}{q}} \asymp 2^{-n(r_1-1+\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}. \end{aligned}$$

Оценка снизу в случае $q \leq \theta < \infty$ установлена.

Для получения искомой оценки снизу в случае $1 \leq \theta < q$ достаточно рассмотреть функцию

$$f^*(x) = C_7 \sum_{k \in \rho^+(s^*)} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \sin(k_j x_j), \quad C_7 > 0,$$

где $s^* = (s_1^*, \dots, s_d^*)$ – вектор с натуральными координатами, удовлетворяющий условию $(s^*, 1) = n$. Легко проверяется, что $f^* \in B_{1,\theta}^r$, и с помощью тех же рассуждений, что и в случае $q \leq \theta < \infty$, устанавливается оценка

$$E_{Q_n^r}(f^*)_q \gg 2^{-n(r_1 - 1 + \frac{1}{q})}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что в случае $\theta = \infty$, т. е. для классов $B_{1,\infty}^r = H_1^r$, порядки величин $E_{Q_n^r}(H_1^r)_q$, $1 < q < \infty$, получены В. Н. Темляковым (см., например, [3, с. 35]). Также В. Н. Темляковым получены и порядки величин $E_{Q_n^r}(W_{1,\alpha}^r)_q$ [3, с. 53]. Как следует из этих результатов,

$$E_{Q_n^r}(W_{1,\alpha}^r)_q \asymp E_{Q_n^r}(H_1^r)_q \asymp 2^{-n(r_1 - 1 + \frac{1}{q})} n^{\frac{\nu-1}{q}}, \quad (2.11)$$

т. е. классы $W_{1,\alpha}^r$ и H_1^r неразличимы в смысле порядковых оценок наилучших приближений полиномами из $T(Q_n^r)$.

Если сопоставить результат доказанной теоремы 2.1 с оценками (2.11), то получим

$$E_{Q_n^r}(B_{1,\theta}^r)_q \ll E_{Q_n^r}(W_{1,\alpha}^r)_q.$$

Теперь перейдем к изучению следующей аппроксимативной характеристики: наилучшего ортогонального тригонометрического приближения.

Пусть Ω_M – произвольный набор из M d -мерных векторов $k^1, \dots, k^M$ с целочисленными координатами и $T(\Omega_M, x)$ – подпространство тригонометрических полиномов, порожденное системой экспонент $\{e^{i(k^j, x)}\}_{j=1}^M$. Пусть для $f(x) \in L_p(\pi_d)$ имеем

$$S_M(f, x) = P(f, T(\Omega_M, x)),$$

где $P(f, T(\Omega_M, x))$ – ортогональная проекция $f(x)$ на $T(\Omega_M, x)$. Рассмотрим величину

$$e_M^\perp(f)_q = \inf_{\{k^j\}_{j=1}^M} \|f(x) - S_M(f, x)\|_q.$$

Если $F \subset L_q(\pi_d)$ – некоторый класс функций, то полагаем

$$e_M^\perp(F)_q = \sup_{f \in F} e_M^\perp(f)_q.$$

Величины $e_M^\perp(F)_q$ для некоторых классов функций F изучались в работе [25], где можно ознакомиться с соответствующей библиографией.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $1 < q < \infty$, $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$. Тогда при $1 \leq \theta \leq \infty$ справедлива оценка

$$e_M^\perp(B_{1,\theta}^r)_q \asymp M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим сначала оценку сверху. При этом мы будем пользоваться схемой доказательства оценки сверху в работе [25, теорема 1], внося в рассуждения некоторые изменения, учитывающие специфику определения классов $B_{1,\theta}^r$. Прежде всего отметим, что в случае $\theta \geq q$ искомая оценка следует из соответствующей оценки приближения функций из классов $B_{1,\theta}^r$ в пространстве L_q , $1 < q < \infty$, ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье

$$S_n^\gamma(f, x) = \sum_{(s,\gamma) < n} \delta_s(f, x), \quad M \asymp 2^n n^{\nu-1},$$

которая получена в теореме 2.1. Таким образом, перейдем к рассмотрению случая $1 \leq \theta < q$.

