Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Прохоров, С. В. Романова, Локальные экстремальные задачи для ограниченных аналитических функций без нулей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 4, 209–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im564>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:34:00

УДК 517.54

Д. В. Прохоров, С. В. Романова

Локальные экстремальные задачи для ограниченных аналитических функций без нулей

В классе $B(t)$, $t > 0$, всех аналитических в единичном круге U функций $f(z, t) = e^{-t} + c_1(t)z + c_2(t)z^2 + \dots$, удовлетворяющих в U условию $0 < |f(z, t)| < 1$, найдены асимптотические оценки коэффициентов при малых и достаточно больших $t > 0$. Приведен алгоритм определения тех $t > 0$, при которых канонические функции доставляют локальный максимум $\operatorname{Re} c_n(t)$ в классе $B(t)$. Описано множество функционалов $L(f) = \sum_{k=0}^n \lambda_k c_k$, для которых канонические функции доставляют максимум $\operatorname{Re} L(f)$ в классе $B(t)$ при малых и больших значениях t . Доказательства основаны на применении методов оптимизации для решений управляемой системы дифференциальных уравнений.

Библиография: 17 наименований.

§ 1. Введение

Обозначим через B класс аналитических в единичном круге $U = \{z: |z| < 1\}$ функций

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad 0 < |f(z)| < 1, \quad z \in U. \quad (1)$$

В последние десятилетия изучение функций класса B привлекает внимание математиков. Классические и новые методы привели к решению ряда экстремальных задач [1]–[11] в классе B и его подклассах. Однако наиболее притягательная гипотеза Кжижа [12] о том, что справедливо равенство

$$\max_{f \in B} |c_n| = \frac{2}{e}, \quad n \geq 1,$$

причем максимум достигается для вращений функции $f(z) = F(z^n)$, где

$$F(z) = \exp \left\{ \frac{z-1}{z+1} \right\} = \frac{1}{e} + \frac{2}{e}z + \dots, \quad z \in U, \quad (2)$$

доказана только для $n \leq 5$.

На линейном пространстве аналитических в единичном круге U функций с разложением (1) рассмотрим линейный функционал

$$L(f) = \sum_{k=0}^n \lambda_k c_k, \quad \lambda_n = 1, \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-01-00083), программы “Университеты России” (грант № УР 04.01.374).

и экстремальную задачу

$$\operatorname{Re} L(f) \rightarrow \max, \quad f \in B. \quad (4)$$

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений $f(z) \rightarrow e^{i\alpha} f(e^{i\beta} z)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, сохраняющих модули коэффициентов разложения (1), то экстремальную задачу (4) достаточно рассматривать на сужении класса B , состоящем из функций $f \in B$ с неотрицательными коэффициентами c_0 и c_1 . Заметим, что проблема Кжижа [12] заключается в решении задачи (4) для функционала L , задаваемого формулой (3) с параметрами $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$, $\lambda_n = 1$.

Считая коэффициент c_0 неотрицательным и пользуясь условием $0 < c_0 < 1$, положим $c_0 = e^{-t}$, $0 < t < \infty$. Такая нормировка производит расслоение класса функций $f \in B$ с положительным коэффициентом c_0 на семейство классов $B(t) = \{f \in B: c_0 = e^{-t}\}$, $t > 0$. Класс $B(t)$, $t > 0$, является компактным в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах круга U , поэтому всякий непрерывный функционал достигает на нем своего максимума.

В настоящей статье найдены асимптотические оценки коэффициентов функций класса $B(t)$ при малых и достаточно больших $t > 0$ и дается алгоритм определения тех $t > 0$, при которых канонические функции доставляют локальный максимум $\operatorname{Re} c_n$ в классе $B(t)$. Описано множество функционалов (3), для которых канонические функции являются экстремальными функциями задачи (4) в классе $B(t)$ при малых и больших значениях $t > 0$.

§ 2. Основные сведения о параметрическом методе и оптимизации

Очевидно, что существует простое соотношение между классами $B(t)$ и классом Каратеодори P , состоящем из аналитических в U функций p , $p(z) = 1 + p_1 z + \dots$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $z \in U$. Действительно, $f \in B(t)$, $t > 0$, в том и только в том случае, когда $p = (-1/t) \log f \in P$. Класс P изучен довольно подробно, его структура определяется интегральным представлением Рисса–Герглотца (см., например, [13, с. 61]).

Всякий функционал на классе $B(t)$, аналитически зависящий от коэффициентов $c_1, \dots, c_n$ разложения (1), взаимно однозначно соответствует функционалу на классе P , аналитически зависящему от тейлоровских коэффициентов $p_1, \dots, p_n$ функции $p \in P$. Как известно (см., например, [13, с. 124]), функции, доставляющие экстремум таким функционалам в классе P , содержатся в семействе функций

$$p(z) = \sum_{k=1}^m \nu_k \frac{e^{iu_k} + z}{e^{iu_k} - z}, \quad (5)$$

$$\nu_k \geq 0, \quad u_k \in (-\pi, \pi], \quad k = 1, \dots, m, \quad \sum_{k=1}^m \nu_k = 1, \quad m \leq n + 1.$$

Несмотря на простую связь с P , класс B оказался вовсе не простым для изучения, а многие коэффициентные оценки в нем остаются неизвестными. Наиболее активное исследование классов B и $B(t)$ началось после появления статьи [6], в которой были определены задачи и намечены некоторые пути их решения. В частности, была найдена оценка $|c_2|$ в классе $B(t)$ при всех $t > 0$. Оценка $|c_3|$ в зависимости от $t > 0$ была позднее получена в работах [9], [10].

