Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Волосивец, О модифицированных мультипликативных интеграле и производной произвольного порядка на полуоси, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 2, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/im560>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 08:34:39

УДК 517.5

С. С. Волосивец

О модифицированных мультипликативных интеграле и производной произвольного порядка на полуоси

Рассмотрены модифицированные сильные двоичные интеграл и производная в $L_q(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq q \leq 2$. Установлены условия их существования, изучена связь между поведением структурных характеристик самой функции и ее производной (интеграла), доказана теорема вложения типа Харди–Литтлвуда–Соболева.

Библиография: 15 наименований.

Введение

Как известно, активное изучение двоичных производной и интеграла началось с работы П. Л. Бутцера и Х. Й. Вагнера [1]. Они рассматривали функции на двоичной группе G , изоморфной модифицированному отрезку $[0, 1]^*$. В работе [2] была введена сильная двоичная производная $\bar{D}(f)$ для функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и получено равенство

$$(\bar{D}(f))^{\wedge}(x) = x\hat{f}(x),$$

где $\hat{f}(x)$ – преобразование Фурье–Уолша функции f (определение этого преобразования и более общего преобразования можно найти в работе [3]). Затем Е. Пал [4] показал, что при $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и $xf(x) \in L(\mathbb{R}_+)$ верно равенство

$$\bar{D}(\hat{f})(y) = (xf(x))^{\wedge}(y).$$

Х. Й. Вагнер [5] определил сильный двоичный интеграл $\bar{I}(f)$ и показал взаимную обратимость операторов $\bar{D}(f)$ и $\bar{I}(f)$ при дополнительном условии $\hat{f}(0) = 0$. Большая часть результатов, полученных в работах [1], [2], [4], [5], изложена в [6]. В работе [7] Б. И. Голубов изучил модифицированные сильные двоичные интеграл и производные первого порядка для $f \in L(\mathbb{R}_+)$. Аналогичные понятия для $f \in L[0, 1)$ исследовались С. У. Оневиром [8]. В работе [9] Б. И. Голубов рассмотрел определения модифицированных сильных двоичных интеграла и производной дробного порядка $\alpha > 0$ также для функций из $L(\mathbb{R}_+)$. Для функций, интегрируемых на локальных полях, похожие определения рассматривал С. У. Оневир [10]. В работе автора [11] аналоги результатов Б. И. Голубова [7] были доказаны для $\mathbf{P}$ -ичного интеграла, построенного по ограниченной последовательности $\mathbf{P} = \{p_n\}_{|n|=1}^{\infty}$. В настоящей работе вводится понятие модифицированных сильных мультипликативных интеграла и производной произвольного порядка $\alpha > 0$ в $L(\mathbb{R}_+)$ и изучаются их свойства аналогично работе [9]. Кроме того, методами теории приближений получены достаточные условия их

существования в $L(\mathbb{R}_+)$ и изучена связь между их свойствами. Эти результаты изложены в § 2 и 3. Последний § 4 посвящен переносу этих результатов на случай $L_q(\mathbb{R}_+)$, $1 < q \leq 2$. В работе [10] изучался оператор интегрирования функций, заданных на локальных полях, свойства которого имеют много общего со свойствами оператора интегрирования, рассматриваемого в настоящей работе и определенного по $\mathbf{P}$, где все $p_n = p$. При этом между ними есть существенные отличия, поэтому аналог условия (17), активно используемого в § 4, в [10] не применялся.

§ 1. Основные определения и леммы

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, где для всех $j \in \mathbb{N}$ справедливо $p_j \in \mathbb{N}$, $2 \leq p_j \leq N$, $p_{-j} = p_j$. Положим $m_j = p_1 \dots p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, $m_0 = 1$ и $m_{-l} = 1/m_l$ при $l \in \mathbb{N}$. Тогда каждому $x \in \mathbb{R}_+$ можно сопоставить разложение

$$x = \sum_{j=1}^{k(x)} x_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}, \quad (1)$$

где $x_j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x_j < p_j$ при $j \in \mathbb{Z}$. Это разложение определяется однозначно, если при $x = k/m_n$ брать разложения с конечным числом ненулевых x_i . Если элемент $y \in [0, +\infty)$ записан в виде

$$y = \sum_{j=1}^{k(y)} y_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{m_j}, \quad (1')$$

где $y_j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq y_j < p_j$ при $j \in \mathbb{Z}$, то по определению

$$z = x \oplus y = \sum_{j=1}^{\max(k(x), k(y))} z_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_j}{m_j},$$

где $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$, $0 \leq z_j < p_j$, $j \in \mathbb{Z}$. Аналогично определяется операция $x \ominus y$. Функция f называется $\mathbf{P}$ -непрерывной в точке x , если

$$\lim_{h \rightarrow 0} |f(x \oplus h) - f(x)| = 0.$$

Для $x, y \in [0, +\infty)$, записанных в виде (1) и (1') соответственно, определим ядро $\chi(x, y)$ равенством

$$\chi(x, y) = \exp \left\{ 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{k(y)} x_j y_{-j} + \sum_{j=1}^{k(x)} x_{-j} y_j \right) \right\}.$$

Из определения следует, что $\chi(x, y) = \chi(y, x)$ и $|\chi(x, y)| = 1$. Кроме того, при $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ имеем (см. [3])

$$\chi(x \oplus z, y) = \chi(x, y) \chi(z, y), \quad \chi(x \ominus z, y) = \chi(x, y) \overline{\chi(z, y)}$$

для почти всех пар (x, z) при фиксированном y . Для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ мультипликативное $\mathbf{P}$ -преобразование Фурье определим формулой

$$\hat{f}(x) = \int_0^\infty f(y) \overline{\chi(x, y)} dy.$$

Как и для обычного преобразования Фурье, из сходимости f_n к f в $L[0, \infty)$ следует равномерная сходимость $\hat{f}_n$ к $\hat{f}$ на $[0, \infty)$. Для $f \in L_q(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq q < \infty$, и $g \in L(\mathbb{R}_+)$ можно определить свертку равенством

$$f * g(x) = \int_0^\infty f(x \ominus v) g(v) dv.$$

Как и для обычной свертки, имеет место неравенство Юнга (см. [12], где дан способ его вывода из теоремы Рисса–Торина): если $f \in L_p(\mathbb{R}_+)$, $g \in L_r(\mathbb{R}_+)$, где $1 < p < r/(r-1)$, $1/q = 1/p - 1/r + 1$, то $f * g \in L_q(\mathbb{R}_+)$ и $\|f * g\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} \|g\|_{L_r(\mathbb{R}_+)}$. Частным случаем неравенства Юнга является неравенство

$$\|f * g\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} \|g\|_{L(\mathbb{R}_+)},$$

где $1 \leq q \leq \infty$, $f \in L_q(\mathbb{R}_+)$, $g \in L(\mathbb{R}_+)$. Здесь при $q = \infty$ функция $f * g$ наследует от f не только ограниченность, но и $\mathbf{P}$ -непрерывность. Кроме того, для $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$ верно соотношение $(f * g)^\wedge = \hat{f} \hat{g}$. Для $f \in L_q(\mathbb{R}_+)$, $1 < q \leq 2$, мультипликативное преобразование Фурье $F(f)$ определяется как предел $\int_0^a f(y) \overline{\chi(x, y)} dy$ в $L_r(\mathbb{R}_+)$ при $a \rightarrow +\infty$, где $1/q + 1/r = 1$, при этом

$$\|F(f)\|_{L_r(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L_q(\mathbb{R}_+)}$$

(см [3, с. 131]). При $q = r = 2$ последнее неравенство преобразуется в равенство Планшереля, из которого следует теорема единственности: если $\hat{f}(x) = \hat{g}(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$ и $f, g \in L[0, \infty)$, то $f(x) = g(x)$ почти всюду на $[0, \infty)$.

Далее через X_E будем обозначать характеристическую функцию множества E , через I_k^n – полуинтервал $[k/m_n, (k+1)/m_n)$, а через B_k – полуинтервал $[m_k, m_{k+1})$. Если в окрестности $a \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$C_1 A(x) \leq B(x) \leq C_2 A(x),$$

где $C_1, C_2 > 0$, то будем записывать $f(x) \asymp g(x)$ при $x \rightarrow a$.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in L(\mathbb{R}_+)$, $\hat{f} \in L(\mathbb{R}_+)$. Тогда в каждой точке x $\mathbf{P}$ -непрерывности функции f выполняется равенство

$$f(x) = \int_0^\infty \hat{f}(y) \chi(x, y) dy. \quad (2)$$

В случае произвольных точек x равенство (2) выполнено почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство первого утверждения леммы проведено в работе [3, с. 134] и основано на формуле

$$\int_0^{m_r} \hat{f}(y) \chi(x, y) dy = m_r \int_0^{1/m_r} f(x \oplus u) du =: f_r(x)$$

и на стремлении $f_r(x)$ к $f(x)$ в точке $\mathbf{P}$ -непрерывности. Если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m_r \int_0^{1/m_r} |f(x \oplus u) - f(x)| du = 0,$$

назовем x $\mathbf{P}$ -ичной точкой Лебега. Аналогично классическому случаю [13, с. 237] доказывается, что почти все точки $\mathbb{R}_+$ есть $\mathbf{P}$ -ичные точки Лебега. Поэтому равенство (2) выполнено почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in L(\mathbb{R}_+)$, и пусть

$$S_y(f)(x) = \int_0^y \hat{f}(t) \chi(x, t) dt = \int_0^\infty f(t) \int_0^y \chi(x \ominus t, u) du dt.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{m_n}(f) - f\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{1/m_n}(f)\|_{L(\mathbb{R}_+)} = |\hat{f}(0)|.$$

ЛЕММА 3. Пусть $a_{k,n}(x) = m_n^{-1} \chi(k/m_n, x) X_{[0, m_n)}(x)$, где $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\hat{a}_{k,n} = X_{[k/m_n, (k+1)/m_n)} = X_{I_k^n}$.