Итак, пусть $f \in B_{1,\theta}^r$. По числу M подберем n из соотношения $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и положим $n_0 = [n + (\nu - 1) \log n]$, где $[a]$ – целая часть числа a . Полином $S_M(f, x)$, доставляющий требуемую оценку приближения для $f(x)$, будем находить в виде

$$S_M(f, x) = \sum_{(s,\gamma) < n} \delta_s(f, x) + Q(x),$$

где $Q(x)$ – некоторый полином, к построению которого мы и перейдем.

Для $l \in [n, n_0)$, $l \in \mathbb{N}$, положим

$$S_l = \left(\sum_{l \leq (s,\gamma) < l+1} \|A_s(f, x)\|_1^\theta 2^{(s,r)\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad (2.12)$$

и обозначим через $\alpha_i(f, l)$ числа $\|A_s(f, x)\|_1$, упорядоченные в порядке убывания. Тогда из (2.12) будем иметь

$$\alpha_i(f, l) \ll i^{-\frac{1}{\theta}} 2^{-lr_1} S_l. \quad (2.13)$$

Далее, положив $m_l = [2^n n^{\nu-1} 2^{-l} S_l^\theta] + 1$, рассмотрим функцию

$$R(x) = \sum_{l=n}^{n_0} \sum_{l \leq (s,\gamma) < l+1} \delta_s(f, x) \quad (2.14)$$

и для каждого $l \in [n, n_0)$, $l \in \mathbb{N}$, выберем из внутренней суммы (2.14) m_l “блоков” $\delta_s(f, x)$ с теми векторами $s = (s_1, \dots, s_d)$, которым соответствуют наибольшие нормы $\|A_s(f, x)\|_1$. Образованный таким выбором “блоков” $\delta_s(f, x)$ полином и обозначим $Q(x)$. Легко проверить, что количество гармоник K , содержащихся в $S_M(f, x)$, не превышает по порядку M .

Действительно, согласно соотношению

$$\sum_{(s,\gamma) < n} 2^{(s,1)} \ll 2^n n^{\nu-1}$$

(см. [3, с. 11]) и выбору чисел m_l будем иметь

$$\begin{aligned} K &\ll 2^n n^{\nu-1} + \sum_{l=n}^{n_0} 2^l m_l \ll 2^n n^{\nu-1} + 2^n n^{\nu-1} \sum_{l=n}^{n_0} \sum_{l \leq (s, \gamma) < l+1} \|A_s(f, x)\|_1^\theta 2^{(s, r)\theta} \\ &\ll 2^n n^{\nu-1} + 2^n n^{\nu-1} \|f\|_{B_{1, \theta}^r}^\theta = 2^n n^{\nu-1} (1 + \|f\|_{B_{1, \theta}^r}^\theta) \ll 2^n n^{\nu-1} \asymp M. \end{aligned}$$

Далее, пусть $\mathcal{D}_f$ – множество векторов $s = (s_1, \dots, s_d)$, $n \leq (s, \gamma) < n_0$, по которым “блоки” $\delta_s(f, x)$ не попали в $Q(x)$. Тогда

$$\|f(x) - S_M(f, x)\|_q \leq \left\| f(x) - \sum_{(s, \gamma) < n_0} \delta_s(f, x) \right\|_q + \left\| \sum_{s \in \mathcal{D}_f} \delta_s(f, x) \right\|_q = \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3. \quad (2.15)$$

Переходя к оценкам полученных слагаемых, заметим, что оценка величины $\mathcal{J}_2$ получается повторением выкладок, которые использовались при доказательстве теоремы 2.1. Другими словами, заменив в этих выкладках число n на $n_0 = [n + (\nu - 1) \log n]$, получим

$$\mathcal{J}_2 \ll 2^{-n_0(r_1 - 1 + \frac{1}{q})} \leq 2^{-n(r_1 - 1 + \frac{1}{q})} n^{-(\nu-1)(r_1 - 1 + \frac{1}{q})} \asymp M^{-(r_1 - 1 + \frac{1}{q})}. \quad (2.16)$$

