Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Сгибнев, Точная асимптотика решений для уравнений многомерного восстановления, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 2, 159–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/im562>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 03:13:11

УДК 517.962.28 + 519.218.24

М. С. Сгибнев

Точная асимптотика решений для уравнений многомерного восстановления

Получены разложения для решений многомерных уравнений восстановления с точной асимптотикой остатков. Учтено влияние корней характеристического уравнения на асимптотическое поведение решений. Полученные результаты применяются к исследованию асимптотики среднего числа частиц зависящих от возраста ветвящихся процессов, имеющих несколько типов частиц.

Библиография: 18 наименований.

§ 1. Введение

Настоящая работа является продолжением [1]. Напомним постановку задачи. Под уравнением многомерного восстановления понимается система уравнений (см. [2, гл. VIII, § 9])

$$X_{im}(x) = K_{im}(x) + \sum_{j=1}^n \int_0^x X_{jm}(x-u) F_{ij}(du), \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, n$, $m = 1, \dots, m_1$, F_{ij} – неотрицательные конечные меры на $[0, \infty)$, $i, j = 1, \dots, n$, а $K_{im}(x)$, $i = 1, \dots, n$, $m = 1, \dots, m_1$, – измеримые, ограниченные в каждом конечном интервале функции. В матричной форме система уравнений (1) принимает вид

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{K}(x) + \mathbf{F} * \mathbf{X}(x), \quad (2)$$

где $\mathbf{X}(x)$, $\mathbf{K}(x)$ – матрицы порядка $n \times m_1$, а $\mathbf{F}$ – матрица порядка $n \times n$ с элементами $X_{im}(x)$, $K_{im}(x)$, F_{ij} соответственно; общим элементом свертки $\mathbf{F} * \mathbf{X}(x)$ матричной меры $\mathbf{F}$ и матричной функции $\mathbf{X}(x)$ является сумма из правой части равенства (1). В настоящей работе предполагается, что $K_{im}(x)$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации на $[0, \infty)$. Каждая такая функция естественным образом порождает конечную вещественнозначную меру на $[0, \infty)$, которую мы будем обозначать той же буквой с теми же индексами. Будем искать решение системы (1) в классе непрерывных справа функций $X_{im}(x)$, имеющих ограниченную вариацию на каждом конечном отрезке, или, что то же, в классе σ -конечных мер X_{im} на $[0, \infty)$, для которых $X_{im}(x)$ суть их функции распределения: $X_{im}(x) = X_{im}([0, x])$.

Уравнения многомерного восстановления (системы уравнений восстановления) изучались многими авторами (см. библиографию в [3], а также работы [2], [4]–[6]).

Для произвольной комплекснозначной меры ν определим ее *преобразование Лапласа* как $\hat{\nu}(s) := \int_{\mathbb{R}} e^{sx} \nu(dx)$ для тех значений $s \in \mathbb{C}$, при которых данный интеграл имеет смысл, т.е. сходится абсолютно относительно полной вариации $|\nu|$ меры ν . Если $\mathbf{A} = (A_{ij})$ – матрица, элементами которой являются меры (вообще говоря, комплекснозначные), то через $\hat{\mathbf{A}}(s)$ будем обозначать матрицу, состоящую из преобразований Лапласа $\hat{A}_{ij}(s)$ элементов матрицы $\mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{I}$ – единичная матрица порядка $n \times n$.

Асимптотическое поведение решения $\mathbf{X}(x)$ уравнения (2) при $x \rightarrow \infty$ существенно зависит от свойств матрицы $\mathbf{F}$. Настоящая работа посвящена изучению влияния корней *характеристического уравнения*

$$\det(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)) = 0 \quad (3)$$

на асимптотику решения $\mathbf{X}(x)$ уравнения восстановления (2) при $x \rightarrow \infty$, причем речь здесь пойдет о *точной* асимптотике решения $\mathbf{X}(x)$, понимаемой в следующем смысле: $\mathbf{X}(x) = \mathbf{A}(x) + \boldsymbol{\varrho}(x)$, где $\mathbf{A}(x)$ – однозначно определяемая матричная функция (главная часть асимптотического разложения для $\mathbf{X}(x)$), а $\boldsymbol{\varrho}(x)$ – остаток такой, что для заданной функции сравнения $\tau(x)$ существует предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varrho}(x)/\tau(x)$, выражаемый в явном виде через пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{F}((x, \infty))}{\tau(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{K}((x, \infty))}{\tau(x)}.$$

В работе [1] для остатка были получены оценки вида $\boldsymbol{\varrho}(x) = o(1/\varphi(x))$, $x \rightarrow \infty$, где $\varphi(x)$ – полумультимпликативная функция.

В качестве применения полученных результатов будет установлена точная асимптотика среднего числа частиц зависящих от возраста ветвящихся процессов, имеющих несколько типов частиц.

§ 2. Предварительные сведения

Пусть $\mathbf{B}$ – квадратная матрица порядка n и $\mu_1, \dots, \mu_n$ – ее собственные значения. Величина $\max_{1 \leq j \leq n} |\mu_j|$ называется *спектральным радиусом* матрицы $\mathbf{B}$. По теореме Перрона–Фробениуса [7, теорема 9.2.1] любая неотрицательная неприводимая матрица $\mathbf{B}$ имеет положительное собственное значение r кратности 1, равное ее спектральному радиусу, и существуют положительные правый и левый собственные векторы, соответствующие r . Далее будем предполагать, что матрица $\hat{\mathbf{F}}(0) = (\hat{F}_{ij}(0)) = (F_{ij}([0, \infty)))$ неприводима, а спектральный радиус матрицы $\mathbf{F}(\{0\}) = (F_{ij}(\{0\}))$ меньше единицы.

В терминах преобразований Лапласа уравнение (2) можно записать в виде $\hat{\mathbf{X}}(s) = \hat{\mathbf{K}}(s) + \hat{\mathbf{F}}(s)\hat{\mathbf{X}}(s)$. Следовательно,

$$\hat{\mathbf{X}}(s) = [\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \hat{\mathbf{K}}(s) := \hat{\mathbf{H}}(s) \hat{\mathbf{K}}(s), \quad (4)$$

где через $\hat{\mathbf{H}}(s)$ обозначено преобразование Лапласа *матричной меры восстановления*

$$\mathbf{H} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{F}^{k*};$$

здесь $F^{1*} := F$, $F^{(k+1)*} := F^{k*} * F = F * F^{k*}$, $F^{0*} := \delta_0 I$, где δ_0 – мера единичной массы, сосредоточенная в нуле. Таким образом, $X = H * K$ или $X(x) = \int_0^x H(du) K(x-u)$.

Для того чтобы установить асимптотическое разложение для решения $X(x)$ с точной асимптотикой остаточного члена, нам потребуются сведения из теории банаховых алгебр мер с заданным поведением “хвостов” на бесконечности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Распределение вероятностей G , сосредоточенное на полу-прямой $[0, \infty)$, принадлежит классу $\mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, если

$$\begin{aligned} G((x, \infty)) &> 0, \quad x \geq 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G((x+y, \infty))}{G((x, \infty))} &= e^{-\gamma y}, \quad y \in \mathbb{R}, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G * G((x, \infty))}{G((x, \infty))} &= 2 \int_0^\infty e^{\gamma x} G(dx) < \infty. \end{aligned}$$

Класс $\mathcal{S}(0)$ (впоследствии получивший название класса *субэкспоненциальных* распределений) был введен в работе [8], а классы $\mathcal{S}(\gamma)$ для положительных γ – в работах [9] и [10]. Для того чтобы дать представление о распределениях из класса $\mathcal{S}(\gamma)$, приведем два примера [9]:

- 1) распределение G абсолютно непрерывно с плотностью $g(x) \sim x^{-b} e^{-\gamma x}$ при $x \rightarrow \infty$, $b > 1$;
- 2) распределение G абсолютно непрерывно с плотностью $g(x) \sim \exp\{-ax^\alpha\} \times e^{-\gamma x}$ при $x \rightarrow \infty$, $a > 0$, $0 < \alpha < 1$;

соотношение $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow x_0$, означает асимптотическую эквивалентность функций: $f(x)/g(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow x_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, называется *полумультипликативной*, если она конечна, положительна, измерима по Борелю и удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x+y) \leq \varphi(x)\varphi(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Имеют место соотношения [11, теорема 7.6.2]

$$\begin{aligned} -\infty < r_-(\varphi) &:= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \varphi(x)}{x} = \sup_{x < 0} \frac{\ln \varphi(x)}{x} \\ &\leq \inf_{x > 0} \frac{\ln \varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \varphi(x)}{x} := r_+(\varphi) < +\infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим через $S(\varphi)$ совокупность всех комплекснозначных σ -конечных мер ν , определенных на σ -алгебре $\mathcal{B}$ борелевских подмножеств прямой $\mathbb{R}$, таких, что $\|\nu\|_\varphi := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)|\nu|(dx) < \infty$. Совокупность $S(\varphi)$ – банахова алгебра с нормой $\|\nu\|_\varphi$; операцией умножения элементов ν и κ из $S(\varphi)$ служит их свертка $\nu * \kappa$, а единицей – мера δ_0 . (Теория банаховых алгебр $S(\varphi)$ для мер, сосредоточенных на $[0, \infty)$, изложена в [11, гл. 4].) Из соотношений (5) вытекает, что преобразование Лапласа $\hat{\nu}(s)$ произвольной меры $\nu \in S(\varphi)$ абсолютно сходится относительно полной вариации $|\nu|$ при $r_-(\varphi) \leq \operatorname{Re} s \leq r_+(\varphi)$. Пусть $\gamma' \leq 0 \leq \gamma$. Положим $S(\gamma', \gamma) := S(\varphi)$, где $\varphi(x) = \max(e^{\gamma' x}, e^{\gamma x})$. Тогда для любого элемента $\nu \in S(\gamma', \gamma)$ преобразование Лапласа $\hat{\nu}(s)$ определено в полосе

$$\Pi(\gamma', \gamma) := \{s \in \mathbb{C} : \gamma' \leq \operatorname{Re} s \leq \gamma\}.$$

Заметим, что параметр $\gamma' \leq 0$ играет вспомогательную роль и будет выбираться таким образом, чтобы все корни характеристического уравнения (3) лежали в полосе $\Pi(\gamma', \gamma)$. Произвольность выбора γ' не повлияет на окончательные результаты настоящей работы.

