Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Рудаков, Периодические решения нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 1, 117–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/im563>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 11:58:13

УДК 517.946

И. А. Рудаков

Периодические решения нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями

Доказано существование периодических по времени решений нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями. Нелинейное слагаемое имеет либо степенной рост, либо удовлетворяет условию “нерезонансности”.

Библиография: 9 наименований.

§ 1. Введение

Рассматривается задача

$$u_{tt} - u_{xx} + g(x, t, u) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

$$u(0, t) - h_1 u'_x(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) + h_2 u'_x(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Здесь $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $T = 2\pi \frac{a}{b}$, где a, b – взаимно простые натуральные числа. Функция g является T -периодической по t .

Отметим, что задача (1.1)–(1.3) с нулевыми граничными условиями Дирихле ($h_1 = h_2 = 0$) изучена в работах [1]–[5]. В работе [6] доказано существование периодического решения задачи (1.1)–(1.3), когда нелинейное слагаемое g растет не быстрее линейной функции по u и удовлетворяет условию “нерезонансности”. В настоящей работе будет доказано существование счетного числа решений задачи (1.1)–(1.3) для случая, когда функция $g(x, t, u)$ имеет степенной рост по u . В § 4 рассмотрен случай, когда в граничном условии (1.2) либо $h_1 = 0$, либо $h_2 = 0$. Нелинейное слагаемое $g(u)$ удовлетворяет условию “нерезонансности”. Для нечетных значений a доказано существование периодического решения без предположения монотонности функции g .

§ 2. Свойства спектра линейной части уравнения

Решение поставленной задачи будем искать в виде ряда Фурье. Для построения ортонормированной системы рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0, \quad \varphi(0) - h_1 \varphi'(0) = \varphi(\pi) + h_2 \varphi'(\pi) = 0. \quad (2.1)$$

В работе [7] доказано, что собственные значения задачи (2.1) положительные. Поэтому для удобства они обозначены здесь через λ^2 .

Пусть $\varphi_n(x)$ – полная (см. [7]) ортонормированная в $L_2(0, \pi)$ система собственных функций задачи (2.1). Эти функции имеют вид

$$\varphi_n(x) = C_n (\sin(\lambda_n x) + \lambda_n h_1 \cos(\lambda_n x)), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Легко видеть, что существует константа C_0 , не зависящая от n , такая, что

$$|\varphi_n(x)| \leq C_0 \quad \forall x \in [0, \pi]. \quad (2.3)$$

Обозначим $\lambda_0 = (h_1 h_2)^{-\frac{1}{2}}$. Собственные числа λ_n являются корнями трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}(\lambda\pi) = \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2} \frac{\lambda}{\lambda^2 - \lambda_0^2}. \quad (2.4)$$

Представим λ_n в виде суммы: $\lambda_n = (n-1) + \theta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Простые рассуждения показывают, что если $\lambda_0 + \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, то $\frac{1}{2} < \theta_n < 1$ при $n < \lambda_0 + \frac{1}{2}$ и $0 < \theta_n < \frac{1}{2}$ при $n > \lambda_0 + \frac{1}{2}$. Если $\lambda_0 + \frac{1}{2} = k \in \mathbb{N}$, то $\frac{1}{2} < \theta_n < 1$ при $n < k$, $\theta_k = \frac{1}{2}$, $\lambda_k = \lambda_0$ и $0 < \theta_n < \frac{1}{2}$ при $n > k$.

Пользуясь представлением λ_n и уравнением (2.4), при $n > \lambda_0 + \frac{1}{2}$ получим

$$\theta_n = \frac{1}{n} \frac{h_1 + h_2}{\pi h_1 h_2} \frac{\theta_n \pi}{\operatorname{tg}(\theta_n \pi)} g(n),$$

где

$$g(n) = \left(1 + \frac{\theta_n}{n-1}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + 2\theta_n \frac{1}{n-1} + \theta_n^2 \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{\lambda_0^2}{(n-1)^2}\right)^{-1}.$$

На промежутке $(0, \frac{\pi}{2})$ функция $\frac{t}{\operatorname{tg} t}$ убывает и имеет значения из интервала $(0, 1)$. Используя это, нетрудно доказать, что существуют положительные константы b_0 и b_1 такие, что

$$0 < b_0 \frac{1}{n} < \theta_n < b_1 \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Заметим, что из приведенных рассуждений следует, что условие (6) из работы [6] является лишним.