ЛЕММА 4. Если $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то существует единственное $r \in \mathbb{Z}$ такое, что $I_k^n \subset B_r = [m_r, m_{r+1})$.

Леммы 2–4, обобщающие результаты, полученные в работах [6, с. 429] и [7], доказаны в [11].

ЛЕММА 5 [3, с. 33, 245]. Пусть $D_y(x) = \int_0^y \chi(x, t) dt$. Тогда

$$D_{m_n}(x) = m_n X_{[0, 1/m_n)}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ЛЕММА 6 [3, с. 146]. Пусть $f \in L_q(\mathbb{R}_+)$, $1 < q \leq 2$. Тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}_+$ имеет место равенство

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^\infty F(f)(y) D_x(y) dy \right).$$

ЛЕММА 7 [3, с. 241]. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, G_n – множество функций, постоянных на всех полуинтервалах I_k^n , $k \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_p(\mathbb{R}_+)$, и пусть

$$\mathfrak{E}_{m_n}(f)_p = \inf \{ \|f - g\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} : g \in G_n \},$$

$$\omega_r(f)_p = \sup_{0 < h < 1/m_r} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}.$$

Тогда имеет место неравенство А. В. Ефимова

$$\mathfrak{E}_{m_r}(f)_p \leq \|f - S_{m_r}(f)\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} \leq \omega_k(f)_p \leq 2\mathfrak{E}_{m_r}(f)_p, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Напомним, что сублинейный оператор Tf , действующий из $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, в пространство $L_0(\mathbb{R}_+)$ почти всюду конечных измеримых на $\mathbb{R}_+$ функций, имеет слабый тип (p, q) , если для любого $\lambda > 0$ верно неравенство

$$|\{x \in \mathbb{R}_+ : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^q} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}^p.$$

Здесь $|E|$ – мера Лебега множества E и $1 \leq q < \infty$.

Следующая лемма является упрощенным вариантом интерполяционной теоремы Марцинкевича [12, с. 18].

ЛЕММА 8. Пусть оператор Tf имеет слабый тип (p_0, q_0) и слабый тип (p_1, q_1) , $p_i, q_i \in [1, \infty)$, $i = 1, 2$, и существует число $\theta \in (0, 1)$ такое, что

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad p \leq q.$$

Тогда для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}_+)$ имеем

$$Tf \in L_q(\mathbb{R}_+), \quad \|Tf\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}.$$

§ 2. Модифицированный сильный мультипликативный интеграл в $L(\mathbb{R}_+)$

ЛЕММА 9. Пусть $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда во всякой точке $x > 0$ определена функция

$$W_n^\alpha(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{m_{-n}}^{m_k} \chi(x, y) (h(y))^\alpha dy,$$

где $h(y) = 1/m_n$ при $y \in B_n$. При этом для $x \geq m_n$ предел функции $W_n^\alpha(x)$ равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя преобразование Абеля, находим, что

$$\begin{aligned} W_n^\alpha(x) &:= \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{m_{-n}}^{m_l} \chi(x, y) (h(y))^\alpha dy \\ &= \sum_{k=-n}^{\infty} m_k^{-\alpha} \left(\int_0^{m_{k+1}} \chi(x, y) dy - \int_0^{m_k} \chi(x, y) dy \right) \\ &= -m_n^\alpha D_{m_{-n}}(x) + \sum_{k=-n+1}^{\infty} D_{m_k}(x) (m_{k-1}^{-\alpha} - m_k^{-\alpha}) \\ &= -m_n^\alpha m_n^{-1} X_{[0, m_n)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-\alpha}) m_{k-1}^{-\alpha} m_k X_{[0, m_{-k})}(x) \\ &\quad + \sum_{k=-n+1}^0 (1 - p_{1-k}^{-\alpha}) m_{k-1}^{-\alpha} m_k X_{[0, m_{-k})}(x). \end{aligned} \tag{3}$$

В последнем равенстве использованы лемма 5 и равенства $m_k/m_{k-1} = p_k$ при $k \geq 1$ и $m_k/m_{k-1} = p_{1-k}$ при $k \leq 0$. Пусть $x \in [m_i, m_{i+1})$; тогда слагаемые, входящие в соотношение (3), дают ненулевую сумму при $i+1 \leq n$,

причем при $i = n - 1$ получаем $W_n^\alpha(x) = -m_n^{\alpha-1}$, при $i \geq -1$

$$W_n^\alpha(x) = -m_n^{\alpha-1} + \sum_{k=-n+1}^{-i-1} (1 - p_{1-k}^{-\alpha}) m_k m_{k-1}^{-\alpha}, \quad (4)$$

а при $i < -1$ имеем

$$W_n^\alpha(x) = -m_n^{\alpha-1} + \sum_{k=-n+1}^0 (1 - p_{1-k}^{-\alpha}) m_k m_{k-1}^{-\alpha} + \sum_{k=1}^{-i-1} (1 - p_k^{-\alpha}) m_{k-1}^{-\alpha} m_k. \quad (4')$$

В самом деле, $X_{[0, m_{-k})}(m_i) = 0$ в том и только в том случае, когда $k \geq -i$, и поэтому суммирование справа в равенстве (4') заканчивается при $k = -i - 1$. Таким образом, при всех $x > 0$ предел функции $W_n^\alpha(x)$ совпадает с некоторой конечной суммой. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $\alpha = 1$ и $i < -1$ для $x \in [m_i, m_{i+1})$ получаем

$$\begin{aligned} W_n^1(x) &= -1 + \sum_{k=-n+1}^0 (m_{k-1}^{-1} - m_k^{-1}) m_k + \sum_{k=1}^{-i-1} (m_{k-1}^{-1} - m_k^{-1}) m_k \\ &= -1 + \sum_{k=-n+1}^0 (p_{1-k} - 1) + \sum_{k=1}^{|i|-1} (p_k - 1) \\ &= p_1 + \dots + p_n + p_1 + \dots + p_{|i|-1} - (n + |i|). \end{aligned}$$

Аналогичные формулы получаются при других i . Все эти формулы соответствуют определению, данному в работе [11].

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $0 < \alpha < 1$, то $W_n^\alpha(x) \asymp x^{\alpha-1}$ при $x \rightarrow 0$. Если $\alpha = 1$, то $W_n^1(x) \asymp \log(1/x)$ при $x \rightarrow 0$. При $\alpha > 1$ функции $W_n^\alpha(x)$ ограничены на $\mathbb{R}_+$.

Действительно, при $0 < \alpha < 1$ выражения из (4') и (4) имеют один порядок с $m_{i-1}^{-\alpha} m_i \asymp (1/m_i)^{\alpha-1} \asymp x^{\alpha-1}$ для $x \in [1/m_{i+1}, 1/m_i)$. При $\alpha = 1$ все слагаемые в соотношениях (4) и (4') ограничены сверху и снизу константами, откуда и получается утверждение следствия. Случай $\alpha > 1$ разбирается аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 2. При всех $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ верно включение $W_n^\alpha(x) \in L(\mathbb{R}_+)$.