Помимо прочего, в [6] было показано, что класс $B(t)$ имеет своеобразное параметрическое представление. Именно, для всякой функции f из некоторого всюду плотного подмножества класса $B(t_0)$, $t_0 > 0$, найдется измеримая функция $u = u(t)$, $t \geq 0$, такая, что $f(z) = w(z, t_0)$, где $w = w(z, t)$ является интегралом обыкновенного дифференциального уравнения типа Левнера

$$\frac{dw}{dt} = -w \frac{e^{iu} + z}{e^{iu} - z}, \quad w(z, 0) = 1, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad z \in U. \quad (6)$$

Обратно, решение $w = w(z, t_0)$ дифференциального уравнения (6) с произвольной измеримой функцией $u = u(t)$ принадлежит классу $B(t_0)$. Функции $f = \exp\{-t_0 p\}$, где p задаются формулой (5), представимы решениями дифференциального уравнения (6). Поэтому максимум функционалов в задаче (4) достигается на решениях уравнения (6).

Параметрическое представление решениями дифференциального уравнения (6) позволяет применять оптимизационные методы для решения экстремальных задач в классах $B(t)$. Изложим оптимизационную схему принципа максимума Понтрягина [14] как необходимого условия максимума в задаче (4).

Пусть

$$w(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) z^k, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad z \in U, \quad (7)$$

является решением дифференциального уравнения (6) с заданной управляющей функцией $u = u(t)$ и $f(z) = w(z, t_0)$ имеет разложение (1).

Подставим разложение (7) в дифференциальное уравнение (6), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z в обеих частях уравнения (6) и получим систему дифференциальных уравнений относительно $a(t) = (a_0(t), \dots, a_n(t)) = e^t c(t) = (e^t c_0(t), \dots, e^t c_n(t))$:

$$\begin{aligned} \frac{da_0}{dt} &= 0, & a_0(0) &= 1, & \frac{da_j}{dt} &= -2 \sum_{s=1}^j e^{isu} a_{j-s}, \\ a_j(0) &= 0, & j &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

Первое уравнение системы (8) влечет тождественное равенство $a_0(t) = 1$. Экстремальная задача (4) в классе $B(t_0)$ запишется в виде

$$\sum_{k=1}^n (\operatorname{Re} \lambda_k \operatorname{Re} a_k(t_0) - \operatorname{Im} \lambda_k \operatorname{Im} a_k(t_0)) \rightarrow \max. \quad (9)$$

Уравнения системы (8) запишем в комплексной векторной форме:

$$\frac{da}{dt} = G(t, a, u),$$

где $G(t, a, u) = (0, G_1(t, a, u), \dots, G_n(t, a, u))$ – вектор правых частей уравнений системы (8). Обозначим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a_k &= x_{2k-1}, & \operatorname{Im} a_k &= x_{2k}, \\ \operatorname{Re} G_k(t, a, u) &= g_{2k-1}(t, a, u), & \operatorname{Im} G_k(t, a, u) &= g_{2k}(t, a, u), \end{aligned}$$

со своими управлениями. Таким образом, перейдем от фазовой системы (8) к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da_j}{dt} &= -2 \sum_{k=1}^m \nu_k \sum_{s=1}^j e^{isu_k} a_{j-s}, \quad a_j(0) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ a_0 &= 1, \quad \nu_1 \geq 0, \dots, \nu_m \geq 0, \quad \sum_{k=1}^m \nu_k = 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь m равно числу точек максимума функции Гамильтона на $(-\pi, \pi]$, $a_k(t) = e^{tc_k(t)}$, $k = 0, \dots, n$, $c_k(t)$ определены разложением (7). Скалярное управление u заменяется на векторное управление $u = (u_1, \dots, u_m)$, а коэффициенты $\nu_1, \dots, \nu_m$ в общем случае зависят от t и являются управлениями.

Покажем, что в задаче (9), (13) можно положить $m \leq n$ и выбор оптимальных управлений сосредоточить лишь на постоянных управляющих функциях.

ЛЕММА 1. В задаче оптимального управления (9), (13) существуют постоянные неотрицательные коэффициенты $\nu_1, \dots, \nu_m$, $\sum_{k=1}^m \nu_k = 1$, $m \leq n$, и постоянные оптимальные управления $u_1, \dots, u_m \in (-\pi, \pi]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача оптимального управления (9), (13) эквивалентна экстремальной задаче (4) в классе $B(t_0)$. В силу связи класса $B(t)$, $t > 0$, с классом P и описанием множества экстремальных функций для аналитических функционалов в классе P [13, с. 124] экстремальная функция $f^* \in B(t)$ задачи (4) существует и содержится во множестве функций

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp \left\{ -t \sum_{k=1}^m \nu_k \frac{e^{iu_k} + z}{e^{iu_k} - z} \right\}, \quad \nu_k \geq 0, \quad u_k \in (-\pi, \pi], \quad k = 1, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^m \nu_k &= 1, \quad m \leq n + 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Каждая функция f , заданная формулой (14), является при $t = t_0$ решением дифференциального уравнения

$$\frac{dw}{dt} = -w \sum_{k=1}^m \nu_k \frac{e^{iu_k} + z}{e^{iu_k} - z}, \quad w(z, 0) = 1, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad z \in U, \quad (15)$$

с постоянными $\nu_1, \dots, \nu_m$ и $u_1, \dots, u_m$.