Обозначим $\Omega = [0, \pi] \times [0, T]$. Рассмотрим полную, ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \varphi_n(x), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \cos\left(\frac{b}{a} mt\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \sin\left(\frac{b}{a} mt\right) \right\}_{m,n \in \mathbb{N}}. \quad (2.6)$$

Определим оператор $A_0: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, для которого

$$D(A_0) = \left\{ u = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M \varphi_n(x) \left(a_{nm} \cos\left(\frac{b}{a} mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{b}{a} mt\right) \right) \mid M, N \in \mathbb{N} \right\}$$

и $A_0 \varphi = u_{tt} - u_{xx} \quad \forall \varphi \in D(A_0)$. Обозначим через A оператор в $L_2(\Omega)$, являющийся замыканием по графику оператора A_0 .

Система функций (2.6) является системой собственных функций операторов A_0 и A с собственными значениями

$$\mu_{nm} = \lambda_n^2 - \left(\frac{b}{a} m\right)^2 = (n-1+\theta_n)^2 - \left(\frac{b}{a} m\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (2.7)$$

Обозначим через $N(A)$ и $R(A)$ соответственно ядро и образ оператора A . Стандартно доказываются следующие свойства оператора A :

- а) A самосопряжен в $L_2(\Omega)$, $R(A)$ замкнут в $L_2(\Omega)$;
 - б) $A^{-1} \in L(R(A), R(A))$, более того, справедливо соотношение $\|A^{-1}\|_{R(A)} = d^{-1}$, где $d = \inf \{ |\lambda_n^2 - (\frac{b}{a}m)^2| : \lambda_n \neq \frac{b}{a}m \} > 0$;
 - в) $\dim N(A) < +\infty$;
 - г) $R(A) = N(A)^\perp$, $L_2(\Omega) = N(A) \oplus R(A)$.
- Обозначим

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$M = \left\{ (n, m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+, \lambda_n \neq \frac{b}{a}m, n-1 \neq \frac{b}{a}m \right\}.$$

Рассмотрим следующие подмножества системы (2.6):

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \cos((n-1)t), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \sin((n-1)t) \mid \frac{n-1}{b} \in \mathbb{N} \right\}, \\ \Lambda_2 &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \varphi_n(x) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \\ &\cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \cos\left(\frac{b}{a}mt\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \sin\left(\frac{b}{a}mt\right) \mid (n, m) \in M, m \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Пусть $N_1 = N(A)$, $N_2 = \overline{L(\Lambda_1)}$ (замыкание в $L_2(\Omega)$ линейной оболочки), $N_3 = \overline{L(\Lambda_2)}$. Отметим, что на N_2 собственные значения A равны $2(n-1)\theta_n + \theta_n^2$. Из соотношений (2.5) следует, что

$$2(n-1)\theta_n + \theta_n^2 \in [\eta_1, \eta_2], \quad (2.8)$$

где $\eta_1 = \min(b_0, \theta_1^2)$, $\eta_2 = 2b_1 + 1$.

В работе [6] доказаны также следующие свойства оператора A :

- д) собственные значения оператора $A|_{N_3}$ имеют конечную кратность;
- е) если либо λ не является собственным значением A (т.е. не принадлежит семейству (2.7)), либо $\lambda = 0$, то оператор $(A - \lambda)^{-1} : N_3 \rightarrow N_3$ вполне непрерывен.

Нетрудно заметить, что если $a = 1$, то $N(A) = \{0\}$. Действительно, рассмотрим уравнение

$$(n-1+\theta_n)^2 - \left(\frac{b}{a}m\right)^2 = 0.$$

При $a = 1$ оно равносильно соотношению $\theta_n = bm + 1 - n$, которое не выполняется ни при каких целых n, m , поскольку $\theta_n \in (0, 1)$.

§ 3. Нелинейное уравнение

Определим $\|u\|_r = [\int_\Omega |u(x, t)|^r dx dt]^{\frac{1}{r}} \quad \forall u \in D(A_0)$, где $r \geq 1$. Пространство $L_r(\Omega)$ является замыканием $D(A_0)$ по норме $\|\cdot\|_r$. Для функций $f \in L_p(\Omega)$, $g \in L_q(\Omega)$, $p > 2$, $q = \frac{p}{p-1}$, обозначим

$$(f, g) = \int_\Omega f(x, t) g(x, t) dx dt.$$

Обозначим также $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.

Пусть функция $g(x, t, u)$ удовлетворяет следующим условиям:

- i) $g(x, t, u)$ непрерывна на $[0, \pi] \times \mathbb{R}^2$ и T -периодична по t ;
- ii) $g(x, t, u)$ не убывает по u при всех $(x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}$.