ЛЕММА 10. Если $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, то $\widehat{W}_n^\alpha(x) = (h(x))^\alpha X_{[m_{-n}, \infty)}(x)$. В частности, $\widehat{W}_n^\alpha(0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $\widehat{D}_{m_k}(x) = X_{[0, m_k)}(x)$. Поэтому, используя равенство (3), находим

$$\begin{aligned} \widehat{W}_n^\alpha(x) &= \sum_{k=-n}^{\infty} m_k^{-\alpha} (\widehat{D}_{m_{k+1}}(x) - \widehat{D}_{m_k}(x)) \\ &= \sum_{k=-n}^{\infty} m_k^{-\alpha} (X_{[0, m_{k+1})}(x) - X_{[0, m_k)}(x)) = \sum_{k=-n}^{\infty} m_k^{-\alpha} X_{[m_k, m_{k+1})}(x), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\alpha > 0$ и для $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует функция $g \in L(\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f * W_n^\alpha - g\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0.$$

Тогда g называется *модифицированным сильным мультипликативным интегралом* (МСМИ) порядка α для f и обозначается через $J_\alpha(f)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В определении 1 вместо $L(\mathbb{R}_+)$ -предела $f * W_n^\alpha$ при $n \rightarrow \infty$ можно рассматривать $L(\mathbb{R}_+)$ -предел $f * \int_{m_{-n}}^{m_k} \chi(x, y) (h(y))^\alpha dy$ при $n, k \rightarrow +\infty$. В самом деле, аналогично доказательству леммы 9 имеем

$$W_n^\alpha(x) - \int_{m_{-n}}^{m_k} \chi(x, y) (h(y))^\alpha dy = \sum_{l=k}^{\infty} m_l^{-\alpha} (D_{m_{l+1}}(x) - D_{m_l}(x)).$$

Из леммы 5 следует, что $\|D_{m_l}\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 1$, откуда выводим стремление к нулю правой части данного равенства при $k \rightarrow \infty$ в $L(\mathbb{R}_+)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha > 0$, $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$. Функции f и g удовлетворяют соотношению $g = J_\alpha(f)$ в том и только в том случае, когда

$$\hat{g}(0) = 0, \quad \hat{g}(x) = \hat{f}(x) h^\alpha(x), \quad x > 0. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть $\alpha > 0$ и $g = J_\alpha(f)$. Тогда в силу свойств $\hat{f}$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (W_n^\alpha * f)^\wedge(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{W}_n^\alpha(x) \hat{f}(x) = \hat{g}(x)$$

равномерно на полуинтервале $[0, +\infty)$. Применяя лемму 10, доказываем оба равенства (5).

Достаточность. Пусть $\alpha > 0$ и верны равенства (5). Докажем фундаментальность последовательности $\{W_n^\alpha * f\}_{n=0}^\infty$ в $L(\mathbb{R}_+)$. Согласно лемме 10 имеем

$$(W_k^\alpha * f - W_n^\alpha * f)^\wedge = \hat{f}(\widehat{W}_k^\alpha - \widehat{W}_n^\alpha) = \hat{f} h^\alpha X_{[m_{-k}, m_n]}$$

при $k > n$. Ввиду ограниченности функций $\hat{f}$ и h^α на $[m_{-k}, m_n]$ правая часть последнего равенства интегрируема на $\mathbb{R}_+$. Кроме того, $W_n^\alpha - W_k^\alpha$, а как следствие, и $(W_n^\alpha - W_k^\alpha) * f$ равномерно $\mathbf{P}$ -непрерывны на $\mathbb{R}_+$. По лемме 1 получаем

$$f * W_k^\alpha(x) - f * W_n^\alpha(x) = \int_{m_{-k}}^{m_{-n}} \hat{f}(t) \chi(x, t) (h(t))^\alpha dt = S_{m_{-n}}(g)(x) - S_{m_{-k}}(g)(x). \quad (6)$$

Однако по лемме 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{m_{-n}}(g)\|_{L(\mathbb{R}_+)} = |\hat{g}(0)| = 0,$$

и, значит, последовательность $\{W_n^\alpha * f\}_{n=0}^\infty$ фундаментальна в $L(\mathbb{R}_+)$. Значит, она сходится к $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$ и $\varphi = J_\alpha f$. Согласно доказательству необходимости имеем $\hat{\varphi}(0) = 0$ и $\hat{\varphi}(x) = \hat{f}(x) h^\alpha(x)$ при $x > 0$. По теореме единственности $\varphi = g$ почти всюду, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\alpha, \beta > 0$ и функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ имеет МСМИ $J_\alpha(f) = \varphi \in L(\mathbb{R}_+)$, а функция φ имеет МСМИ $J_\beta(\varphi) = g \in L(\mathbb{R}_+)$. Тогда f имеет МСМИ $J_{\alpha+\beta} = g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий $\varphi = J_\alpha(f)$ и $g = J_\beta(\varphi)$ следует, что

$$\begin{aligned}\hat{g}(x) &= \hat{\varphi}(x)(h(x))^\alpha = (h(x))^{\alpha+\beta} \hat{f}(x), & x > 0, \\ \hat{g}(0) &= \hat{\varphi}(0) = 0,\end{aligned}$$

откуда по теореме 1 получаем $J_{\alpha+\beta} = g$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\alpha, \beta > 0$ и существуют $J_{\alpha+\beta}(f) = g$ и $J_\alpha(f) = \varphi$. Тогда $g = J_\beta(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определений $J_{\alpha+\beta}(f)$ и $J_\alpha(f)$ имеем $\hat{g}(0) = \hat{\varphi}(0) = 0$, а при $x > 0$ по теореме 1 имеем

$$\hat{g}(x) = (h(x))^{\alpha+\beta} \hat{f}(x), \quad \hat{\varphi}(x) = (h(x))^\alpha \hat{f}(x),$$

откуда $\hat{g}(x) = \hat{\varphi}(x)(h(x))^\beta$ и по теореме 1 $g = J_\beta(\varphi)$. Следствие доказано.

ПРИМЕР. Пусть $f = X_{[0,1]}$. Тогда $\hat{f} = f$ (см. лемму 3 при $k = n = 0$) и по лемме 1 находим, что

$$\begin{aligned}f * W_n^\alpha(x) &= \int_0^\infty \hat{f}(y) \widehat{W}_n^\alpha(y) \chi(x, y) dy = \int_0^1 h^\alpha(y) \chi(x, y) dy \\ &= \sum_{l=-\infty}^{-1} \int_{m_l}^{m_{l+1}} h^\alpha(y) \chi(x, y) dy = \sum_{l=-\infty}^{-1} m_l^{-\alpha} (D_{m_{l+1}}(x) - D_{m_l}(x)) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{-1} (m_{l-1}^{-\alpha} - m_l^{-\alpha}) D_{m_l}(x) + D_1(x).\end{aligned}$$

При $l < 0$ имеем $D_{m_l}(x) = m_l$ на $[0, 1)$, поэтому легко видеть, что при $\alpha \geq 1$ общее слагаемое последнего ряда не стремится к нулю, а при $\alpha < 1$ оно убывает как член геометрической прогрессии, откуда легко следует фундаментальность последовательности $\{W_n^\alpha * f\}_{n=0}^\infty$. Итак, $J_\alpha(f)$ существует тогда и только тогда, когда $0 < \alpha < 1$. Аналогично показывается, что $a_{0,n}$, определенные в лемме 3, не имеют МСМИ порядка $\alpha \geq 1$. Иначе обстоит дело с остальными $a_{k,n}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha > 0$. Тогда $J_\alpha(a_{k,n}) = m_r^{-\alpha} a_{k,n}$, где r определяется по лемме 4 вложением $I_k^n \subset B_r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойствам свертки и лемме 10 имеем

$$(a_{k,n} * W_l^\alpha)^\wedge = \hat{a}_{k,n} \widehat{W}_l^\alpha = X_{[k/m_n, (k+1)/m_n]}(h(x))^\alpha X_{[1/m_l, \infty)}.$$

Поскольку $h(x)$ ограничена при $x \geq \delta > 0$, функция в правой части равенства принадлежит $L(\mathbb{R}_+)$ и является $\mathbf{P}$ -непрерывной на $\mathbb{R}_+$. По лемме 1 получаем

$$(a_{k,n} * W_l^\alpha)(x) = \int_0^\infty X_{[k/m_n, (k+1)/m_n)}(h(x))^\alpha X_{[1/m_l, \infty)}\chi(x, y) dy.$$

По лемме 4 найдем r такое, что $I_k^n \subset B_r$. Ясно, что при $l \geq -r$ имеем $B_r \subset [m_{-l}, \infty)$, а $h(x) = 1/m_r$ на B_r . В результате мы видим, что при $l \geq -r$

$$(a_{k,n} * W_l^\alpha)(x) = m_r^{-\alpha} \int_0^\infty \hat{a}_{k,n} \chi(x, y) dy.$$

Снова применяя лемму 1, находим, что $(a_{k,n} * W_l^\alpha)(x) = m_r^{-\alpha} a_{k,n}$ при $l \geq -r$. Из этого равенства следует утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 5. При $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем равенство $J_\alpha(a_{1,n}) = m_n^\alpha a_{1,n}$. В частности, $J_\alpha(f)$ не ограничен на своей области определения $\mathfrak{L}(J_\alpha)$.

В работе [9] показано, что в случае $p_n = 2$ линейная оболочка множества $F := \{a_{k,n} : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}_+\}$ плотна в двоичном пространстве Харди на $\mathbb{R}_+$, а в [11] этот результат перенесен на случай $2 \leq p_n \leq N$. Докажем теперь аналог теоремы 15 из [6, с. 437].

