Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Делицын, О постановке краевых задач для системы уравнений Максвелла в цилиндре и их разрешимости, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 3, 61–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/im566>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 18:30:27

УДК 517.95

А. Л. Делицын

О постановке краевых задач для системы уравнений Максвелла в цилиндре и их разрешимости

Исследованы две задачи теории волноводов: задача об излучении электромагнитных волн в регулярном волноводе с переменным в поперечном сечении заполнением и задача о дифракции электромагнитной волны на рассеивателе в полном волноводе. Рассмотрены постановка условий излучения и разрешимость краевой задачи для системы уравнений Максвелла в цилиндре. Изучены некоторые спектральные задачи, связанные с постановкой условий излучения.

Библиография: 42 наименования.

Введение

Система уравнений Максвелла состоит из восьми уравнений для шести неизвестных функций – координат электрического и магнитного полей. При постановке краевых задач электродинамики (см., например, [1], [2, гл. 6], [3, гл. 7]) принято отмечать, что уравнения

$$\operatorname{div} \varepsilon E = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} \mu H = 0 \quad (0.1)$$

являются следствиями уравнений

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon E + \frac{4\pi}{c} j, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mu H \quad (0.2)$$

при условии, что начальные данные удовлетворяют соотношениям (0.1) при $t = t_0$, а ток и заряды удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0. \quad (0.3)$$

(Решения системы уравнений предполагаются достаточно гладкими для того, чтобы их можно было дифференцировать требуемое количество раз.) В то же время, в известных автору курсах не принято акцентировать внимание на том факте, что любое из уравнений Максвелла является следствием трех других уравнений (при условии, что оно выполняется на гиперплоскости, отвечающей координате, входящей в уравнение как параметр). Например, уравнение

$$(\operatorname{rot} H)_z = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon E_z + \frac{4\pi}{c} j_z \quad (0.4)$$

является следствием уравнения

$$\operatorname{div} \varepsilon E = 4\pi\rho \quad (0.5)$$

и уравнений

$$(\operatorname{rot} H)_x = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon E_x + \frac{4\pi}{c} j_x, \quad (0.6)$$

$$(\operatorname{rot} H)_y = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon E_y + \frac{4\pi}{c} j_y \quad (0.7)$$

при условии, что (0.4) выполняется на некоторой гиперплоскости ($x = x_0$). Справедливость этого утверждения легко проверить непосредственно. Проще это увидеть, если перейти от векторной формы записи двух уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \varepsilon E = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon E + \frac{4\pi}{c} j \quad (0.8)$$

к введенной Г. Минковским тензорной форме [2]

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i, \quad i, j = 0, 1, 2, 3, \quad (0.9)$$

где тензору F^{ik} соответствует матрица

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon E_x & \varepsilon E_y & \varepsilon E_z \\ -\varepsilon E_x & 0 & H_z & -H_y \\ -\varepsilon E_y & -H_z & 0 & H_x \\ -\varepsilon E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (0.10)$$

$x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Указанное утверждение является записью хорошо известного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} - \frac{4\pi}{c} j^i \right) = 0, \quad (0.11)$$

которое является следствием антисимметричности тензора F^{ik} ($F^{ik} = -F^{ki}$), системы уравнений (0.9) и уравнения непрерывности

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0.$$

Таким образом, так же, как уравнения (0.1) для дивергенций полей εE и μH можно рассматривать в качестве следствий уравнений (0.2), любое из уравнений Максвелла можно считать следствием трех других уравнений. Тем не менее, традиционно, при рассмотрении стационарной системы уравнений Максвелла, принято выделять особую роль уравнений (0.2) (см. [1], [3]), называемых даже в указанных монографиях *основными*. В случае, когда заряды и поля имеют гармоническую зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$, после сокращения на экспоненциальный множитель $e^{-i\omega t}$ система уравнений Максвелла принимает вид

$$\operatorname{rot} E = ik\mu H, \quad \operatorname{rot} H = -ik\varepsilon E + \frac{4\pi}{c} j, \quad (0.12)$$

$$\operatorname{div} \mu H = 0, \quad \operatorname{div} \varepsilon E = 4\pi\rho. \quad (0.13)$$

При этом уравнения (0.13) являются непосредственными следствиями уравнений (0.12). Для постановки краевой задачи используют, как правило, систему (0.12). В гл. 1 настоящей работы показано, что для задач, в которых одна из пространственных координат является “выделенной”, возможен принципиально иной метод их постановки.

Пусть коэффициенты системы уравнений Максвелла не зависят от координаты z : $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$, $\mu = \mu(x, y)$. В этом случае возможен выбор в качестве основных не уравнений (0.12), а тех шести уравнений, в которые входят производные по координате z :

$$(\operatorname{rot} H)_x = -ik(\varepsilon E)_x + \frac{4\pi}{c} j_x, \quad (0.14)$$

$$(\operatorname{rot} H)_y = -ik(\varepsilon E)_y + \frac{4\pi}{c} j_y, \quad (0.15)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon E = 4\pi \rho, \quad (0.16)$$

составляющих первую подсистему, и

$$(\operatorname{rot} E)_x = ik(\mu H)_x, \quad (0.17)$$

$$(\operatorname{rot} E)_y = ik(\mu H)_y, \quad (0.18)$$

$$\operatorname{div} \mu H = 0, \quad (0.19)$$

составляющих вторую.

Два оставшихся уравнения

$$(\operatorname{rot} H)_z = -ik\varepsilon E_z + \frac{4\pi}{c} j_z, \quad (\operatorname{rot} E)_z = ik\mu H_z$$

являются следствиями соответственно уравнений (0.14)–(0.16) и (0.17)–(0.19) при условии, что они выполняются при некотором значении координаты z .

Задачу естественно рассматривать не относительно векторов E и H , а относительно векторов $A_1 = \{\mu H_x, \mu H_y, E_z\}$ и $A_2 = \{\varepsilon E_x, \varepsilon E_y, H_z\}$.

В гл. 1 мы продемонстрируем, к каким существенным упрощениям приводит данный метод при исследовании определенных электродинамических задач. Задачи, в которых одна из координат имеет “выделенный” характер, возникают в теории регулярных волноводов [4]. Под задачами теории регулярных волноводов будем понимать краевые задачи для стационарной системы уравнений Максвелла в цилиндре $Q = \{(x, y) \in \Omega, z \in (-\infty, +\infty)\}$, где Ω – ограниченная область, с коэффициентами ε и μ , не зависящими от координаты z . В качестве граничных условий используем условия, соответствующие идеально проводящей стенке [1], [2]. Одна из основных задач теории регулярных волноводов [4] заключается в исследовании свойств решений однородной системы уравнений Максвелла специального вида

$$H = H(x, y)e^{i\gamma z}, \quad E = E(x, y)e^{i\gamma z}, \quad (0.20)$$

к поиску которых приводит применение метода Фурье. Поиск решений подобного вида приводит при традиционной постановке задачи относительно вихревой подсистемы уравнений Максвелла к необходимости рассматривать спектральные задачи для системы уравнений

$$\operatorname{rot} E = ik\mu H, \quad \operatorname{rot} H = -ik\varepsilon E. \quad (0.21)$$

Спектральная задача, возникающая при подстановке в уравнения (0.21) векторов $E = E(x, y)e^{i\gamma z}$, $H = H(x, y)e^{i\gamma z}$, имеет вид

$$\mathcal{A}u = \gamma \mathcal{B}u, \quad (0.22)$$

где $u = (E, H)$, $\mathcal{A}$ – дифференциальный оператор с бесконечномерным ядром, $\mathcal{B}$ – вырожденная матрица. Спектральная задача относительно u , γ рассматривается в поперечном сечении Ω . Автору не известны какие-либо результаты, относящиеся к подобной спектральной задаче, за исключением частного случая

$$\varepsilon = \varepsilon_0 I, \quad \mu = \mu_0 I, \quad (0.23)$$

где ε_0, μ_0 – положительные константы, I – единичная матрица. В этом случае хорошо известно (см., например, [1]), что собственные значения γ выражаются через собственные значения двумерного оператора Лапласа

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

с условиями Дирихле или Неймана. Более точно, $\gamma_n = \pm\sqrt{\lambda_{1n} - k^2}$, $i = 1, 2$, где λ_{1n} – собственное значение задачи Дирихле

$$-\Delta_{\perp}\chi = \lambda_1\chi, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \chi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (0.24)$$

а λ_{2n} – собственное значение задачи Неймана

$$-\Delta_{\perp}\psi = \lambda_2\psi, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (0.25)$$

Собственные векторы задачи для уравнений (0.21) выражаются через функции ψ_n, χ_n . Заметим, что подобный простой вид собственных значений и собственных векторов задачи имеет место только в случае коэффициентов вида $\varepsilon = \varepsilon_0 I, \mu = \mu_0 I$ (с физической точки зрения этот случай соответствует полному волноводу, не заполненному средой). Ситуация принципиально меняется даже в случае постоянных матриц ε и μ вида

$$\varepsilon = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \mu = I, \quad (0.26)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, причем $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 > 0$. В §5 мы приводим пример задачи, допускающей аналитическое решение, с постоянными коэффициентами указанного типа, в которой возникают комплексные собственные значения. Задача, очевидно, усложняется еще больше в случае переменных коэффициентов ε, μ .

В случае переменных коэффициентов в известных автору работах не рассматривается спектральная задача для системы уравнений первого порядка, а рассматриваются две различные системы уравнений второго порядка, следующие из (0.21) (точнее, из (0.22)), для которых и ставятся краевые условия. В работах [5]–[7] спектральная задача ставится для системы уравнений второго порядка относительно продольных координат E_z и H_z . Основная сложность исследования подобной задачи заключается в нелинейном вхождении

спектрального параметра γ . Приведем возникающую систему уравнений относительно E_z, H_z в частном случае $\varepsilon = \varepsilon(x, y)I$, $\mu = \mu(x, y)I$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{k\varepsilon}{k^2\varepsilon\mu - \gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{k\varepsilon}{k^2\varepsilon\mu - \gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\gamma}{k^2\varepsilon\mu - \gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\gamma}{k^2\varepsilon\mu - \gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} + k\varepsilon E_z = 0, \end{aligned} \quad (0.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{k\mu}{k^2\varepsilon\mu - \gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{k\mu}{k^2\varepsilon\mu - \gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\gamma}{k^2\varepsilon\mu - \gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\gamma}{k^2\varepsilon\mu - \gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + k\mu H_z = 0. \end{aligned} \quad (0.28)$$

Эту систему уравнений в работах [5]–[7] дополняют граничными условиями

$$E_z|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (0.29)$$

Только в случае $\varepsilon = \varepsilon_0 I$, $\mu = \mu_0 I$ задача (0.27)–(0.29) эквивалентна двум спектральным задачам:

$$\Delta_{\perp} E_z + k^2 \varepsilon_0 E_z = \gamma^2 E_z, \quad E_z|_{\partial\Omega} = 0 \quad (0.30)$$

и

$$\Delta_{\perp} H_z + k^2 \mu_0 H_z = \gamma^2 H_z, \quad \frac{\partial H_z}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (0.31)$$

В работах [5]–[7] рассматривалась спектральная задача (0.27)–(0.29) в случае коэффициентов специального вида: $\mu = I$, а ε – кусочно постоянная функция, принимающая всего два значения:

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 I > 0, & \text{если } (x, y) \in \Omega_1, \\ \varepsilon_2 I > 0, & \text{если } (x, y) \in \Omega_2, \end{cases} \quad \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2.$$

При этом накладывались ограничения на величину $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$. (Подобные задачи принято называть *задачами о двухслойных волноводах*.) В работах [5]–[7] доказана полнота системы корневых векторов (E_z, H_z) в пространстве $\dot{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ для указанного частного вида функции ε .

Второй метод постановки спектральной задачи заключается в рассмотрении спектральной задачи для системы уравнений второго порядка относительно поперечных координат векторов E и H , т.е. вектора $(E_{\perp}, H_{\perp})$. Этот метод применялся в работе [8], где в случае, когда сечение цилиндра является кругом, $\varepsilon = \varepsilon(r)I$, $\mu \equiv I$, доказана полнота системы корневых векторов вида $(E_r, E_{\phi}, H_r, H_{\phi})$. В настоящей работе мы не будем приводить систему уравнений (в силу её громоздкости), для которых в [8] была поставлена спектральная задача. Отметим только, что в силу зависимости коэффициентов системы уравнений только от одной координаты r спектральная задача ставится для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Сложность исследования рассматриваемой задачи заключается в том, что она представляет собой спектральную задачу вида

$$\mathcal{A}u = \gamma \mathcal{B}u,$$

где $u = (E_{\perp}, H_{\perp})$, для пары симметрических, но знаконеопределенных операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

Наконец, третья возможность заключается в постановке задачи относительно вектора H либо E . При этом возникает задача для квадратичного относительно спектрального параметра γ операторного пучка вида

$$AH + \gamma BH + \gamma^2 CH + k^2 DH = 0. \quad (0.32)$$

Однако операторы A, B, C являются вырожденными. Поэтому к данной задаче не применимы известные результаты теории квадратичных операторных пучков [9], [10], что отмечалось в монографии [4].