Фиксируем произвольное $G \in \mathcal{S}(\gamma)$. Положим $\tau(x) := G((x, \infty))$ и

$$Q(\nu) := \sup_{x \geq 0} \frac{|\nu|((x, \infty))}{\tau(x)}, \quad \nu \in S(0, \gamma).$$

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{S}(\tau)$ всех мер $\nu \in S(0, \gamma)$ таких, что $Q(\nu) < \infty$ и существует предел

$$\mathfrak{L}(\nu) := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\nu((x, \infty))}{\tau(x)} \in \mathbb{C}.$$

Как показано в [12, предложение 2], $\mathfrak{S}(\tau)$ – банахова алгебра относительно некоторой нормы $\|\nu\|'$, эквивалентной норме $\|\nu\| + Q(\nu)$. Операции над мерами в алгебре $\mathfrak{S}(\tau)$ те же, что и в $S(\gamma', \gamma)$, и δ_0 – единичный элемент $\mathfrak{S}(\tau)$. Кроме того, для любых $\nu, \kappa \in \mathfrak{S}(\tau)$ выполнено равенство

$$\mathfrak{L}(\nu * \kappa) = \mathfrak{L}(\nu)\hat{\kappa}(\gamma) + \mathfrak{L}(\kappa)\hat{\nu}(\gamma). \quad (6)$$

Совокупности мер

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\tau) &:= \{\nu \in S(0, \gamma) : Q(\nu) < \infty\}, \\ \mathfrak{S}_0(\tau) &:= \left\{ \nu \in \mathfrak{S}(\tau) : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|\nu|((x, \infty))}{\tau(x)} = 0 \right\} \end{aligned}$$

также являются банаховыми алгебрами [12, предложение 2].

Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная коммутативная комплексная банахова алгебра с единицей e . Спектром $\sigma(a)$ элемента $a \in \mathcal{A}$ называется множество всех комплексных чисел λ таких, что элемент $a - \lambda e$ не имеет обратного. Если $f(z)$ – аналитическая функция в области, содержащей спектр элемента $a \in \mathcal{A}$, то существует элемент $f(a) \in \mathcal{A}$ такой, что $m[f(a)] = f[m(a)]$ для любого гомоморфизма $m: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ [13, § 3]. Элемент $f(a)$ называется значением аналитической функции $f(z)$ на элементе $a \in \mathcal{A}$.

Далее потребуется следующий результат о значениях аналитической функции на элементах банаховых алгебр $\mathfrak{S}(\tau)$, $\mathfrak{S}(\tau)$ и $\mathfrak{S}_0(\tau)$ [12, теорема 3]. Очевидно, что $S(\gamma', \gamma) \subset S(0, \gamma)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в области, содержащей спектр $\sigma(\nu)$ элемента $\nu \in S(\gamma', \gamma)$, и пусть $f(\nu)$ – значение $f(z)$ на $\nu \in S(\gamma', \gamma)$. Если $\nu \in \mathfrak{S}(\tau)$, то $f(\nu) \in \mathfrak{S}(\tau)$ и

$$\mathfrak{L}[f(\nu)] = f'[\hat{\nu}(\gamma)]\mathfrak{L}(\nu).$$

Аналогичные утверждения справедливы для элементов банаховых алгебр $\mathfrak{S}(\tau)$ и $\mathfrak{S}_0(\tau)$.

Преобразования Лапласа мер из $\mathfrak{S}(\tau)$ обладают следующим интересным свойством, которое нам понадобится при изучении влияния корней уравнения (3) на асимптотику решения $\mathbf{X}(x)$ уравнения (2).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\nu \in \mathfrak{S}(\tau) \cap S(\gamma', \gamma)$ и $\gamma' \leq \operatorname{Re} \xi < \gamma$. Если $\operatorname{Re} \xi = \gamma'$, то предположим дополнительно, что $\int_{-\infty}^0 |x| e^{\gamma' x} |\nu|(dx) < \infty$. Тогда функция

$$[T(\xi)\nu]^{\wedge}(s) := \frac{\hat{\nu}(s) - \hat{\nu}(\xi)}{s - \xi}, \quad s \in \Pi(\gamma', \gamma),$$

является преобразованием Лапласа меры $T(\xi)\nu \in \mathfrak{S}(\tau) \cap S(\gamma', \gamma)$ с плотностью

$$v(x; \xi) := \begin{cases} -\int_{-\infty}^x e^{\xi(y-x)} \nu(dy), & x < 0, \\ \int_x^{\infty} e^{\xi(y-x)} \nu(dy), & x \geq 0, \end{cases}$$

причем $\mathfrak{L}[T(\xi)\nu] = \mathfrak{L}(\nu)/(\gamma - \xi)$.

Теорема 2 доказана в работе [14]. Отметим, что в точке $s = \xi$ по непрерывности

$$[T(\xi)\nu]^{\wedge}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} x e^{\xi x} \nu(dx).$$

Обозначим для краткости $T := T(0)$.

Если $\xi = \gamma$, то справедлив следующий результат.

ЛЕММА 1. Пусть $\nu \in S(\gamma', \gamma)$ – неотрицательная мера такая, что

$$\int_{\mathbb{R}} |x| e^{\gamma x} \nu(dx) < \infty.$$

Если $T(\gamma)\nu \in \mathfrak{S}(\tau)$, то $\nu \in \mathfrak{S}(\tau)$, причем $\mathfrak{L}(\nu) = 0$.

Лемма 1 доказана в работе [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждения, аналогичные теореме 2 и лемме 1, справедливы и для мер, принадлежащих $\mathfrak{S}(\tau)$ и $\mathfrak{S}o(\tau)$; при этом доказательства практически не изменяются.

Абсолютно непрерывную компоненту произвольной неотрицательной меры ν обозначим через ν_c , а ее сингулярную компоненту – через ν_s : $\nu_s = \nu - \nu_c$. Если $\mathbf{F}$ – матрица, элементы которой суть неотрицательные меры, то через $\mathbf{F}_s$ обозначим матрицу, элементы которой суть сингулярные компоненты соответствующих элементов $\mathbf{F}$.

§ 3. Теоремы многомерного восстановления

Пусть $\gamma \geq 0$ и $\hat{\mathbf{F}}(\gamma) < \infty$. Предположим, что $\det(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)) \neq 0$ при $\operatorname{Re} s = \gamma$ и что множество $\mathcal{Z}$ корней характеристического уравнения (3), лежащих в полуплоскости $\{s \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} s \leq \gamma\}$, конечно. Обозначим элементы множества $\mathcal{Z}$ через $s_1, s_2, \dots, s_l$. Мы не исключаем случая $\mathcal{Z} = \emptyset$, при этом полагаем $l = 0$ и считаем $\sum_{j=1}^l := 0$ и $\prod_{j=1}^l := 1$. Пусть n_j – кратность корня s_j ; это означает, что

$$\det(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)) = (s - s_j)^{n_j} f_j(s),$$

где $f_j(s_j) \neq 0$. Если $\mathcal{Z} \neq \emptyset$, то среди элементов множества $\mathcal{Z}$ имеется один вещественный корень кратности единица, который мы будем обозначать через q ; для определенности $q = s_1$ и $n_1 = 1$. Если $s \in \mathcal{Z}$, то $\bar{s} \in \mathcal{Z}$ и корень $\bar{s}$ имеет ту же кратность, что и s .

Обозначим через $|\mathbf{K}|$ матрицу, элементами которой являются меры – полные вариации элементов матрицы $\mathbf{K}$. Пусть $|\mathbf{K}|^\wedge(\gamma) < \infty$. Рассмотрим матрицу $\hat{\mathbf{X}}(s) = [\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \hat{\mathbf{K}}(s)$. Ее элементы суть аналитические функции в полуплоскости $\{\operatorname{Re} s < \gamma\}$, за исключением точек $s_j \in \mathcal{Z}$, являющихся их полюсами порядков, не превосходящих n_j . Обозначим через

$$A_j(s) := \sum_{k=1}^{n_j} \frac{(-1)^k B_{jk}}{(s - s_j)^k}$$

главную часть разложения в ряд Лорана матричной аналитической функции $\hat{\mathbf{X}}(s)$ в окрестности изолированной особой точки $s = s_j \in \mathcal{Z}$. Имеется в виду, что элементы матрицы $A_j(s)$ суть главные части разложений в ряд Лорана соответствующих элементов матрицы $\hat{\mathbf{X}}(s)$ в окрестности s_j . Матричные коэффициенты B_{jk} зависят от матрицы $\mathbf{K}$, однако мы не будем фиксировать эту зависимость в обозначениях ради сокращения записи. Обозначим через $\mathcal{E}_j$ комплекснозначную меру с плотностью $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)e^{-s_j x}$ ($\mathbf{1}_A(x)$ – индикаторная функция множества A); преобразование Лапласа этой меры равно $1/(s_j - s)$, $\operatorname{Re}(s - s_j) < 0$.