ТЕОРЕМА 3. Линейная оболочка F плотна в пространстве $\mathfrak{L}(J_\alpha)$ функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$, для которых существует $J_\alpha(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [3, с. 134] для $f \in L(\mathbb{R}_+)$ справедливо равенство

$$\int_0^{m_r} \hat{f}(y) \chi(x, y) dy = m_r \int_0^{1/m_r} f(x \oplus u) du.$$

При $x = 0$ и $r = -l$ получаем

$$\int_0^{m_{-l}} \hat{f}(y) dy = m_{-l} \int_0^{m_l} f(u) du.$$

Если $g = J_\alpha(f)$, то по теореме 1 $\hat{f}(y) = \hat{g}(y)h^{-\alpha}(y)$ при $y > 0$, откуда имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{m_l} f(u) du \right| &= \left| m_l \int_0^{1/m_l} \hat{g}(y) h^{-\alpha}(y) dy \right| \\ &\leq m_l m_l^{-\alpha} m_l^{-1} \sup_{y \in [0, 1/m_l]} |\hat{g}(y)| = o(m_l^{-\alpha}), \end{aligned} \quad (7)$$

поскольку (см. [3, с. 129]) функция $\hat{g}$ $\mathbf{P}$ -непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Теперь докажем, что $f \in \mathfrak{L}(J_\alpha)$ можно приблизить с любой точностью линейной комбинацией функций из F . Найдем r , удовлетворяющее неравенствам

$$\int_{m_r}^\infty |f(x)| dx < \varepsilon, \quad \left| \int_0^{m_r} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

(это можно сделать в силу (7)). Рассмотрим разложение $f = f_1 + f_2$, где $f_1 = fX_{[0, m_r)}$. Тогда $\|f_2\|_{L(\mathbb{R}_+)} < \varepsilon$, а функция

$$F_n := S_{m_n}(f_1) - m_r^{-1} X_{[0, m_r)} \int_0^{m_r} f(x) dx$$

постоянна на I_k^n при $n > -r$ и

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F_n(x) dx &= \int_0^\infty m_n \int_0^{1/m_n} X_{[0, m_r)}(x \oplus u) f(x \oplus u) du dx - \int_0^{m_r} f(x) dx \\ &= \int_0^{1/m_n} m_n \int_0^{m_r} f(x \oplus u) dx du - \int_0^{m_r} f(x) dx. \end{aligned}$$

При $n > -r$ и $u \in [0, 1/m_n)$ функция $a(x) = x \oplus u$ взаимно однозначно отображает интервал $[0, m_r)$ на себя и последняя разность в предыдущей формуле равна нулю. Имеем

$$\|f - F_n\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leq \|f_1 - S_{m_n}(f_1)\|_{L(\mathbb{R}_+)} + \|f_2\|_{L(\mathbb{R}_+)} + m_r^{-1} m_r \left| \int_0^{m_r} f(x) dx \right|.$$

Последние два слагаемых меньше ε согласно выбору r , первое будет меньше ε при достаточно больших n по лемме 2, и поэтому $\|f - F_n\|_{L(\mathbb{R}_+)} < 3\varepsilon$. Поскольку $F_n = 0$ вне $[0, m_r)$, его можно приблизить с любой точностью ε частичной суммой ряда Фурье по $a_{k,r}$ (см. [11, лемма 3.1]). С другой стороны, так как

$$\hat{F}_n(0) = \int_0^{m_r} F_n(x) dx = 0,$$

то эта частичная сумма не содержит члена с $a_{0,r}$. В итоге мы нашли линейную комбинацию G функций из F со свойством $\|f - G\|_{L(\mathbb{R}_+)} < 4\varepsilon$. Ввиду произвольности ε теорема доказана.

В силу неограниченности оператор J_α не является непрерывным. Докажем для него более слабое свойство замкнутости.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f_n, f, \varphi \in L(\mathbb{R}_+)$, $f_n \in \mathfrak{L}(J_\alpha)$ при всех $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|J_\alpha(f_n) - \varphi\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0.$$

Тогда $\varphi = J_\alpha(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_n = J_\alpha(f_n)$. Тогда $\hat{\varphi}_n(x) = h^\alpha(x) \hat{f}_n(x)$ при $x > 0$ и $\hat{\varphi}(0) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Из условия следует, что $\hat{f}_n(x)$ равномерно сходятся к $\hat{f}(x)$ на $\mathbb{R}_+$, а $\hat{\varphi}_n(x)$ равномерно сходятся к $\hat{\varphi}(x)$. Поскольку $h^\alpha(x)$ постоянна на каждом $B_r = [m_r, m_{r+1})$, отсюда следует, что на каждом B_r верно равенство $\hat{\varphi}(x) = h^\alpha(x) \hat{f}(x)$. Ясно также, что $\hat{\varphi}(0) = 0$. По теореме 1 имеем $\varphi = J_\alpha(f)$. Теорема доказана.

В заключение настоящего параграфа получим достаточные условия существования $J_\alpha(f)$ и оценку скорости сходимости $W_n^\alpha * f$ к $J_\alpha(f)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и $\{\psi(k)\}_{k=1}^\infty$ — убывающая к нулю положительная последовательность такая, что $\sum_{k=1}^\infty \psi(k) < \infty$. Если $\|S_{1/m_k}(f)\|_{L(\mathbb{R}_+)} = O(\psi(k)/m_k^\alpha)$, то существует $J_\alpha(f) \in L(\mathbb{R}_+)$. Если $\psi(k)$ удовлетворяет условию Бари

$$\sum_{k=n}^\infty \psi(k) = O(\psi(n)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

то имеет место оценка

$$\|W_n^\alpha * f - J_\alpha(f)\|_{L(\mathbb{R}_+)} = O(\psi(n)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно соотношению (6) имеем

$$\begin{aligned} f * W_{n+1}^\alpha(x) - f * W_n^\alpha(x) &= \int_{1/m_{n+1}}^{1/m_n} m_{n+1}^\alpha \hat{f}(t) \chi(x, t) dt \\ &= m_{n+1}^\alpha (S_{1/m_n}(f)(x) - S_{1/m_{n+1}}(f)(x)). \end{aligned}$$

Поэтому при $l > n$ имеем

$$\begin{aligned} \|f * W_l^\alpha(x) - f * W_n^\alpha(x)\|_{L(\mathbb{R}_+)} &= \left\| \sum_{k=n}^{l-1} \int_{1/m_{k+1}}^{1/m_k} h^\alpha(t) \hat{f}(t) \chi(x, t) dt \right\|_{L(\mathbb{R}_+)} \\ &\leq \sum_{k=n}^{l-1} m_{k+1}^\alpha \|S_{1/m_k}(f)(x) - S_{1/m_{k+1}}(f)(x)\|_{L(\mathbb{R}_+)}. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу условия теоремы и неравенства треугольника последняя сумма есть $O(\sum_{k=n}^{l-1} \psi(k))$, откуда следует фундаментальность $\{W_n^\alpha * f\}_{n=0}^\infty$ и сходимость этой последовательности к некоторой функции $g \in L(\mathbb{R}_+)$. При выполнении условия (8), переходя к пределу в (9) при $l \rightarrow \infty$, получаем

$$\|f * W_n^\alpha - g\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leq C_1 N^\alpha \sum_{k=n}^\infty \psi(k) \leq C_2 \psi(n),$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

§ 3. Модифицированная сильная мультипликативная производная в $L(\mathbb{R}_+)$

Пусть $\alpha > 0$. Тогда функция $h^{-\alpha}(x)X_{(0, m_n)}$ принадлежит $L(\mathbb{R}_+)$ и является $\mathbf{P}$ -непрерывной на $\mathbb{R}_+$ (в некоторой окрестности любого $x > 0$ в смысле топологии, связанной с $\oplus$, она является постоянной). Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \Lambda_n^\alpha(x) &= (h^{-\alpha}X_{(0, m_n)})^\wedge(x) = \int_0^{m_n} h^{-\alpha}(t) \chi(x, t) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n-1} m_k^\alpha \int_{m_k}^{m_{k+1}} \chi(x, t) dt = \sum_{k=-\infty}^{n-1} m_k^\alpha (D_{m_{k+1}}(x) - D_{m_k}(x)). \end{aligned}$$

В силу свойства $\|D_{m_k}\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 1$ последний ряд сходится в $L(\mathbb{R}_+)$, т.е. $\Lambda_n^\alpha \in L(\mathbb{R}_+)$. Значит, по лемме 1 имеем

$$h^{-\alpha}(x)X_{(0, m_n)}(x) = \hat{\Lambda}_n^\alpha(x) \quad (10)$$

на $\mathbb{R}_+$. В частности, $\hat{\Lambda}_n^\alpha(0) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f * \Lambda_n^\alpha - \varphi\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0,$$

то φ называется *модифицированной сильной мультипликативной производной* (МСМП) функции f в $L(\mathbb{R}_+)$ порядка α и обозначается через $D^\alpha(f)$. Соответственно, через $\mathfrak{L}(D^\alpha)$ обозначим область определения оператора D^α .