Дифференциальное уравнение (15) взаимно однозначно связано с системой (13). Следовательно, некоторый набор постоянных $\nu_1, \dots, \nu_m$ и $u_1, \dots, u_m$ является оптимальным управляющим вектором в задаче (9), (13).

Осталось показать, что $m \leq n$. Предположим, что $m = n + 1$. Тогда найдется набор положительных постоянных $\nu_1, \dots, \nu_{n+1}$, $\sum_{k=1}^{n+1} \nu_k = 1$, и различных постоянных $u_1, \dots, u_{n+1} \in (-\pi, \pi]$, удовлетворяющих необходимому условию максимума в задаче (9). В частности, для каждого $t \in [0, t_0]$ точки $u_1, \dots, u_{n+1}$ являются точками максимума функции Гамильтона (10). Условие $\Psi_n = 1$ обеспечивает невырожденность функции Гамильтона, которая представляет собой тригонометрический многочлен точной степени n . Поэтому функция Гамильтона может иметь не более n точек максимума на $(-\pi, \pi]$. Полученное противоречие означает, что $m \leq n$. Таким образом, лемма доказана.

Выделим два наиболее характерных примера функций $f \in B(t)$. Первый из них возникает при выборе $m = 1$ и $u = \pi$ в уравнении (15), что дает

$$w(z, t) = F_t(z) = \exp \left\{ -t \frac{1-z}{1+z} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) z^k. \quad (16)$$

При $t = 1$ функция $F_1(z)$ дается формулой (2).

Другой пример возникает при $m = n$, $\nu_1 = \dots = \nu_n = 1/n$ и $u_1, \dots, u_n$, являющихся корнями уравнения $u^n = -1$ на $(-\pi, \pi]$, что дает $w(z, t) = F_t(z^n)$. Роль этого примера особенно значима в связи с предположением об экстремальности $F_1(z^n)$ в гипотезе Кжижа.

§ 3. Асимптотические оценки коэффициентов в случае $f(0) = 1$

Поскольку $w(z, 0) = 1$ в уравнении (15), то для его решений $w(z, t)$ справедливо предельное соотношение $\lim_{t \rightarrow 0} w(z, t) = 1$. Р. Перец [8] доказал, что для всякого $n \geq 1$ существует $t_n > 0$ такое, что для всех $t \in [0, t_n]$

$$\max_{f \in B(t)} |c_n| = |A_1(t)|$$

с экстремальной функцией $F_t(z^n)$. Это равносильно решению экстремальной задачи (4) в классах $B(t)$ с функционалом (3) при $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$. Второй автор настоящей статьи показала [16], что из всех функционалов вида (3) только для $L(f) = c_n$ справедливо утверждение Переца.

Мы предложим здесь оптимизационный вариант доказательства, что позволит в следующем параграфе найти точные значения t , при которых функция $F_t(z^n)$ дает локальный максимум $\operatorname{Re} c_n$ в классе $B(t)$.

Положим

$$u_k^0 = \frac{-\pi + 2k\pi}{n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$B_k = (\cos u_k^0, \sin u_k^0, \dots, \cos((n-1)u_k^0), \sin((n-1)u_k^0)), \quad k = 1, \dots, n.$$

Векторы B_k имеют размерность $2n - 2$.

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 2. *Векторы $B_k - B_n$, $k = 1, \dots, n-1$, линейно независимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что векторы $B_1 - B_n, \dots, B_{n-1} - B_n$ линейно зависимы. Значит, найдутся числа $\mu_1, \dots, \mu_n$, не равные одновременно нулю, такие, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k (B_k - B_n) = 0.$$

Положим $\mu_n = -\mu_1 - \dots - \mu_{n-1}$. Тогда последнее равенство равносильно

$$\sum_{k=1}^n \mu_k B_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \mu_k = 0, \quad (17)$$

или в координатном виде

$$\sum_{k=1}^n \mu_k \cos(su_k^0) = \sum_{k=1}^n \mu_k \sin(su_k^0) = 0, \quad s = 1, \dots, n-1. \quad (18)$$

Обозначим

$$W_k(z) = \frac{1}{e^{iu_k^0} - z} = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-i(j+1)u_k^0} z^j, \\ W(z) = \sum_{k=1}^n \mu_k W_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \mu_k e^{-i(j+1)u_k^0} z^j.$$

Отсюда и из равенств (18) следует, что

$$W(0) = 0, \quad \dots, \quad W^{(n-2)}(0) = 0. \quad (19)$$

Преобразуя $W(z)$ к рациональному виду, находим, что

$$W(z) = \frac{Q(z)}{\prod_{k=1}^n (e^{iu_k^0} - z)},$$

причем благодаря второму равенству (17) многочлен $Q(z)$ имеет степень не выше $n-2$. Это противоречит условию (19). Лемма доказана.

Теперь получим качественное описание экстремальной функции в задаче об оценке $\operatorname{Re} c_n$ в случае $f(0)$, близких к 1.