Для нахождения оценки величины $\mathcal{J}_3$ мы воспользуемся сначала соотношением (2.2) при условии $1 < q_0 < q$, а затем неравенством разных метрик. Таким образом, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 &= \left\| \sum_{s \in \mathcal{D}_f} \delta_s(f, x) \right\|_q \ll \left(\sum_{s \in \mathcal{D}_f} \left(\|\delta_s(f, x)\|_{q_0} 2^{\|s\|_1(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q})} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\asymp \left(\sum_{s \in \mathcal{D}_f} \left(\|A_s(f, x)\|_{q_0} 2^{\|s\|_1(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q})} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\ll \left(\sum_{s \in \mathcal{D}_f} \left(\|A_s(f, x)\|_1 2^{\|s\|_1(1 - \frac{1}{q_0})} 2^{\|s\|_1(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q})} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{s \in \mathcal{D}_f} \left(\|A_s(f, x)\|_1 2^{\|s\|_1(1 - \frac{1}{q})} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Далее, с учетом выбора чисел $\alpha_i(f, l)$ и согласно принятым обозначениям можно записать

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 &\ll \left(\sum_{l=n}^{n_0} \sum_{i > m_l} \alpha_i^q(f, l) 2^{l(1 - \frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{l=n}^{n_0} \sum_{i > m_l} \alpha_i^\theta(f, l) \alpha_i^{q-\theta}(f, l) 2^{l(1 - \frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\ll \left(\sum_{l=n}^{n_0} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} 2^{-l(q-\theta)r_1} S_l^{q-\theta} 2^{-l\theta r_1} 2^{l(1 - \frac{1}{q})q} \sum_{l \leq (s, \gamma) < l+1} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\ll \left(\sum_{l=n}^{n_0} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} 2^{-l(r_1 - 1 + \frac{1}{q})q} S_l^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Подставив в последнюю сумму (2.17) вместо m_l их значения, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 &\ll (2^n n^{\nu-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{l=n}^{n_0} S_l^\theta 2^{-l(r_1-1+\frac{1}{q})q} 2^{lq(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (2^n n^{\nu-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{l=n}^{n_0} 2^{-lq(r_1-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})} S_l^\theta \right)^{\frac{1}{q}} = (2^n n^{\nu-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \mathcal{J}_4. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Чтобы оценить величину $\mathcal{J}_4$, рассмотрим два случая:

- а) $r_1 > 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$;
- б) $1 - \frac{1}{q} < r_1 \leq 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$.

Итак, пусть $r_1 > 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_4 &\ll 2^{-n(r_1-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})} \left(\sum_{l=n}^{n_0} S_l^\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= 2^{-n(r_1-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})} \left(\sum_{l=n}^{n_0} \sum_{l \leq (s,\gamma) < l+1} \|A_s(f, x)\|_1^\theta 2^{(s,r)\theta} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\ll 2^{-n(r_1-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})} \|f\|_{B_{1,\theta}^{\frac{\theta}{q}}} \leq 2^{-n(r_1-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})}. \end{aligned}$$

Подставив полученную оценку в (2.18), будем иметь

$$\mathcal{J}_3 \ll 2^{-n(r_1-1+\frac{1}{q})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \asymp M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}}. \quad (2.19)$$

Пусть теперь $1 - \frac{1}{q} < r_1 \leq 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$. Тогда

$$\mathcal{J}_4 \ll 2^{-n_0(r_1-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})} \|f\|_{B_{1,\theta}^{\frac{\theta}{q}}} \leq 2^{-n(r_1-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})} n^{-(\nu-1)(r_1-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})}$$

и, следовательно, согласно (2.18)

$$\mathcal{J}_3 \ll 2^{-n(r_1-1+\frac{1}{q})} n^{-(\nu-1)(r_1-1+\frac{1}{q})} \asymp M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})}. \quad (2.20)$$

Таким образом, подставив оценки (2.16), (2.17) и (2.19) или (2.20) (в зависимости от рассматриваемого случая) в (2.15), получим требуемую оценку сверху величины $e_M^\perp(B_{1,\theta}^r)_q$.