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$. Тогда $g = D^\alpha(f)$ в том и только в том случае, когда $\hat{g}(0) = 0$ и $\hat{g}(x) = \hat{f}(x)h^{-\alpha}(x)$ при $x > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g = D^\alpha(f)$. Тогда из сходимости $f * \Lambda_n^\alpha$ к g в $L(\mathbb{R}_+)$ следует равномерная сходимость $(f * \Lambda_n^\alpha)^\wedge$ к $\hat{g}$ и в силу формулы (10) получаем нужное утверждение. Обратно, пусть $\hat{g}(x) = \hat{f}(x)h^{-\alpha}(x)$ при $x > 0$ и $\hat{g}(0) = 0$. Тогда при $n > l$ согласно (10) имеем

$$(f * \Lambda_n^\alpha - f * \Lambda_l^\alpha)^\wedge = \hat{f}(\hat{\Lambda}_n^\alpha - \hat{\Lambda}_l^\alpha) = h^{-\alpha} X_{[m_l, m_n]} \hat{f} = \hat{g} X_{[m_l, m_n]}.$$

Последняя функция ограничена и поэтому интегрируема на $\mathbb{R}_+$, а $(f * \Lambda_n^\alpha - f * \Lambda_l^\alpha)$ равномерно $\mathbf{P}$ -непрерывна на $\mathbb{R}_+$. По лемме 1 получаем

$$\begin{aligned} f * \Lambda_n^\alpha(x) - f * \Lambda_l^\alpha(x) &= \int_{m_l}^{m_n} \hat{g}(t) \chi(x, t) dt \\ &= S_{m_n}(g)(x) - S_{m_l}(g)(x) = (g(x) - S_{m_l}(g)(x)) - (g(x) - S_{m_n}(g)(x)). \end{aligned}$$

По лемме 2 правая часть равенства стремится к нулю в $L(\mathbb{R}_+)$ при $n, l \rightarrow \infty$. Таким образом, последовательность $\{f * \Lambda_n^\alpha\}$ фундаментальна в $L(\mathbb{R}_+)$ и сходится к некоторой функции $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$, причем по доказанному выше $\hat{\varphi}(x) = h^{-\alpha}(x)\hat{f}(x)$ при $x > 0$ и $\hat{\varphi}(0) = 0$. По теореме единственности $g(x) = \varphi(x)$ почти всюду. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $\alpha, \beta > 0$ и $f \in L(\mathbb{R}_+)$ имеет МСМП $D^\alpha(f) = \varphi$, а φ имеет МСМП $D^\beta(\varphi) = g$. Тогда существует $D^{\alpha+\beta}(f) = g$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $\alpha, \beta > 0$, $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и существуют $D^\alpha(f) = \varphi$, $D^{\alpha+\beta}(f) = g$. Тогда $D^\beta(\varphi) = g$.

Доказательство следствий 6 и 7 аналогично доказательству следствий 3 и 4.

ЛЕММА 11. Пусть $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$ и $\hat{f}, \hat{g} \in L(\mathbb{R}_+)$. Тогда почти всюду на $\mathbb{R}_+$ выполнено равенство

$$(f * g)(x) = \int_0^\infty \hat{f}(t) \hat{g}(t) \chi(x, t) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно свойствам свертки и ограниченности $\hat{f}$ и $\hat{g}$ на $\mathbb{R}_+$ имеем $f * g \in L(\mathbb{R}_+)$ и $(f * g)^\wedge = \hat{f} \hat{g} \in L(\mathbb{R}_+)$. Осталось применить лемму 1.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f \in L(\mathbb{R}_+)$, $\hat{f}(0) = 0$ и при некотором $\alpha > 0$ существует МСМИ $J_\alpha(f) = g \in L(\mathbb{R}_+)$. Тогда g имеет МСМП любого порядка $\beta \in (0, \alpha]$, причем $D^\alpha(J_\alpha(f)) = f \in L(\mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g = J_\alpha(f)$. Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|J_\alpha(f) * \Lambda_n^\alpha - f\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0.$$

Поскольку

$$(J_\alpha(f) * \Lambda_n^\alpha)^\wedge = \hat{J}_\alpha(f) \hat{\Lambda}_n^\alpha = \hat{f} h^\alpha h^{-\alpha} X_{(0, m_n)} = \hat{f} X_{(0, m_n)} \in L(\mathbb{R}_+),$$

по лемме 1 находим, что

$$J_\alpha(f) * \Lambda_n^\alpha(x) = \int_0^{m_n} \hat{f}(y) \chi(x, y) dy = S_{m_n}(f)(x).$$

По лемме 2 $\|S_{m_n}(f) - f\|_{L(\mathbb{R}_+)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и случай $\beta = \alpha$ разобран.

При $\beta < \alpha$ докажем фундаментальность последовательности $\{J_\alpha(f) * \Lambda_n^\beta\}$. В силу лемм 11, 1 и замечания 2 при $a > n > l > -b$ имеем

$$\begin{aligned} & \|J_\alpha(f) * (\Lambda_n^\beta - \Lambda_l^\beta)\|_{L(\mathbb{R}_+)} \\ &= \lim_{a, b \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k=l}^{n-1} m_k^\beta f * \int_{m_{-b}}^{m_a} h^\alpha(t) \chi(x, t) dt * \int_{m_k}^{m_{k+1}} \chi(x, t) dt \right\|_{L(\mathbb{R}_+)} \\ &= \lim_{a, b \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k=l}^{n-1} m_k^\beta f * \int_{m_k}^{m_{k+1}} h^\alpha(t) \chi(x, t) dt \right\|_{L(\mathbb{R}_+)} \\ &\leq \sum_{k=l}^{n-1} m_k^{\beta-\alpha} \|f * (D_{m_{k+1}} - D_{m_k})\|_{L(\mathbb{R}_+)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя неравенство $\beta < \alpha$ и неравенства

$$\|f * (D_{m_{k+1}} - D_{m_k})\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L(\mathbb{R}_+)} \|D_{m_{k+1}} - D_{m_k}\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leq 2\|f\|_{L(\mathbb{R}_+)},$$

видим, что при $l \rightarrow +\infty$ правая часть (11) стремится к нулю. Таким образом, последовательность $\{J_\alpha(f) * \Lambda_n^\beta\}$ фундаментальна и имеет предел в $L(\mathbb{R}_+)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть $\alpha > 0$ и функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ такова, что существует $D^\alpha(f) \in L(\mathbb{R}_+)$ и $\hat{f}(0) = 0$. Тогда для любого $\beta \in (0, \alpha)$ существует также $D^\beta(f) \in L(\mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g = D^\alpha(f) \in L(\mathbb{R}_+)$. Тогда $\hat{g}(x) = \hat{f}(x)h^{-\alpha}(x)$, $x > 0$, и $\hat{g}(0) = 0$, откуда $\hat{f}(x) = \hat{g}(x)h^\alpha(x)$, $x > 0$, и $\hat{f}(0) = 0$. По теореме 1 $f = J_\alpha(g)$, а по теореме 7 существует $D^\beta(f) = D^\beta(J_\alpha(g))$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$. Тогда $D^\alpha(a_{k,n}) = m_r^\alpha a_{k,n}$, где r определяется согласно лемме 4. В частности, оператор D^α не ограничен на своей области определения.

Для нахождения достаточных условий существования $D^\alpha(f)$ используем модуль непрерывности $\omega_k(f)_1$, введенный в лемме 7.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и $\omega_k(f)_1 = O(m_k^{-\alpha} \psi(k))$, где $\{\psi(k)\}_{k=1}^\infty$ — убывающая к нулю последовательность такая, что $\sum_{k=1}^\infty \psi(k) < \infty$. Тогда существует $D^\alpha(f) \in L(\mathbb{R}_+)$. Если, кроме того, $\psi(k)$ удовлетворяет условию (8), то

$$\|f * \Lambda_n^\alpha - D^\alpha(f)\|_{L(\mathbb{R}_+)} = O(\psi(n)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве теоремы 6 показано, что при $l > n$ имеем

$$f * \Lambda_l^\alpha(x) - f * \Lambda_n^\alpha(x) = \int_{m_n}^{m_l} h^{-\alpha}(t) \hat{f}(t) \chi(x, t) dt,$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} f * \Lambda_l^\alpha(x) - f * \Lambda_n^\alpha(x) &= \sum_{k=n}^{l-1} m_k^\alpha \int_{m_k}^{m_{k+1}} \hat{f}(t) \chi(x, t) dt = \\ &= \sum_{k=n}^{l-1} m_k^\alpha (S_{m_{k+1}}(f)(x) - S_{m_k}(f)(x)). \end{aligned} \quad (12)$$