ЛЕММА 3. *Функция, доставляющая максимум $\operatorname{Re} c_n$ в классе $B(t)$ для достаточно малых $t > 0$, является решением дифференциального уравнения (15) с $m = n$, положительными постоянными $\nu_1, \dots, \nu_n$ и различными $u_1, \dots, u_n \in (-\pi, \pi]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В экстремальной задаче (9) о максимуме $\operatorname{Re} c_n$ в классе $B(t)$ предполагается, что $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$. Фазовой системе (13) соответствует сопряженная система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Psi_j}{dt} = 2 \sum_{k=1}^m \nu_k \sum_{s=1}^{n-j} e^{isu_k} \Psi_{s+j}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (20)$$

с условиями трансверсальности (12), из которой следует, что

$$\Psi_j = o(1), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad t \rightarrow 0. \quad (21)$$

По этой причине согласно (10) имеем

$$H(0, a(0), \Psi(0), u) = -2 \cos(nu) + o(1),$$

а значит, все возможные точки u_k максимума функции Гамильтона имеют асимптотику

$$u_k = u_k^0 + o(1), \quad k = 1, \dots, n, \quad u_k \rightarrow u_k^0.$$

Из последнего уравнения системы (13) заключаем, что

$$\left. \frac{d \operatorname{Re} a_n}{dt} \right|_{t=0} = -2 \sum_{k=1}^m \nu_k \cos(nu_k) \leq 2 \quad (22)$$

со знаком равенства для $m = n$ и $u_1 = u_1^0, \dots, u_n = u_n^0$. Принимая $u_1, \dots, u_n$ постоянными, продифференцируем по t последнее уравнение системы (13) при $m = n$ и получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_n}{dt^2} &= -2 \sum_{k=1}^n \nu_k \sum_{s=1}^n e^{isu_k} \frac{da_{n-s}}{dt} \\ &= -2 \sum_{k=1}^n \nu_k \sum_{s=1}^n e^{isu_k} (-2) \sum_{l=1}^n \nu_l \sum_{\sigma=1}^{n-s} e^{i\sigma u_k} a_{n-s-\sigma}. \end{aligned} \quad (23)$$

Пользуясь начальными условиями в (13) и тем, что $a_0 = 1$, из (23) находим

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 a_n}{dt^2} \right|_{t=0} &= 4 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^n e^{isu_k} e^{i(n-s)u_l} \nu_k \nu_l \\ &= 4 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^n e^{isu_k^0} e^{i(n-s)u_l^0} \nu_k \nu_l + o(1) \\ &= -4 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^n e^{is(u_k^0 - u_l^0)} \nu_k \nu_l + o(1) \end{aligned} \quad (24)$$

при $u_k \rightarrow u_k^0$. Поскольку

$$\sum_{s=1}^n e^{is(u_k^0 - u_l^0)} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq l, \\ n & \text{при } k = l, \end{cases}$$

то из (24) следует, что

$$\left. \frac{d^2 a_n}{dt^2} \right|_{t=0} = -4n \sum_{k=1}^n \nu_k^2 + o(1) = -4n \left[\sum_{k=1}^{n-1} \nu_k^2 + \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k \right)^2 \right] + o(1) \quad (25)$$

при $u_k \rightarrow u_k^0$.

Абсолютный максимум квадратичной формы

$$q_{n-1} = -4n \sum_{k=1}^n \nu_k^2 = -4n \left[\sum_{k=1}^{n-1} \nu_k^2 + \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k \right)^2 \right],$$

равный -4 , достигается в точке $(\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) = (1/n, \dots, 1/n)$, которая является внутренней точкой симплекса

$$S = \left\{ (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) : \nu_1 \geq 0, \dots, \nu_{n-1} \geq 0, \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k \leq 1 \right\}.$$

Абсолютный максимум квадратичной формы q_{n-1} на границе ∂S симплекса S равен $-4n/(n-1)$.

Из соотношений (22) и (25) следует, что

$$\operatorname{Re} a_n(t) = \operatorname{Re} \left[a'_n(0)t + \frac{a''_n(0)}{2} t^2 + o(t^2) \right] \leq 2t - 2t^2 + o(t^2) \quad (26)$$

со знаком равенства для $m = n$ и $u_1 = u_1^0, \dots, u_n = u_n^0$.

Выберем $t > 0$ настолько близким к нулю, чтобы модули величин $o(1)$ и $o(t^2)/t^2$ в (25) и (26) не превышали $1/(2(n-1))$. Переход от скользящего режима с $m = n$ в задаче оптимального управления (9), (13) к режиму с меньшим числом m означает, что один из коэффициентов $\nu_1, \dots, \nu_m$ равен нулю, а это равносильно переходу к границе ∂S симплекса S множества значений $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$. В таком случае $\operatorname{Re} a_n(t) \leq 2t - (2 + 1/(n-1))t^2$, и, сравнивая с (26), получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 4. Множество Σ точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 1) = \Psi(0)$, для которых функция Гамильтона при $t = 0$ имеет n точек максимума на $(-\pi, \pi]$, является гладкой поверхностью вещественной размерности $n-1$ в окрестности точки $\xi^0 = (0, \dots, 0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие наличия n точек максимума $u_1, \dots, u_n$ функции Гамильтона (10) при $t = 0$ выражается равенствами

$$\begin{aligned} H_u(0, a(0), \xi, u_1) &= \dots = H_u(0, a(0), \xi, u_n) = 0, \\ H(0, a(0), \xi, u_1) &= \dots = H(0, a(0), \xi, u_n). \end{aligned}$$

Первая серия равенств определяет точки $u_1, \dots, u_n$ в зависимости от ξ , а вторая серия равенств, преобразованная к виду

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n e^{ij u_1} \xi_j = \dots = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n e^{ij u_n} \xi_j, \quad (27)$$

описывает множество точек ξ .

Пусть $\xi_j = \eta_{2j-1} + i\eta_{2j}$, $j = 1, \dots, n-1$. Равенства (27) выполняются в точке ξ^0 и определяют гладкую неявную функцию $n-1$ переменных вещественных координат вектора ξ от остальных свободных координат этого вектора, если матрица системы уравнений (27), составленная из элементов

$$\cos(ju_k) - \cos(ju_n), \quad \sin(ju_k) - \sin(ju_n), \quad (28)$$

$j = 1, \dots, n-1$, $k = 1, \dots, n-1$, имеет максимальный ранг. Строки матрицы с элементами (28) состоят из векторов $B_1 - B_n, \dots, B_{n-1} - B_n$, которые по лемме 2 линейно независимы. Таким образом, лемма доказана.