Таким образом, в сколько-нибудь полной постановке вопрос о полноте системы корневых векторов, а также об определении области локализации и асимптотике собственных значений решен не был. В § 2 устанавливается, что эти вопросы могут быть решены стандартным образом, если ставить соответствующую спектральную задачу для “правильно” выбранной системы уравнений.

Вторая рассматриваемая в гл. 1 задача (связанная с первой) – это постановка условий излучения и доказательство разрешимости краевой задачи для системы уравнений Максвелла в цилиндре. Для решения этой задачи в известных автору работах использовалась вихревая подсистема (0.2) системы уравнений Максвелла. Первые математически строгие результаты были получены в работах [11]–[13], в которых доказана разрешимость соответствующей краевой задачи для случая постоянных коэффициентов специального вида $\varepsilon = \varepsilon_0 I$, $\mu = \mu_0 I$. (Отметим еще раз, что случай, когда ε, μ – некоторые постоянные эрмитовы положительно определенные матрицы, даже диагональные, значительно сложнее.) В работах [11], [12] вводится вектор Герца, для которого задача сводится к рассмотрению краевой задачи для уравнения Гельмгольца в цилиндре и исследованию гладкости вектора Герца, позволяющего найти решение исходной задачи. Метод, основанный на постановке вспомогательной задачи для вектора Герца, применим только в случае $\varepsilon = \varepsilon_0 I$, $\mu = \mu_0 I$, где $\varepsilon_0 > 0$, $\mu_0 > 0$ – константы. Существуют другие методы решения этой задачи в случае $\varepsilon = \varepsilon_0 I$, $\mu = \mu_0 I$. Они сводятся к различным формальным схемам метода Фурье либо метода Галёркина [1], в которых учитывается специфическое для данной задачи свойство ортогональности различных подсистем векторов, выбираемых из собственных векторов. В случае переменных коэффициентов задача рассматривается в строгой математической постановке в работе [8], где коэффициенты системы уравнений Максвелла имеют специальный вид: $\varepsilon = \varepsilon(r)I$, $\mu = \mu_0 I$. В работе [8] доказывается существование приближенного решения со сколь угодно малой невязкой. Под этим подразумевается, что если задача формулируется в виде уравнения $Lu = f$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется u_N такое, что $\|Lu_N - f\| < \varepsilon$.

Существуют различные варианты постановки условий излучения в цилиндре. В гл. 1 настоящей работы мы следуем методу постановки условий излучения, изложенному в работе [14]. Он заключается в требовании представимости решения вне носителя токов и зарядов в виде суммы конечного числа решений однородной системы уравнений, имеющих физический смысл бегущих волн, и решения, принадлежащего $L_2(Q)$. Доказательство существования решения задачи с подобными краевыми условиями осуществляется стандартным способом в § 3. Основная цель в § 3 заключается в том, чтобы показать, что постановка краевой задачи относительно векторов $((\mu H)_x, (\mu H)_y, E_z)$ и $((\varepsilon E)_x, (\varepsilon E)_y, H_z)$, а не векторов (E_x, E_y, E_z) и (H_x, H_y, H_z) снимает трудности в постановке условий излучения и доказательстве разрешимости соответствующей краевой задачи.

В гл. 2 рассматривается задача о дифракции нормальной волны в цилиндрическом волноводе на ограниченном рассеивателе (эту задачу принято называть *задачей о дифракции в нерегулярном волноводе*). Коэффициенты системы уравнений Максвелла вне некоторого шара имеют вид $\varepsilon = I$, $\mu = I$. При этом в области рассеивателя коэффициенты ε и μ зависят от трех координат x, y, z . В качестве условий излучения в гл. 2 используются условия излучения, введенные А. Г. Свешниковым при постановке краевой задачи для уравнения Гельмгольца в работе [16] (см. также [15]) и для системы уравнений Максвелла в работе [17]. А. Г. Свешников предложил свести задачу дифракции в бесконечном цилиндре к эквивалентной ей задаче в цилиндре конечной высоты, но с нелокальными краевыми условиями на основаниях цилиндра. В работах [17], [18] предполагалось, что

$$\varepsilon = \varepsilon_1(x, y, z) + i\varepsilon_2 I, \quad \mu = \mu_1(x, y, z) + i\mu_2 I,$$

где $\varepsilon_2 > 0$ и $\mu_2 > 0$ – константы (которые могут быть выбраны сколь угодно малыми). С физической точки зрения подобный вид коэффициентов означает наличие поглощения в среде. Из полученных в работах [17], [18] энергетических оценок следует разрешимость рассматриваемой задачи дифракции. В то же время принцип предельного поглощения не применим для задачи дифракции в цилиндре, поскольку в случае $\varepsilon_2 = 0$, $\mu_2 = 0$ при определенных значениях параметра k могут существовать решения однородной системы уравнений Максвелла, удовлетворяющие условиям $E \in L_2(Q)$, $H \in L_2(Q)$.

Для постановки задачи в работах [17], [18] фактически используется система уравнений относительно поперечных составляющих электромагнитного поля $(E_\perp, H_\perp)$.

В настоящей работе задача рассматривается в случае, когда матрицы диэлектрической и магнитной проницаемостей эрмитовы, ограниченные и положительно определенные. В этом случае задача существенно усложняется и автору не известны работы по ее разрешимости.

Для постановки задачи дифракции нормальной волны на ограниченном рассеивателе в гл. 2 настоящей работы используется традиционный выбор вихревой подсистемы уравнений Максвелла. В отличие от работ [17], [18], задача ставится для вектора H . Для исследования разрешимости задачи дифракции рассматривается вспомогательная задача в конечном цилиндре с нелокальными краевыми условиями, полностью аналогичными введенным впервые в работе [16]. Таким образом вопрос о разрешимости задачи дифракции в бесконечном цилиндре сводится к рассмотрению внутренней краевой задачи. При доказательстве разрешимости этой задачи основную роль играет теорема о компактности вложения некоторого векторного функционального пространства в $L_2(V)$. В работах [19]–[21] доказана компактность вложения пространств $H_0(\text{rot}, V) \cap H(\text{div}, V)$ и $H(\text{rot}, V) \cap H_0(\text{div}, V)$ в $L_2(V)$ для определенного класса областей V . В § 9 настоящей работы вводится подпространство $\mathcal{V}$ пространства $H(\text{rot}) \cap H(\text{div})$, выделяемое системой условий на следы элементов данного пространства, и доказывается компактность вложения $\mathcal{V}$ в $L_2(V)$. Введение пространства $\mathcal{V}$ позволяет доказать разрешимость соответствующей внутренней краевой задачи, из которой следует разрешимость задачи дифракции нормальной волны на ограниченном препятствии.

В то же время возможна потеря единственности решения этой задачи. Хорошо известно, что оператор Лапласа в локально деформированном цилиндре с нулевыми условиями Дирихле при определенном виде деформации имеет

непустой дискретный спектр. Этот факт был доказан в работе [22]. Существует много работ, посвященных описанию дискретного спектра оператора Лапласа в локально деформированном цилиндре. Однако автору не известны работы, в которых рассматривалась аналогичная спектральная задача для системы уравнений Максвелла. В § 10 доказывается непустота дискретного спектра для системы уравнений Максвелла с переменными коэффициентами определенного вида.

Глава 1. Условия излучения и задача возбуждения регулярного волновода

§ 1. Постановка задачи и выбор уравнений

Задачей возбуждения регулярного волновода будем называть краевую задачу в цилиндре для неоднородной системы уравнений Максвелла с переменными коэффициентами и некоторыми условиями излучения. Постановка условий излучения является отдельной задачей, которая будет подробно рассматриваться ниже, в § 3.

Рассматривается задача в цилиндре (рис. 1) $Q = \{(x, y) \in \Omega, z \in (-\infty, +\infty)\}$, сечение цилиндра Ω – ограниченная односвязная область с кусочно гладкой границей. Считаем, что область Ω принадлежит классу областей, описываемых в [23, гл. 1, § 5, 6], [24, гл. 1, § 1], и для нее справедлива теорема о компактности вложения $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Рис. 1

Считаем, что токи, и заряды, и возбуждаемое ими поле имеют гармоническую зависимость $e^{-i\omega t}$ от времени. После сокращения на временной множитель приходим к стационарной системе уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} E = ikB, \quad \operatorname{rot} H = -ikD + \frac{4\pi}{c} j, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{div} D = 4\pi\rho, \quad (1.2)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$, $D = \varepsilon E$, $B = \mu H$. Матрицы диэлектрической и магнитной проницаемостей ε , μ не зависят от координаты z : $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$, $\mu = \mu(x, y)$. Считаем, что матрицы ε , μ эрмитовы, положительно определены, кусочно непрерывны и имеют вид

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12}^* & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{12}^* & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix}$$

(ε_{ij}^* означает комплексное сопряжение к ε_{ij}),

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{i=1}^3 |\xi_i|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij} \xi_i \xi_j^* \leq \beta \sum_{i=1}^3 |\xi_i|^2, \\ \alpha \sum_{i=1}^3 |\xi_i|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^3 \mu_{ij} \xi_i \xi_j^* \leq \beta \sum_{i=1}^3 |\xi_i|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^3, \end{aligned}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

На границе цилиндра (всюду, за исключением ребер) поставим условия, соответствующие идеально проводящей стенке:

$$E \times \mathbf{n}|_{\partial Q} = 0, \quad B\mathbf{n}|_{\partial Q} = 0. \quad (1.3)$$

На кусочно гладких поверхностях разрыва S диэлектрической и магнитной проницаемостей поставим условия сопряжения

$$\begin{aligned} [D\mathbf{n}]|_S &= 0, & [E \times \mathbf{n}]|_S &= 0, \\ [B\mathbf{n}]|_S &= 0, & [H \times \mathbf{n}]|_S &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В качестве “условия на ребре” потребуем выполнения условий

$$E \in L_2^{\text{loc}}, \quad H \in L_2^{\text{loc}}.$$

Считаем, что токи и заряды $j = j(x, y, z)$, $\rho = \rho(x, y, z)$, возбуждающие поле, являются заданными функциями, локализованными в конечной области $\text{supp } j \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \Omega, z \in [z_1, z_2]\}$, удовлетворяют условиям $j \in H^1(Q)$, $\rho \in L_2(Q)$ и уравнению непрерывности, которое имеет после сокращения на временной множитель вид

$$\text{div } j - i\omega\rho = 0. \quad (1.5)$$

Для постановки краевой задачи необходимо дополнить (1.1)–(1.4) условиями излучения при $z \rightarrow +\infty$, $z \rightarrow -\infty$.

Для постановки условий излучения далее мы рассмотрим однородную систему уравнений Максвелла вне области локализации токов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Будем называть параметр $k = \frac{\omega}{c}$ также *частотой электромагнитного поля*.

Введем дополнительные ограничения на параметр k . Следуя [1], [4], сформулируем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Значения параметра k , при которых существуют решения однородной системы уравнений Максвелла в цилиндре Q , удовлетворяющие условиям (1.3), (1.4) и не зависящие от координаты z , называют *критическими частотами* или *частотами отсечки*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Существует бесконечное число частот отсечки k_n с единственной точкой сгущения на бесконечности.

Доказательство утверждения 1.1 будет дано в § 6. Будем считать далее, что частота электромагнитного поля k не совпадает с частотами отсечки.