Переходя к доказательству оценки снизу, обратим внимание, что ее достаточно установить при $\nu = d$. Итак, по заданному M подберем n из соотношений $M \asymp 2^n n^{d-1}$ и $2^n n^{d-1} \geq 2M$ и рассмотрим функцию

$$F_{r_1,n}(x) = \sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \cos(k_j x_j), \quad r_1 > 0.$$

Известно (см., например, [3, с. 53]), что функция

$$F_{r_1}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \cos(k_j x_j)$$

принадлежит классу H_1^r , $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$, и поэтому согласно теореме В о характеристизации этого класса для нее выполняется соотношение

$$\|A_s(F_{r_1}, x)\|_1 \ll 2^{-r_1(s,1)}, \quad s \in \mathbb{N}^d. \quad (2.21)$$

Следовательно, согласно (2.21) для $\|F_{r_1,n}\|_{B_{1,\theta}^r}$, $1 \leq \theta < \infty$, можно записать оценку

$$\begin{aligned} \|F_{r_1,n}\|_{B_{1,\theta}^r} &= \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(F_{r_1,n}, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\asymp \left(\sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(F_{r_1}, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \left(\sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{\frac{d-1}{\theta}}. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что функция

$$f(x) = C_8 n^{-\frac{d-1}{\theta}} F_{r_1,n}(x)$$

с соответствующей постоянной $C_8 > 0$ принадлежит классу $B_{1,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$. Заметим, что если $\theta = \infty$, то в роли $f(x)$ выбираем функцию $\bar{F}_{r_1}(x)$.

Далее, пусть Ω_M – произвольное множество, содержащее M d -мерных векторов $\{k^j\}_{j=1}^M$ с целочисленными координатами, и $S_M(f, x)$ – полином, полученный в результате ортогонального проектирования $f(x)$ на подпространство тригонометрических полиномов с “номерами” гармоник из Ω_M . Тогда в силу следствия Д1.2 из [27, с. 392] можно записать

$$\|f(x) - S_M(f, x)\|_q = \sup_{g: \|g\|_{q'} \leq 1} \left| \int_{\pi_d} (f(x) - S_M(f, x))g(x) dx \right|, \quad (2.22)$$

где $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$.

Вместо функции $g(x)$, фигурирующей в равенстве (2.22), выберем функцию вида

$$\begin{aligned} g(x) &= C_9 2^{-\frac{n}{q}} n^{-\frac{d-1}{q'}} \sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} C_9 2^{-\frac{n}{q}} n^{-\frac{d-1}{q'}} \mathcal{D}_{n+d}(x), \quad C_9 > 0. \end{aligned}$$

Покажем, что $\|g\|_{q'} \leq 1$ при надлежащем выборе постоянной $C_9 > 0$.

Пусть сначала $q' \in (1, 2]$. Тогда согласно теореме Литтлвуда–Пэли можно записать

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_{n+d}(x)\|_{q'} &\ll \left\| \left(\sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} |\delta_s(\mathcal{D}_{n+d}, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{q'} \\ &= \left\| \left(\sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} |\delta_s(\mathcal{D}_{n+d}, x)|^2 \right)^{\frac{q'}{2}} \right\|_1^{\frac{1}{q'}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Далее, воспользовавшись неравенством

$$|a + b|^\alpha \leq |a|^\alpha + |b|^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

и принимая во внимание то, что

$$\|\delta_s(\mathcal{D}_{n+d}, x)\|_p \asymp 2^{(s,1)\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \quad 1 < p < \infty,$$

продолжим оценку (2.23):

$$\begin{aligned} &\leq \left\| \sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} |\delta_s(\mathcal{D}_{n+d}, x)|^{q'} \right\|_1^{\frac{1}{q'}} \leq \left(\sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} \|\delta_s(\mathcal{D}_{n+d}, x)\|_{q'}^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\asymp \left(\sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} 2^{(s,1)\left(1-\frac{1}{q'}\right)q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \asymp 2^{\frac{n}{q}} \left(\sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} 1 \right)^{\frac{1}{q'}} \asymp 2^{\frac{n}{q}} n^{\frac{d-1}{q'}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Пусть теперь $q' \in (2, \infty)$. Тогда согласно (2.2) находим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_{n+d}(x)\|_{q'} &\ll \left(\sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} \|\delta_s(\mathcal{D}_{n+d}, x)\|_2^{q'} 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q'}\right)q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\asymp \left(\sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q'}\right)q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \asymp 2^{\frac{n}{q}} n^{\frac{d-1}{q'}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Объединяя (2.23)–(2.25), приходим к оценке

$$\|\mathcal{D}_{n+d}(x)\|_{q'} \ll 2^{\frac{n}{q}} n^{\frac{d-1}{q'}}, \quad 1 < q' < \infty. \quad (2.26)$$