Забегая вперед, отметим, что искомое разложение для решения $\mathbf{X}$ будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} B_{jk} \mathcal{E}_j^{k*} + \Delta_{\mathbf{K}}, \quad (7)$$

где остаток $\Delta_{\mathbf{K}}$ обладает теми или иными асимптотическими свойствами в зависимости от условий, налагаемых на исходные матрицы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{K}$. Если $\mathcal{Z} \neq \emptyset$, то основной вклад в асимптотику $\mathbf{X}$ будет давать член $B_{11} \mathcal{E}_1$, отвечающий корню $s_1 = q$ уравнения (3). Поэтому целесообразно вычислить коэффициент B_{11} в явном виде.

ЛЕММА 2. Пусть $\det(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(q)) = 0$ и $\hat{\mathbf{M}}(s)$ – присоединенная матрица к $\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)$. Предположим, что $\hat{\mathbf{F}}'(q) := (\hat{F}'_{ij}(q))$ – конечная матрица. Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$ и $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\hat{\mathbf{F}}(q)$. Тогда

$$\frac{\hat{\mathbf{M}}(q)}{\hat{\alpha}'(q)} = -\frac{\mathbf{r}\mathbf{l}}{\mathbf{l}\hat{\mathbf{F}}'(q)\mathbf{r}}, \quad B_{11} = \frac{\mathbf{r}\mathbf{l}\hat{\mathbf{K}}(q)}{\mathbf{l}\hat{\mathbf{F}}'(q)\mathbf{r}}.$$

Лемма 2 доказана в работе [1, лемма 1].

ТЕОРЕМА 3. Пусть $G \in \mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, и $\tau(x) = G((x, \infty))$, $x \geq 0$. Предположим, что $\hat{\mathbf{F}}(\gamma) < \infty$, $\int_0^\infty e^{\gamma x} |\mathbf{K}|(dx) < \infty$ и $\det(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)) \neq 0$ при $\operatorname{Re} s = \gamma$.

Допустим, что при некотором целом $m \geq 1$ спектральный радиус матрицы $(\mathbf{F}^{m*})_s^\wedge(\gamma)$ меньше единицы. Пусть $\mathcal{Z} = \{s_1, \dots, s_l\}$ – множество корней уравнения (3), лежащих в полуплоскости $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \leq \gamma\}$, с кратностями n_j , $j = 1, \dots, l$ ($\mathcal{Z} = \emptyset$ при $l = 0$). Тогда если $Q(\mathbf{K}) < \infty$ и существуют пределы

$$\mathfrak{L}(\mathbf{F}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{F}((x, \infty))}{\tau(x)}, \quad \mathfrak{L}(\mathbf{K}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{K}((x, \infty))}{\tau(x)},$$

то для решения $\mathbf{X}$ уравнения (2) справедливо представление (7), в котором

$$\int_0^\infty e^{\gamma x} |\Delta_{\mathbf{K}}|(dx) < \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{\mathbf{K}}((x, \infty))}{\tau(x)} = [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(\gamma)]^{-1} \mathfrak{L}(\mathbf{F}) [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(\gamma)]^{-1} \widehat{\mathbf{K}}(\gamma) + [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(\gamma)]^{-1} \mathfrak{L}(\mathbf{K}). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\mathbf{F}, \mathbf{K} \in \mathfrak{S}l(\tau)$. Далее, $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s))$, будучи линейной комбинацией произведений элементов матрицы $\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)$, представляет собой преобразование Лапласа $\widehat{\alpha}(s)$ некоторой меры $\alpha \in \mathfrak{S}l(\tau)$. Выберем $a > \gamma$ и положим $p = \sum_{j=1}^l n_j$. Рассмотрим функцию

$$d(s) := \frac{(s-a)^p \det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s))}{\prod_{j=1}^l (s-s_j)^{n_j}} = \frac{(s-a)^p \widehat{\alpha}(s)}{\prod_{j=1}^l (s-s_j)^{n_j}}.$$

Далее доказательство ввиду его большого объема удобно разбить на несколько лемм.

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда функция $d(s)$ – преобразование Лапласа $\widehat{D}(s)$ некоторой меры D из $\mathfrak{S}l(\tau)$, причем

$$\mathfrak{L}(D) = \frac{(\gamma-a)^p \mathfrak{L}(\alpha)}{\prod_{j=1}^l (\gamma-s_j)^{n_j}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разлагая рациональную функцию на простые дроби, имеем

$$d(s) = \left[1 + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{C_{jk}}{(s-s_j)^k} \right] \widehat{\alpha}(s), \quad (9)$$

где C_{jk} – константы. Применяя теорему 2 к каждому слагаемому в правой части равенства (9), получим в итоге, что $d(s) = \widehat{D}(s)$, где $D \in \mathfrak{S}l(\tau)$ и

$$\mathfrak{L}(D) = \left[1 + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{C_{jk}}{(\gamma-s_j)^k} \right] \mathfrak{L}(\alpha).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Элемент $D \in \mathfrak{S}l(\tau)$ обратим в $\mathfrak{S}l(\tau)$, причем

$$\mathfrak{L}(D^{-1}) = \frac{\prod_{j=1}^l (\gamma-s_j)^{n_j} \mathfrak{L}(\alpha)}{(\gamma-a)^p [\widehat{\alpha}(\gamma)]^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 3 из работы [1] при $N = 0$, $r_- = \gamma'$, $\varphi(x) = e^{\gamma x}$, $x \geq 0$, устанавливаем обратимость элемента $D \in S(\gamma', \gamma)$ в банаховой алгебре $S(\gamma', \gamma)$; таким образом, точка $z = 0$ не принадлежит спектру элемента $D \in S(\gamma', \gamma)$. По теореме 1, в которой полагаем $f(z) = 1/z$, имеем $D^{-1} \in \mathfrak{S}l(\tau)$ и выполняется требуемое равенство для $\mathfrak{L}(D^{-1})$. Лемма доказана.

Рассмотрим вспомогательную матрицу

$$\mathbf{q}(s) := \frac{\prod_{j=1}^l (s - s_j)^{n_j}}{(s - a)^p} [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1}, \quad s \in \{\gamma' \leq \operatorname{Re} s \leq \gamma\} \setminus \mathcal{Z}.$$

ЛЕММА 5. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда $\mathbf{q}(s)$ является матрицей преобразования Лапласа некоторой матрицы $\mathbf{Q}$ мер из $\mathfrak{S}l(\tau)$, причем

$$\mathfrak{L}(\mathbf{Q}) = \frac{\prod_{j=1}^l (\gamma - s_j)^{n_j}}{(\gamma - a)^p} [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(\gamma)]^{-1} \mathfrak{L}(\mathbf{F}) [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(\gamma)]^{-1}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\mathbf{q}(s) = [1/d(s)] \widehat{\mathbf{M}}(s)$, где $\widehat{\mathbf{M}}(s)$ – присоединенная матрица к $\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)$. Следовательно, по лемме 4 имеем $\mathbf{q}(s) = \widehat{\mathbf{Q}}(s)$, где $\mathbf{Q} = D^{-1} * \mathbf{M} \in \mathfrak{S}l(\tau)$ (элементы матрицы $\mathbf{Q}$ суть свертки меры D^{-1} с соответствующими элементами матрицы $\mathbf{M}$). Для того чтобы вычислить $\mathfrak{L}(\mathbf{Q})$, умножим $\mathbf{q}(s) = \widehat{\mathbf{Q}}(s)$ справа на $\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)$. Получим

$$\widehat{\mathbf{Q}}(s) [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)] = \frac{\prod_{j=1}^l (s - s_j)^{n_j}}{(s - a)^p} \mathbf{I}.$$

Поддействуем функционалом $\mathfrak{L}$ на обе части этого равенства. В силу равенства (6)

$$\mathfrak{L}(\mathbf{Q}) [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(\gamma)] - \widehat{\mathbf{Q}}(\gamma) \mathfrak{L}(\mathbf{F}) = \mathbf{0};$$

здесь $\mathbf{0}$ – нулевая матрица порядка $n \times n$. Умножая справа обе части этого равенства на $[\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(\gamma)]^{-1}$, устанавливаем (10). Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 3. Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{X}}(s) &= [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \widehat{\mathbf{K}}(s) = \frac{(s - a)^p}{\prod_{j=1}^l (s - s_j)^{n_j}} \widehat{\mathbf{Q}}(s) \widehat{\mathbf{K}}(s) \\ &= \left[1 + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{C_{jk}}{(s - s_j)^k} \right] \widehat{\mathbf{Q}}(s) \widehat{\mathbf{K}}(s) \end{aligned} \quad (11)$$

(здесь мы снова воспользовались разложением рациональной функции на простые дроби). Положим для краткости $\mathbf{W} := \mathbf{Q} * \mathbf{K}$. Очевидно, что $\mathbf{W} \in \mathfrak{S}l(\tau)$ и в силу (6)

$$\mathfrak{L}(\mathbf{W}) = \mathfrak{L}(\mathbf{Q}) \widehat{\mathbf{K}}(\gamma) + \widehat{\mathbf{Q}}(\gamma) \mathfrak{L}(\mathbf{K}). \quad (12)$$

Осуществим следующие преобразования:

$$\frac{\widehat{\mathbf{W}}(s)}{(s - s_j)^k} = \frac{\widehat{\mathbf{W}}(s_j)}{(s - s_j)^k} + \frac{\widehat{\mathbf{W}}(s) - \widehat{\mathbf{W}}(s_j)}{(s - s_j)^k} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\mathbf{w}_{i,j}(s_j)}{(s - s_j)^{k-i}} + \mathbf{w}_{k,j}(s), \quad (13)$$

где

$$\mathbf{w}_{0,j}(s) := \widehat{\mathbf{W}}(s), \quad \mathbf{w}_{i,j}(s) := \frac{\mathbf{w}_{i-1,j}(s) - \mathbf{w}_{i-1,j}(s_j)}{s - s_j}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Применяя теорему 2, видим, что матричная мера $\mathbf{W}_{i,j} := T(s_j)^i \mathbf{W}$ с преобразованием Лапласа $\mathbf{w}_{i,j}(s)$ принадлежит банаховой алгебре $\mathfrak{S}l(\tau)$, причем

$$\mathfrak{L}(\mathbf{W}_{i,j}) = \frac{\mathfrak{L}(\mathbf{W})}{(\gamma - s_j)^i}. \quad (14)$$