Выразим схему асимптотического описания поверхности Σ . Положим $\eta_j = \varepsilon e_j + o(\varepsilon)$, $j = 1, \dots, 2n-2$. Продифференцируем равенства (27) по координатам вектора ξ в точке $\varepsilon = 0$ и получим систему линейных уравнений с матрицей, составленной из элементов (28) с заменой η_j на e_j , $j = 1, \dots, 2n-2$. Максимальность ранга системы позволяет определить $n-1$ вещественных координат вектора ξ как функции остальных координат. Свободные координаты вектора ξ будем обозначать $\eta_{j_1}, \dots, \eta_{j_{n-1}}$.

ЛЕММА 5. Пусть в задаче оптимального управления (9), (13) $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$, $\lambda_n = 1$, $\Psi(0) = \xi^0$. Тогда управления $u_1 = u_1^0, \dots, u_n = u_n^0$ удовлетворяют принципу максимума Понтрягина, а вектор Ψ удовлетворяет условиям трансверсальности (12) при $\nu_1 = \dots = \nu_n = 1/n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка утверждений леммы осуществляется непосредственно. Действительно, правые части систем (13) и (20) обращаются в нуль, поэтому векторы $a(t)$ и $\Psi(t)$ остаются постоянными, как и функция Гамильтона $H(t, a, \Psi, u) = -2 \cos(nu)$, $t \geq 0$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Для всякого $n \geq 1$ существует $t_n > 0$ такое, что для всех $t \in [0, t_n]$

$$\max_{f \in B(t)} \operatorname{Re} c_n = |A_1(t)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t_n > 0$. Обозначим $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1})$, $\nu_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k$, $\nu^0 = (1/n, \dots, 1/n)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) = t_n(\nu - \nu^0)$ и рассмотрим отображение

$$G: (\mu, \xi) \rightarrow \Psi(t_n),$$

где μ принадлежит окрестности O_μ точки $0 = (0, \dots, 0)$, ξ принадлежит окрестности O_ξ точки ξ^0 , $O_\mu, O_\xi \subset \Sigma$, а $\Psi(t)$ является решением системы дифференциальных уравнений (20) с $m = n$, в которой точки $u_1, \dots, u_n$ удовлетворяют принципу максимума Понтрягина в момент $t = 0$ для функции Гамильтона (10) с фазовыми значениями a , заданными системой (13). Заметим, что $G(0, \xi^0) = \Psi(t_n) = (0, \dots, 0, 1)$ и точка $(0, \xi^0)$ согласно (15) соответствует функции $F_{t_n}(z^n)$.

Найдем частную производную G_μ :

$$\frac{\partial G}{\partial \mu} = \left(\frac{\partial G}{\partial \mu_1}, \dots, \frac{\partial G}{\partial \mu_{n-1}} \right).$$

Поскольку

$$\Psi_j(t_n) = 2 \int_0^{t_n} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \nu_k \sum_{s=1}^{n-j} e^{isu_k} \Psi_{s+j} + \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k \right) \sum_{s=1}^{n-j} e^{isu_n} \Psi_{s+j} \right] dt,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \mu_k} &= \frac{2}{t_n} \int_0^{t_n} \left[\sum_{s=1}^{n-j} e^{isu_k} \Psi_{s+j} - \sum_{s=1}^{n-j} e^{isu_n} \Psi_{s+j} \right] dt \\ &= -2(e^{-ij u_k} - e^{-ij u_n}) + o(1), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad k = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Таким образом, строки матрицы G_μ с точностью до $o(1)$ и знаков нечетных координат состоят из векторов $2(B_k - B_n)$, $k = 1, \dots, n-1$, которые линейно независимы по лемме 2.

Перейдем к вычислению частной производной G_ξ , которая является матрицей со строками, содержащими частные производные координат вектора $\Psi(t_n)$ по свободным координатам вектора ξ . Поскольку $\Psi(0) = \xi$, то при $t = 0$ прямоугольная матрица G_ξ размерностью $(n-1) \times (2n-2)$ содержит единичную

матрицу размерностью $(n-1) \times (n-1)$ с номерами столбцов $j_1, \dots, j_{n-1}$. Следовательно, строки матрицы G_ξ линейно независимы при $t = 0$, а значит, и при достаточно малых $t > 0$.

Наконец, условие скользящего режима требует выполнения равенств

$$H(0, a(0), \xi, u_k) = H(0, a(0), \xi, u_n), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

или с использованием формулы (10)

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n-1} (e^{ij u_k} - e^{ij u_n}) \xi_j = 0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Продифференцируем это равенство по свободным координатам $\eta_{j_1}, \dots, \eta_{j_{n-1}}$ вектора ξ , в результате чего получим равенства, означающие, что все векторы $B_1 - B_n, \dots, B_{n-1} - B_n$ ортогональны каждой из строк матрицы G_ξ при $t = 0$, откуда следует, что строки $B_1 - B_n, \dots, B_{n-1} - B_n$ и строки матрицы G_ξ при $t = 0$ вместе образуют обратимую квадратную матрицу размерностью $(2n-2) \times (2n-2)$.