Таким образом, из оценки (2.26) заключаем, что функция $g(x)$ с соответствующей постоянной $C_9 > 0$ удовлетворяет условию $\|g\|_{q'} \leq 1$.

Теперь, подставив построенные функции $f(x)$ и $g(x)$ в соотношение (2.22), можно записать

$$\begin{aligned} \|f(x) - S_M(f, x)\|_q &\gg 2^{-\frac{n}{q}} n^{-(d-1)\left(\frac{1}{q'}+\frac{1}{\theta}\right)} \sum_{(s,1)=n+d} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \\ &\gg 2^{-\frac{n}{q}} n^{-(d-1)\left(\frac{1}{q'}+\frac{1}{\theta}\right)} \sum_{(s,1)=n+d} \prod_{j=1}^d \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} k_j^{-r_1} \\ &\asymp 2^{-\frac{n}{q}} n^{-(d-1)\left(\frac{1}{q'}+\frac{1}{\theta}\right)} \sum_{(s,1)=n+d} 2^{-\|s\|_1(r_1-1)} \\ &\asymp 2^{-\frac{n}{q}} n^{-(d-1)\left(\frac{1}{q'}+\frac{1}{\theta}\right)} 2^{-n(r_1-1)} n^{d-1} = 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)} \\ &\asymp M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} (\log^{d-1} M)^{r_1-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

Аналогично, в случае $\theta = \infty$, подставив в (2.22) функции $F_{r_1}(x)$ и $g(x)$, имеем

$$\|F_{r_1}(x) - S_M(F_{r_1}, x)\|_q \gg M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} (\log^{d-1} M)^{r_1-1+\frac{2}{q}}.$$

Полученная оценка совпадает по порядку с оценкой сверху при $r_1 > 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$. Если же имеет место случай $1 - \frac{1}{q} < r_1 \leq 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$, то заметим следующее. Поскольку установленная оценка сверху в этом случае не зависит

от размерности пространства $\mathbb{R}^d$, то оценку снизу достаточно получить при $d = 1$, т. е. в одномерном случае. Однако в одномерном случае оценка снизу для всех $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$ устанавливается с помощью проведенных выше рассуждений. Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы 2.2, полагая $\theta = \infty$, получаем оценку

$$e_M^\perp(H_1^r)_q \asymp M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+\frac{2}{q}}, \quad (2.27)$$

где $1 < q < \infty$, $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$.

Теперь докажем аналогичную оценку для классов $W_{1,\alpha}^r$. Справедлива

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $1 < q < \infty$, $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$. Тогда

$$e_M^\perp(W_{1,\alpha}^r)_q \asymp M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+\frac{2}{q}}. \quad (2.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху следует из соотношения (2.27) согласно вложению $W_{1,\alpha}^r \subset H_1^r$. Для получения оценки снизу необходимо доказать вспомогательное утверждение, которое, возможно, представляет и самостоятельный интерес.

ЛЕММА 2.1. Пусть $1 < q < \infty$, $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$. Тогда

$$e_M^\perp(F_r(x, \alpha))_q \asymp M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+\frac{2}{q}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $F_r(x, \alpha) \in H_1^r$, то согласно (2.27) имеем

$$e_M^\perp(F_r(x, \alpha))_q \ll e_M^\perp(H_1^r)_q \asymp M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+\frac{2}{q}}.$$

Оценку снизу для $e_M^\perp(F_r(x, \alpha))_q$ достаточно получить при $\nu = d$. Пусть $S_M^*(F_r, x, \alpha)$ – полином, составленный из M гармоник Фурье функции $F_r(x, \alpha)$, для которого

$$\|F_r(x, \alpha) - S_M^*(F_r, x, \alpha)\|_q \ll M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} (\log^{d-1} M)^{r_1-1+\frac{2}{q}}. \quad (2.29)$$