Подставляя соотношение (13) в (11) и производя суммирование, получим в силу единственности разложения аналитической функции в ряд Лорана, что

$$\left[1 + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{C_{jk}}{(s - s_j)^k} \right] \widehat{\mathbf{W}}(s) = \widehat{\mathbf{W}}(s) + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{(-1)^k \mathbf{B}_{jk}}{(s - s_j)^k} + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} C_{jk} \mathbf{w}_{k,j}(s).$$

Положим

$$\Delta_K := \mathbf{W} + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} C_{jk} T(s_j)^k \mathbf{W}.$$

Тогда $\Delta_K \in \mathfrak{S}l(\tau)$ и

$$\widehat{\mathbf{X}}(s) = \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{(-1)^k \mathbf{B}_{jk}}{(s - s_j)^k} + \widehat{\Delta}_K(s).$$

Переходя в этом равенстве от преобразований Лапласа к мерам, получим представление (7). Равенство (8) вытекает из (12), (14) и (10):

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\Delta_K) &= \frac{(\gamma - a)^p}{\prod_{j=1}^l (\gamma - s_j)^{n_j}} \mathfrak{L}(\mathbf{W}) \\ &= \frac{(\gamma - a)^p}{\prod_{j=1}^l (\gamma - s_j)^{n_j}} \left\{ \frac{\prod_{j=1}^l (\gamma - s_j)^{n_j}}{(\gamma - a)^p} [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(\gamma)]^{-1} \mathfrak{L}(\mathbf{F}) [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(\gamma)]^{-1} \widehat{\mathbf{K}}(\gamma) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\prod_{j=1}^l (\gamma - s_j)^{n_j}}{(\gamma - a)^p} [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(\gamma)]^{-1} \mathfrak{L}(\mathbf{K}) \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие, состоящее в том, что при некотором целом $m \geq 1$ спектральный радиус матрицы $\mathbf{Q}(m) = (Q_{kj}(m)) := (\mathbf{F}^{m*})_s^\wedge(\gamma)$ меньше единицы, является, вообще говоря, необходимым для того, чтобы остаток Δ_K в разложении (7) удовлетворял интегральной оценке $\int_0^\infty e^{\gamma x} |\Delta_K|(dx) < \infty$ (см. [1, замечание 1]).

В следующей теореме рассматривается точная асимптотика матричной меры восстановления $\mathbf{H}$ в “критическом” случае, когда $s = \gamma \geq 0$ является единственным корнем уравнения (3), лежащим в полуплоскости $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \leq \gamma\}$. Поскольку из неприводимости матрицы $\widehat{\mathbf{F}}(0)$ вытекает неприводимость матрицы $\widehat{\mathbf{F}}(\gamma)$, по теореме Перрона–Фробениуса [7, теорема 9.2.1] корень $s = \gamma$ имеет кратность, равную единице. Сначала докажем следующую простую лемму.

ЛЕММА 6. Пусть меры μ и ν таковы, что интегралы $\int_{\mathbb{R}} |x| e^{\gamma x} |\nu|(dx)$ и $\int_{\mathbb{R}} |x| e^{\gamma x} |\mu|(dx)$ конечны. Тогда

$$T(\gamma)(\mu * \nu) = [T(\gamma)\mu] * \nu + \hat{\mu}(\gamma)T(\gamma)\nu.$$

В частности, если меры ν_i , $T(\gamma)\nu_i \in \mathfrak{Sl}(\tau)$ и $\mathfrak{L}(\nu_i) = \mathfrak{L}[T(\gamma)\nu_i] = 0$, $i = 1, \dots, k$, то $T(\gamma)(\nu_1 * \dots * \nu_k) \in \mathfrak{Sl}(\tau)$ и $\mathfrak{L}[T(\gamma)(\nu_1 * \dots * \nu_k)] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы вытекает из равенства

$$\frac{\hat{\mu}(s)\hat{\nu}(s) - \hat{\mu}(\gamma)\hat{\nu}(\gamma)}{s - \gamma} = \frac{[\hat{\mu}(s) - \hat{\mu}(\gamma)]\hat{\nu}(s)}{s - \gamma} + \frac{\hat{\mu}(\gamma)[\hat{\nu}(s) - \hat{\nu}(\gamma)]}{s - \gamma}.$$

Обозначим через $\mathcal{E}_\gamma$ меру с плотностью $\mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)e^{-\gamma x}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $G \in \mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, и $\tau(x) = G((x, \infty))$, $x \geq 0$. Предположим, что $\int_0^\infty x^2 e^{\gamma x} \mathbf{F}(dx) < \infty$ и при некотором целом $m \geq 1$ спектральный радиус матрицы $(\mathbf{F}^{m*})_s^\wedge(\gamma)$ меньше единицы. Пусть $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(\gamma)) = 0$. Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\widehat{\mathbf{F}}(\gamma)$, так, чтобы $\mathbf{l}\mathbf{r} = 1$. Пусть $T^2(\gamma)\mathbf{F} \in \mathfrak{Sl}(\tau)$; в частности, это означает, что существует предел

$$\mathfrak{L}[T^2(\gamma)\mathbf{F}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau(x)} \int_x^\infty e^{-\gamma u} \int_u^\infty \int_v^\infty e^{\gamma z} \mathbf{F}(dz) dv du.$$

Тогда для матричной меры восстановления $\mathbf{H}$ справедливо представление

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{r}\mathbf{l}}{[\widehat{\mathbf{F}}'(\gamma)\mathbf{r}]} \mathcal{E}_\gamma + \Delta := \mathbf{B}_\gamma \mathcal{E}_\gamma + \Delta, \quad (15)$$

где $\Delta \in \mathfrak{Sl}(\tau)$ (в частности, $\int_0^\infty e^{\gamma x} |\Delta|(dx) < \infty$) и

$$\mathfrak{L}(\Delta) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Delta((x, \infty))}{\tau(x)} = \frac{\mathbf{l}\mathfrak{L}[T^2(\gamma)\mathbf{F}]\mathbf{r}}{[\widehat{\mathbf{F}}'(\gamma)\mathbf{r}]^2} \mathbf{r}\mathbf{l}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 имеем $T(\gamma)\mathbf{F}$, $\mathbf{F} \in \mathfrak{Sl}(\tau)$, причем $\mathfrak{L}[T(\gamma)\mathbf{F}] = \mathfrak{L}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$. Пусть $\widehat{\mathbf{M}}(s)$ – присоединенная матрица к $\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)$. Очевидно, что $\widehat{\mathbf{M}}(s)$ – преобразование Лапласа некоторой матричной меры $\mathbf{M} \in \mathfrak{Sl}(\tau)$ и $\mathfrak{L}(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$. Положим

$$d(s) := \frac{s - \gamma - 1}{s - \gamma} \det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)) := \widehat{\alpha}(s) - [T(\gamma)\alpha]^\wedge(s),$$

где $\widehat{\alpha}(s) = \det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s))$ – преобразование Лапласа некоторой меры $\alpha \in \mathfrak{Sl}(\tau)$, так как $\widehat{\alpha}(s)$ – линейная комбинация произведений, сомножителями которых являются преобразования Лапласа элементов матрицы $\mathbf{F} \in \mathfrak{Sl}(\tau)$. Согласно (6) имеем $\mathfrak{L}(\alpha) = 0$. По лемме 6 получаем $T(\gamma)\alpha \in \mathfrak{Sl}(\tau)$ и $\mathfrak{L}[T(\gamma)\alpha] = 0$, так как $\mathfrak{L}[T(\gamma)\mathbf{F}] = \mathbf{0}$. Таким образом, $d(s)$ – преобразование Лапласа меры $D := \alpha - T(\gamma)\alpha \in \mathfrak{Sl}(\tau)$ и $\mathfrak{L}(D) = 0$.

ЛЕММА 7. Пусть конечные меры ν_i таковы, что $\int_0^\infty x^p e^{\gamma x} |\nu_i|(dx) < \infty$ при $p \geq 1$, $i = 1, \dots, k$. Тогда $\nu := \nu_1 * \dots * \nu_k$ удовлетворяет аналогичному неравенству и, кроме того, $\int_0^\infty x^{p-1} e^{\gamma x} |T(\gamma)\nu|(dx) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы вытекает, что все ν_i принадлежат банаховой алгебре $S(\varphi)$, где полумультипликативная функция $\varphi(x)$ выбрана следующим образом: $\varphi(x) = (1+x)^p e^{\gamma x}$, $x \geq 0$, и $\varphi(x) \equiv 1$, $x < 0$. Следовательно, $\nu \in S(\varphi)$. Теперь для завершения доказательства осталось заметить, что неравенство $\int_0^\infty x^p e^{\gamma x} |\nu|(dx) < \infty$ влечет $\int_0^\infty x^{p-1} e^{\gamma x} |T(\gamma)\nu|(dx) < \infty$ [15, теорема 3].