Из леммы 7 следует, что

$$\begin{aligned} &\|S_{m_{k+1}}(f)(x) - S_{m_k}(f)(x)\|_{L(\mathbb{R}_+)} \\ &\leq \|S_{m_{k+1}}(f)(x) - f(x)\|_{L(\mathbb{R}_+)} + \|f(x) - S_{m_k}(f)(x)\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leq 2\omega_k(f)_1. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу условия теоремы имеем

$$\|f * \Lambda_l^\alpha(x) - f * \Lambda_n^\alpha(x)\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leq C_1 \sum_{k=n}^{l-1} \psi(k), \quad (14)$$

откуда получаем фундаментальность последовательности $\{f * \Lambda_n^\alpha(x)\}$ и ее сходимость к некоторой функции $g \in L(\mathbb{R}_+)$. Переходя в (14) к пределу при $l \rightarrow \infty$, получаем

$$\|g - f * \Lambda_n^\alpha(x)\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leq C_1 \sum_{k=n}^\infty \psi(k) \leq C\psi(n),$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть $\beta > 0$, $f \in \text{Lip}_1(\mathbf{P}, \beta) := \{f \in L(\mathbb{R}_+): \omega_k(f)_1 = O(m_k^{-\beta})\}$. Тогда для любого $\alpha \in (0, \beta)$ существует $D^\alpha(f)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поскольку $(f * \Lambda_n^\alpha)^\wedge$ имеет носитель $[0, m_n)$, то согласно [3, с. 143] $f * \Lambda_n^\alpha$ — ступенчатая функция, постоянная на полуинтервале I_k^n , $k \in \mathbb{Z}_+$. Множество G_n таких функций на полупрямой является аналогом пространства целых функций экспоненциального типа порядка не выше m_n . Учитывая, что $S_{m_k}(f) \in G_k$, применяя (12), (13) и лемму 7, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 8'. Пусть $f \in L(\mathbb{R}_+)$, $\alpha > 0$ и сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} m_k^\alpha \mathfrak{E}_{m_k}(f)_1$. Тогда существует $D^\alpha(f) \in L(\mathbb{R}_+)$ и справедливо неравенство

$$\mathfrak{E}_{m_n}(D^\alpha(f))_1 \leq \sum_{k=n}^{\infty} m_k^\alpha \mathfrak{E}_{m_k}(f)_1.$$

ТЕОРЕМА 9 (аналог неравенства Бернштейна). Пусть $f \in L(\mathbb{R}_+) \cap G_n \cap \mathfrak{L}(D^\alpha)$, $\alpha > 0$. Тогда

$$\|D^\alpha(f)\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leq C m_n^\alpha \|f\|_{L(\mathbb{R}_+)},$$

где C не зависит от f и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 6 запишем

$$(f * \Lambda_k^\alpha)^\wedge = \hat{f} h^{-\alpha} X_{(0, m_k)},$$

откуда аналогично (12) получаем

$$f * \Lambda_k^\alpha(x) = \int_0^{m_k} \hat{f}(t) h^{-\alpha}(t) \chi(x, t) dt = \sum_{l=-\infty}^{k-1} m_l^\alpha (S_{m_{l+1}}(f)(x) - S_{m_l}(f)(x)). \quad (15)$$

Наконец, в силу (13) и леммы 7 имеем

$$\|S_{m_{l+1}}(f) - S_{m_l}(f)\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leq 4 \mathfrak{E}_{m_l}(f)_1.$$

Осталось заметить, что при $l \geq n$ верно равенство $\mathfrak{E}_{m_l}(f)_1 = 0$, а при остальных l – неравенство $\mathfrak{E}_{m_l}(f)_1 \leq \|f\|_{L(\mathbb{R}_+)}$, и что $\sum_{l=-\infty}^{k-1} m_l^\alpha \leq C m_k^\alpha$. С учетом этих оценок из соотношения (15) получаем неравенство теоремы. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Можно доказать аналог теоремы 4 для оператора D^α тем же методом, что и теорему 4, с использованием теоремы 6. Оценка вида (7) в доказательстве теоремы 3 с $h^\alpha(y)$ вместо $h^{-\alpha}(y)$ в случае оператора D^α не обеспечивает сходимости интеграла $\int_0^{m_l} f(u) du$ к нулю.

§ 4. Производная и интеграл произвольного порядка в $L_q(\mathbb{R}_+)$, $1 < q \leq 2$

Как отмечалось во введении, при $1 < q \leq 2$ мультипликативное преобразование Фурье вводится как некоторый предел в среднем, а при $q > 2$ такого определения нет. Поэтому в первую очередь рассматривается случай $1 < q \leq 2$. Определения модифицированных сильных мультипликативных производной и интеграла одинаковы при всех $q \geq 1$. Пусть $f \in L_q(\mathbb{R}_+)$, $\alpha > 0$ и существуют функции $\varphi, \psi \in L_q(\mathbb{R}_+)$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi - f * W_n^\alpha\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi - f * \Lambda_n^\alpha\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} = 0.$$

Тогда φ называется МСМИ для f порядка α в $L_q(\mathbb{R}_+)$, а ψ называется МСМП для f порядка α в $L_q(\mathbb{R}_+)$. По-прежнему в первом случае записываем $\varphi = J_\alpha(f)$, а во втором — $\psi = D^\alpha(f)$. В этом параграфе положим по определению

$$S_y(f)(x) = \int_0^y F(f)(t)\chi(x, t) dt.$$

С помощью предельного перехода можно показать, что $S_{m_n}(f) = f * D_{m_n}$. Докажем сначала аналог известного свойства свертки, а затем аналог теоремы 1.

ЛЕММА 12. Пусть $1 < q \leq 2$, $f \in L_q(\mathbb{R}_+)$, $g \in L(\mathbb{R}_+)$. Тогда $F(f * g)(x) = F(f)(x)\hat{g}(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_t(x) = f(x)X_{[0,t]}(x)$. Тогда $f_t \in L(\mathbb{R}_+) \cap L_q(\mathbb{R}_+)$ и $F(f_t)(x) = \hat{f}_t(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$ (это показывается аналогично работе [6, с. 426] с учетом леммы 6). Кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|f - f_t\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|F(f) - \hat{f}_t\|_{L_{q'}(\mathbb{R}_+)} = 0,$$

а $\hat{g}$ ограничена на $\mathbb{R}_+$. Значит,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|(f_t * g)^\wedge(x) - F(f)(x)\hat{g}(x)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}_+)} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{g}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \|F(f) - \hat{f}_t\|_{L_{q'}(\mathbb{R}_+)} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|F(f * g)(x) - F(f_t * g)(x)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}_+)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|(f_t * g)^\wedge - F(f * g)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}_+)} = 0,$$

так как $f_t * g \rightarrow f * g$ в $L_q(\mathbb{R}_+)$ при $t \rightarrow \infty$. Из этих соотношений следует утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\alpha > 0$, $1 < q \leq 2$, $f, g \in L_q(\mathbb{R}_+)$. Тогда равенство $g = J_\alpha(f)$ имеет место в том и только в том случае, когда

$$F(g)(x) = F(f)(x)h^\alpha(x) \quad \text{почти всюду на } \mathbb{R}_+, \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{1/m_n}(g)\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} = 0. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - f * W_n^\alpha\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} = 0$. Тогда по лемме 12 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(g) - F(f)(W_n^\alpha)^\wedge\|_{L_{q'}(\mathbb{R}_+)} = 0.$$

Значит, при каждом фиксированном $r \in \mathbb{N}$ (см. лемму 10) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(g) - F(f)h^\alpha X_{[m-n, \infty)}\|_{L_{q'}[m-r, \infty)} = 0.$$

Однако при $n \geq r$ на промежутке $[m-r, \infty)$ выражение под знаком нормы равно $h^\alpha F(f) - F(g)$. Таким образом, условие (16) имеет место почти всюду на $[m-r, \infty)$ при $r \in \mathbb{N}$, а в силу произвольного выбора r — при почти всех $x \in [0, \infty)$. Далее, поскольку $f * W_n^\alpha \rightarrow g$ в $L_q(\mathbb{R}_+)$ и $\|D_{m_l}\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 1$, то при $n \geq n_0(\varepsilon)$ и $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|f * W_n^\alpha * D_{m-l} - g * D_{m-l}\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} < \varepsilon.$$

Однако $(W_n^\alpha * D_{m-l})^\wedge = h^\alpha X_{[m-n, \infty)} X_{[0, m-l]}$. Ясно, что последнее произведение равно нулю при $l > n$. По теореме единственности $W_n^\alpha * D_{m-l} = 0$ при $l > n \geq n_0$, откуда $\|g * D_{m-l}\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} < \varepsilon$ при $l > n_0$, что означает выполнение равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{m-n}(g)\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} = 0.$$

Пусть теперь выполнены условия (16) и (17). Снова рассмотрим $f_t = fX_{[0, t]}$. Согласно (6) при $n > k$ имеем

$$\begin{aligned} (f_t * W_n^\alpha - f_t * W_k^\alpha)(x) &= \int_{m-n}^{m-k} \hat{f}_t(y) h^\alpha(y) \chi(x, y) dy \\ &= \sum_{l=-n}^{-k-1} m_l^{-\alpha} (S_{m_{l+1}}(f_t)(x) - S_{m_l}(f_t)(x)). \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку $W_n^\alpha \in L(\mathbb{R}_+)$ и $\hat{f}_t \rightarrow F(f)$ в $L_{q'}(\mathbb{R}_+)$, то, переходя в (18) к пределу при $t \rightarrow \infty$, в силу неравенства Гёльдера получаем

$$f * W_n^\alpha(x) - f * W_k^\alpha(x) = \int_{m-n}^{m-k} F(g)(t) \chi(x, t) dt = S_{m-k}(g)(x) - S_{m-n}(g)(x).$$

Применяя условие (17), получаем фундаментальность $\{f * W_n^\alpha\}$ и сходимости этой последовательности к некоторой функции $\varphi \in L_q(\mathbb{R}_+)$. Согласно доказательству необходимости имеем $F(\varphi) = F(g)$, откуда по лемме 6 легко следует, что $\varphi = g$ почти всюду. Теорема доказана.