Рассмотрим величину

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_5 &= \int_{\pi_d} (F_r(x, \alpha) - S_M^*(F_r, x, \alpha))(F_2(x, \alpha) - S_M^*(F_2, x, \alpha)) dx \\ &= \int_{\pi_d} F_r(x, \alpha)(F_2(x, \alpha) - S_M^*(F_2, x, \alpha)) dx. \end{aligned} \quad (2.30)$$

(Здесь через 2 обозначен вектор $(2, \dots, 2) \in \mathbb{N}^d$.)

Тогда, с одной стороны, в силу неравенства Гёльдера и оценки (2.29) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_5 &\leq \|F_r(x, \alpha) - S_M^*(F_r, x, \alpha)\|_q \|F_2(x, \alpha) - S_M^*(F_2, x, \alpha)\|_{q'} \\ &\ll \|F_r(x, \alpha) - S_M^*(F_r, x, \alpha)\|_q M^{-(1+\frac{1}{q'})} (\log^{d-1} M)^{1+\frac{2}{q}}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

с другой стороны, нетрудно оценить $\mathcal{J}_5$ снизу. Действительно, выбрав по заданному M число n из соотношения $M \asymp 2^n n^{d-1}$ и обозначив $Q_n^1 = \bigcup_{(s,1) \leq n} \rho(s)$, согласно (2.30) имеем

$$\mathcal{J}_5 \geq \sum_{\substack{k \notin Q_n^1 \\ k > 0}} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1-2} \asymp \sum_{(s,1) > n} 2^{-(s,1)(r_1+1)}. \quad (2.32)$$

Далее, воспользовавшись соотношением

$$\sum_{(s,1) > n} 2^{-\alpha(s,1)} \asymp 2^{-\alpha n} n^{d-1}, \quad \alpha > 0,$$

продолжим оценку (2.32):

$$\mathcal{J}_5 \geq \sum_{(s,1) > n} 2^{-(s,1)(r_1+1)} \asymp 2^{-n(r_1+1)} n^{d-1} \asymp M^{-(r_1+1)} (\log^{d-1} M)^{r_1+2}. \quad (2.33)$$

Наконец, сопоставив оценки (2.33) и (2.31), приходим к искомой оценке:

$$e_M^\perp(F_r(x, \alpha))_q \gg M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} (\log^{d-1} M)^{r_1-1+\frac{2}{q}}.$$

Лемма доказана.

Теперь перейдем к завершению получения оценки снизу в теореме 2.3. Поскольку функция $F_r(x, \alpha)$ при $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$ принадлежит замыканию класса $W_{1,\alpha}^r$ по метрике пространства L_q , то согласно лемме 2.1 будем иметь

$$e_M^\perp(W_{1,\alpha}^r)_q \geq e_M^\perp(F_r(x, \alpha))_q \asymp M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} (\log^{d-1} M)^{r_1-1+\frac{2}{q}}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что оценка величины $e_M^\perp(F_r(x, \alpha))_q$ совпадает по порядку с оценкой величины наилучшего приближения функции $F_r(x, \alpha)$ полиномами с “номера́ми” гармоник из ступенчатого гиперболического креста [3, с. 38]. Более того, при $1 < q \leq 2$ оценка величины $e_M^\perp(F_r(x, \alpha))_q$ имеет такой же порядок, как и оценка $e_M(F_r(x, \alpha))_q$, – наилучшее M -членное тригонометрическое приближение [28]. Важно отметить, что при $2 < q < \infty$ величины $e_M^\perp(F_r(x, \alpha))_q$ и $e_M(F_r(x, \alpha))_q$ [28] ведут себя по-разному.