Из условия $\int_0^\infty x^2 e^{\gamma x} \mathbf{F}(dx) < \infty$ и леммы 7 вытекает, что мера $|\alpha|$ удовлетворяет аналогичному неравенству и $\int_0^\infty x e^{\gamma x} |T(\gamma)\alpha|(dx) < \infty$. Следовательно, $\int_0^\infty x e^{\gamma x} |D|(dx) < \infty$. Таким образом, мера D принадлежит банаховой алгебре $S(\varphi)$ при следующем выборе полумультипликативной функции: $\varphi(x) = e^{\gamma' x}$, $x < 0$, $\varphi(x) = (1+|x|)e^{\gamma x}$, $x \geq 0$, у которой $r_-(\varphi) = \gamma'$ и $r_+(\varphi) = \gamma$. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 3 в работе [1], убеждаемся в том, что элемент $D \in S(\varphi)$ обратим в $S(\varphi)$ и, следовательно, $\int_0^\infty x e^{\gamma x} |D^{-1}|(dx) < \infty$. Поскольку $S(\varphi) \subset S(\gamma', \gamma)$, к элементу $D \in \mathfrak{S}(\tau)$ применима теорема 1 при $f(z) = 1/z$ (см. доказательство леммы 4). Поэтому $D^{-1} \in \mathfrak{S}(\tau)$ и $\mathfrak{L}(D^{-1}) = 0$. Неравенство $\int_0^\infty x e^{\gamma x} |D^{-1}|(dx) < \infty$ позволяет применить оператор $T(\gamma)$ к мере D^{-1} : $T(\gamma)D^{-1} \in S(\gamma', \gamma)$ [15, теорема 3].

При $\operatorname{Re} s < \gamma$ имеем

$$\widehat{H}(s) = \frac{s - \gamma - 1}{s - \gamma} \frac{\widehat{M}(s)}{d(s)} = \frac{\widehat{M}(s)}{d(s)} - \frac{\widehat{M}(\gamma)}{d(\gamma)(s - \gamma)} - \left[\frac{\widehat{M}(s)}{d(s)} - \frac{\widehat{M}(\gamma)}{d(\gamma)} \right] \frac{1}{s - \gamma}.$$

Переходя от преобразований Лапласа к мерам, получим

$$\mathbf{H} = \frac{\widehat{M}(\gamma)}{d(\gamma)} \mathcal{E}_\gamma + \mathbf{M} * D^{-1} - T(\gamma)(\mathbf{M} * D^{-1});$$

здесь $\mathbf{M} * D^{-1}$ – матрица, элементы которой суть свертки соответствующих элементов матрицы $\mathbf{M}$ с мерой D^{-1} . Положим $\Delta := \mathbf{M} * D^{-1} - T(\gamma)(\mathbf{M} * D^{-1})$. Равенство $\widehat{M}(\gamma)d^{-1}(\gamma) = \mathbf{B}_\gamma$ вытекает из леммы 2, в которой следует положить $q = \gamma$:

$$\frac{\widehat{M}(\gamma)}{d(\gamma)} = -\frac{\widehat{M}(\gamma)}{\widehat{\alpha}'(\gamma)} = \frac{rl}{l\widehat{\mathbf{F}}'(\gamma)r} = \mathbf{B}_\gamma.$$

Покажем, что $\Delta \in \mathfrak{S}(\tau)$ и выполняется равенство (16). Для этого сначала докажем несколько лемм.

ЛЕММА 8. Матричная мера $T(\gamma)\mathbf{M}$ принадлежит $\mathfrak{S}(\tau)$ и $\mathfrak{L}[T(\gamma)\mathbf{M}] = \mathbf{0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица $\mathbf{M}$ состоит из элементов, являющихся линейными комбинациями свертки $\nu = \nu_1 * \dots * \nu_{n-1}$, где ν_i – элементы матрицы $\delta_0 \mathbf{I} - \mathbf{F}$. По лемме 6 имеем $\mathfrak{L}[T(\gamma)\nu] = 0$ (напомним: $\mathfrak{L}(\mathbf{F}) = \mathfrak{L}[T(\gamma)\mathbf{F}] = \mathbf{0}$). Поэтому $\mathfrak{L}[T(\gamma)\mathbf{M}] = \mathbf{0}$. Лемма доказана. *

ЛЕММА 9. Мера $T(\gamma)D = T(\gamma)\alpha - T^2(\gamma)\alpha$ принадлежит алгебре $\mathfrak{S}(\tau)$, причем $\mathfrak{L}[T(\gamma)D] = -\mathfrak{L}[T^2(\gamma)\alpha]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В начале доказательства теоремы 4 было установлено, что $T(\gamma)\alpha \in \mathfrak{Sl}(\tau)$ и $\mathfrak{L}[T(\gamma)\alpha] = 0$. Поэтому ввиду равенства $D = \alpha - T(\gamma)\alpha$ достаточно показать, что $T^2(\gamma)\alpha \in \mathfrak{Sl}(\tau)$. По лемме 6 мера $T(\gamma)\alpha$ равна линейной комбинации сверток $\nu = \nu_1 * \dots * \nu_n$, где ν_i – элементы либо матрицы $\delta_0 \mathbf{I} - \mathbf{F}$, либо матрицы $T(\gamma)\mathbf{F}$. В силу условия $T^2(\gamma)\mathbf{F} \in \mathfrak{Sl}(\tau)$ и леммы 6 выполнено включение $T(\gamma)\nu \in \mathfrak{Sl}(\tau)$. Значит, $T^2(\gamma)\alpha \in \mathfrak{Sl}(\tau)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Мера $T(\gamma)D^{-1}$ принадлежит алгебре $\mathfrak{Sl}(\tau)$ и

$$\mathfrak{L}[T(\gamma)D^{-1}] = -d^{-1}(\gamma)\mathfrak{L}[T(\gamma)D]d^{-1}(\gamma). \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечалось ранее, в доказательстве теоремы 4, $D^{-1} \in \mathfrak{Sl}(\tau)$ и мера $T(\gamma)D^{-1}$ определена и принадлежит алгебре $S(\gamma', \gamma)$. Применим оператор $T(\gamma)$ к равенству $D^{-1} * D = \delta_0$. Получим $T(\gamma)(D^{-1} * D) = 0$. По лемме 6

$$T(\gamma)(D^{-1} * D) = [T(\gamma)D^{-1}] * D + d^{-1}(\gamma)T(\gamma)D.$$

Следовательно, $T(\gamma)D^{-1} = -d^{-1}(\gamma)[T(\gamma)D] * D^{-1} \in \mathfrak{Sl}(\tau)$ в силу леммы 9. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 4. Согласно леммам 6, 8 и 10 матричная мера $\Delta = \mathbf{M} * D^{-1} - T(\gamma)(\mathbf{M} * D^{-1})$ принадлежит $\mathfrak{Sl}(\tau)$. В силу (6) имеем $\mathfrak{L}(\mathbf{M} * D^{-1}) = \mathbf{0}$ (напомним, что $\mathfrak{L}(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$ и $\mathfrak{L}(D^{-1}) = 0$), а по лемме 6

$$T(\gamma)(\mathbf{M} * D^{-1}) = [T(\gamma)\mathbf{M}] * D^{-1} + \widehat{\mathbf{M}}(\gamma)T(\gamma)D^{-1}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{L}(\Delta) = -\mathfrak{L}[T(\gamma)(\mathbf{M} * D^{-1})] = -\mathfrak{L}\{[T(\gamma)\mathbf{M}] * D^{-1}\} - \widehat{\mathbf{M}}(\gamma)\mathfrak{L}[T(\gamma)D^{-1}].$$

По лемме 8, учитывая равенство $\mathfrak{L}(D^{-1}) = 0$, имеем $\mathfrak{L}\{[T(\gamma)\mathbf{M}] * D^{-1}\} = \mathbf{0}$. Таким образом, согласно леммам 10 и 9 получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\Delta) &= -\widehat{\mathbf{M}}(\gamma)\mathfrak{L}[T(\gamma)D^{-1}] \\ &= \widehat{\mathbf{M}}(\gamma)d^{-1}(\gamma)\mathfrak{L}[T(\gamma)D]d^{-1}(\gamma) = -\widehat{\mathbf{M}}(\gamma)d^{-1}(\gamma)\mathfrak{L}[T^2(\gamma)\alpha]d^{-1}(\gamma). \end{aligned}$$

Вычислим $\mathfrak{L}[T^2(\gamma)\alpha]$, где α – мера с преобразованием Лапласа $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s))$. Имеем $(\delta_0 \mathbf{I} - \mathbf{F}) * \mathbf{M} = \alpha \mathbf{I}$, откуда по лемме 6

$$T(\gamma)\alpha \mathbf{I} = -[T(\gamma)\mathbf{F}] * \mathbf{M} + [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(\gamma)]T(\gamma)\mathbf{M}.$$

Умножая данное равенство слева на вектор $\mathbf{l}$ и справа на $\mathbf{r}$, получим $T(\gamma)\alpha = -\mathbf{l}[T(\gamma)\mathbf{F}] * \mathbf{M}\mathbf{r}$. Подействуем оператором $T(\gamma)$ на обе части этого равенства. Имеем

$$T^2(\gamma)\alpha = -\mathbf{l}T(\gamma)\{[T(\gamma)\mathbf{F}] * \mathbf{M}\}\mathbf{r} = -\mathbf{l}[T^2(\gamma)\mathbf{F}] * \mathbf{M}\mathbf{r} - \mathbf{l}[T(\gamma)\mathbf{F}]^{\wedge}(\gamma)T(\gamma)\mathbf{M}\mathbf{r}.$$

Подействуем функционалом $\mathfrak{L}$ на левую и правую части. По лемме 8

$$\mathfrak{L}[T^2(\gamma)\alpha] = -\mathbf{l}\mathfrak{L}[T^2(\gamma)\mathbf{F}]\widehat{\mathbf{M}}(\gamma)\mathbf{r}.$$

Окончательно, в силу (17), равенства $\widehat{M}(\gamma)d^{-1}(\gamma) = B_\gamma$ и леммы 9 имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\Delta) &= -\widehat{M}(\gamma)\mathfrak{L}[T(\gamma)D^{-1}] = \widehat{M}(\gamma)d^{-1}(\gamma)\mathfrak{L}[T(\gamma)D]d^{-1}(\gamma) \\ &= -B_\gamma\mathfrak{L}[T^2(\gamma)\alpha]d^{-1}(\gamma) = B_\gamma l\mathfrak{L}[T^2(\gamma)F]\widehat{M}(\gamma)r d^{-1}(\gamma) \\ &= B_\gamma l\mathfrak{L}[T^2(\gamma)F]B_\gamma r = \frac{l\mathfrak{L}[T^2(\gamma)F]r}{[l\widehat{F}'(\gamma)r]^2}rl.\end{aligned}$$

Теорема 4 доказана полностью.