Аналогом теоремы 6 является

ТЕОРЕМА 11. Пусть $f, g \in L_q(\mathbb{R}_+)$, $1 < q \leq 2$, $\alpha > 0$. Тогда $g = D^\alpha(f)$ в том и только в том случае, когда $F(g)(x) = F(f)(x)h^{-\alpha}(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g = D^\alpha(f)$. Тогда из сходимости последовательности $\{f * \Lambda_n^\alpha\}$ к g в $L_q(\mathbb{R}_+)$ в силу леммы 12 следует сходимость $\hat{\Lambda}_n^\alpha F(f)$ к $F(g)$ в $L_{q'}(\mathbb{R}_+)$ и, тем более, в $L_{q'}[0, m_r]$ при фиксированном $r \in \mathbb{N}$. Однако согласно (9) имеем $\hat{\Lambda}_n^\alpha(x) = h^{-\alpha}(x) X_{[0, m_n)}(x)$ и при $n > r$ на $[0, m_r)$ функция $\hat{\Lambda}_n^\alpha(x)F(f)(x)$ не зависит от n , откуда $F(g) = F(f)h^{-\alpha}$ почти всюду на $[0, m_r)$ при всех $r \in \mathbb{N}$, а стало быть, и на всем $\mathbb{R}_+$.

Пусть теперь $F(g) = F(f)h^{-\alpha}$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Аналогично доказательству теоремы 6 при $n > l$ имеем

$$\begin{aligned} (f_t * \Lambda_n^\alpha - f_t * \Lambda_l^\alpha)(x) &= \int_{m_l}^{m_n} \hat{f}_t(y) h^{-\alpha}(y) \chi(x, y) dy \\ &= \sum_{k=l}^{n-1} m_k^\alpha (S_{m_{k+1}}(f_t)(x) - S_{m_k}(f_t)(x)). \end{aligned}$$

Аналогично доказательству теоремы 10 при $t \rightarrow \infty$ получаем в $L_q(\mathbb{R}_+)$

$$\begin{aligned} (f * \Lambda_n^\alpha - f * \Lambda_l^\alpha)(x) &= \int_{m_l}^{m_n} F(f)(y) h^{-\alpha}(y) \chi(x, y) dy = \int_{m_l}^{m_n} F(g)(y) \chi(x, y) dy \\ &= S_{m_n}(g)(x) - S_{m_l}(g)(x) = (g(x) - S_{m_l}(g)(x)) - (g(x) - S_{m_n}(g)(x)). \end{aligned} \quad (19)$$

Из доказательства леммы 2 настоящей статьи (см. [11]) легко следует, что первое утверждение этой леммы справедливо при замене $L(\mathbb{R}_+)$ на $L_q(\mathbb{R}_+)$. Отсюда получаем фундаментальность $\{f * \Lambda_n^\alpha\}$ и сходимость этой последовательности к $\varphi \in L_q(\mathbb{R}_+)$. Согласно доказательству необходимости имеем $F(\varphi) = F(g)$ в $L_{q'}(\mathbb{R}_+)$, откуда по лемме 6 получаем, что $\varphi = g$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $f \in L_q(\mathbb{R}_+)$, $1 < q \leq 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{1/m_n}(f)\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} = 0$. Если при некотором $\alpha > 0$ существует $D^\alpha(f) = g \in L_q(\mathbb{R}_+)$, то существует и $J_\alpha(g) = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g = D^\alpha(f)$. Тогда по лемме 12 и теореме 11

$$F(g * W_n^\alpha) = F(g) \widehat{W}_n^\alpha = F(f) X_{[m_n, \infty)},$$

откуда $F(g * W_n^\alpha - f) = F(f) X_{[0, m_n)}$. По лемме 6 имеем

$$(g * W_n^\alpha - f)(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{m_n} F(f)(y) D_x(y) dy \right)$$

почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Пусть $\Phi(x) = \int_0^{m_n} F(f)(y) D_x(y) dy$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (\Phi(x+h) - \Phi(x)) - \int_0^{m_n} F(f)(y) \chi(y, x) dy \\ = \int_0^{m_n} F(f)(y) \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} (\chi(y, t) - \chi(y, x)) dt \right) dy. \end{aligned} \quad (20)$$

Если $y < m_n$, то согласно [3, с. 36] функция $\chi(y, t)$ постоянна на любом I_k^{-n} . Если $x \neq km_n$, то при малых h отрезок $[x, x+h]$ ($[x+h, x]$) принадлежит некоторому полуинтервалу I_l^{-n} , и тогда внутренний интеграл в (20) равен нулю. Таким образом, почти всюду на $\mathbb{R}_+$ имеем равенство

$$(g * W_n^\alpha - f)(x) = \int_0^{m_n} F(f)(y) \chi(x, y) dy = S_{m_n}(f)(x).$$

В силу условия теоремы правая часть стремится к нулю в $L_q(\mathbb{R}_+)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 13. Пусть $1 < q \leq 2$, $f \in L_q(\mathbb{R}_+)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{1/m_n}(f)\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} = 0$. Если при некотором $\alpha > 0$ существует $g = J_\alpha(f) \in L_q(\mathbb{R}_+)$, то существует и $D^\alpha(g) = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично замечанию 2 равенство $g = J_\alpha(f)$ можно записать в виде

$$\lim_{k, n \rightarrow \infty} \|\delta(k, n)\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} := \lim_{k, n \rightarrow \infty} \left\| g - f * \int_{m_n}^{m_k} \chi(x, y) h^\alpha(y) dy \right\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} = 0.$$

Соответственно, существует $D^\alpha g = \varphi$, если имеет место равенство

$$\lim_{k, n \rightarrow \infty} \left\| \varphi - g * \int_{m_n}^{m_k} \chi(x, y) h^{-\alpha}(y) dy \right\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} = 0.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_0^{m-n} h^{-\alpha}(y) \chi(x, y) dy &= \sum_{k=n}^{\infty} \int_{m-k-1}^{m-k} h^{-\alpha}(y) \chi(x, y) dy \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} m_{-k-1}^{\alpha} (D_{m-k}(x) - D_{m-k-1}(x)). \end{aligned}$$

Последнее выражение при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю в $L(\mathbb{R}_+)$, и поэтому свертка g с этим выражением стремится к нулю в $L_q(\mathbb{R}_+)$. Наконец, учитывая, что $h^{\alpha}(y)X_{[m-n, m_k]}(y) \in L_p(\mathbb{R}_+)$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, по лемме 11 получаем

$$\begin{aligned} f * \int_{m-n}^{m_k} h^{\alpha}(y) \chi(x, y) dy * \int_{m-s}^{m_r} h^{-\alpha}(y) \chi(x, y) dy \\ = f * \int_0^{\infty} X_{[m-n, m_k]}(y) X_{[m-s, m_r]}(y) \chi(x, y) dy. \end{aligned}$$

В итоге при достаточно больших k и n имеем

$$\begin{aligned} g * \int_{m-s}^{m_r} h^{-\alpha}(y) \chi(x, y) dy &= f * \int_{m-n}^{m_k} h^{\alpha}(y) \chi(x, y) dy * \int_{m-s}^{m_r} h^{-\alpha}(y) \chi(x, y) dy \\ &\quad + \delta(k, n) * \int_{m-s}^{m_r} h^{-\alpha}(y) \chi(x, y) dy \\ &= S_{m_r}(f)(x) - S_{m-s}(f)(x) + \delta(k, n) * \int_{m-s}^{m_r} h^{-\alpha}(y) \chi(x, y) dy. \end{aligned}$$

При фиксированных r, s и $k, n \rightarrow \infty$ с помощью неравенства Гёльдера находим, что

$$g * \int_{m-s}^{m_r} h^{-\alpha}(y) \chi(x, y) dy = S_{m_r}(f)(x) - S_{m-s}(f)(x).$$

Поскольку первое утверждение леммы 2 верно во всех $L_q(\mathbb{R}_+)$, то в условиях теоремы при $r, s \rightarrow \infty$ и правая, и левая части последнего равенства стремятся к $f(x)$ в $L_q(\mathbb{R}_+)$. Таким образом, $D^{\alpha}(g) = f$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Идея доказательства теоремы 13 принадлежит Хэ Зелину [14]. В формулировке этой теоремы можно опустить ограничение $1 < q \leq 2$.