Полная производная G' отображения G является квадратной матрицей, которая образуется соединением прямоугольных матриц G_μ и G_ξ , и эта квадратная матрица обратима при достаточно малых $t > 0$. По теореме об обратной функции отображение G обратимо и осуществляет взаимно однозначное отображение окрестности $O_\mu \times O_\xi$ точки $(0, \xi^0)$ на окрестность O_Ψ точки $G(0, \xi^0) = (0, \dots, 0, 1)$. Как следует из доказательства теоремы об обратной функции, основанного на принципе Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения (см., например, [17, с. 231–234]), радиус окрестности O_ξ не меньше, чем величина

$$\frac{1}{4 \sup_{t \in (0, t_n)} \|G'(0, \xi_0)\|},$$

которая не уменьшается с уменьшением t_n , а окрестность $O_\mu \times O_\xi$ определяется неравенством

$$\sup_{t \in (0, t_n)} \|[G'(0, \xi^0)]^{-1} G'(\mu, \xi) - E\| \leq \frac{1}{2},$$

где E – единичная матрица.

Уменьшая t_n , добьемся, чтобы согласно (21)

$$\Psi(t) \in O_\xi, \quad 0 \leq t \leq t_n, \quad G(O_\mu, O_\xi) \subset O_\Psi$$

и окрестность O_μ была такова, чтобы соответствующая ей окрестность точки ν^0 в пространстве векторов ν содержала симплекс S . При этих условиях точке $\Psi(t_n) = (0, \dots, 0, 1)$, отвечающей условиям трансверсальности (12), соответствует единственная точка $(0, \xi^0)$, описанная в лемме 5. Значит, в классе $B(t_n)$ одна только функция $F_{t_n}(z^n)$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности задачи (9), (13). Таким образом, теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть векторы $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1)$ из окрестности точки $(0, \dots, 0, 1)$ задают функционалы L из (3). Тогда разным векторам λ соответствуют различные экстремальные функции задачи (4) в классе $B(t)$ при достаточно малых $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор λ определяет условия трансверсальности (12), которым отображение G устанавливает взаимно однозначное локальное соответствие с вектором (ν, ξ) , $\xi \in \Sigma$, однозначно задающим экстремальные функции задачи (4) в классе $B(t)$. Следствие доказано.

§ 4. Локальный максимум коэффициентов в случае $f(0) = 1$

Определим те $t > 0$, для которых функция $F_t(z^n)$ доставляет локальный максимум $\text{Re } c_n$ в классе $B(t)$. Воспользуемся аналитическими средствами, согласно которым по лемме 1 локальный максимум $\text{Re } c_n$ следует искать на множестве функций (14) с $m = n$, где вектор ν принимает значения из окрестности O_ν вектора ν^0 , а вектор $u = (u_1, \dots, u_n)$ – из окрестности O_u вектора $u^0 = (u_1^0, \dots, u_n^0)$.

Рассмотрим функционал $I = \text{Re } c_n$ в классе $B(t)$ и вычислим элементы квадратной матрицы I'' , которая представляет собой производную второго порядка функционала I по (ν, u) в точке (ν^0, u^0) . Матрица I'' состоит из четырех блоков

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \nu^2}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial \nu \partial u}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial u \partial \nu} = \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \nu \partial u} \right)^T, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial u^2}.$$

Пусть функция $f(z) = e^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\nu, u) z^k$ задается формулой (14) с $m = n$. Дифференцируя f по ν , получим

$$\frac{\partial f}{\partial \nu_k} = \exp \left\{ -t \sum_{k=1}^n \nu_k \frac{1 + e^{-iu_k} z}{1 - e^{-iu_k} z} \right\} (-t) \left[\frac{1 + e^{-iu_k} z}{1 - e^{-iu_k} z} - \frac{1 + e^{-iu_n} z}{1 - e^{-iu_n} z} \right], \quad (29)$$

$k = 1, \dots, n-1$. Еще раз дифференцируя (29) по ν , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \nu_k \partial \nu_j} &= \exp \left\{ -t \sum_{k=1}^n \nu_k \frac{1 + e^{-iu_k} z}{1 - e^{-iu_k} z} \right\} t^2 \\ &\times \left[\frac{1 + e^{-iu_k} z}{1 - e^{-iu_k} z} - \frac{1 + e^{-iu_n} z}{1 - e^{-iu_n} z} \right] \left[\frac{1 + e^{-iu_j} z}{1 - e^{-iu_j} z} - \frac{1 + e^{-iu_n} z}{1 - e^{-iu_n} z} \right], \\ &k, j = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Отсюда найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I(\nu^0, u^0)}{\partial \nu_k \partial \nu_j} &= e^{-t} 4t^2 \text{Re} \sum_{s=1}^{n-1} (e^{-isu_k^0} - e^{-isu_n^0}) (e^{-i(n-s)u_j^0} - e^{-i(n-s)u_n^0}) \\ &= \begin{cases} -e^{-t} 4nt^2, & k \neq j, \\ -e^{-t} 8nt^2, & k = j. \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

Дифференцируя (29) по u , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \nu_k \partial u_j} &= \exp \left\{ -t \sum_{k=1}^n \nu_k \frac{1 + e^{-iu_k} z}{1 - e^{-iu_k} z} \right\} t^2 \left[\frac{1 + e^{-iu_k} z}{1 - e^{-iu_k} z} - \frac{1 + e^{-iu_n} z}{1 - e^{-iu_n} z} \right] \\ &\times \nu_j \sum_{l=1}^{\infty} 2l(-i) e^{-ilu_j} z^l, \\ &k = 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad k \neq j. \end{aligned}$$