Существуют положительные константы $A_1, A_2, A_3, A_4, p, \delta$ такие, что

$$A_3|u|^{p-1} - A_4 \leq |g(x, t, u)| \leq A_1|u|^{p-1} + A_2 \quad \forall (x, t, u) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}^2, \quad (3.1)$$

где

$$p > 2, \quad \frac{A_3}{2} > \frac{A_1}{p} + \delta. \quad (3.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) называется функция $u \in L_p(\Omega)$ такая, что*

$$\int_0^T \int_0^\pi [u(\varphi_{tt} - \varphi_{xx}) + g(x, t, u)\varphi] dx dt = 0 \quad \forall \varphi \in D(A_0).$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть функция $g(x, t, u)$ удовлетворяет условиям i), ii), неравенствам (3.1), (3.2) и одному из двух следующих условий:*

- 1) g не зависит от t ;
- 2) $g(x, t, -u) = -g(x, t, u) \quad \forall (x, t, u) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}^2$.

Тогда для любого $d > 0$ существует обобщенное решение $u \in L_p(\Omega)$ задачи (1.1)–(1.3) такое, что $\|u\|_p \geq d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $E_n = N_1 \oplus N_{2n} \oplus N_{3n}$, где N_{2n} и N_{3n} – линейные оболочки множеств

$$\left\{ \varphi_k(x) \cos((k-1)t), \varphi_k(x) \sin((k-1)t) \mid \frac{k-1}{b} \in \mathbb{N}, k \leq n \right\}$$

и

$$\left\{ \varphi_k(x) \cos\left(\frac{b}{a} mt\right), \varphi_k(x) \sin\left(\frac{b}{a} mt\right) \mid (k, m) \in M, k \leq n, m \leq n \right\}$$

соответственно, $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим на E_n функционал

$$F(u) = \frac{1}{2} (Au, u) + \int_0^T \int_0^\pi G(x, t, u) dx dt, \quad u \in E_n,$$

где $G(x, t, u) = \int_0^u g(x, t, s) ds$.

Доказательство теоремы проведем в два этапа.

I. Докажем существование критической точки F на E_n .

Для любого $c \in \mathbb{R}$ обозначим через G_c и L_c подпространства E_n , являющиеся линейной оболочкой тех собственных функций оператора A , собственные значения которых соответственно больше и не больше числа c . Доказательство существования критической точки функционала F на E_n проведем по плану, использованному в работе [8].

Из условий i), ii) и неравенств (3.1), (3.2) следует существование положительной константы A_5 такой, что при всех $(x, t, u) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}^2$ выполнено двойное неравенство

$$\frac{A_3}{p} |u|^p - A_5|u| \leq G(x, t, u) \leq \frac{A_1}{p} |u|^p + A_2|u|. \quad (3.3)$$

Для любого $c \in \mathbb{R}$ и любого $u \in G_c$ имеем

$$F(u) \geq \frac{1}{2} c \|u\|^2 + \frac{A_3}{p} \|u\|_p^p - A_5 \|u\|_1 \geq A_6 \|u\|^p - \frac{1}{2} |c| \|u\|^2 - A_6 \|u\|.$$

Здесь A_6 не зависит от c и n .

Обозначим $m(c) = \min_{[0, +\infty)} h(\tau) - 1$, где $h(\tau) = A_6 \tau^p - \frac{1}{2} |c| \tau^2 - A_6 \tau$. Тогда

$$F(u) > m(c) \quad \forall u \in G_c. \quad (3.4)$$

Число $m(c)$ не зависит от n .

Для любой функции $u \in L_1(\Omega)$ будем обозначать через a_{mk} , b_{mk} коэффициенты Фурье:

$$a_{mk} = \left(u, \varphi_m(x) \cos\left(\frac{b}{a} kt\right) \right), \quad b_{mk} = \left(u, \varphi_m(x) \sin\left(\frac{b}{a} kt\right) \right). \quad (3.5)$$

Пусть $u \in E_n$. Обозначим

$$\| \|u\| \|_s = \left[\sum_{(m,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+} |\mu_{mk}|^s (a_{mk}^2 + b_{mk}^2) \right]^{\frac{1}{s}}.$$

Нетрудно доказать, что для любого $\alpha > 1$

$$\sum_{\mu_{mk} \in M} \frac{1}{|\mu_{mk}|^\alpha} < +\infty. \quad (3.6)$$

Из неравенств (3.6), (2.3), а также из неравенств Хаусдорфа–Юнга и Гёльдера можно доказать, что

$$\|u\|_p \leq C_1 \| \|u\| \|_\beta \quad \forall u \in H_{3n}, \quad (3.7)$$

где $\beta = \frac{\alpha(p-2)}{p}$ и C_1 не зависит от n . Если $\alpha \in (1, \frac{p}{p-2})$, то

$$\beta \in (0, 1). \quad (3.8)$$

Обозначим $S_n = \{u \in E_n \mid \| \|u\| \|_\beta = 1\}$.