Перейдем к изложению предлагаемого в настоящей статье метода (см. также [25], [26]). Основная идея этого метода заключается в том, чтобы записать систему уравнений Максвелла в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ -ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varepsilon^{-1})_{11} & (\varepsilon^{-1})_{12} & 0 \\ (\varepsilon^{-1})_{12}^* & (\varepsilon^{-1})_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ H_z \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu^{-1})_{11} & (\mu^{-1})_{12} & 0 \\ (\mu^{-1})_{12}^* & (\mu^{-1})_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ E_z \end{pmatrix} + \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} -j_y \\ j_x \\ -c\rho \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu^{-1}B)_y - \frac{\partial}{\partial y}(\mu^{-1}B)_x + ik\varepsilon_{33}E_z = \frac{4\pi}{c}j_z, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon^{-1}D)_y - \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon^{-1}D)_x + ik\mu_{33}H_z = 0. \quad (1.9)$$

При рассмотрении краевых задач электродинамики основную роль играет обычно вихревая пара системы уравнений Максвелла. Аналогичную роль играют уравнения (1.6), (1.7).

Введем следующие обозначения:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ -ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & -ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} (\varepsilon^{-1})_{11} & (\varepsilon^{-1})_{12} & 0 \\ (\varepsilon^{-1})_{12}^* & (\varepsilon^{-1})_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} (\mu^{-1})_{11} & (\mu^{-1})_{12} & 0 \\ (\mu^{-1})_{12}^* & (\mu^{-1})_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

$$A_1 = (B_x, B_y, E_z)^T, \quad A_2 = (D_x, D_y, H_z)^T, \quad (1.12)$$

$$J = \frac{4\pi}{c} (-j_y, j_x, -c\rho). \quad (1.13)$$

Запишем в обозначениях (1.10)–(1.13) уравнения (1.6), (1.7):

$$a_1 A_1 = d_1 \frac{\partial}{\partial z} A_2, \quad (1.14)$$

$$a_2 A_2 = d_2 \frac{\partial}{\partial z} A_1 + J. \quad (1.15)$$

Далее рассмотрим постановку краевой задачи в цилиндре Q для уравнений (1.14), (1.15).

§ 2. Спектральная задача теории регулярных волноводов

Вне области, занятой токами и зарядами, векторы A_1 , A_2 удовлетворяют однородным уравнениям

$$a_1 A_1 = d_1 \frac{\partial A_2}{\partial z}, \quad (2.1)$$

$$a_2 A_2 = d_2 \frac{\partial A_1}{\partial z}. \quad (2.2)$$

Поставим спектральную задачу в сечении Ω цилиндра Q для уравнений

$$a_1 A_1 = i\gamma d_1 A_2, \quad (2.3)$$

$$a_2 A_2 = i\gamma d_2 A_1. \quad (2.4)$$

Эта спектральная задача возникает при поиске решений системы (2.1), (2.2) вида

$$A_1 = A_1(x, y)e^{i\gamma z}, \quad A_2 = A_2(x, y)e^{i\gamma z}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Поскольку система уравнений (2.3), (2.4) не является симметричной, в случае кратных собственных значений, помимо собственных векторов, могут существовать присоединенные векторы задачи (2.3), (2.4); (1.3), (1.4). Пусть γ_n – собственное значение кратности N , которому соответствуют $N - 1$ присоединенных векторов, $A_{1n,1}$, $A_{2n,1}$ – соответствующие ему собственные векторы. Система уравнений для присоединенных векторов имеет вид

$$a_1 A_{1n,k+1} = i\gamma_n d_1 A_{2n,k+1} + d_1 A_{2n,k}, \quad (2.5)$$

$$a_2 A_{2n,k+1} = i\gamma_n d_2 A_{1n,k+1} + d_2 A_{1n,k}, \quad (2.6)$$

где $k = 1, \dots, N - 1$. Собственные и присоединенные векторы называют *корневыми векторами* [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Решениям спектральной задачи $(\gamma_n, A_{i_{n,k}})$, где γ_n – собственные значения, $A_{i_{n,k}}$, $i = 1, 2$, – собственные и присоединенные векторы, отвечают решения однородных уравнений (2.1), (2.2) вида

$$A_i = \sum_{k=1}^N \frac{z^{N-k}}{(N-k)!} e^{\pm i\gamma_n z} A_{i_{n,k}}(x, y).$$

Решения вида $e^{i\gamma_n z} A_{i_{n,1}}(x, y)$ будем называть, следуя определению, введенному П. Е. Краснушкиным, *нормальными волнами* [4], [8], а вида $z^{N-k} e^{i\gamma_n z} \times A_{i_{n,k}}(x, y)$ – *присоединенными волнами*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Будем предполагать вплоть до введения определения обобщенного решения (определение 2.1), что векторы E , H , B , D и коэффициенты ε , μ обладают необходимой гладкостью для выполнения требуемых операций дифференцирования. Цель следующих утверждений 2.1–2.5 заключается в доказательстве эквивалентности постановки спектральных задач для уравнений (2.3), (2.4) относительно векторов A_1 , A_2 и спектральной задачи для однородной системы уравнений (1.1), (1.2).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Решения системы уравнений (2.3)–(2.6), отвечающие ненулевым собственным значениям γ_n , удовлетворяют дополнительным дифференциальным уравнениям (1.8), (1.9) при j_z , равном нулю.*

В справедливости утверждения 2.1 убеждаемся непосредственной проверкой.

Будем для краткости рассматривать уравнения только для собственных векторов, причем индексы у собственных векторов и собственных значений не будем выписывать в тех случаях, когда это возможно для сокращения обозначений.

Для постановки спектральной задачи необходимо дополнить систему уравнений (2.3)–(2.6) граничными условиями. Напомним, что собственные значения γ не равны нулю, поскольку k не совпадает с частотой отсечки. В качестве граничных условий для векторов A_1 , A_2 достаточно использовать граничные условия только для вектора A_1 :

$$B\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad E_z|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.7)$$

Легко проверить, что справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. *Граничные условия $E \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$ при $\gamma \neq 0$ являются следствиями условий (2.7).*

Аналогично, в качестве условий сопряжения на линиях разрыва S диэлектрической и магнитной проницаемостей достаточно задать условия

$$\begin{aligned} [B\mathbf{n}]|_S &= 0, & [E_z]|_S &= 0, \\ [D\mathbf{n}]|_S &= 0, & [H_z]|_S &= 0, \end{aligned}$$

которые являются основными. (Учитывая, что матрицы диэлектрической и магнитной проницаемостей ε и μ не зависят от координаты z , мы обозначаем линии разрыва через S так же, как и поверхности разрыва.)

Справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. *Условия $[H \times \mathbf{n}]|_S = 0$, $[E \times \mathbf{n}]|_S = 0$ являются следствиями уравнений (2.3), (2.4) и основных условий сопряжения.*

Справедливость утверждений 2.2, 2.3 устанавливается непосредственной проверкой.

Систему (2.3)–(2.6) при ненулевых γ_n можно свести к уравнению либо относительно вектора A_1 , либо относительно вектора A_2 .

Система уравнений для собственных и присоединенных векторов A_1 имеет вид

$$a_2 d_1^{-1} a_1 A_{1n,1} = -\gamma_n^2 d_2 A_{1n,1}, \quad (2.8)$$

$$a_2 d_1^{-1} a_1 A_{1n,2} = -\gamma_n^2 d_2 A_{1n,2} + 2i\gamma_n d_2 A_{2n,1}, \quad (2.9)$$

$$a_2 d_1^{-1} a_1 A_{1n,k+2} = -\gamma_n^2 d_2 A_{1n,k+2} + 2i\gamma_n d_2 A_{1n,k+1} + d_2 A_{1n,k}. \quad (2.10)$$

Систему уравнений для векторов A_2 в силу их аналогичного вида не будем приводить.

Необходимо дополнить уравнения (2.8)–(2.10) граничными условиями и условиями сопряжения, следующими из условий (1.3), (1.4).

Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$B_{\perp} = (B_x, B_y), \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{div} B_{\perp} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}, \quad \operatorname{rot} B_{\perp} = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}, \quad (2.11)$$

$$\operatorname{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} e_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} e_y, \quad \operatorname{rot} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial y} e_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} e_y, \quad (2.12)$$

где ε, μ – подматрицы матриц $\varepsilon_{ij}, \mu_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

В обозначениях (2.11), (2.12) уравнение (2.8) принимает вид

$$-\operatorname{grad} \mu_{33}^{-1} \operatorname{div} B_{\perp} + k^2 \mathcal{J} \varepsilon \mathcal{J} B_{\perp} - ik \mathcal{J} \varepsilon \operatorname{grad} E_z = -\gamma^2 \mu^{-1} B_{\perp}, \quad (2.13)$$

$$-ik \operatorname{div} (\varepsilon \mathcal{J} B_{\perp}) - \operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad}_{\perp} E_z = -\gamma^2 \varepsilon_{33} E_z. \quad (2.14)$$

Дополним уравнения (2.13), (2.14) краевыми условиями

$$B \mathbf{n}|_{\partial \Omega} = 0, \quad E_z|_{\partial \Omega} = 0 \quad (2.15)$$

и условиями сопряжения, принимающими вид

$$[B \mathbf{n}]|_S = 0, \quad [E_z]|_S = 0, \quad (2.16)$$

$$[\mu_{33}^{-1} \operatorname{div} B_{\perp}]|_S = 0, \quad [\varepsilon (\operatorname{grad} E_z + ik(B \times e_z)) \mathbf{n}]|_S = 0, \quad (2.17)$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к границе $\partial \Omega$ или линии разрыва S .

В качестве “условий на ребре”, учитывая наличие угловых точек границы $\partial \Omega$, потребуем выполнения следующих условий:

$$B_{\perp} \in L_2(\Omega), \quad \operatorname{div} B_{\perp} \in L_2(\Omega), \quad E_z \in H^1(\Omega).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. *Условия сопряжения (2.17) эквивалентны условиям*

$$[D \mathbf{n}]|_S = 0, \quad [H_z]|_S = 0,$$

выраженным через вектор $(B_{\perp}, E_z)^T$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5. *Пусть A_{1_n} – собственный вектор задачи (2.13)–(2.17). Тогда векторы A_{1_n} и $A_{2_n} = -i \frac{1}{\gamma_n} d_1^{-1} a_1 A_{1_n}$ являются решением задачи (2.3), (2.4), (2.7).*

При этом основные граничные условия и условия сопряжения выполняются в силу соотношений (1.12), а дополнительные условия, как было показано, являются их следствиями.

Таким образом, задача (2.3), (2.4), (2.7) и задача (2.13)–(2.17) имеют одни и те же собственные значения. Зная собственные векторы задачи (2.13)–(2.17), можно определить собственные векторы задачи (2.3), (2.4), (2.7). Для присоединенных векторов могут быть проведены аналогичные выкладки. Таким же образом исходная задача может быть сведена к задаче подобного вида относительно вектора A_2 .

Рассмотрим спектральную задачу (2.13)–(2.17) и найдем её обобщенные решения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. В настоящей работе рассматриваются обобщенные решения задачи (2.13)–(2.17). Для введения понятия обобщенного решения и его дальнейшего исследования требование кусочной непрерывности коэффициентов ε , μ является, очевидно, излишним. Как известно [23], достаточно было бы потребовать, чтобы коэффициенты системы уравнений были измеримыми ограниченными функциями и выполнялись условия

$$\begin{aligned}\alpha \sum_{i=1}^3 |\xi_i|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij} \xi_i \xi_j^* \leq \beta \sum_{i=1}^3 |\xi_i|^2, \\ \alpha \sum_{i=1}^3 |\xi_i|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^3 \mu_{ij} \xi_i \xi_j^* \leq \beta \sum_{i=1}^3 |\xi_i|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^3,\end{aligned}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$. В возникающих в практических приложениях задачах электродинамики волноводов коэффициенты ε , μ обладают определенной гладкостью. В качестве характерного поведения коэффициентов ε , μ можно рассматривать следующий частный случай. Область Ω_1 с границей класса C^∞ является подобластью области Ω , т.е. $\Omega_1 \subset \Omega$, причем граница области Ω_1 не имеет общих точек с границей области Ω . Обозначим $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$. Коэффициенты ε , μ системы уравнений обладают сколь угодно высокой степенью гладкости в замкнутых областях $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$, т.е. $\varepsilon_{ij} \in C^n(\bar{\Omega}_1)$, $\varepsilon_{ij} \in C^n(\bar{\Omega}_2)$, $\mu_{ij} \in C^n(\bar{\Omega}_1)$, $\mu_{ij} \in C^n(\bar{\Omega}_2)$, где n – сколь угодно велико. В работе [20] доказано, что гладкость решений системы уравнений Максвелла имеет тот же характер, что и для систем эллиптических уравнений, вблизи гладких участков границы и в области гладкости коэффициентов уравнений. (В окрестности угловых точек границы решение может быть неограниченным.) Мы не будем рассматривать вопрос о связи гладкости коэффициентов системы уравнений с гладкостью решения. Исследование этого вопроса сводится к применению результатов работы [20]. (Считаем, что граница цилиндра Q принадлежит классу границ, описанных в [19, § 5, п. 5.3].)