Пусть по-прежнему $E_{Q_n^r}(F)_q$ – наилучшее приближение функций из класса F тригонометрическими полиномами с “номера́ми” гармоник из ступенчатого гиперболического креста $Q_n^r = \bigcup_{(s,\gamma) < n} \rho(s)$ в метрике пространства L_q . Тогда если Φ_1^r обозначает класс $W_{1,\alpha}^r$ либо H_1^r , то, сопоставив (2.27) и (2.28) с соответствующими результатами теоремы 4.2 из [3, с. 53] и теоремы 2.2 из [3, с. 35], видим, что

$$e_M^\perp(\Phi_1^r)_q \asymp E_{Q_n^r}(\Phi_1^r)_q \asymp M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+\frac{2}{q}},$$

где $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$.

Несколько иная ситуация имеет место при приближении функций из классов $B_{1,\theta}^r$. Так, сопоставив результаты теорем 2.2 и 2.1, обнаруживаем, что при $\theta > q$ и $r_1 > 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$

$$e_M^\perp(B_{1,\theta}^r)_q \asymp E_{Q_n^r}(B_{1,\theta}^r)_q \asymp M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}},$$

где $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$.

Если $1 \leq \theta < q$, то согласно теоремам 2.1 и 2.2 имеем

$$\begin{aligned} E_{Q_n^r}(B_{1,\theta}^r)_q &\asymp M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{r_1-1+\frac{1}{q}}, & M &\asymp 2^n n^{\nu-1}, \\ e_M^\perp(B_{1,\theta}^r)_q &\asymp M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})_+}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

т. е. оценки величин $E_{Q_n^r}(B_{1,\theta}^r)_q$ и $e_M^\perp(B_{1,\theta}^r)_q$, $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, имеют разные порядки. Заметим, что при $1 \leq \theta < q$ и $1 - \frac{1}{q} < r_1 \leq 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$, как следует из (2.34), порядок величины $e_M^\perp(B_{1,\theta}^r)_q$ не зависит от размерности пространства $\mathbb{R}^d$, что не наблюдается на классах $W_{1,\alpha}^r$ и H_1^r .

В заключение этого параграфа приведем еще один результат, касающийся наилучшего ортогонального приближения классов $B_{p,\theta}^r$ в метрике L_1 .

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть выполнены условия:

- а) $1 < p < 2$, $1 \leq \theta < p$ и $0 < r_1 < \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}$;
- б) $2 \leq p < \infty$, $1 \leq \theta < 2$ и $0 < r_1 < \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$.

Тогда имеет место оценка

$$e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_1 \asymp M^{-r_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в случаях а) и б) следует из [25, теоремы 2 и 3]. Заметим, что оценку снизу достаточно установить при $d = 1$, поскольку оценка сверху не зависит от размерности пространства $\mathbb{R}^d$.

По заданному M подберем n из соотношения $2^{n-2} \leq M < 2^{n-1}$ и рассмотрим функцию

$$f_n(x) = C_{10} 2^{-n(r_1+\frac{1}{2})} R_n(x), \quad C_{10} > 0,$$

где

$$R_n(x) = \sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} \varepsilon_j e^{ijx}, \quad \varepsilon_j = \pm 1,$$

– полиномы Рудина–Шапиро, для которых $\|R_n\|_\infty \ll 2^{\frac{n}{2}}$. Поскольку при $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned} \|R_n\|_{B_{p,\theta}^{r_1}} &= \left(\sum_s 2^{sr_1\theta} \|\delta_s(R_n, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 2^{nr_1} \|\delta_n(R_n, x)\|_p \\ &\leq 2^{nr_1} \|R_n\|_\infty \ll 2^{nr_1+\frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

то отсюда заключаем, что при надлежащем выборе постоянной $C_{10} > 0$ функция $f_n(x)$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^{r_1}$.

Кроме того, легко видеть, что функция

$$g(x) = C_{11} 2^{-\frac{n}{2}} R_n(x)$$

с соответствующей постоянной $C_{11} > 0$ удовлетворяет условию $\|g\|_\infty \leq 1$. Таким образом, подставив построенные функции $f_n(x)$ и $g(x)$ в (2.22), получим

$$e_M^\perp(B_{p,\theta}^{r_1})_1 \gg e_M^\perp(f_n)_1 \gg \frac{2^n - M}{2^{n(r_1 + \frac{1}{2})} 2^{\frac{n}{2}}} \geq \frac{2^{n-1}}{2^{n(r_1+1)}} \asymp 2^{-nr_1} \asymp M^{-r_1}.$$

Оценка снизу, а вместе с ней и теорема доказаны.