ЛЕММА 3.1. Для любого $d \in \mathbb{R}$ существует $\omega(d) < 0$ такое, что для любого $u \in \{v \in L_\omega(d) \mid \| \|v\| \|_\beta = 1\}$ выполняется неравенство

$$F(u) \leq d. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega < 0$. Заметим, что на H_2 согласно (2.8) собственные значения A положительные. Поэтому $L_\omega \subseteq H_{3n}$. Пусть $u \in L_\omega$ такое, что $\| \|u\| \|_\beta = 1$, и пусть a_{mk} , b_{mk} – коэффициенты Фурье функции u , вычисленные по формулам (3.5). Тогда

$$\begin{aligned} F(u) &\leq -\frac{1}{2} \sum_{(m,k) \in M} |\mu_{mk}| (a_{mk}^2 + b_{mk}^2) + \frac{A_1}{p} \|u\|_p^p + A_2 \|u\|_1 \\ &\leq -\frac{1}{2} |\omega|^{1-\beta} \sum_{(m,k) \in M} |\mu_{mk}|^\beta (a_{mk}^2 + b_{mk}^2) + \frac{A_1}{p} C_1^p + A_2 C_2 \\ &= -\frac{1}{2} |\omega|^{1-\beta} + \frac{1}{p} A_1 C_1^p + A_2 C_2, \end{aligned}$$

где C_2 не зависит от n и u . Если взять достаточно малое $\omega = \omega(d) < 0$, то неравенство (3.9) будет выполнено. Лемма доказана.

Возьмем произвольное $c < 0$. Выберем такое число $c_1 < \omega(c)$, что $L_{c_1} \subset L_{\omega(c)}$, значение $\omega(c)$ определено в лемме 3.1. Обозначим $\gamma(c) = \min(m(c_1), c-1)$. Докажем, что существует критическая точка $u_n \in E_n$ функционала F на E_n такая, что

$$F(u_n) \in [\gamma(c), c]. \quad (3.10)$$

Предположим противное. Тогда стандартно доказывается (см. [8]) существование непрерывного отображения $h: E_n \rightarrow E_n$ такого, что

$$h(\{u \mid F(u) \leq c\}) \subseteq \{u \mid F(u) \leq \gamma(c)\} \quad (3.11)$$

и h является нечетным отображением, если выполнено условие 2) теоремы, или $h(u(\cdot, t + \tau)) = h(u)(\cdot, t + \tau) \quad \forall \tau \in [0, T]$, если выполнено условие 1).

Пусть $P: E_n \rightarrow L_{c_1}$ – ортогональный проектор. Тогда

$$Ph(u) \neq 0 \quad \forall u \in S_n \cap L_{\omega(c)}. \quad (3.12)$$

Действительно, если $Ph(u_0) = 0$ для некоторого $u_0 \in S_n \cap L_{\omega(c)}$, то $h(u_0) \in G_{c_1}$ и $F(h(u_0)) > m(c_1)$. С другой стороны, $F(u_0) \leq c$ и из (3.11) следует $F(h(u_0)) \leq \gamma(c) \leq m(c_1)$. Противоречие. Таким образом, непрерывное отображение $Ph: S_n \cap L_{\omega(c)} \rightarrow S_n \cap L_{c_1}$ удовлетворяет условию (3.12). Если выполнено условие 2) теоремы, то это противоречит теореме Борсука–Улама (см. [9]). Если выполнено условие 1) теоремы, то получается противоречие с S^1 -версией теоремы Борсука–Улама (см. [9]).

Следовательно, существует критическая точка u_n функционала F на E_n , для которой выполнено (3.10). Поэтому

$$(Au_n, \omega) + \int_0^T \int_0^\pi g(x, t, u_n) \omega \, dx \, dt = 0 \quad \forall \omega \in E_n, \quad (3.13)$$

$$\gamma(c) \leq \frac{1}{2} (Au_n, u_n) + \int_0^T \int_0^\pi G(x, t, u_n) \, dx \, dt \leq c. \quad (3.14)$$

II. Осуществим предельный переход при $n \rightarrow \infty$.

Если равенство (3.13) умножить на $\frac{1}{2}$, положить в нем $\omega = u_n$ и из полученного равенства вычесть (3.14), то получим

$$-\gamma(c) \geq \int_0^T \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} u_n g(x, t, u_n) - G(x, t, u_n) \right) dx \, dt \geq -c.$$

Из условий i), ii) и неравенств (3.1), (3.2) следует существование константы B такой, что

$$\begin{aligned} \delta|u|^p - \left(\frac{A_4}{2} + A_2 \right) |u| - B &\leq \frac{1}{2} u g(x, t, u) - G(x, t, u) \\ &\leq \left(\frac{1}{2} A_1 - \frac{1}{p} A_3 \right) |u|^p + \left(\frac{A_2}{2} + A_4 \right) |u| + B \end{aligned}$$

при всех $(x, t, u) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}^2$. Следовательно,

$$\|u_n\|_p \leq A_7, \quad (3.15)$$

$$\|u_n\|_p^p + A_8 \|u_n\|_p + A_8 \geq A_8 |c|, \quad (3.16)$$

где положительные константы A_7, A_8 не зависят от n и c . Значит, найдется подпоследовательность, которую также обозначим u_n , такая, что $u_n \rightarrow u$ слабо в L_p и $g(x, t, u_n) \rightarrow h$ слабо в L_q .