При $j = k$ или $j = n$ в этих формулах появятся дополнительные слагаемые. Окончательно отсюда найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I(\nu^0, u^0)}{\partial \nu_k \partial u_j} &= \frac{e^{-t} 4t^2}{n} \operatorname{Re}(-i) \sum_{s=1}^{n-1} (e^{-is u_k^0} - e^{-is u_n^0}) (n-s) e^{-i(n-s) u_j^0} \\ &= \begin{cases} e^{-t} 2t^2 \left(\operatorname{ctg} \frac{u_k^0 - u_j^0}{2} - \operatorname{ctg} \frac{u_n^0 - u_j^0}{2} \right), & j \neq k, \\ e^{-t} 2t^2 \operatorname{ctg} \frac{u_k^0 - u_n^0}{2}, & j = k, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

$k = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, n$. Аналогично, дифференцируя f по u , вычислим

$$\frac{\partial f}{\partial u_k} = \exp \left\{ -t \sum_{k=1}^n \nu_k \frac{1 + e^{-iu_k} z}{1 - e^{-iu_k} z} \right\} (-t) \nu_k \sum_{l=1}^{\infty} 2l(-i) e^{-il u_k} z^l, \quad k = 1, \dots, n.$$

Еще раз дифференцируя эти равенства по u , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial u_k \partial u_j} &= \exp \left\{ -t \sum_{k=1}^n \nu_k \frac{1 + e^{-iu_k} z}{1 - e^{-iu_k} z} \right\} t^2 \nu_k \nu_j \\ &\quad \times \sum_{l=1}^{\infty} 2l(-i) e^{-il u_k} z^l \sum_{s=1}^{\infty} 2s(-i) e^{-is u_j} z^s, \quad k, j = 1, \dots, n, \quad k \neq j. \end{aligned}$$

Отсюда найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I(\nu^0, u^0)}{\partial u_k \partial u_j} &= \frac{-e^{-t} 4t^2}{n^2} \operatorname{Re} \sum_{s=1}^{n-1} s(n-s) e^{-is(u_k^0 - u_j^0)} \\ &= \frac{-e^{-t} 2t^2}{n \sin^2 \left(\frac{u_k^0 - u_j^0}{2} \right)}, \quad k, j = 1, \dots, n, \quad k \neq j. \end{aligned} \quad (32)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial u_k^2} &= \exp \left\{ -t \sum_{k=1}^n \nu_k \frac{1 + e^{-iu_k} z}{1 - e^{-iu_k} z} \right\} (-t) \nu_k \left[(-t) \nu_k \left(\sum_{l=1}^{\infty} 2l(-i) e^{-il u_k} z^l \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{l=1}^{\infty} 2l^2 e^{-il u_k} z^l \right], \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I(\nu^0, u^0)}{\partial u_k^2} &= \frac{-e^{-t} t}{n} \left[\frac{-4t}{n} \sum_{s=1}^{n-1} s(n-s) + 2n^2 \right] \\ &= \frac{e^{-t} 2t}{3n} ((n^2 - 1)t - 3n^2), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (33)$$

Поскольку $I'(\nu^0, u^0) = 0$, то классическое достаточное условие максимума дважды дифференцируемого функционала I приводит к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $t_n > 0$ обладает тем свойством, что матрица I'' , состоящая из блоков (30)–(33), отрицательно определена при всех $t \in (0, t_n)$. Тогда функция $F_t(z^n)$ доставляет локальный максимум $\operatorname{Re} c_n$ в классе $B(t)$ для всех $t \in (0, t_n)$.

§ 5. Асимптотический и локальный максимумы коэффициентов в случае $f(0) = 0$

Покажем, что функция F_t доставляет максимум $\operatorname{Re} c_n$ в классе $B(t)$ для достаточно больших $t > 0$.

ТЕОРЕМА 3. Для всякого $n \geq 1$ существует $T_n > 0$ такое, что для всех $t > T_n$

$$\max_{f \in B(t)} \operatorname{Re} c_n = |A_n(t)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала сравним фазовую и сопряженную системы (8) и (11) или их обобщения (13) и (20) в скользящем режиме с условиями трансверсальности (12) при поиске максимума $\operatorname{Re} c_n$ в классе $B(t_0)$. Сравнивая эти системы, обнаруживаем симметрию систем (13) и (20) с обратной нумерацией координат и умножением на -1 . Одновременно начальные условия в (8) или (11) заменяются на аналогичные условия на правом конце отрезка $[0, t_0]$ в (13) или (20), что соответствует изменению направления отсчета параметра t и смене знака производных. Таким образом,

$$\xi_k = \Psi_k(0) = a_{n-k}(t_0) = e^{t_0} c_{n-k}, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (34)$$

Пусть при каждом $t > 0$ функция $f(z, t) = e^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) z^k$ доставляет максимум $\operatorname{Re} c_n$ в классе $B(t)$,

$$f(z, t) = \exp\{-tp(z, t)\}, \quad (35)$$

где $p(z, t) \in P$ при каждом $t > 0$. После n -кратного дифференцирования равенства (35) обнаруживаем, что

$$f^{(n)}(0, t) = e^{-t} ((-t)^n (p'(0, t))^n + o(t^n)) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$c_n(t) = \frac{e^{-t}}{n!} ((-t)^n (p'(0, t))^n + o(t^n)).$$

Поскольку $|p'(0, t)| \leq 2$, то $-p'(0, t) = 2e^{i\beta} + o(1)$ и

$$\operatorname{Re} c_n(t) = \frac{e^{-t} 2^n \cos(n\beta)}{n!} (t^n + o(t^n)).$$