Список литературы

1. Бесов О. В., “О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения”, *Докл. АН СССР*, **126**:6 (1959), 1163–1165.
2. Лизоркин П. И., Никольский С. М., “Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точкой зрения”, *Тр. МИАН*, **187** (1989), 143–161.
3. Темляков В. Н., “Приближение функций с ограниченной смешанной производной”, *Тр. МИАН*, **178** (1986), 1–112.
4. Никольский С. М., *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969.
5. Никольский С. М., “Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных”, *Тр. МИАН*, **38** (1951), 244–278.
6. Jackson D., “Certain problem of closest approximation”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39**:12 (1933), 889–906.
7. Исмагилов Р. С., “Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами”, *УМН*, **29**:3 (1974), 161–178.
8. Schmidt E., “Zur Theorie der linearen und nichlinearen Integralgleichungen. I”, *Math. Ann.*, **63** (1907), 433–476.
9. Micchelli C. A., Pinkus A., “Some problems in the approximation of functions of two variables and n -widths of integral operators”, *J. Approxim. Theory*, **24** (1978), 51–77.
10. Мирошин Н. В., Хромов В. В., “Об одной задаче наилучшей аппроксимации функций многих переменных”, *Матем. заметки*, **32**:5 (1982), 721–727.
11. Темляков В. Н., “О приближении периодических функций многих переменных”, *Докл. АН СССР*, **279**:2 (1984), 301–305.
12. Темляков В. Н., “Об асимптотическом поведении наилучших приближений индивидуальных функций”, *Тр. МИАН*, **172** (1985), 313–324.
13. Темляков В. Н., “Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных”, *Тр. МИАН*, **173** (1986), 243–252.
14. Темляков В. Н., “Оценки наилучших билинейных приближений периодических функций”, *Тр. МИАН*, **181** (1988), 250–267.
15. Бабаев М.-Б. А., “Приближение соболевских классов функций суммами произведений функций меньшего числа переменных”, *Матем. заметки*, **48**:6 (1990), 10–21.
16. Бабаев М.-Б. А., “О порядке приближения соболевского класса W_q^r билинейными формами в L_p , $1 \leq q \leq p \leq 2$ ”, *Матем. сб.*, **182**:1 (1991), 122–129.
17. Романюк А. С., “Наилучшие M -членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:2 (2003), 61–100.

18. Белинский Э. С., “Приближение “плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной”, *Исследование по теории функций многих вещественных переменных*, Ярослав. ун-т, Ярославль, 1988, 16–33.
19. Романюк А. С., “О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных”, *Укр. матем. журн.*, **45**:5 (1993), 663–675.
20. Кашин Б. С., Саакян А. А., *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984.
21. Галеев Э. М., “Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике $\widetilde{\mathcal{L}}_p$ ”, *УМН*, **32**:4 (1977), 251–252.
22. Галеев Э. М., “Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\widetilde{W}_p^{\widetilde{\alpha}}$ и $\widetilde{H}_p^{\widetilde{\alpha}}$ в пространстве $\widetilde{L}_q$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:5 (1985), 916–934.
23. Романюк А. С., “О колмогоровских и линейных поперечниках классов Бесова периодических функций многих переменных”, *Исследования по теории приближения функций: Сб. науч. тр. АН УССР*, Ин-т математики, Киев, 1991, 86–92.
24. Романюк А. С., “Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q ”, *Укр. матем. журн.*, **43**:10 (1991), 1398–1408.
25. Романюк А. С., “Приближение классов периодических функций многих переменных”, *Матем. заметки*, **71**:1 (2002), 109–121.
26. Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г., *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.
27. Корнейчук Н. П., *Точные константы в теории приближения*, Наука, М., 1987.
28. Белинский Э. С., “Приближение периодических функций многих переменных “плавающей” системой экспонент и тригонометрические поперечники”, *Докл. АН СССР*, **284**:6 (1985), 1294–1297.

А. С. РОМАНИЮК (A. S. ROMANYUK)
Институт математики НАН Украины
E-mail: funct@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
08.05.2003