Докажем, что u – обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3). Для этого представим $u_n = u_{1n} + u_{2n} + u_{3n}$, $u = u_1 + u_2 + u_3$, где $u_1, u_{1n} \in N_1$, $u_2, u_{2n} \in N_2$ и $u_3, u_{3n} \in N_3$.

Легко видеть, что $u_{kn} \rightarrow u_k$ слабо в L_2 , где $k \in \{1, 2, 3\}$. Нетрудно показать также, что $u_2 \in D(A)$ и $Au_{2n} \rightarrow Au_2$ слабо в L_2 .

Пусть a_{mk}^n, b_{mk}^n и a_{mk}^0, b_{mk}^0 – коэффициенты Фурье функций u_n и u соответственно. Подставим, как в работе [8], в равенство (3.13)

$$\omega = \sum_{|\mu_{mk}| \geq R} \text{sign}(\mu_{mk}) \varphi_m(x) \left(a_{mk}^n \cos\left(\frac{c}{b} kt\right) + b_{mk}^n \sin\left(\frac{c}{b} kt\right) \right),$$

где $R > \eta_2$. Используя оценки (3.7), (3.15) и неравенство Гёльдера, получим

$$J_R \leq A_9 \|\omega\|_\beta \leq \frac{A_{10}}{R^{(1-\beta)/2}} \sqrt{J_R},$$

где

$$J_R = \sum_{|\mu_{mk}| \geq R} |\mu_{mk}| ((a_{mk}^n)^2 + (b_{mk}^n)^2).$$

Таким образом, $J_R \leq \frac{A_{10}^2}{R^{1-\beta}}$, где константы A_9, A_{10} не зависят от n . Из последнего неравенства следует

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(m,k) \in M} \mu_{mk} ((a_{mk}^n)^2 + (b_{mk}^n)^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (Au_{3n}, u_{3n}) \\ &= \sum_{(m,k) \in M} \mu_{mk} ((a_{mk}^0)^2 + (b_{mk}^0)^2). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Перейдем в равенстве (3.13) к пределу при $n \rightarrow \infty$ для фиксированного $\omega \in E_{n_0}$, в результате получим

$$(Au_2, \omega) + (u_3, A\omega) + \int_0^T \int_0^\pi h\omega \, dx \, dt = 0. \quad (3.18)$$

Отсюда следует, что существует $Au_3 \in L_q$. Докажем, что $h = g(x, t, u)$, воспользовавшись методом монотонности.

Для любого $v \in L_p \cap D(A)$ из (2.8) и условия ii) следует неравенство

$$(Av_2 - Au_{2n}, v_2 - u_{2n}) + \int_0^T \int_0^\pi (g(x, t, v) - g(x, t, u_n))(v - u_n) \, dx \, dt \geq 0. \quad (3.19)$$

Положим в (3.13) $\omega = u_n$ и, воспользовавшись (3.17), перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(Au_{2n}, u_{2n}) + \int_0^T \int_0^\pi g(x, t, u_n) u_n \, dx \, dt \right] = - \sum_{(m,k) \in M} \mu_{mk} ((a_{mk}^0)^2 + (b_{mk}^0)^2).$$

Подставив в (3.18) $\omega = u_n$ и устремив $n \rightarrow \infty$, получим

$$(Au_2, u_2) + \int_0^T \int_0^\pi hu \, dx \, dt = - \sum_{(m,k) \in M} \mu_{mk} ((a_{mk}^0)^2 + (b_{mk}^0)^2).$$

Из последних двух равенств следует:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(Au_{2n}, u_{2n}) + \int_0^T \int_0^\pi g(x, t, u_n) u_n dx dt \right] = (Au_2, u_2) + \int_0^T \int_0^\pi hu dx dt. \quad (3.20)$$

Теперь в неравенстве (3.19) можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$(Av_2 - Au_2, v_2 - u_2) + \int_0^T \int_0^\pi (g(x, t, v) - h)(v - u) dx dt \geq 0.$$

Взяв $v = u + \tau\psi$ и устремив τ к нулю (сначала сократив на $\tau > 0$), после стандартных рассуждений получим $h = g(x, t, u)$. Из равенства (3.18) следует, что u – обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3).