Предположим, что A – классическое решение задачи (2.13)–(2.17). Обозначим $A_\perp = (A_x, A_y)$. Умножим систему (2.13), (2.14) на произвольный вектор $\tilde{A}$ (непрерывно дифференцируемый в областях гладкости коэффициентов вплоть до гладких участков границы и удовлетворяющий граничным условиям, условиям сопряжения (2.15)–(2.17) и условиям на ребре) и проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} (-\tilde{A}_\perp \operatorname{grad} \mu_{33}^{-1} \operatorname{div} A_\perp + k^2 \tilde{A}_\perp \mathcal{J} \varepsilon \mathcal{J} A_\perp - ik \tilde{A}_\perp \mathcal{J} \varepsilon \operatorname{grad} A_z \\&\quad - ik \tilde{A}_z \operatorname{div} \varepsilon \mathcal{J} A_\perp - \tilde{A}_z \operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} A_z) dS \\&= \int_{\Omega} (\mu_{33}^{-1} \operatorname{div} A_\perp \operatorname{div} \tilde{A}_\perp + k^2 \tilde{A}_\perp \mathcal{J} \varepsilon \mathcal{J} A_\perp - ik \tilde{A}_\perp \mathcal{J} \varepsilon \operatorname{grad} A_z \\&\quad + ik \varepsilon \mathcal{J} A_\perp \operatorname{grad} \tilde{A}_z - \varepsilon \operatorname{grad} A_z \operatorname{grad} \tilde{A}_z) dS \\&= -\gamma^2 \int_{\Omega} (\mu^{-1} A_\perp \tilde{A}_\perp + \varepsilon_{33} A_z \tilde{A}_z) dS.\end{aligned}$$

Решение задачи (2.13)–(2.17) является решением полученного уравнения при любом достаточно гладком $\tilde{A}$, удовлетворяющем граничным условиям и усло-

виям сопряжения. Для того чтобы сформулировать обобщенную постановку задачи, напомним определения некоторых функциональных пространств.

Введем функциональное пространство (см. [3], [27], [19])

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \{A_{\perp} \in (L_2(\Omega))^2, \operatorname{div} A_{\perp} \in L_2(\Omega)\},$$

которое является гильбертовым относительно нормы $\|A_{\perp}\|_{H(\operatorname{div})}^2 = \|A_{\perp}\|_{L_2}^2 + \|\operatorname{div} A_{\perp}\|_{L_2}^2$. Операция div понимается в смысле распределений.

Введем пространство $H_0(\operatorname{div}, \Omega) = \{A_{\perp} \in H(\operatorname{div}, \Omega), A_{\perp} \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\}$, где под условием $A_{\perp} \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$ понимаем выполнение равенства

$$(\operatorname{div} A_{\perp}, \phi)_{L_2} = -(A_{\perp}, \operatorname{grad} \phi)_{L_2} \quad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Введем пространство $W = H_0(\operatorname{div}, \Omega) \oplus \dot{H}^1(\Omega)$ (т.е. пространство векторов $A_{\perp} \in H_0(\operatorname{div})$, $A_z \in \dot{H}^1$), которое является гильбертовым относительно нормы

$$\|A\|_W^2 = \|A_{\perp}\|_{H(\operatorname{div})}^2 + \|A_z\|_{H^1}^2.$$

Введем в пространстве W полуторалинейные формы

$$a(A, \tilde{A}) = (\mu_{33}^{-1} \operatorname{div} A_{\perp}, \operatorname{div} \tilde{A}_{\perp})_{L_2} + (\varepsilon \operatorname{grad} A_z, \operatorname{grad} \tilde{A}_z)_{L_2}, \quad (2.18)$$

$$b(A, \tilde{A}) = k^2(\mathcal{J}\varepsilon \mathcal{J} A_{\perp}, \tilde{A}_{\perp})_{L_2} - ik(\mathcal{J}\varepsilon \operatorname{grad} A_z, \tilde{A}_{\perp})_{L_2} + ik(\varepsilon \mathcal{J} A_{\perp}, \operatorname{grad} \tilde{A}_z)_{L_2}, \quad (2.19)$$

$$c(A, \tilde{A}) = (\mu^{-1} A_{\perp}, \tilde{A}_{\perp})_{L_2} + (\varepsilon_{33} A_z, \tilde{A}_z)_{L_2}. \quad (2.20)$$

Будем искать обобщенное решение задачи (2.13)–(2.17) в пространстве W (при этом ограничиваемся записью только уравнения для собственных функций).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Обобщенным решением задачи (2.13)–(2.17) будем называть ненулевой вектор $A \in W$ и комплексное число γ такие, что выполняется уравнение*

$$a(A, \tilde{A}) + b(A, \tilde{A}) = -\gamma^2 c(A, \tilde{A}) \quad \forall \tilde{A} \in W. \quad (2.21)$$

Отметим следующую особенность задачи (2.21), рассматриваемой в пространстве W . Справедливо проверяемое непосредственной подстановкой

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.6. *Любой вектор вида $(\operatorname{rot} \phi, ik\phi)^T$, где $\phi \in \dot{H}^1(\Omega)$, является собственным вектором задачи (2.21), отвечающим нулевому собственному значению.*

Таким образом, задача (2.21) имеет бесконечномерное ядро.

В то же время справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.7. *Корневые векторы задачи, отвечающие ненулевым собственным значениям γ_n^2 , удовлетворяют уравнению*

$$(\mu^{-1} A_{\perp}, \operatorname{rot} \phi)_{L_2} + ik(\varepsilon_{33} A_z, \phi)_{L_2} = 0 \quad \forall \phi \in \dot{H}^1(\Omega). \quad (2.22)$$

Данное утверждение проверяется подстановкой в уравнение (2.21) вектора $\tilde{A} = (\operatorname{rot} \phi, -ik\phi)$ для любого $\phi \in \dot{H}^1(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Уравнение (2.22) представляет собой обобщенную форму одного из уравнений Максвелла, не использованного при постановке задачи.

Введем функциональное пространство

$$V = \{A \in W, (\mu^{-1}A_{\perp}, \operatorname{rot} \phi)_{L_2} + ik(\varepsilon_{33}A_z, \phi)_{L_2} = 0 \quad \forall \phi \in \dot{H}^1\}.$$

Будем рассматривать далее спектральную задачу в пространстве V . Норма пространства V определяется так же, как норма пространства W .

Справедливо легко проверяемое

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.8. *Пространство V является полным.*

Перейдем теперь к исследованию вопроса о полноте системы корневых векторов задачи (2.21). Напомним

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Система векторов A_n называется *полной* в некотором пространстве V , если замыкание линейной оболочки векторов A_n совпадает с V [9].

Полуторалинейная форма $a(A, \tilde{A})$ определяет в гильбертовом пространстве V скалярное произведение

$$(A, \tilde{A})_V = a(A, \tilde{A}).$$

В силу ограниченности и положительной определенности матриц ε, μ формы $b(A, \tilde{A}), c(A, \tilde{A})$ удовлетворяют условиям

$$|b(A, \tilde{A})| \leq N(\|B_{\perp}\|_{L_2}\|\tilde{B}_{\perp}\|_{L_2} + \|E_z\|_{\dot{H}^1}\|\tilde{B}_{\perp}\|_{L_2} + \|B_{\perp}\|_{L_2}\|\tilde{E}_z\|_{H^1}), \quad (2.23)$$

$$|c(A, \tilde{A})| \leq N\|A\|_{L_2}\|\tilde{A}\|_{L_2}, \quad (2.24)$$

где N – некоторая константа. По теореме Рисса [28] существуют линейные ограниченные операторы C, H такие, что

$$(CA, \tilde{A})_V = b(A, \tilde{A}), \quad (2.25)$$

$$(HA, \tilde{A})_V = c(A, \tilde{A}). \quad (2.26)$$

Дальнейшее изложение существенно опирается на компактность вложения пространства V в $(L_2)^3$. Для доказательства компактности вложения понадобится аналог теоремы о разложении произвольного векторного поля из L_2 на вихревую и потенциальную части [27].

ТЕОРЕМА 2.1. *Для любого вектора $A \in L_2(\Omega)$ справедливо представление в следующем виде:*

$$A = \mu \operatorname{grad}_{\perp} \psi + \operatorname{rot}_{\perp} \chi, \quad (2.27)$$

где $\psi \in H^1, \chi \in \dot{H}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $\psi \in H^1$ как решение уравнения

$$(\mu \operatorname{grad} \psi, \operatorname{grad} \phi)_{L_2} = (A, \operatorname{grad} \phi)_{L_2} \quad \forall \phi \in H^1. \quad (2.28)$$

Поскольку вектор $\bar{A} = \mu \operatorname{grad} \psi - A$ удовлетворяет условию

$$(\bar{A}, \operatorname{grad} \phi)_{L_2} = 0 \quad \forall \phi \in H^1,$$

существует $\chi \in \dot{H}^1$ такое, что $\bar{A} = \operatorname{rot} \chi$ [27].

ТЕОРЕМА 2.2. *Пространство V компактно вложено в $(L_2)^3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность $A_n = (B_{\perp n}, E_{z_n})$ векторов, ограниченных в пространстве V :

$$\|B_{\perp n}\|_{H_0(\operatorname{div}, \Omega)} + \|E_{z_n}\|_{\dot{H}^1} < C.$$

Поскольку последовательность E_{z_n} ограничена в H^1 , из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся сильно в L_2 . Согласно теореме 2.1 векторы $B_{\perp n}$ допускают представление в виде

$$B_{\perp n} = \mu \operatorname{grad} \psi_n + \operatorname{rot} \chi_n.$$

В силу того, что ψ_n удовлетворяют уравнению

$$(\mu \operatorname{grad} \psi_n, \operatorname{grad} \phi)_{L_2} = (\operatorname{div} B_{\perp n}, \phi)_{L_2} \quad \forall \phi \in H^1$$

и последовательность $\operatorname{div} B_{\perp n}$ ограничена в L_2 , из последовательности ψ_n можно выделить подпоследовательность, сходящуюся сильно в H^1 . Таким образом, из последовательности $\mu \operatorname{grad} \psi_n$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся сильно в $(L_2)^2$.

Поскольку векторы $B_{\perp n}$ пространства V удовлетворяют уравнению

$$(\mu^{-1} B_{\perp n}, \operatorname{rot} \phi)_{L_2} = -ik(\varepsilon_{33} E_{z_n}, \phi)_{L_2} \quad \forall \phi \in \dot{H}^1,$$

то χ_n удовлетворяет уравнению

$$(\mu^{-1} \operatorname{rot} \chi_n, \operatorname{rot} \phi)_{L_2} = -ik(\varepsilon_{33} E_{z_n}, \phi)_{L_2} \quad \forall \phi \in \dot{H}^1. \quad (2.29)$$

Перепишем уравнение (2.29) в виде

$$\left(a_{ij} \frac{\partial \chi_n}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)_{L_2} = -ik(\varepsilon_{33} E_{z_n}, \phi)_{L_2} \quad \forall \phi \in \dot{H}^1,$$

где $a_{ii} = (\mu^{-1})_{ii}$, $a_{ij} = -(\mu^{-1})_{ij}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2$. Так как матрица a_{ij} положительно определена, то в силу ограниченности последовательности E_{z_n} в $\dot{H}^1$ из последовательности χ_n можно выделить подпоследовательность, сходящуюся сильно в $\dot{H}^1$. Следовательно, соответствующая подпоследовательность последовательности $\operatorname{rot} \chi_n$ сходится в $(L_2)^2$ сильно. Таким образом, утверждение теоремы доказано.