Исследуем асимптотику решения общего уравнения восстановления (2) в критическом случае. По-прежнему, изучение асимптотики решения $X(x)$ будем проводить сравнением $X(x)$ с функцией $\tau(x) = G((x, \infty))$ при некотором фиксированном $G \in \mathcal{S}(\gamma)$.

Отметим, что по теореме Жордана–Хана [16, предложение IV.1.1] вещественнозначная матричная мера K представима в виде разности двух неотрицательных матричных мер K_1 и K_2 : $K = K_1 - K_2$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия теоремы 4, и пусть матричная мера $K = K_1 - K_2$ представима в виде разности неотрицательных матричных мер K_1 и K_2 . Предположим, что $\int_0^\infty xe^{\gamma x} K_i(dx) < \infty$ и существуют пределы

$$\mathfrak{L}[T(\gamma)K_i] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau(x)} \int_x^\infty e^{-\gamma v} \int_v^\infty e^{\gamma z} K_i(dz) dv, \quad i = 1, 2.$$

Тогда для решения X уравнения (2) справедливо представление

$$X = \frac{rl\widehat{K}(\gamma)}{l\widehat{F}'(\gamma)r} \mathcal{E}_\gamma + \Delta_K := B_K \mathcal{E}_\gamma + \Delta_K,$$

где $\Delta_K \in \mathfrak{S}l(\tau)$ (в частности, $\int_0^\infty e^{\gamma x} |\Delta_K|(dx) < \infty$) и

$$\mathfrak{L}(\Delta_K) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Delta_K((x, \infty))}{\tau(x)} = \frac{l\mathfrak{L}[T^2(\gamma)F]r}{[l\widehat{F}'(\gamma)r]^2} rl\widehat{K}(\gamma) - \frac{rl\mathfrak{L}[T(\gamma)K]}{l\widehat{F}'(\gamma)r}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу соотношений (4) и (15) имеем

$$\begin{aligned}\widehat{X}(s) &= \left[-\frac{B_\gamma}{s - \gamma} + \widehat{\Delta}(s) \right] \widehat{K}(s) \\ &= -\frac{B_\gamma \widehat{K}(\gamma)}{s - \gamma} - \frac{B_\gamma [\widehat{K}(s) - \widehat{K}(\gamma)]}{s - \gamma} + \widehat{\Delta}(s) \widehat{K}(s) \\ &= -\frac{B_\gamma \widehat{K}(\gamma)}{s - \gamma} - B_\gamma [T(\gamma)K]^\wedge(s) + \widehat{\Delta}(s) \widehat{K}(s).\end{aligned}$$

Положим $\Delta_K = \Delta * K - B_\gamma T(\gamma)K$. В силу леммы 1 из условий теоремы вытекает $\mathfrak{L}(K) = 0$. Поэтому, учитывая (6), имеем $\mathfrak{L}(\Delta_K) = \mathfrak{L}(\Delta)\widehat{K}(\gamma) - B_\gamma \mathfrak{L}[T(\gamma)K]$. Теорема доказана.

Заметим, что в теореме 5 вместо условий на меры K_1 и K_2 можно использовать формально более общие предположения: $K, T(\gamma)K \in \mathfrak{S}l(\tau)$ и $\mathfrak{L}(K) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 3 и $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(0)) \neq 0$. Тогда для решения $\mathbf{X}(x)$ уравнения (2) справедливо разложение

$$\mathbf{X}(x) = [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(0)]^{-1} \widehat{\mathbf{K}}(0) - \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} B_{jk} e^{-s_j x} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p! s_j^{k-p}} - \Delta_{\mathbf{K}}((x, \infty)),$$

где $\Delta_{\mathbf{K}}((x, \infty))$ удовлетворяет (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО совпадает с доказательством следствия 1 в работе [1].

Напомним, что $\widehat{\mathbf{M}}(s)$ – присоединенная матрица к $\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия теоремы 3 и $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(0)) = 0$. Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\widehat{\mathbf{F}}(0)$, так, чтобы $\mathbf{l}\mathbf{r} = 1$. Пусть $s_1 = 0$. Тогда для решения $\mathbf{X}(x)$ уравнения (2) справедливо разложение

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x) = & \frac{\mathbf{r}\widehat{\mathbf{K}}(0)}{\mathbf{l}\widehat{\mathbf{F}}'(0)\mathbf{r}} x + \left[\frac{\widehat{\mathbf{M}}'(0)}{\widehat{\alpha}'(0)} - \frac{\widehat{\mathbf{M}}(0)\widehat{\alpha}''(0)}{2\widehat{\alpha}'(0)^2} \right] \widehat{\mathbf{K}}(0) - \frac{\mathbf{r}\widehat{\mathbf{K}}'(0)}{\mathbf{l}\widehat{\mathbf{F}}'(0)\mathbf{r}} \\ & - \sum_{j=2}^l \sum_{k=1}^{n_j} B_{jk} e^{-s_j x} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p! s_j^{k-p}} - \Delta_{\mathbf{K}}((x, \infty)), \end{aligned}$$

где $\Delta_{\mathbf{K}}((x, \infty))$ удовлетворяет (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО совпадает с доказательством следствия 2 в работе [1].

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда при $\gamma > 0$ для решения $\mathbf{X}(x)$ уравнения (2) справедливо разложение

$$\mathbf{X}(x) = [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(0)]^{-1} \widehat{\mathbf{K}}(0) - \frac{\mathbf{r}\widehat{\mathbf{K}}(\gamma)}{\gamma \mathbf{l}\widehat{\mathbf{F}}'(\gamma)\mathbf{r}} e^{-\gamma x} - \Delta_{\mathbf{K}}((x, \infty)). \quad (19)$$

Если $\gamma = 0$, то

$$\mathbf{X}(x) = \frac{\mathbf{r}\widehat{\mathbf{K}}(0)}{\mathbf{l}\widehat{\mathbf{F}}'(0)\mathbf{r}} x + \left[\frac{\widehat{\mathbf{M}}'(0)}{\widehat{\alpha}'(0)} - \frac{\widehat{\mathbf{M}}(0)\widehat{\alpha}''(0)}{2\widehat{\alpha}'(0)^2} \right] \widehat{\mathbf{K}}(0) - \frac{\mathbf{r}\widehat{\mathbf{K}}'(0)}{\mathbf{l}\widehat{\mathbf{F}}'(0)\mathbf{r}} - \Delta_{\mathbf{K}}((x, \infty)). \quad (20)$$

В обоих случаях остаток $\Delta_{\mathbf{K}}((x, \infty))$ удовлетворяет соотношению (18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим равенство (19). Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x) = \mathbf{X}([0, x]) &= \frac{\mathbf{B}_{\mathbf{K}}(1 - e^{-\gamma x})}{\gamma} + \Delta_{\mathbf{K}}([0, x]) \\ &= -\frac{\mathbf{B}_{\mathbf{K}}e^{-\gamma x}}{\gamma} + \frac{\mathbf{B}_{\mathbf{K}}}{\gamma} + \Delta_{\mathbf{K}}([0, \infty)) - \Delta_{\mathbf{K}}((x, \infty)). \end{aligned} \quad (21)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{K}}([0, \infty)) &= \widehat{\Delta}_{\mathbf{K}}(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \widehat{\mathbf{K}}(s) + \frac{\mathbf{B}_{\mathbf{K}}}{s - \gamma} \right\} \\ &= [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(0)]^{-1} \widehat{\mathbf{K}}(0) - \frac{\mathbf{B}_{\mathbf{K}}}{\gamma}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из соотношений (21) и (22) вытекает (19). Пусть $\gamma = 0$. Рассуждаем, как при доказательстве следствия 2 в работе [1]. Имеем

$$\begin{aligned} X(x) &= B_K x + \Delta_K([0, \infty)) - \Delta_K((x, \infty)), \\ \Delta_K([0, \infty)) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ [I - \widehat{F}(s)]^{-1} \widehat{K}(s) + \frac{B_K}{s} \right\}. \end{aligned}$$

Данный предел вычислен при доказательстве следствия 2 в работе [1] и равен

$$\left[\frac{\widehat{M}'(0)}{\widehat{\alpha}'(0)} - \frac{\widehat{M}(0)\widehat{\alpha}''(0)}{2\widehat{\alpha}'(0)^2} \right] \widehat{K}(0) + \frac{\widehat{M}(0)\widehat{K}'(0)}{\widehat{\alpha}'(0)}.$$

Осталось воспользоваться леммой 2 и преобразовать второе слагаемое. Следствие доказано.