Неравенство $\|u\|_p \geq d$ вытекает из (3.1), (3.16) и (3.20) при достаточно большом $|c|$. Теорема доказана.

§ 4. Волновое уравнение с нелинейным слагаемым, удовлетворяющим условию “нерезонансности”

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(u) + f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Будем рассматривать следующие два типа граничных условий:

$$u(0, t) - hu'_x(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) + hu'_x(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Здесь, как и в § 1, $h > 0$, $T = 2\pi \frac{a}{b}$, где a, b – взаимно простые натуральные числа.

Отметим, что в работе [6] рассмотрена задача (4.1), (4.2) с граничными условиями (1.2). В [6] доказано существование периодического по времени решения задачи (4.1), (4.2), (1.2) в случае, когда нелинейное слагаемое монотонно и удовлетворяет условию “нерезонансности”.

В настоящем параграфе покажем, что для задач (4.1)–(4.3) и (4.1), (4.2), (4.4) в случае, когда a – нечетное число, можно обойтись без условия монотонности. Это связано с тем, что $N_2 = \{0\}$ при нечетном a , и поэтому оператор, обратный оператору Даламбера, на дополнении к ядру является вполне непрерывным.

Для построения ортонормированных в $L_2(\Omega)$ систем собственных функций линейной части задач (4.1)–(4.3) и (4.1), (4.2), (4.4) рассмотрим следующие задачи Штурма–Лиувилля:

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0, \quad \varphi(0) - h\varphi'(0) = 0, \quad \varphi(\pi) = 0, \quad (4.5)$$

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\pi) + h\varphi'(\pi) = 0. \quad (4.6)$$

Нетрудно проверить, что эти задачи имеют одинаковые собственные числа λ_n , удовлетворяющие уравнению

$$\operatorname{tg}(\lambda_n \pi) = -h\lambda_n. \quad (4.7)$$

Представим λ_n в виде

$$\lambda_n = n - \frac{1}{2} + \theta_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

Используя простые рассуждения, покажем, что $\frac{1}{2} > \theta_n > 0$. Из равенств (4.7), (4.8) выразим

$$\theta_n = \frac{1}{n} \frac{h}{\pi} \frac{\theta_n \pi}{\operatorname{tg}(\theta_n \pi)} \frac{1}{1 - 1/(2n) + \theta_n/n}. \quad (4.9)$$

Отсюда нетрудно вывести для θ_n оценки (2.5), в которых в качестве b_0, b_1 можно положить $b_0 = \frac{\theta_1}{\operatorname{tg}(\pi\theta_1)(1+\theta_1)}$, $b_1 = \frac{2}{\pi}$.

Полные ортонормированные в $L_2(0, \pi)$ системы собственных функций задач (4.5) и (4.6) имеют соответственно следующие виды: $\varphi_n(x) = C_n(\sin(\lambda_n x) + \lambda_n h \cos(\lambda_n x))$ и $\varphi_n(x) = C_n \sin(\lambda_n x)$. Легко видеть, что в обоих случаях существует константа C_0 такая, что $|\varphi_n(x)| \leq C_0 \quad \forall x \in [0, \pi]$.

Рассмотрим полные ортонормированные в $L_2(\Omega)$ системы функций (2.6). Как и в § 2, обозначим через A замыкание по графику оператора $A_0 = \partial_{tt} - \partial_{xx}$, определенного на множестве

$$D(A_0) = \left\{ u = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M \varphi_n(x) \left(a_{nm} \cos\left(\frac{b}{a} mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{b}{a} mt\right) \right) \mid M, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Система функций (2.6) является системой собственных функций операторов A_0 и A с собственными значениями

$$\mu_{nm} = \lambda_n^2 - \left(\frac{b}{a} m\right)^2 = \left(n - \frac{1}{2} + \theta_n\right)^2 - \left(\frac{b}{a} m\right)^2.$$

Нетрудно проверить, что для оператора A справедливы свойства а)–г) из § 2. Заметим, что если $a = 1$, то $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Действительно, при $a = 1$ равенство $\mu_{nm} = 0$ равносильно соотношению $2\theta_n = 2bm + 2n - 1$, которое не выполняется при всех целых m, n , поскольку $2\theta_n \in (0, 1)$.

Обозначим $M = \{(n, m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+, \mu_{nm} \neq 0, a(2n - 1) \neq 2bm\}$.

Рассмотрим следующие подмножества системы (2.6):

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)t\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)t\right) \mid a(2n - 1) = 2bm \right\}, \\ \Lambda_2 &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \varphi_n(x) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \\ &\cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \cos\left(\frac{b}{a} mt\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \sin\left(\frac{b}{a} mt\right) \mid (n, m) \in M, m \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Пусть $N_1 = \operatorname{Ker} A$, $N_2 = \overline{L(\Lambda_1)}$ (замыкание в $L_2(\Omega)$ линейной оболочки), $N_3 = \overline{L(\Lambda_2)}$.