В силу неравенств (2.23), (2.24) и компактности вложения V в $(L_2)^3$ операторы C и H компактны. Поскольку уравнение (2.21) справедливо для любого $\tilde{A} \in V$, задача (2.21) эквивалентна в пространстве V спектральной задаче для операторного пучка

$$M(\gamma) = (I + C)A + \gamma^2 H A.$$

Операторы C и H компактны, оператор H самосопряжен и аннулируется только в нуле, т. е. из условия $HA = 0$ следует $A = 0$. Докажем, что справедлива

ТЕОРЕМА 2.3. *Оператор H является оператором Гильберта–Шмидта, т. е. $\sum_k \nu_k^2 < \infty$, где ν_k – собственные значения оператора H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Собственные значения оператора H , определенного равенством (2.26), являются обратными к собственным значениям λ задачи

$$a(A, \tilde{A}) = \lambda c(A, \tilde{A}) \quad \forall \tilde{A} \in V, \quad (2.30)$$

или в покомпонентной записи:

$$\begin{aligned} & (\mu_{33}^{-1} \operatorname{div} B_{\perp}, \operatorname{div} \tilde{B}_{\perp})_{L_2} + (\varepsilon \operatorname{grad} E_z, \operatorname{grad} \tilde{E}_z)_{L_2} \\ & = \lambda ((\mu^{-1} B_{\perp}, \tilde{B}_{\perp})_{L_2} + (\varepsilon_{33} E_z, \tilde{E}_z)_{L_2}) \quad \forall (\tilde{B}_{\perp}, \tilde{E}_z) \in V. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Рассмотрим решения задачи (2.31) вида

$$B_{\perp} = \mu \operatorname{grad} \psi, \quad E_z = 0,$$

и рассмотрим задачу на собственные значения:

$$(\mu \operatorname{grad} \psi, \operatorname{grad} \phi) = \lambda (\mu_{33} \psi, \phi) \quad \forall \phi \in H^1. \quad (2.32)$$

Решения задачи (2.32) удовлетворяют уравнению

$$-\operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \psi_n = \lambda_n \mu_{33} \psi_n.$$

Векторы $B_{\perp n} = \mu \operatorname{grad} \psi_n$ являются решением задачи (2.31), поскольку

$$(\mu_{33}^{-1} \operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \psi_n, \operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \tilde{\psi})_{L_2} = \lambda_n (\mu^{-1} \operatorname{grad} \psi_n, \operatorname{grad} \tilde{\psi})_{L_2}.$$

Собственные функции ψ_n задачи (2.32) полны в пространстве H^1 и удовлетворяют условиям ортогональности:

$$(\mu \operatorname{grad} \psi_n, \operatorname{grad} \psi_m)_{L_2} = 0, \quad n \neq m. \quad (2.33)$$

Собственные значения λ_n задачи (2.33) имеют асимптотику $O(n)$.

Пусть $(B_{\perp}, E_z)$ – собственный вектор. Учитывая то, что ψ_n образуют полную систему в пространстве H^1 , и ортогональность собственных векторов задачи (2.31), для которых имеет место равенство $B_{\perp} = \mu \operatorname{grad} \psi + \operatorname{rot} \chi$, получим $B_{\perp} = \operatorname{rot} \chi$.

Уравнение (2.31) имеет вид

$$(\varepsilon \operatorname{grad} E_z, \operatorname{grad} \tilde{E}_z)_{L_2} = \lambda ((\varepsilon_{33} E_z, \tilde{E}_z)_{L_2} + (\mu^{-1} B_{\perp}, \tilde{B}_{\perp})_{L_2}) \quad \forall \tilde{A} \in V. \quad (2.34)$$

Вектор $\tilde{B}_{\perp}$ представим в виде $\tilde{B}_{\perp} = \mu \operatorname{grad} \tilde{\psi} + \operatorname{rot} \tilde{\chi}$. Уравнение (2.34) принимает вид

$$(\varepsilon \operatorname{grad} E_z, \operatorname{grad} \tilde{E}_z)_{L_2} = \lambda ((\varepsilon_{33} E_z, \tilde{E}_z)_{L_2} + (\mu^{-1} \operatorname{rot} \chi, \operatorname{rot} \tilde{\chi})_{L_2}). \quad (2.35)$$

Поскольку $\chi \in \dot{H}^1$ удовлетворяет уравнению

$$(\mu^{-1} \operatorname{rot} \chi, \operatorname{rot} \tilde{\chi})_{L_2} = ik(\varepsilon_{33} E_z, \tilde{\chi})_{L_2} \quad \forall \tilde{\chi} \in \dot{H}^1,$$

в силу теоремы Рисса существует ограниченный самосопряженный оператор Y такой, что $\chi = ikY\varepsilon_{33}E_z$. Аналогично, поскольку $\tilde{\chi}$ удовлетворяет задаче того же вида, то $\tilde{\chi} = ikY\varepsilon_{33}\tilde{E}_z$.

В результате имеем

$$(\mu^{-1}B_{\perp}, \tilde{B}_{\perp})_{L_2} = k^2(\varepsilon_{33}E_z, Y\varepsilon_{33}\tilde{E}_z)_{L_2}.$$

Таким образом, уравнение (2.34) принимает вид

$$(\varepsilon \operatorname{grad} E_z, \operatorname{grad} \tilde{E}_z)_{L_2} = \lambda((\varepsilon_{33}E_z, \tilde{E}_z)_{L_2} + k^2(\varepsilon_{33}E_z, Y\varepsilon_{33}\tilde{E}_z)_{L_2}).$$

Собственные значения задачи (2.34), как следует из оценок, получающихся применением принципа минимакса [29], имеют асимптотику $O(n)$. Следовательно, H – оператор Гильберта–Шмидта.

Таким образом, операторный пучок $M(\gamma)$ удовлетворяет теореме Келдыша о полноте корневых векторов операторного пучка [30], [31]. Напомним её формулировку применительно к рассматриваемой задаче.

ТЕОРЕМА КЕЛДЫША. Пусть $I + C + \gamma^2 H$ – операторный пучок, где операторы C и H компактны, H – полный самосопряженный оператор конечного порядка. Тогда система корневых векторов операторного пучка полна в пространстве V . Пусть $I + C + \gamma A_1 H^{\frac{1}{2}} + \gamma^2 H$ – операторный пучок, где операторы C , A_1 , $H^{\frac{1}{2}}$ компактны, $H^{\frac{1}{2}}$ – полный самосопряженный оператор конечного порядка. Тогда система корневых векторов операторного пучка двукратно полна в пространстве V .

Корневые векторы операторного пучка $M(\gamma)$ удовлетворяют уравнениям (2.8)–(2.10) для корневых векторов квадратичного операторного пучка относительно параметра γ . Поскольку в операторный пучок входит только член с γ^2 , то можно рассматривать задачу о корневых векторах линейного операторного пучка относительно спектрального параметра γ^2 . Следовательно, в силу теоремы Келдыша справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.4. Система корневых векторов задачи (2.21) полна в пространстве V .

В силу теоремы Келдыша о спектре операторного пучка справедливы следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.9. Все собственные значения, кроме, быть может, конечного числа, лежат в секторе $|\arg(\gamma_{\max}^2 - \gamma^2)| < \beta$, где β сколь угодно мало, $\gamma_{\max}^2$ – некоторая константа.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.10. Квадраты постоянных распространения γ_n^2 имеют асимптотику $O(n)$, $n \rightarrow \infty$.

Из утверждения 2.10 следует, что справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.11. Существует лишь конечное число вещественных положительных собственных значений γ_n^2 .

Половина системы корневых векторов квадратичного пучка, выбираемая стандартным образом, полна в V .

Будем считать, что вещественным значениям γ_n соответствуют только собственные векторы, а присоединенные векторы отсутствуют. Несложно выписать биортогональную систему к системе корневых векторов $A_{1_{n,k}}$. В качестве биортогональной системы выберем систему корневых векторов задачи, сопряженной к задаче (2.13)–(2.17).

Отметим, что после умножения системы уравнений (2.13), (2.14) на матрицу $\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ система принимает симметричный вид:

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{grad} \mu_{33}^{-1} \operatorname{div} + k^2 \mathcal{J} \varepsilon \mathcal{J} & -ik \mathcal{J} \varepsilon \operatorname{grad} \\ ik \operatorname{div} \varepsilon \mathcal{J} & \operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{\perp} \\ E_z \end{pmatrix} = -\gamma^2 \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{\perp} \\ E_z \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Таким образом, справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.12. *Собственные значения γ_n^2 задачи (2.13)–(2.17) расположены симметрично относительно вещественной оси.*

Доказательство аналогичного утверждения приведено в [9].

Собственные и присоединенные векторы $A_{1_{n,k}}$ в силу симметрии уравнений (2.13), (2.14) вида (2.36) удовлетворяют обобщенным условиям ортогональности:

$$(\nu d_2 A_{1_{n,k}}, A_{2_{m,k}})_{L_2} = 0 \quad \text{при} \quad |\gamma_n|^2 \neq |\gamma_m|^2. \quad (2.37)$$

Будем обозначать собственные векторы сопряженной задачи через A_n^1 , а собственные векторы исходной – A_{1_n} . Далее для нас будут представлять интерес собственные векторы сопряженной задачи, отвечающие вещественным γ_n , которые в силу симметрии уравнений (2.13), (2.14) имеют вид

$$A_n^1 = \nu d_2 A_{1_n}$$

и являются элементами биортогональной системы к корневым векторам задачи (2.13)–(2.17):

$$(A_n^1, A_{1_{m,k}})_{L_2} = 0, \quad \gamma_n^2 \neq \gamma_m^2. \quad (2.38)$$

Аналогично может быть исследована задача для вектора $A_2 = (D_{\perp}, H_z)$.

Таким образом, системы собственных и присоединенных векторов спектральной задачи, рассматриваемой как относительно векторов A_1 , так и векторов A_2 , полны в соответствующих функциональных пространствах.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. В частном случае кругового цилиндра и коэффициентов $\varepsilon = \varepsilon(r)I$, $\mu = I$ легко видеть, что система собственных и присоединенных векторов является базисом со скобками [9] в рассмотренных пространствах [32].

§ 3. Существование решения задачи возбуждения волновода

Рассмотрим задачу о возбуждении волновода (1.1)–(1.4). Необходимо поставить краевую задачу для уравнений

$$a_1 A_1 = d_1 \frac{\partial A_2}{\partial z}, \quad (3.1)$$

$$a_2 A_2 = d_2 \frac{\partial A_1}{\partial z} + J \quad (3.2)$$

с краевыми условиями и условиями сопряжения (1.3), (1.4).

Требуется дополнить систему уравнений (3.1), (3.2) условиями излучения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Для постановки условий излучения используем следующие рассуждения. Вне области, занятой токами, т.е. при $z \leq z_1$ и $z \geq z_2$

поля A_1, A_2 могут быть приближены суммами вида

$$A_1 = \sum_{n=1}^M e^{\pm i\gamma_n z} \sum_{k=1}^{m_n} p_{1_{n,k}}(z) A_{1_{n,k}}(x, y),$$

$$A_2 = \sum_{n=1}^M e^{\pm i\gamma_n z} \sum_{k=1}^{m_n} p_{2_{n,k}}(z) A_{2_{n,k}}(x, y),$$

где $p_{1_{n,k}}(z), p_{2_{n,k}}(z)$ – полиномы от z .

Как было установлено в утверждении 2.11, при рассматриваемых условиях эрмитовости матриц ε, μ существует конечное число вещественных положительных собственных значений γ_n^2 , которым отвечают бегущие волны, т.е. не затухающие при $z \rightarrow \pm\infty$ решения. Таким образом, естественно предположить, что решение вне области, занятой токами, представимо в виде суммы конечного числа бегущих волн и стремящегося к нулю при $z \rightarrow \pm\infty$ слагаемого. Отметим, что в случае, если частота поля меньше первой частоты отсечки, то не существует положительных γ_n^2 и решение стремится к нулю при $z \rightarrow \pm\infty$.

Итак, можно задать условия излучения следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Будем говорить, что решение задачи (1.1)–(1.4) удовлетворяет условиям излучения, если при $z < z_1$ и $z > z_2$ оно представимо в виде

$$A_1 = \sum_{n=1}^N c_{\pm n} A_{1_n}(x, y) e^{\pm i\gamma_n z} + \bar{A}_1, \quad (3.3)$$

$$A_2 = \sum_{n=1}^N d_{\pm n} A_{2_n}(x, y) e^{\pm i\gamma_n z} + \bar{A}_2, \quad z \leq z_1, \quad z \geq z_2, \quad (3.4)$$

где $\bar{A}_1 \in L_2(Q_i)$, $\bar{A}_2 \in L_2(Q_i)$, $Q_1 = \{(x, y) \in \Omega, z \leq z_1\}$, $Q_2 = \{(x, y) \in \Omega, z \geq z_2\}$, $c_{\pm n}, d_{\pm n}$ – константы.