Одновременно из (35) заключаем, что

$$c_k(t) = \frac{e^{-t} 2^k e^{ik\beta}}{k!} (t^k + o(t^k)), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Значение функции Гамильтона (10) в начальный момент принимает вид

$$\begin{aligned} H(0, a(0), \xi, u) &= -2 \operatorname{Re} \left[e^{iu} \left(\frac{2^{n-1} e^{i(n-1)\beta}}{(n-1)!} \right) (t^{n-1} + o(t^{n-1})) \right] \\ &= -\frac{2^n \cos(u + (n-1)\beta)}{(n-1)!} (t^{n-1} + o(t^{n-1})). \end{aligned}$$

При достаточно больших t функция Гамильтона (10) в начальный момент как функция переменного u имеет ровно одну точку максимума на $(-\pi, \pi]$, а значит, согласно (15) экстремальная функция $f(z, t)$ имеет представление (35) с функцией $p(z, t)$, задаваемой формулой (5) с $m = 1$, что соответствует вращениям функции F_t . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть векторы $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1)$ из окрестности точки $(0, \dots, 0, 1)$ задают функционалы L из (3). Тогда в задаче (4) им соответствующая экстремальная функция F_t в классе $B(t)$ при достаточно больших $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При замене функционала c_n на близкие функционалы L при достаточно больших t характер функции Гамильтона в начальный момент сохраняется: она по-прежнему имеет ровно одну точку максимума по переменной u на $(-\pi, \pi]$, что соответствует вращениям функции F_t как экстремальным функциям задачи (4) в классе $B(t)$. Следствие доказано.

Следующая теорема позволит определить те t , для которых функция F_t доставляет локальный максимум $\text{Re } c_n$ в классе $B(t)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть для $t > 0$ тригонометрический многочлен

$$Q_n(u) = -2 \sum_{j=1}^n A_{n-j}(t) \cos(ju)$$

имеет ровно одну точку максимума u_0 на $(-\pi, \pi]$ и $Q_n''(u_0) < 0$. Тогда функция F_t доставляет локальный максимум $\text{Re } c_n$ в классе $B(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся соотношениями (34) и, подставляя $\xi_j = \Psi_j(0) = A_{n-j}(t)$, $j = 1, \dots, n-1$, в функцию Гамильтона (10) в начальный момент $t = 0$, заметим, что она имеет ровно одну точку максимума на $(-\pi, \pi]$, и это свойство сохраняется при переходе от коэффициентов $A_{n-j}(t)$ к близким значениям. Значит, в окрестности функции F_t экстремальными функциями задачи (4) в классе $B(t)$ могут быть лишь те, которые имеют согласно (15) представление (35) с функцией $p(z, t)$, задаваемой формулой (5) при $m = 1$, что соответствует вращениям функции F_t . Теорема доказана.

Список литературы

1. Прохоров Д. В., “Коэффициенты голоморфных функций”, *Комплексный анализ и теория представлений*, Итоги науки и техники. Сер. соврем. матем. и ее прилож. Тематические обзоры, **71**, ВИНТИ, М., 2000.
2. Brown J. E., “On a coefficient problem for nonvanishing H^p functions”, *Compl. Var.*, **4:3** (1985), 253–265.
3. Tan Delin, “Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions”, *Chinese Ann. Math. A*, **4:1** (1983), 97–104.
4. Ermers R., *Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions*, P.H.D. Thesis for grade of Doctor in Mathematics and Information Science, Katholieke Universiteit, Nijmegen, 1990.
5. Horowitz C., “Coefficients of nonvanishing functions in H^∞ ”, *Israel J. Math.*, **30:3** (1978), 285–291.
6. Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L., “A coefficient problem for bounded nonvanishing functions”, *J. Anal. Math.*, **31** (1977), 169–190.

7. Lewandowski Z., Szynal J., "On the Krzyz conjecture and related problems", *XVth Rolf Nevanlinna Colloquium*, eds. I. Laine, O. Martio, Walter de Gruyter, Berlin, 1996, 257–268.
8. Peretz R., "Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions", *Compl. Var. Theory Appl.*, **17**:3–4 (1992), 213–222.
9. Prokhorov D. V., Szynal J., "Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions", *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math.*, **29**:5–6 (1981), 223–230.
10. Prokhorov D. V., Szynal J., "Inverse coefficients for (α, β) -convex functions", *Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sect. A.*, **35** (1981), 125–143.
11. Szapiel W., "A new approach to the Krzyz conjecture", *Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sect. A.*, **48** (1994), 169–192.
12. Krzyz J., "Coefficient problem for bounded nonvanishing functions", *Ann. Polon. Math.*, **20** (1967–1968), 314.
13. Александров И. А., *Параметрические продолжения в теории однолистных функций*, Наука, М., 1976.
14. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., *Математическая теория оптимальных процессов*, 3-е изд., Наука, М., 1976.
15. Гамкрелидзе Р. В., *Основы теории оптимального управления*, Изд-во Тбилисского университета, Тбилиси, 1977.
16. Романова С. В., "Асимптотические оценки линейных функционалов для ограниченных функций, не принимающих нулевого значения", *Изв. вузов. Математика*, 2002, № 11, 83–85.
17. Рудин У., *Основы математического анализа*, Мир, М., 1976.

Д. В. ПРОХОРОВ (D. V. PROKHOROV)
Саратовский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: ProkhorovDV@info.sgu.ru

Поступило в редакцию
10.11.2003

С. В. РОМАНОВА (S. V. ROMANOVA)
Саратовский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: RomanovaSV@info.sgu.ru