Очевидно, что если a – нечетное число, то $N_2 = \{0\}$. Если a – четное число, то $\dim N_2 = \infty$, поскольку N_2 содержит собственные функции оператора A с собственными значениями μ_{nm} такими, что $n = (1 + b(2l + 1))/2$, $m = (2l + 1)a/2$, где $l \in \mathbb{Z}_+$. Из (2.5) следует, что на подпространстве N_2 собственные значения оператора A ограничены:

$$(2n - 1)\theta_n + \theta_n^2 \in [b_0, 2b_1 + b_1^2]. \quad (4.10)$$

Обозначим $\Lambda = \{\mu_{nm} \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+\}$. Если a – нечетное число, то множество Λ не имеет конечных предельных точек. Если a – четное число, то из (4.9) следует, что множество Λ имеет единственную предельную точку $\frac{2h}{\pi}$.

ЛЕММА 4.1. Если a – нечетное число, то для любого $\lambda \notin \Lambda$ оператор $(A - \lambda)^{-1}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ является вполне непрерывным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы достаточно доказать сходимость ряда $I = \sum \frac{1}{(\mu_{nm} - \lambda)^2}$, где суммирование проводится по всем $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. После простых преобразований получим

$$I = a^2 \sum_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+} \left(1 + \frac{a^2(\alpha_n - \lambda)}{(a(n - 1/2))^2 - (bm)^2} \right)^{-2} \left(\left(a \left(n - \frac{1}{2} \right) \right)^2 - (bm)^2 \right)^{-2},$$

где $\alpha_n = (2n - 1)\theta_n + \theta_n^2$. Рассмотрим множество

$$M_1 = \left\{ (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+ \mid \left| \frac{a^2(\alpha_n - \lambda)}{(a(n - 1/2))^2 - (bm)^2} \right| > \frac{1}{2} \right\}.$$

Из (4.10) следует, что $M \subseteq \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+ \mid an + bm \leq C\}$, где C – некоторая константа. Поэтому множество M_1 конечное и существует константа C' такая, что

$$I \leq C' \sum_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+} \left(\left(a \left(n - \frac{1}{2} \right) \right)^2 - (bm)^2 \right)^{-2} \leq 2C' \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n - 1/2)^2} \right)^2 < \infty.$$

Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Функция $u \in L_2(\Omega)$ называется обобщенным решением задач (4.1)–(4.3) и (4.1), (4.2), (4.4), если

$$(u, A_0\varphi) = (g(u) + f, \varphi) \quad \forall \varphi \in D(A_0).$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть функция $g(u)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и

$$\alpha < \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} < \beta, \quad (4.11)$$

где $[\alpha, \beta] \cap \Lambda = \emptyset$, и пусть $T = 2\pi \frac{a}{b}$, где $a, b \in \mathbb{N}$ и a нечетно. Тогда для любой T -периодической функции $f \in L_2(\Omega)$ задачи (4.1)–(4.3) и (4.1), (4.2), (4.4) имеют обобщенное решение $u \in L_2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.11) следует существование констант $C_1, C_2, \alpha_1, \beta_1, \lambda, \gamma$ таких, что $C_1, C_2 > 0$, $(\alpha_1, \beta_1) \cap \Lambda = \emptyset$, $[\alpha, \beta] \subseteq (\alpha_1, \beta_1)$, $\lambda \in (\alpha_1, \beta_1)$, $\gamma \in (0, \beta_1 - \lambda)$ и $g(u) = \lambda u + p(u)$, где

$$p(u)u \geq -C_1, \quad |p(u)| \leq \gamma|u| + C_2 \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

Функция $u \in L_2(\Omega)$ является обобщенным решением задач (4.1)–(4.3) и (4.1), (4.2), (4.4) тогда и только тогда, когда $Au = g(u) + f$. Это уравнение перепишем в виде

$$u = T(u), \quad (4.13)$$

где $T(u) = (A - \lambda)^{-1}(p(u) + f)$. Из условий теоремы и леммы 4.1 следует вполне непрерывность оператора T . Доказательство существования неподвижной точки оператора T проведем, воспользовавшись принципом Лере–Шаудера. Для этого рассмотрим уравнение $u = \mu T(u)$ с параметром $\mu \in (0, 1]$. Преобразуем это уравнение к виду

$$p(u) = -\frac{1}{\mu}(-A + \lambda)(u - \mu w), \quad (4.14)$$

где $w = (A - \lambda)^{-1}f$. Легко видеть, что наибольшее отрицательное собственное значение η оператора $-A + \lambda$ удовлетворяет неравенству