Задачу для системы (3.1), (3.2) можно свести к задаче для одного уравнения путем введения нового неизвестного вектора A , поскольку справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть вектор A является решением краевой задачи

$$a_2 d_1^{-1} a_1 A = d_2 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + J \quad (3.5)$$

с граничными условиями и условиями сопряжения

$$A_{\perp} \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad A_z|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.6)$$

$$[A_{\perp} \mathbf{n}]_S = 0, \quad [A_z]_S = 0, \quad (3.7)$$

$$[\mu_{33}^{-1} \operatorname{div} A_{\perp}]_S = 0, \quad [\varepsilon(\operatorname{grad} A_z + ik(A \times e_z)) \mathbf{n}]_S = 0.$$

Тогда решения уравнений (3.1), (3.2) определяются по формулам

$$A_1 = \frac{\partial A}{\partial z}, \quad A_2 = d_1^{-1} a_1 A. \quad (3.8)$$

Задачу (3.5)–(3.7) необходимо дополнить условиями излучения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Отметим, что в области, не занятой токами, поиск решения сводится к решению уравнения

$$a_2 d_1^{-1} a_1 A = -\gamma^2 d_2 A, \quad (3.9)$$

т.е. к задаче (2.13)–(2.17). Для вектора A получаем спектральную задачу такую же, как для вектора A_1 . Поэтому в области, не занятой токами, вектор A имеет тот же вид, что и вектор A_1 . При этом задача (3.9) является уже задачей для линейного операторного пучка и необходимым в дальнейшем условием является обычная, а не кратная полнота векторов $A_{n,k}$.

Введем следующие условия излучения. Пусть существует N положительных вещественных собственных значений γ_n^2 , которым соответствуют только собственные векторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Будем говорить, что решение задачи (3.5)–(3.7) удовлетворяет условиям излучения, если при $z < z_1$ и $z > z_2$ вектор A представим в виде

$$A = \sum_{n=1}^N a_{\pm n} A_n(x, y) e^{\pm i\gamma_n z} + \bar{A}, \quad (3.10)$$

где $\bar{A} \in L_2(Q_i)$, Q_i – полуцилиндры, $Q_1 = \{(x, y) \in \Omega, z \in (-\infty, z_1)\}$, $Q_2 = \{(x, y) \in \Omega, z \in (z_2, +\infty)\}$, $a_{\pm n}$ – константа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Обобщенным решением задачи (3.5)–(3.7), (3.10) будем называть вектор $A(x, y, z)$, удовлетворяющий уравнению

$$a(A, \tilde{A}) + b(A, \tilde{A}) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \tilde{A}) + (J, \tilde{A})_{L_2} \quad \forall \tilde{A}(x, y) \in W \quad (3.11)$$

и условиям (3.10).

Пусть для любого $\tilde{A}(x, y) \in W$ выполняется условие $\frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \tilde{A}) \in L_2^{\text{loc}}$. Предположим также, что при почти всех z выполняется условие $A \in W$.

При сделанном предположении о том, что частота электромагнитного поля не совпадает с частотой отсечки, множество собственных значений задачи (3.9) состоит из нулевого собственного значения, которому соответствуют собственные векторы вида $(\text{rot } \phi, ik\phi)^T$ для любого $\phi \in \dot{H}^1$, и ненулевых собственных значений, которым соответствуют корневые векторы, принадлежащие пространству V .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Вектор J не удовлетворяет условию (2.22), которому удовлетворяют корневые векторы, отвечающие ненулевым собственным значениям.

Будем использовать следующий метод построения решения $A \in W$. Запишем уравнение (3.11) в виде

$$a(A, \tilde{A}) + b(A, \tilde{A}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \tilde{A}) + c(d_2^{-1} J, \tilde{A}) \quad \forall \tilde{A} \in W. \quad (3.12)$$

Представим вектор J в виде суммы двух слагаемых:

$$J = J_1 + J_2,$$

где J_1 удовлетворяет условию (2.22), причем $d_2^{-1}J_2$ принадлежит ядру спектральной задачи (2.21), рассматриваемой в пространстве W . Возможность подобного представления будет доказана ниже. Разобьем исследование задачи (3.12), (3.10) на следующие задачи.

Задача 3.1. Найти вектор $A \in W$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2}A \in L_2^{\text{loc}}$, удовлетворяющий уравнению

$$a(A, \tilde{A}) + b(A, \tilde{A}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}c(A, \tilde{A}) + c(d_2^{-1}J_2, \tilde{A}) \quad \forall \tilde{A} \in W \quad (3.13)$$

с условиями

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad z \leq z_1, \quad \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad z \geq z_2.$$

Данные условия соответствуют тому, что при $z \leq z_1$ и $z \geq z_2$ поле $\frac{\partial A}{\partial z} = A_1$ обращается в нуль, так как ток J_2 не принадлежит пространству V и возбуждает поле в ближней зоне. Поскольку требуется найти поле, а не потенциал, то можно ограничиться поиском $\frac{\partial A}{\partial z}$. При этом, как легко видеть,

$$A_1 = \frac{\partial A}{\partial z}, \quad A_2 = 0.$$

Ток J_1 представим в виде суммы:

$$J_1 = J_1^N + \bar{J}_1.$$

Ток J_1^N представляет собой проекцию вектора J_1 на конечномерное пространство собственных векторов (которые будем обозначать A_n), отвечающих бегущим волнам. Собственные векторы сопряженной задачи обозначим $A^n = \nu d_2^{-1}A_n$.

Задача 3.2. Для вектора $J_1^N = \sum_{n=1}^N (J_1, A^n)_{L_2} A_n$ рассмотрим следующую задачу:

$$a(A, \tilde{A}) + b(A, \tilde{A}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}c(A, \tilde{A}) + c(J_1^N, \tilde{A}) \quad \forall \tilde{A} \in W \quad (3.14)$$

с условиями излучения при $z \leq z_1$ и $z \geq z_2$:

$$A = \sum_{n=1}^N a_{\pm n} A_n e^{\pm i\gamma_n z}.$$

Решение данной задачи сводится к решению конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задача 3.3. Ток $\bar{J}_1$ удовлетворяет условиям ортогональности

$$c(\bar{J}_1, A^n) = 0, \quad n = 1, \dots, N.$$

При этих условиях, налагаемых на правую часть уравнения (3.11), существует решение уравнения

$$a(A, \tilde{A}) + b(A, \tilde{A}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}c(A, \tilde{A}) + c(\bar{J}_1, \tilde{A}) \quad \forall \tilde{A} \in W, \quad (3.15)$$

удовлетворяющее условиям $A \in L_2(W; (-\infty, +\infty))$.

Сумма решений трех задач (3.13)–(3.15) удовлетворяет уравнению (3.11) и условиям излучения (3.10). Приступим к строгому построению её решения.

Напомним, что частота k электромагнитного поля не совпадает с частотой отсечки. Докажем следующую теорему о разложении произвольного векторного поля.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $A \in L_2(\Omega)$. Найдутся $\phi \in \dot{H}^1$ и $F \in H(\operatorname{div}) \oplus H^1$ такие, что

$$A = \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{rot} \phi \\ ik\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ik\mathcal{J} & \operatorname{grad} \\ -\operatorname{div} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{\perp} \\ F_z \end{pmatrix},$$

или $A = d_2(\operatorname{rot} \phi, ik\phi)^T + a_2 F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\phi \in \dot{H}^1$ является обобщенным решением задачи

$$(\mu^{-1} \operatorname{rot} \phi, \operatorname{rot} \tilde{\phi})_{L_2} - k^2(\varepsilon_{33}\phi, \tilde{\phi})_{L_2} = (A_{\perp}, \operatorname{rot} \tilde{\phi})_{L_2} + ik(A_z, \tilde{\phi})_{L_2} \quad \forall \tilde{\phi} \in \dot{H}^1. \quad (3.16)$$

Поскольку частота электромагнитного поля не совпадает с частотой отсечки, данная задача имеет единственное решение. Запишем уравнение (3.16) в виде

$$(\mu^{-1} \operatorname{rot} \phi - A_{\perp}, \operatorname{rot} \tilde{\phi})_{L_2} + ik(ik\varepsilon_{33}\phi - A_z, \tilde{\phi})_{L_2} = 0 \quad \forall \tilde{\phi} \in \dot{H}^1. \quad (3.17)$$

Обозначим $\bar{A} = (\bar{A}_{\perp}, \bar{A}_z)^T$, где

$$\bar{A}_{\perp} = \mu^{-1} \operatorname{rot} \phi - A_{\perp}, \quad \bar{A}_z = ik\varepsilon_{33}\phi - A_z.$$

Вектор $\bar{A}$ удовлетворяет уравнению

$$(\bar{A}_{\perp}, \operatorname{rot} \tilde{\phi})_{L_2} + ik(\bar{A}_z, \tilde{\phi})_{L_2} = 0 \quad \forall \tilde{\phi} \in \dot{H}^1.$$

Представим вектор $\mu\bar{A}_{\perp}$ в виде

$$\mu\bar{A}_{\perp} = \mu \operatorname{grad} \psi + \operatorname{rot} \chi, \quad \psi \in H^1, \quad \chi \in \dot{H}^1.$$

Подставляя вектор $A_{\perp}$ в уравнение (3.17) и пользуясь определением вектора $\bar{A}_{\perp}$, получим

$$(\operatorname{grad} \psi, \operatorname{rot} \tilde{\phi})_{L_2} + (\mu^{-1} \operatorname{rot} \chi, \operatorname{rot} \tilde{\phi})_{L_2} + ik(\bar{A}_z, \tilde{\phi})_{L_2} = 0 \quad \forall \tilde{\phi} \in \dot{H}^1,$$

или $(\bar{A}_z, \tilde{\phi})_{L_2} = \frac{i}{k}(\mu^{-1} \operatorname{rot} \chi, \operatorname{rot} \tilde{\phi})_{L_2}$.

Определение пространства $H(\operatorname{rot})$ аналогично определению $H(\operatorname{div})$ [3]:

$$H(\operatorname{rot}) = \{A \in L_2(\Omega), \operatorname{rot} A \in L_2(\Omega)\}.$$

Отсюда получаем, что $\mu^{-1} \operatorname{rot} \chi \in H(\operatorname{rot})$ и справедливо равенство

$$\bar{A}_z = \frac{i}{k} \operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \chi. \quad (3.18)$$

Запишем равенство (3.18) в виде

$$\bar{A}_z = \frac{i}{k} \operatorname{div}(\mathcal{J}\mu^{-1}\mathcal{J} \operatorname{grad} \chi),$$

где $\mathcal{J}\mu^{-1}\mathcal{J}\operatorname{grad}\chi \in H(\operatorname{div})$. Поскольку $\bar{A}_\perp = \operatorname{grad}\psi + \mu^{-1}\mathcal{J}\operatorname{grad}\chi$, то получим

$$\begin{pmatrix} A_\perp \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{rot}\phi \\ ik\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ik\mathcal{J} & \operatorname{grad} \\ -\operatorname{div} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{k}\mathcal{J}\mu^{-1}\mathcal{J}\operatorname{grad}\chi \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$F_\perp = -\frac{i}{k}\mathcal{J}\mu^{-1}\mathcal{J}\operatorname{grad}\chi, \quad (3.19)$$

$$F_z = \psi, \quad (3.20)$$

причем в силу построения имеем $(F_\perp, F_z) \in H(\operatorname{div}) \oplus H^1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_\perp \\ A_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{rot}\phi \\ ik\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ik\mathcal{J} & \operatorname{grad} \\ -\operatorname{div} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_\perp \\ F_z \end{pmatrix} \\ &= d_2(\operatorname{rot}\phi, ik\phi)^T + a_2 F. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Теорема доказана.