ТЕОРЕМА 14. Пусть $f \in L_q(\mathbb{R}_+)$, $1 < q \leq 2$, $\alpha > 0$, $\psi(k)$ — убывающая к нулю положительная последовательность, удовлетворяющая условию (8). Тогда если $\|S_{1/m_n}(f)\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} = O(\psi(n)/m_n^{\alpha})$, то существует $J_{\alpha}(f) \in L_q(\mathbb{R}_+)$ и при этом

$$\|f * W_n^{\alpha} - J_{\alpha}(f)\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} = O(\psi(n)).$$

Если же $\omega_k(f)_q = O(\psi(k)/m_k^{\alpha})$, то существует $D^{\alpha}(f) \in L_q(\mathbb{R}_+)$, причем

$$\|f * \Lambda_n^{\alpha} - D^{\alpha}(f)\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} = O(\psi(n)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения проводятся аналогично доказательствам теорем 5 и 8. Так, переходя в (18) к пределу при $t \rightarrow \infty$ в $L_q(\mathbb{R}_+)$, получаем

$$\|f * W_n^\alpha - f * W_k^\alpha\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} \leq \sum_{l=-n}^{-k-1} m_l^{-\alpha} \|S_{m_{l+1}}(f) - S_{m_l}(f)\|_{L_q(\mathbb{R}_+)},$$

что является аналогом неравенства из (9) и доказательство первого утверждения теоремы заканчивается аналогично доказательству теоремы 5. Для доказательства второго утверждения заметим, что соотношение (19) является аналогом (12), и поэтому доказательство завершается так же, как и теоремы 8. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 11. Пусть $f \in L_q(\mathbb{R}_+) \cap G_n$, $1 < q \leq 2$, такова, что при данном $\alpha > 0$ существует $D^\alpha(f)$. Тогда справедливо неравенство

$$\|D^\alpha(f)\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} \leq C m_n^\alpha \|f\|_{L_q(\mathbb{R}_+)},$$

где C не зависит от f и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_j = fX_{[0, m_j]} \in L_q(\mathbb{R}_+) \cap L(\mathbb{R}_+) \cap G_n$ при $j, n \in \mathbb{N}$. Тогда для f_j верна формула (15) и ввиду неравенства $\|S_{m_l}(f)\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L_q(\mathbb{R}_+)}$ можно переходить к пределу при $j \rightarrow \infty$, т. е. соотношение (15) верно для f . Из леммы 7 следует, что

$$\|S_{m_{l+1}} - S_{m_l}\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} \leq 4\mathfrak{E}_{m_l}(f)_q,$$

поэтому доказательство завершается аналогично доказательству теоремы 9.

Последняя теорема является аналогом теоремы вложения Харди–Литтлвуда–Соболева (см. [15, с. 141, 142]).

ТЕОРЕМА 15. Пусть $1 < p < q < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{R}_+)$, $\alpha = 1/p - 1/q$ и существует $J_\alpha(f) \in L_p(\mathbb{R}_+)$. Тогда $J_\alpha(f) \in L_q(\mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку по условию $W_n^\alpha * f$ сходится в $L_p(\mathbb{R}_+)$ к $J_\alpha(f)$, то по теореме Ф. Рисса [13, с. 96] существует подпоследовательность $W_{n_k}^\alpha * f$, сходящаяся к $J_\alpha(f)$ почти всюду. Исходя из равенства (3) следует рассмотреть

$$V_n^\alpha = \sum_{k=-\infty}^{-n} (1 - p_{1-k}^{-\alpha}) m_{k-1}^{-\alpha} m_k X_{[0, m_{-k}]}.$$

Тогда $J_\alpha(f) = W_{n_k}^\alpha * f + V_{n_k}^\alpha * f$ почти всюду. При этом

$$\|V_n^\alpha\|_{L_{p'}(\mathbb{R}_+)} \leq C_1(\alpha) \sum_{k=n}^{\infty} m_k^{-1/q} \leq C_2(\alpha) m_n^{-1/q}.$$

Согласно частному случаю неравенства Юнга, приведенному во введении ($q = \infty$, $r = p'$), имеем

$$\|V_{n_k}^\alpha * f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq C_3(\alpha, f) m_{n_k}^{-1/q}.$$

Теперь докажем, что $J_\alpha(f)$ имеет слабый тип (p, q) при $\alpha = 1/p - 1/q$. В самом деле, пусть $\lambda > 0$ фиксировано. Тогда

$$|\{x: |J_\alpha(f)(x)| > \lambda\}| \leq \left| \left\{ x: |W_{n_k}^\alpha * f| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| + \left| \left\{ x: |V_{n_k}^\alpha * f| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right|.$$

Однако при $C_3 m_{n_k}^{-1/q} \leq \lambda/2$ второе слагаемое справа равно нулю. Фиксируем наименьшее такое k , тогда $m_{n_k} \asymp \lambda^{-q}$. Поскольку по следствию 2 $W_{n_k}^\alpha \in L(\mathbb{R}_+)$, то, применяя частный случай неравенства Юнга (при $p = q$, $r = 1$) и неравенство Чебышева, получаем

$$\left| \left\{ x: |W_{n_k}^\alpha * f| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \leq \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{-p} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}^p \|W_{n_k}^\alpha\|_{L(\mathbb{R}_+)}^p.$$

В силу соотношения (3) находим, что $\|W_{n_k}^\alpha\|_{L(\mathbb{R}_+)}^p \leq C_4 m_{n_k}^\alpha$, откуда имеем

$$|\{x: |J_\alpha(f)(x)| > \lambda\}| \leq C_5 \lambda^{-p} (\lambda^{-q})^{\alpha p} = C_5 \lambda^{-q},$$

что и требовалось доказать. С помощью леммы 8 (если $1/p_0 - 1/q_0 = 1/p_1 - 1/q_1 = \alpha$, то для p и q из леммы 8 имеем $1/p - 1/q = \alpha$) завершаем доказательство теоремы.

Автор выражает благодарность профессору Б.И. Голубову за полезные обсуждения результатов работы.

Список литературы

1. Butzer P.L., Wagner H.J., “Walsh–Fourier series and the concept of derivative”, *Applicable Anal.*, **3** (1973), 29–46.
2. Butzer P.L., Wagner H.J., “A calculus for Walsh functions defined on $\mathbb{R}_+$ ”, *Proc. Symp. Naval Res. Laboratory. April 18–20, D. C., Washington, 1973*, 75–81.
3. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А., *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987.
4. Pal J., “On the connection between the concept of a derivative defined on the dyadic field and the Walsh–Fourier transform”, *Annales Sci. Univ. Budapest. Sect. Math.*, **18** (1976), 49–54.
5. Wagner H.J., “On dyadic analysis for functions defined on $\mathbb{R}_+$ ”, *Proc. Symp. “Theory and applications of Walsh functions”*, Coll. Hatfield Polytechnic, 1975, 101–129.
6. Schipp F., Wade W.R., Simon P., *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis*, Akademiai Kiado, Budapest, 1990.
7. Голубов Б.И., “О модифицированном сильном двоичном интеграле и производной”, *Матем. сб.*, **193**:4 (2002), 37–60.
8. Onneweer C.W., “On the definition of dyadic differentiation”, *Applicable Anal.*, **9** (1979), 267–278.
9. Голубов Б.И., “Модифицированный двоичный интеграл и производная дробного порядка”, *Функцион. анализ и его прилож.*, **39**:2 (2005), 64–70.
10. Onneweer C.W., “Fractional differentiation and Lipschitz spaces on local fields”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **258**:1 (1980), 155–165.

11. Волосивец С. С., “Модифицированный $\mathbf{P}$ -ичный интеграл и модифицированная $\mathbf{P}$ -ичная производная для функций, определенных на полуоси”, *Изв. вузов. Математика*, 2005, № 6, 28–39.
12. Берг Й., Лефстрем Й., *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.
13. Натансон И. П., *Теория функций вещественной переменной.*, 3-е изд., Наука, М., 1974.
14. Zelin He., “The p -adic differential-integral type operator”, *Analysis Math.*, **19** (1993), 65–84.
15. Стейн И, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

С. С. Волосивец (S. S. VOLOSIVETS)
Саратовский государственный университет
E-mail: volosivetsSS@mail.ru

Поступило в редакцию
19.05.2005