§ 4. Точная асимптотика среднего числа частиц

В настоящем параграфе мы применим доказанные теоремы многомерного восстановления к исследованию асимптотики среднего числа частиц зависящих от возраста ветвящихся процессов. В самой общей модели таких процессов – модель I в терминологии [2] – предполагается, что популяция состоит из n типов частиц. Напомним вкратце устройство этих процессов [2, гл. VIII]. Каждая частица i -го типа имеет случайную продолжительность жизни τ_i с невырожденной функцией распределения $G_i(t)$. В конце жизни частица i -го типа превращается в совокупность частиц $\nu_i = (\nu_{i1}, \dots, \nu_{in})$, где ν_{ik} – число частиц k -го типа нулевого возраста, порожденных частицей i -го типа в момент ее гибели. Обозначим $p_{i\alpha}(u) = P(\nu_i = \alpha \mid \tau_i = u)$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – вектор с неотрицательными целочисленными координатами. Функции $p_{i\alpha}(u)$ переменной u предполагаются измеримыми по Борелю. Эволюция частицы i -го типа определяется совместным распределением

$$P(\tau_i \in B, \nu_i = \alpha) = \int_B p_{i\alpha}(u) G_i(du), \quad B \in \mathcal{B}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

где $\mathbb{N}$ – множество неотрицательных целых чисел. Процесс начинается с частицы, скажем, i -го типа, имеющей нулевой возраст в момент времени $t = 0$. Эволюции различных частиц предполагаются независимыми друг от друга, а условное распределение эволюций всех частиц данного поколения при условии, что известны эволюции всех частиц предыдущих поколений, зависит лишь от состава этого поколения. Обозначим через $a_{ij}(u) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \alpha_j p_{i\alpha}(u)$ математическое ожидание числа частиц j -го типа, появляющихся в следующем поколении из одной частицы i -го типа, при условии, что эта частица исчезает в возрасте u . Тогда

$$A_{ij} = \int_0^\infty a_{ij}(u) G_i(du)$$

– математическое ожидание числа частиц-потомков j -го типа у одной частицы типа i . Запись $Z(t) = (Z_{ij}(t))$ будет означать, что в момент t существуют $Z_{ij}(t)$ частиц j -го типа при условии, что процесс начался с одной частицы i -го типа,

$i, j = 1, \dots, n$. Пусть $\mathbf{A}(t) = (A_{ij}(t)) := \mathbf{E}\mathbf{Z}(t)$ – матрица соответствующих математических ожиданий и $G_i(\{0\}) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Тогда функции $A_{ij}(t)$ удовлетворяют следующему многомерному уравнению восстановления [2, гл. VIII, § 6, (7)]:

$$A_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^t a_{ik}(u) A_{kj}(t-u) G_i(du) + \delta_{ij} [1 - G_i(t)], \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Обозначим

$$F_{ij}(dx) := a_{ij}(x) G_i(dx), \quad K_{ij}(x) := \delta_{ij} [1 - G_i(x)], \quad X_{ij}(x) := A_{ij}(x). \quad (23)$$

В итоге приходим к уже исследованному многомерному уравнению восстановления (1) при $m_1 = n$. Образует матрицы $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ с элементами F_{ij} , K_{ij} соответственно, задаваемыми равенствами (23). Отметим, что функции $K_{ij}(x)$ суть функции распределения мер $K_{ij} = \delta_{ij}(\delta_0 - G_i)$, $i, j = 1, \dots, n$. Введем сокращенное обозначение для диагональных матриц: $\text{diag}\{a_i\} := \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$. Таким образом, $\mathbf{K} = \text{diag}\{\delta_0 - G_i\}$. Матрица $\hat{\mathbf{F}}(0) = (\int_0^\infty a_{ij}(x) G_i(dx))$ предполагается неприводимой. Пусть $\hat{\mathbf{F}}(\gamma) < \infty$ и $\hat{G}_i(\gamma) < \infty$, $i = 1, \dots, n$, при $\gamma \geq 0$. Как и в § 3, пусть $\mathcal{Z} = \{s_1, \dots, s_l\}$ – множество корней уравнения $\det(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)) = 0$, лежащих в полуплоскости $\{s \in \mathbb{C}: \text{Re } s < \gamma\}$, с кратностями n_j , $j = 1, \dots, l$. Если $\mathcal{Z} \neq \emptyset$, то пусть $q = s_1$ – единственный вещественный корень, $n_1 = 1$. Обозначим через

$$\sum_{k=1}^{n_j} \frac{(-1)^k \mathbf{B}_{jk}}{(s - s_j)^k}$$

главную часть разложения в ряд Лорана матричной аналитической функции

$$[\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \hat{\mathbf{K}}(s) = [\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \text{diag}\{1 - \hat{G}_i(s)\}$$

в окрестности изолированной особой точки $s = s_j \in \mathcal{Z}$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $G \in \mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, и $\tau(x) = G((x, \infty))$, $x \geq 0$. Предположим, что $\hat{\mathbf{F}}(\gamma) = (\int_0^\infty e^{\gamma x} a_{ij}(x) G_i(dx)) < \infty$, $\det(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)) \neq 0$ при $\text{Re } s = \gamma$. Допустим, что при некотором целом $m \geq 1$ спектральный радиус матрицы $(\mathbf{F}^{m*})_s^\wedge(\gamma)$ меньше единицы. Пусть $\mathcal{Z} = \{s_1, \dots, s_l\}$ – множество корней уравнения $\det(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)) = 0$, лежащих в полуплоскости $\{s \in \mathbb{C}: \text{Re } s < \gamma\}$, с кратностями n_j , $j = 1, \dots, l$ ($\mathcal{Z} = \emptyset$ при $l = 0$). Если $\mathcal{Z} \neq \emptyset$, то выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\hat{\mathbf{F}}(q)$, так, чтобы $\mathbf{l}\mathbf{r} = 1$. Предположим, что $0 \notin \mathcal{Z}$ и существуют пределы

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\mathbf{F}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\tau(x)} \int_x^\infty a_{ij}(u) G_i(du) \right), \\ \mathfrak{L}(G_i) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G_i((x, \infty))}{\tau(x)}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(x) &= - \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \mathbf{B}_{jk} e^{-s_j x} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p! s_j^{k-p}} + \boldsymbol{\varrho}(x) \\
 &= \begin{cases} \frac{\mathbf{r} \mathbf{l} \operatorname{diag}\{\widehat{G}_i(q) - 1\} e^{-qx}}{q \mathbf{l} \widehat{\mathbf{F}}'(q) \mathbf{r}} - \sum_{j=2}^l \sum_{k=1}^{n_j} \mathbf{B}_{jk} e^{-s_j x} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p! s_j^{k-p}} + \boldsymbol{\varrho}(x) & \text{при } \mathcal{Z} \neq \emptyset, \\ \boldsymbol{\varrho}(x) & \text{при } \mathcal{Z} = \emptyset, \end{cases} \quad (24)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\boldsymbol{\varrho}(x)}{\tau(x)} &= [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(\gamma)]^{-1} \mathcal{L}(\mathbf{F}) [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(\gamma)]^{-1} \operatorname{diag}\{\widehat{G}_i(\gamma) - 1\} \\
 &\quad + [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(\gamma)]^{-1} \operatorname{diag}\{\mathcal{L}(G_i)\}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить следствие 1. Положим $\boldsymbol{\varrho}(x) = -\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{K}}((x, \infty))$. В нашем случае $\widehat{\mathbf{K}}(0) = \operatorname{diag}\{1 - \widehat{G}_i(0)\} = \mathbf{0}$. Равенства (24) и (25) установлены.

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполнены условия теоремы 6 с единственным отличием, что здесь мы предполагаем $q = 0 \in \mathcal{Z}$ (что автоматически влечет $\gamma > 0$). Тогда

$$\mathbf{A}(x) = \frac{\mathbf{r} \mathbf{l} \operatorname{diag}\left\{\int_0^\infty x G_i(dx)\right\}}{\mathbf{l} \widehat{\mathbf{F}}'(0) \mathbf{r}} - \sum_{j=2}^l \sum_{k=1}^{n_j} \mathbf{B}_{jk} e^{-s_j x} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p! s_j^{k-p}} + \boldsymbol{\varrho}(x),$$

где $\boldsymbol{\varrho}(x)$ удовлетворяет соотношению (25).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить следствие 2. Положим $\boldsymbol{\varrho}(x) = -\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{K}}((x, \infty))$. В данном случае $\widehat{\mathbf{K}}(0) = \mathbf{0}$ и

$$\widehat{\mathbf{K}}'(0) = \operatorname{diag}\{-\widehat{G}_i'(0)\} = -\operatorname{diag}\left\{\int_0^\infty x G_i(dx)\right\}.$$

Теорема доказана.

В следующей теореме рассматривается $\mathcal{S}(\gamma)$ -асимптотика матрицы математических ожиданий $\mathbf{A}(x)$ в случае, когда $s = \gamma$ является единственным корнем уравнения $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)) = 0$ кратности 1.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $G \in \mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, и $\tau(x) = G((x, \infty))$, $x \geq 0$. Предположим, что

$$\int_0^\infty x^2 e^{\gamma x} a_{ij}(x) G_i(dx) < \infty, \quad \int_0^\infty x e^{\gamma x} G_i(dx) < \infty, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

и при некотором целом $m \geq 1$ спектральный радиус матрицы $(\mathbf{F}^{m*})_s^\wedge(\gamma)$ меньше единицы. Пусть $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(\gamma)) = 0$. Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ с положительными координатами, отвечающие собственному

значению 1 матрицы $\widehat{\mathbf{F}}(\gamma)$, так, чтобы $\mathbf{l}\mathbf{r} = 1$. Допустим, что существуют пределы

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[T^2(\gamma)\mathbf{F}] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\tau(x)} \int_x^\infty e^{-\gamma u} \int_u^\infty \int_v^\infty e^{\gamma z} a_{ij}(x) G_i(dz) dv du \right), \\ \mathfrak{L}[T(\gamma)G_i] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau(x)} \int_x^\infty e^{-\gamma u} \int_u^\infty e^{\gamma z} G_i(dz) du, \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Тогда при $\gamma > 0$

$$\mathbf{A}(x) = \frac{\mathbf{r}\mathbf{l} \operatorname{diag}\{\widehat{G}_i(\gamma) - 1\}}{\gamma \widehat{\mathbf{F}}'(\gamma)\mathbf{r}} e^{-\gamma x} + \boldsymbol{\varrho}(x),$$