Вернемся к рассмотрению уравнения

$$a(A, \tilde{A}) + b(A, \tilde{A}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \tilde{A}) + c(d_2^{-1}J, \tilde{A}).$$

Представим вектор J в виде

$$J = d_2(\operatorname{rot}\phi, ik\phi)^T + a_2 F. \quad (3.22)$$

Тогда $d_2^{-1}J = (\operatorname{rot}\phi, ik\phi)^T + d_2^{-1}a_2 F$, причем $d_2^{-1}a_2 F$ удовлетворяет уравнению (2.22). По построению $(\operatorname{rot}\phi, ik\phi) \in W$. Действительно, поскольку $\phi|_{\partial\Omega} = 0$, то $\operatorname{rot}\phi\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$ и $\operatorname{rot}\phi \in H(\operatorname{div})$. Вектор $d_2^{-1}a_2 F$ удовлетворяет условиям $d_2^{-1}a_2 F\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$, $(d_2^{-1}a_2 F)_z|_{\partial\Omega} = 0$ в силу равенства (3.22). Обозначим

$$J_1 = a_2 F, \quad J_2 = d_2(\operatorname{rot}\phi, ik\phi).$$

Вернемся к задаче 3.1: найти вектор $A \in W$, удовлетворяющий задаче

$$a(A, \tilde{A}) + b(A, \tilde{A}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \tilde{A}) + c(d_2^{-1}J_2, \tilde{A}) \quad \forall \tilde{A} \in W, \quad (3.23)$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial z} \right|_{z \leq z_1} = 0, \quad (3.24)$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial z} \right|_{z \geq z_2} = 0. \quad (3.25)$$

Ищем A в виде $A = (\operatorname{rot}\psi, ik\psi)$. По существу нам требуется найти $\frac{\partial A}{\partial z}$, чем мы и ограничимся. Имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \tilde{A}) + c(d_2^{-1}J_2, \tilde{A}) = 0 \quad \forall \tilde{A} \in W. \quad (3.26)$$

Таким образом, получим

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \int_{z_1}^z J_2 dz' = \int_{z_1}^z (\operatorname{rot}\phi, ik\phi) dz'.$$

Покажем, что выполняется условие $\frac{\partial A}{\partial z} \Big|_{z \geq z_2} = 0$ и задача не является переопределенной. Действительно, $\frac{\partial A}{\partial z} = (\text{rot } \psi, ik\psi)$, где $\psi = \int_{z_1}^z \phi dz'$.

При любом $\tilde{\phi}(x, y) \in \dot{H}^1$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} (\mu^{-1} \text{rot } \psi, \text{rot } \tilde{\phi}) - k^2(\varepsilon_{33}\psi, \tilde{\phi}) &= \int_{z_1}^z ((\mu^{-1} \text{rot } \phi, \text{rot } \tilde{\phi})_{L_2} - k^2(\varepsilon_{33}\phi, \tilde{\phi})_{L_2}) dz' \\ &= \int_{z_1}^z ((J_{\perp}, \text{rot } \tilde{\phi})_{L_2} + ik(J_z, \tilde{\phi})_{L_2}) dz' \\ &= - \int_{z_1}^z ((\text{div } J_{\perp}, \tilde{\phi})_{L_2} - i\omega(j_z, \tilde{\phi})) dz' = \int_{z_1}^z \left(\frac{\partial j_z}{\partial z}, \tilde{\phi} \right)_{L_2} dz' = 0 \end{aligned}$$

в силу того, что $j_z = 0$ при $z \geq z_2$ и $\text{div } j_{\perp} - i\omega\rho = -\frac{\partial j_z}{\partial z}$. Таким образом, получим

$$(\mu^{-1} \text{rot } \psi, \text{rot } \tilde{\phi})_{L_2} - k^2(\varepsilon_{33}\psi, \tilde{\phi})_{L_2} = 0 \quad \forall \tilde{\phi} \in \dot{H}^1. \quad (3.27)$$

В силу того, что $\psi \in \dot{H}^1(\Omega)$ и k^2 не совпадает с частотой отсечки, имеем $\psi = 0$ для любого $z \geq z_2$, откуда $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$ как предел справа для любого $z \geq z_2$. Следовательно, найдено решение задачи (3.23)–(3.25).

Рассмотрим задачу относительно вектора J_1 . Система корневых векторов задачи

$$a(A, \tilde{A}) + b(A, \tilde{A}) = -\gamma^2 c(A, \tilde{A}) \quad \forall \tilde{A} \in V$$

полна в пространстве V . Представим пространство V в виде суммы пространства V_N – линейной оболочки собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\gamma_n^2 > 0$, и пространства V_1 – замыкания линейной оболочки остальных корневых векторов: $V = V_N \oplus V_1$. Представим вектор J_1 в виде $J_1 = J_1^N + \bar{J}_1$, где $J_1^N = \sum_{n=1}^N (J_1, A^n)_{L_2} A^n$. Кроме того,

$$(J_1, A^n)_{L_2} = (J, A^n)_{L_2} - (d_2(\text{rot } \phi, ik\phi)^T, A^n)_{L_2} = (J, A^n)_{L_2},$$

поскольку $(d_2(\text{rot } \phi, ik\phi)^T) = 0$. Таким образом, коэффициенты $J_n = (J_1, A^n)_{L_2}$ вычисляются через вектор J .

Рассмотрим задачу 3.2. Будем искать вектор $A \in V_N$ вида

$$A = \sum_{n=1}^N Z_n(z) A_n(x, y),$$

удовлетворяющий уравнению

$$a(A, \tilde{A}) + b(A, \tilde{A}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \tilde{A}) + c(d_2 J_1^N, \tilde{A}) \quad \forall A \in W \quad (3.28)$$

и условиям излучения

$$A = \sum_{n=1}^N a_{+n} A_n(x, y) e^{i\gamma_n z}, \quad z \geq z_2, \quad (3.29)$$

$$A = \sum_{n=1}^N a_{-n} A_n(x, y) e^{-i\gamma_n z}, \quad z \leq z_1. \quad (3.30)$$

Учитывая, что векторы $A_n(x, y)$ удовлетворяют условиям $(A_n, A^m) = 0$ при $\gamma_n \neq \gamma_m$, где $A^m = \nu d_2 A_n$, получим следующие краевые условия:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \sum_{n=1}^N i\gamma_n (A, A^n)_{L_2} A_n, \quad z \geq z_2,$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = - \sum_{n=1}^N i\gamma_n (A, A^n)_{L_2} A_n, \quad z \leq z_1.$$

Отсюда для функций Z_n получим

$$Z_n'' + \gamma_n^2 Z_n = J_n(z) = (J, A^n)_{L_2}, \quad (3.31)$$

$$(Z_n' - i\gamma_n Z_n)|_{z=z_2} = 0, \quad (3.32)$$

$$(Z_n' + i\gamma_n Z_n)|_{z=z_1} = 0. \quad (3.33)$$

В результате определяется $Z_n(z)$. Таким образом, может быть построено решение задачи (3.31)–(3.33), которое имеет вид

$$Z_n(z) = \frac{i}{2\gamma_n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\gamma_n |z-z'|} J_n(z') dz'.$$

Рассмотрим задачу 3.3 в случае, когда правой частью является $\bar{J}_1$. В силу того, что $(\bar{J}_1, A^n) = 0$, $n = 1, \dots, N$, вектор $\bar{J}_1$ принадлежит V_1 . Будем рассматривать задачу

$$a(A, \tilde{A}) + b(A, \tilde{A}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \tilde{A}) + c(J_1, \tilde{A}) \quad \forall \tilde{A} \in W. \quad (3.34)$$

При этом будем искать $A \in L_2(W; (-\infty, +\infty))$.

Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Пусть уравнение (3.34) выполнено для любого $\tilde{A} \in V_1$. Тогда оно выполнено для любого $\tilde{A} \in W$.

Действительно, V_1 является замыканием линейной оболочки корневых векторов задачи (2.21), удовлетворяющих условиям $(J_1, A^n)_{L_2} = 0$, $n = 1, \dots, N$. При этом если A является решением задачи и элементом пространства V_1 , то

$$c(A, \tilde{A}) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \tilde{A}) = 0 \quad \forall \tilde{A} \in V_1^\perp,$$

где $V_1^\perp$ – ортогональное дополнение пространства V_1 до пространства W относительно скалярного произведения, порождаемого $c(A, \tilde{A})$. Поскольку система векторов A_n полна в пространстве V_1 и

$$a(A_n, \tilde{A}) + b(A_n, \tilde{A}) = -\gamma_n^2 c(A_n, \tilde{A}) = 0 \quad \forall \tilde{A} \in V_1^\perp,$$

то

$$a(A, \tilde{A}) + b(A, \tilde{A}) = 0 \quad \forall \tilde{A} \in V_1^\perp.$$

Вектор $\bar{J}_1$ по построению удовлетворяет условию $c(d_2^{-1} \bar{J}_1, \tilde{A}) = 0$ для любого $\tilde{A} \in V_1^\perp$. Таким образом, решение задачи, рассматриваемой в пространстве V_1 ,

удовлетворяет задаче в пространстве W , т. е. именно в том пространстве, в котором рассматривается исходная задача. Будем рассматривать далее уравнение в пространстве V_1 .

Предположим, что решение задачи существует. Для преобразования Фурье

$$\hat{A} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\gamma z} A(x, y, z) dz$$

решения A получим задачу

$$(I + C)\hat{A} = -\gamma^2 H\hat{A} + \hat{F}, \quad (3.35)$$

где F определяется равенством $a(F, \tilde{A}) = c(d_2 \bar{J}_1^{-1}, \tilde{A})$ для любого $\tilde{A} \in V_1$. Вектор $\hat{F}$ представляет собой преобразование Фурье вектора F . Вектор J_1 принадлежит $(L_2)^3(\Omega \times (-\infty, +\infty))$, поскольку J_1 отлично от нуля лишь на отрезке $[z_1, z_2]$. Отсюда следует, что $J_1(x, y, z) \in L_2(-\infty, +\infty)$ при почти всех (x, y) , поэтому можно определить преобразование Фурье вектора F при почти всех (x, y) .

Покажем, что справедлива

ЛЕММА 3.1. *Существует решение задачи (3.34).*

Обратное преобразование Фурье решения задачи (3.35) представляет собой решение исходной задачи (3.34). Определим вектор A следующим образом:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\gamma z} (I + C + \gamma^2 H)^{-1} \hat{F}(x, y, \gamma) d\gamma. \quad (3.36)$$

Поскольку все собственные значения γ^2 лежат внутри некоторого сектора, вне которого резольвента $(I + C + \gamma^2 H)^{-1}$ равномерно ограничена по γ , то существует $\gamma_{\max}$ такое, что при $\gamma < -\gamma_{\max}$ и $\gamma > \gamma_{\max}$ резольвента ограничена некоторой константой и выполнено

$$\|H(I + C + \gamma^2 H)^{-1}\|_W \leq C_1 \frac{1}{\gamma^2}, \quad \gamma \in (-\infty, -\gamma_{\max}) \cup (\gamma_{\max}, +\infty),$$

$$\|(I + C + \gamma^2 H)^{-1} \hat{F}\|_W \leq M, \quad \gamma \in [-\gamma_{\max}, \gamma_{\max}].$$

Допустим, существует точка на вещественной оси, в которой резольвента неограничена. Тогда эта точка является собственным значением пучка $I + C + \gamma^2 H$ в силу компактности пучка. Однако данный пучок не имеет вещественных собственных значений. Поскольку резольвента $(I + C + \gamma^2 H)^{-1}$ ограничена в каждой точке γ отрезка $[-\gamma_{\max}, \gamma_{\max}]$ и является аналитической функцией, то найдется такая константа M , что

$$\|(I + C + \gamma^2 H)^{-1}\|_W \leq M, \quad \gamma \in [-\gamma_{\max}, \gamma_{\max}].$$

Следовательно, $\|(I + C + \gamma^2 H)^{-1} \hat{F}\|_W \in L_2(-\infty, +\infty)$. Отсюда получим

$$(I + C + \gamma^2 H)^{-1} \hat{F} \in (L_2)^3(Q), \quad Q = \Omega \times (-\infty, +\infty).$$

Таким образом, при почти всех γ определен вектор $(I + C + \gamma^2 H)^{-1} \hat{F} \in L_2(-\infty, +\infty)$, поэтому имеет смысл определение вектора A , причем при почти всех (x, y) вектор $A(x, y) \in L_2(-\infty, +\infty)$, т. е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |A(x, y, z)|^2 dz < \infty$.