$$|\eta| > \beta_1 - \lambda. \quad (4.15)$$

Умножим уравнение (4.14) скалярно в $L_2(\Omega)$ на $(u - \mu w)$ и воспользуемся стандартным неравенством с наибольшим отрицательным собственным значением η , в результате получим

$$\begin{aligned} (p(u), u - \mu w) &= -\frac{1}{\mu} ((-A + \lambda)(u - \mu w), u - \mu w) \\ &\leq \frac{1}{|\eta|\mu} \|(-A + \lambda)(u - \mu w)\|^2 = \frac{\mu}{|\eta|} \|p(u)\|^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Воспользовавшись (4.12), выведем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p(u)u \, dx \, dt &= \int_{\Omega} |p(u)u + C_1| \, dx \, dt - C_1|\Omega| \geq \int_{\Omega} |p(u)| |u| \, dx \, dt - 2C_1|\Omega| \\ &\geq \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} p^2(u) \, dx \, dt - C_3\|p(u)\| - C_3. \end{aligned}$$

Здесь $|\Omega| = \pi T$ и C_3 – некоторая положительная константа. Из последнего неравенства и (4.16) получим

$$\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{|\eta|} \right) \|p(u)\|^2 - \|p(u)\|(C_3 + \|w\|) - C_3 \leq 0.$$

Отсюда и из соотношений (4.14) и (4.15) следуют оценки

$$\|p(u)\| \leq C_4, \quad \|(-A + \lambda)(u - \mu w)\| \leq C_4, \quad (4.17)$$

где C_4 не зависит от μ .

Поскольку собственные значения оператора $-A + \lambda$ отделены от нуля (например, числом $\alpha_0 = \min(\lambda - \alpha, \beta - \lambda)$), то из второго неравенства (4.17) вытекает оценка

$$\|u\| \leq \alpha_0^{-1}(\|f\| + C_4).$$

Отсюда и из принципа Лере–Шаудера следует существование решения уравнения (4.13). Теорема доказана.

Если a является четным числом, то $\dim N_2 = \infty$ и из (4.10) следует, что оператор $(A - \lambda)^{-1}$ не является вполне непрерывным. В этом случае наложим на функцию $g(u)$ дополнительное условие монотонности и перепишем уравнение (4.1) в виде

$$u_{tt} - u_{xx} + g(u) = f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.18)$$

Обозначим $\Lambda_1 = \{|\mu_{nm}| \mid \mu_{nm} < 0, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+\} \cup 0$. Точно так же, как в работе [6], доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.2. *Предположим, что функция $g(u)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, не убывает и выполнено условие (4.11), где $\alpha, \beta > 0$ и $[\alpha, \beta] \cap \Lambda_1 = \emptyset$. Пусть $T = 2\pi \frac{a}{b}$, где $a, b \in \mathbb{N}$ и a является четным числом. Тогда для любой T -периодической функции $f \in L_2(\Omega)$ задачи (4.18), (4.2), (4.3) и (4.18), (4.2), (4.4) имеют обобщенное решение $u \in L_2(\Omega)$.*

В заключение автор приносит благодарность профессорам В. А. Кондратьеву и А. В. Михалёву за внимание к настоящей работе.

Список литературы

1. Brezis H., Nirenberg L., "Forced vibrations for a nonlinear wave equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**:1 (1978), 1–30.
2. Bahri A., Brezis H., "Periodic solution of a nonlinear wave equation", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **85** (1980), 313–320.
3. Feireisl E., "On the existence of multiplicity periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term", *Czechosl. Math. J.*, **38**:1 (1988), 78–87.
4. Плотников П. И., "Существование счетного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабо нелинейного волнового уравнения", *Матем. сб.*, **136(178)**:4(8) (1988), 546–560.
5. Рудаков И. А., "Нелинейные колебания струны", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ.*, 1984, № 2, 9–13.
6. Рудаков И. А., "Периодическое по времени решение уравнения вынужденных колебаний струны с однородными граничными условиями", *Дифференц. уравн.*, **39**:11 (2003), 1550–1555.
7. Бабич В. М., Григорьева Н. С., *Ортогональные разложения и метод Фурье*, Изд-во Ленинградского университета, Л., 1983.
8. Feireisl E., "Time periodic solutions to a semilinear beam equation", *Nonlinear Anal.*, **12** (1988), 279–290.
9. Fadell E. R., Husseini S. Y., Rabinowitz P. H., "Borsuk–Ulam theorems for arbitrary S^1 actions and applications", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **274**:1 (1982), 345–360.

И. А. РУДАКОВ (I. A. RUDAKOV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: rudakov_bgu@mail.ru

Поступило в редакцию
29.01.2004