где

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\boldsymbol{\varrho}(x)}{\tau(x)} = \frac{\mathbf{l}\mathfrak{L}[T^2(\gamma)\mathbf{F}]\mathbf{r}}{[\widehat{\mathbf{F}}'(\gamma)\mathbf{r}]^2} \mathbf{r}\mathbf{l} \operatorname{diag}\{\widehat{G}_i(\gamma) - 1\} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{l} \operatorname{diag}\{\mathfrak{L}[T(\gamma)G_i]\}}{\widehat{\mathbf{F}}'(\gamma)\mathbf{r}}.$$

При $\gamma = 0$

$$\mathbf{A}(x) = \frac{\mathbf{r}\mathbf{l} \operatorname{diag}\{\int_0^\infty x G_i(dx)\}}{\widehat{\mathbf{F}}'(0)\mathbf{r}} + \boldsymbol{\varrho}(x),$$

где

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\boldsymbol{\varrho}(x)}{\tau(x)} = -\frac{\mathbf{r}\mathbf{l} \operatorname{diag}\{\mathfrak{L}(TG_i)\}}{\widehat{\mathbf{F}}'(0)\mathbf{r}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить следствие 3. Положим $\boldsymbol{\varrho}(x) = -\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{K}}((x, \infty))$. В нашем случае $\widehat{\mathbf{K}}(0) = \operatorname{diag}\{1 - \widehat{G}_i(0)\} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{B}_{\mathbf{K}} = \mathbf{r}\mathbf{l} \operatorname{diag}\{1 - \widehat{G}_i(\gamma)\} / [\widehat{\mathbf{F}}'(\gamma)\mathbf{r}]$. При $\gamma > 0$ утверждение теоремы вытекает из (19), а при $\gamma = 0$ – из (20). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условия теорем 6–8 значительно упрощаются, если предположить $a_{ij}(u) \equiv m_{ij} < \infty$, $i, j = 1, \dots, n$, как это сделано в монографии [17]. Тогда в теоремах 6, 7 достаточно предположить лишь существование $\mathfrak{L}(G_i)$, $i = 1, \dots, n$, что влечет $\mathfrak{L}(\mathbf{F}) = (m_{ij}\mathfrak{L}(G_i))$ и $\widehat{\mathbf{F}}(\gamma) = (m_{ij}\widehat{G}_i(\gamma)) < \infty$, а в теореме 8 достаточно предположить $\int_0^\infty x^2 e^{\gamma x} G_i(dx) < \infty$, $i = 1, \dots, n$, и существование пределов

$$\mathfrak{L}[T^2(\gamma)G_i] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau(x)} \int_x^\infty e^{-\gamma u} \int_u^\infty \int_v^\infty e^{\gamma z} G_i(dz) dv du, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда $\mathfrak{L}[T^2(\gamma)\mathbf{F}] = (m_{ij}\mathfrak{L}[T^2(\gamma)G_i])$, а $\mathfrak{L}[T(\gamma)G_i] = 0$, $i = 1, \dots, n$, в силу леммы 1. Наибольшие изменения претерпевает теорема 8, поэтому приведем соответствующий результат в виде следствия.

СЛЕДСТВИЕ 4. Предположим, что $a_{ij}(u) \equiv m_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, и пусть выполнены видоизмененные условия теоремы 8, как это указано в замечании 3. Тогда при $\gamma > 0$

$$\mathbf{A}(x) = \frac{\mathbf{r}\mathbf{l} \operatorname{diag}\{\widehat{G}_i(\gamma) - 1\}}{\gamma \mathbf{l}(m_{ij} \int_0^\infty x e^{\gamma x} G_i(dx))\mathbf{r}} e^{-\gamma x} + \boldsymbol{\varrho}(x),$$

где

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varrho(x)}{\tau(x)} = \frac{l(m_{ij} \mathfrak{L}[T^2(\gamma)G_i])\mathbf{r}}{[l(m_{ij} \int_0^\infty x e^{\gamma x} G_i(dx))\mathbf{r}]^2} \mathbf{r} l \operatorname{diag}\{\widehat{G}_i(\gamma) - 1\}.$$

При $\gamma = 0$

$$\mathbf{A}(x) = \frac{\mathbf{r} l \operatorname{diag}\{\int_0^\infty x G_i(dx)\}}{l(m_{ij} \int_0^\infty x G_i(dx))\mathbf{r}} + \varrho(x),$$

где $\varrho(x) = o(\tau(x))$ при $x \rightarrow \infty$.

§ 5. Сравнение результатов

Классы вероятностных распределений $\mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, вводились именно в связи с изучением асимптотики среднего числа частиц для докритических зависящих от возраста ветвящихся процессов $Z(t)$ с одним типом частиц, для которых среднее число m частиц, порождаемых одной частицей, конечно и не зависит от возраста порождающей частицы – модель 3 [2, гл. VIII, § 1].

Известен следующий результат [9, теорема 1]: если $G \in \mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, и $m \int_0^\infty e^{\gamma x} F(dx) < 1$, то

$$EZ(t) \sim \frac{1 - m}{[1 - m \int_0^\infty e^{\gamma x} G(dx)]^2} [1 - G(t)], \quad t \rightarrow \infty. \quad (26)$$

В субэкспоненциальном случае $G \in \mathcal{S}(0)$ соотношение (26) было получено в [8, теорема 5] при небольшом ограничении, которое было устранено в [17, гл. IV, § 5, теорема 3B(ii)]. Таким образом, точная асимптотика $EZ(t)$ была установлена только тогда, когда так называемый мальтусовский параметр α не существует ($\alpha = \alpha(m, G)$ определяется как вещественный корень уравнения $m \int_0^\infty e^{-\alpha y} G(dy) = 1$); в наших обозначениях это соответствует условию $\mathcal{Z} = \emptyset$. Утверждение (26) – частный случай теоремы 6 при $n = 1$, $\mathcal{Z} = \emptyset$ и $G_1 \in \mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, $a_{11}(u) \equiv m$. Заметим, что характеристическое уравнение (3) в рассматриваемой модели принимает вид $1 - m\widehat{G}_1(s) = 0$. Если существует мальтусовский параметр $\alpha(m, G_1)$, то $\alpha(m, G_1) = -q = -s_1$.

Далее, теорема 5 в работе [18] – частный случай теоремы 6 настоящей работы применительно к зависящим от возраста ветвящимся процессам с одним типом частиц ($n = 1$), для которых среднее число частиц, порождаемых одной частицей, не зависит от возраста порождающей частицы ($a_{11}(u) \equiv m$). Наконец, теорема 6 в работе [18] – это одномерный аналог ($n = 1$) следствия 4 для $\gamma > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Все результаты настоящей работы остаются в силе, если банахову алгебру $\mathfrak{S}(\tau)$ всюду заменить на банахову алгебру $\mathfrak{S}(\tau)$ или на $\mathfrak{S}\mathfrak{o}(\tau)$. При этом формулы для остатков приобретают вид $|\Delta_K|((x, \infty)) = O(\tau(x))$ или $|\Delta_K|((x, \infty)) = o(\tau(x))$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Во всех рассмотренных теоремах и следствиях исходные распределения и меры предполагались *неарифметическими*. Однако вся изложенная теория почти дословно переносится на дискретный случай: можно воспользоваться параллельной теорией аналогичных банаховых алгебр мер, сосредоточенных на множестве целых чисел, и заменить меры $\mathcal{E}_j$, $\mathcal{E}_\gamma$ на их дискретные

аналоги; кроме того, при рассмотрении арифметического случая не нужны условия, налагаемые на спектральный радиус матрицы $(F^{m*})_s^\wedge(\gamma)$ при некотором целом $m \geq 1$.

Список литературы

1. Сгибнев М. С., “Полумультипликативные оценки для решения многомерного уравнения восстановления”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:3 (2002), 159–174.
2. Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы*, Наука, М., 1971.
3. Athreya K. B., Ney P. E., “A Markov process approach to systems of renewal equations with application to branching processes”, *Branching processes. Advances in Probability and Related Topics*, **5**, Marcel Dekker, N. Y., 1978, 293–317.
4. Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., “Уравнения многомерного восстановления и моменты ветвящихся процессов”, *Теория вероятностей и ее применения*, **16**:2 (1971), 201–217.
5. Crump K. S., “On systems of renewal equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **30** (1970), 425–434.
6. Crump K. S., “On systems of renewal equations: the reducible case”, *J. Math. Anal. Appl.*, **31** (1970), 517–528.
7. Ланкастер П., *Теория матриц*, Наука, М., 1982.
8. Чистяков В. П., “Теорема о суммах положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам”, *Теория вероятностей и ее применения*, **9**:4 (1964), 710–718.
9. Chover J., Ney P., Wainger S., “Degeneracy properties of subcritical branching processes”, *Ann. Probab.*, **1** (1973), 663–673.
10. Chover J., Ney P., Wainger S., “Functions of probability measures”, *J. Analyse Math.*, **26** (1973), 255–302.
11. Хилле Э., Филлипс Р., *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
12. Сгибнев М. С., “Банаховы алгебры мер класса $S(\gamma)$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **29**:5 (1988), 162–171.
13. Wermer J., *Banach Algebras and Several Complex Variables*, Springer-Verlag, N. Y., 1976.
14. Sgibnev M. S., “Exact asymptotic behaviour of the distribution of the supremum”, *Statist. Probab. Lett.*, **52** (2001), 301–311.
15. Sgibnev M. S., “An asymptotic expansion for the distribution of the supremum of a random walk”, *Studia Math.*, **140** (2000), 41–55.
16. Невё Ж., *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969.
17. Athreya K. B., Ney P. E., *Branching Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
18. Sgibnev M. S., “Exact asymptotic behaviour of the expected number of particles of an age-dependent branching process”, *Yokohama Math. J.*, **49** (2002), 131–147.

М. С. СГИБНЕВ (M. S. SGIBNEV)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск
E-mail: sgibnev@math.nsc.ru

Поступило в редакцию
19.05.2005