Оценим норму оператора $H(I+C+\gamma^2 H)^{-1}$ при $\gamma \in (-\infty, -\gamma_{\max}) \cup (\gamma_{\max}, +\infty)$. Справедливо равенство

$$H(I+C+\gamma^2 H)^{-1} = \frac{1}{\gamma^2} I - \frac{1}{\gamma^2} (I+C)(I+C+\gamma^2 H)^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\|H(I+C+\gamma^2 H)^{-1}\|_W = \left\| \frac{1}{\gamma^2} I - \frac{1}{\gamma^2} (I+C)(I+C+\gamma^2 H)^{-1} \right\|_W.$$

В силу того, что $\|(I+C+\gamma^2 H)^{-1}\|_W \leq M$ при $\gamma \leq -\gamma_{\max}$ и $\gamma \geq \gamma_{\max}$, справедлива оценка

$$\|H(I+C+\gamma^2 H)^{-1}\|_W \leq \frac{M_1}{\gamma^2}, \quad \gamma \in (-\infty, -\gamma_{\max}) \cup (\gamma_{\max}, +\infty). \quad (3.37)$$

Таким образом, $\frac{\partial^2}{\partial z^2} HA \in L_2(-\infty, +\infty)$ при почти всех (x, y) . Действительно, это справедливо в силу неравенства

$$\|H(I+C+\gamma^2 H)^{-1} \hat{F}(x, y, \gamma)\|_W \leq \frac{M_2}{\gamma^2}$$

при $\gamma \in (-\infty, -\gamma_{\max}) \cup (\gamma_{\max}, +\infty)$. Отсюда имеем, что норма $\|\gamma^2 HA\|_W$ как функция от γ является элементом пространства $L_2(-\infty, +\infty)$ и, следовательно, в силу свойств преобразования Фурье $\frac{\partial^2}{\partial z^2} HA \in L_2(Q)$. Покажем, что $A \in V_1$ является решением задачи

$$((I+C)A, \tilde{A})_V = \frac{\partial^2}{\partial z^2} (HA, \tilde{A})_V + (HJ_1, \tilde{A})_V \quad \forall \tilde{A} \in V_1. \quad (3.38)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} HA &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2 e^{i\gamma z} H(I+C+\gamma^2 H)^{-1} \hat{F} d\gamma \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\gamma z} \hat{F}(x, y, \gamma) d\gamma - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\gamma z} (I+C)(I+C+\gamma^2 H)^{-1} \hat{F} d\gamma \\ &= F(x, y, z) - (I+C)A(x, y, z). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что выполняется (3.34), т. е. доказано существование решения задачи

$$a(A, \tilde{A}) + b(A, \tilde{A}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} c(A, \tilde{A}) + (\bar{J}_1, \tilde{A}) \quad \forall \tilde{A} \in W, \quad (3.39)$$

где $A \in L_2(V; (-\infty, +\infty))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Из уравнения (3.39) следует, что существует $\frac{\partial A}{\partial z} \in L_2(Q)$. Доказательство осуществляется стандартным методом.

Векторы A_1 и A_2 удовлетворяют уравнениям (3.1), (3.2) и являются элементами пространства $L_2(Q)$.

§ 4. Моды полого волновода

В частном случае $\varepsilon = I$, $\mu = I$ присоединенные векторы отсутствуют и система собственных векторов образует ортонормированный базис пространства V . При этом ядро задачи, т. е. множество векторов вида $(\operatorname{rot} \psi, ik\psi)$, $\psi \in \dot{H}^1$, рассматриваемой в пространстве W , не будет ортогонально собственным векторам.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Пусть $\psi_n(x, y)$ – собственные функции задачи

$$-\Delta_{\perp} \psi = \lambda \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Omega} = 0.$$

Тогда векторы $A_n = \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n$ являются решениями задачи (2.13)–(2.17).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. Пусть χ_n – собственные функции задачи

$$-\Delta_{\perp} \chi = \lambda \chi, \quad \chi|_{\partial\Omega} = 0.$$

Тогда $A_n = -ik \operatorname{rot} \chi_n + \lambda_n \chi_n e_z$ – решения задачи (2.13), (2.14).

Доказательства утверждений 4.1, 4.2 осуществляются непосредственной проверкой. Легко видеть, что система векторов A_n ортогональна в L_2 .

§ 5. Пример комплексных собственных значений

Задача поиска нормальных волн регулярных волноводов сводится к спектральной задаче для несамосопряженного оператора даже в случае отсутствия потерь в среде. Собственные значения могут быть комплексными, при этом в случае кратных собственных значений, помимо собственных векторов, могут существовать присоединенные векторы. Кроме того, возможны участки дисперсионных кривых, для которых $\frac{d\gamma}{dk} < 0$. (С физической точки зрения это означает, что фазовая и групповая скорости волны направлены в противоположные стороны.) Примеры подобных эффектов приведены в работах [33], [34].

В настоящем параграфе показано, что подобные эффекты возникают для волновода квадратного сечения с анизотропным заполнением даже в случае постоянных коэффициентов. Решение этой задачи выписывается в явном виде.

Считаем, что сечение Ω цилиндра – единичный квадрат:

$$\Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Коэффициенты системы уравнений Максвелла имеют следующий вид. Матрица диэлектрической проницаемости – диагональная: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$, матрица магнитной проницаемости – единичная: $\mu = I$.

Будем искать решения задачи (2.13)–(2.17) в виде

$$\begin{aligned} H_x &= -iH_x \sin(\pi nx) \cos(\pi my), \\ H_y &= -iH_y \cos(\pi nx) \sin(\pi my), \\ E_z &= E_z \sin(\pi nx) \sin(\pi my), \end{aligned}$$

где H_x, H_y, E_z – константы, $n, m = 1, 2, \dots$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \pi^2 n^2 + \pi^2 m^2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} - k^2 \varepsilon_2, & a_{12} &= \pi^2 nm \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right), \\ a_{21} &= \pi^2 nm \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right), & a_{22} &= \pi^2 m^2 + \pi^2 n^2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} - k^2 \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Собственные значения γ^2 вычисляются явно:

$$\gamma^2 = \frac{-(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}.$$

Таким образом, собственные значения являются комплексными при условии

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0.$$

Следовательно, необходимым условием существования комплексных собственных значений является условие $\varepsilon_1 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2$ или $\varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_1$. Выбирая $n = 1$, $m = 1$, легко увидим, что, помимо вещественных, возникают комплексные собственные значения.

Приведем примеры дисперсионных кривых, т.е. зависимостей собственных значений γ^2 от k^2 при $n = 1$, $m = 1$ для $\varepsilon_1 = 1.5$, $\varepsilon_2 = 8$. Величина ε_3 изменяется от 1 до 9.8. На рис. 2 показана типичная дисперсионная кривая $\text{Re } \gamma^2(k^2)$. В точке пересечения двух вещественных ветвей дисперсионной кривой происходит переход значений функции $\gamma^2(k^2)$ от вещественных к комплексным.

Рис. 2

При этом $\frac{d\gamma^2}{dk^2} = \infty$, т.е. эта точка является точкой касания двух ветвей дисперсионной кривой. Существуют два таких значения k^2 , которые находятся из условия $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0$. В точках k^2 , в которых возникает кратное значение функции $\gamma^2(k^2)$, существует присоединенный вектор задачи (2.13)–(2.17). Участок линейности вещественной части дисперсионной кривой отвечает комплексным значениям функции $\gamma^2(k^2)$.

Отметим, что нижняя ветвь дисперсионной кривой

$$\gamma^2 = \frac{-(a_{11} + a_{22}) - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}$$

Рис. 3

на рис. 2 имеет участки, на которых $\frac{d\gamma^2}{dk^2} < 0$.

Эволюция дисперсионных кривых в интервале от $\varepsilon_3 = 1$ до $\varepsilon_3 = 9.8$ показана на рис. 3.

§ 6. Вещественные собственные значения

Рассмотрим вопрос о существовании вещественных участков дисперсионных кривых и докажем существование счетного числа частот, которым соответствуют решения, не зависящие от координаты z . Рассмотрим задачу относительно параметра k при фиксированном γ , не обязательно равном нулю. При этом будем использовать систему уравнений относительно вектора H . Для сокращения обозначений будем считать, что ε , μ – скалярные функции. Сведем систему уравнений Максвелла к уравнению относительно магнитного поля:

$$\operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H - k^2 \mu H = 0. \quad (6.1)$$

Зададим краевые условия

$$\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H \times \mathbf{n}|_{\partial Q} = 0, \quad H \mathbf{n}|_{\partial Q} = 0 \quad (6.2)$$

и условия сопряжения

$$[H \times \mathbf{n}]|_S = 0, \quad [\mu H \mathbf{n}]|_S = 0, \quad [\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H \times \mathbf{n}]|_S = 0. \quad (6.3)$$

Введем дополнительное условие

$$\operatorname{div} \mu H = 0. \quad (6.4)$$

Рассмотрим решения вида $H(x, y)e^{i\gamma z}$. Для векторов $H(x, y)$ получим систему

$$\operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H_{\perp} + \gamma^2 \varepsilon^{-1} H_{\perp} + i\gamma \varepsilon^{-1} \operatorname{grad} H_z = k^2 \mu H_{\perp}, \quad (6.5)$$

$$i\gamma \operatorname{div} \varepsilon^{-1} H_{\perp} - \operatorname{div} \varepsilon^{-1} \operatorname{grad} H_z = k^2 \mu H_z. \quad (6.6)$$

При этом необходимо рассматривать задачу на множестве векторов, для которых

$$\operatorname{div} \mu H_{\perp} + i\gamma \mu H_z = 0. \quad (6.7)$$

Легко видеть, что при любом вещественном γ задача, рассматриваемая на множестве векторов, удовлетворяющих условию (6.7), сводится к задаче определения характеристических чисел самосопряженного компактного оператора. Справедлива

ЛЕММА 6.1. *При любом вещественном γ существует бесконечное число собственных значений задачи (6.1)–(6.4) с единственной точкой сгущения на бесконечности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем полуторалинейные формы

$$\begin{aligned} a_2(H, \tilde{H}) &= (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H_{\perp}, \operatorname{rot} \tilde{H}_{\perp})_{L_2} + (\varepsilon^{-1} \operatorname{grad} H_z, \operatorname{grad} \tilde{H}_z)_{L_2} \\ &\quad + i\gamma(\varepsilon^{-1} \tilde{H}_{\perp}, \operatorname{grad} H_z)_{L_2} + i\gamma(\varepsilon^{-1} H_{\perp}, \operatorname{grad} \tilde{H}_z)_{L_2} \\ &\quad + \gamma^2(\varepsilon^{-1} H_{\perp}, \tilde{H}_{\perp})_{L_2} + (\varepsilon^{-1} H_{\perp}, \tilde{H}_{\perp}), \\ c_2(H, \tilde{H}) &= (\mu H, \tilde{H}). \end{aligned}$$

Введем функциональное пространство

$$\begin{aligned} V_2 &= \{H_{\perp} \in H(\operatorname{rot}), H_z \in H^1, \\ &\quad (\mu H_{\perp}, \operatorname{grad} \tilde{\phi})_{L_2} + i\gamma(\mu H_z, \tilde{\phi})_{L_2} = 0 \quad \forall \tilde{\phi} \in H^1, H_{\perp} n|_{\partial\Omega} = 0\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим обобщенную постановку задачи (6.1)–(6.4). Будем искать решения $H \in V_2$ и собственное значение k , удовлетворяющие задаче

$$a_2(H, \tilde{H}) = (k^2 + 1)c(H, \tilde{H}) \quad \forall \tilde{H} \in V_2.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. *Пространство V_2 вложено в $(L_2)^3$ компактно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 2.2.

Форма $a_2(H, \tilde{H})$ удовлетворяет неравенству

$$a_2(H, H) \geq C(\mu H, H).$$

Следовательно, $a_2(H, \tilde{H})$ определяет в пространстве V_2 скалярное произведение. Таким образом, по теореме Рисса существует самосопряженный оператор T , определяемый равенством

$$a_2(H, H) = c(TH, H).$$

Оператор H , очевидно, обращается в нуль только на нулевом элементе. При этом в силу компактности вложения V_2 в $(L_2)^3$ оператор T компактен. Таким образом, задача (6.1)–(6.4) сводится к спектральной задаче для компактного самосопряженного оператора

$$H = (k^2 + 1)TH.$$

Поэтому существует бесконечная последовательность k_n^2 с точкой сгущения в бесконечности. Лемма доказана.

Поскольку $\gamma = 0$, решение вида $H(x, y)e^{i\gamma z}$ не зависит от z . Таким образом, существует счетное число значений k^2 , которым соответствуют решения, не зависящие от z , т. е. частот отсечки.

Глава 2. Задача рассеяния в нерегулярном электромагнитном волноводе

Настоящая глава посвящена исследованию задачи рассеяния в нерегулярном электромагнитном волноводе. Основной целью в данной главе является доказательство разрешимости краевой задачи для системы уравнений Максвелла с определенными условиями излучения в нерегулярном волноводе, а также доказательство существования ловушечных мод в случае отсутствия потерь в среде, заполняющей волновод. Таким образом, устанавливается неединственность решения задачи рассеяния при определенных значениях частоты.

§ 7. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о дифракции электромагнитной волны на магнитнодиэлектрическом теле в волноводе.

Введем еще раз уравнения и краевые условия, которым должно удовлетворять решение. Задача рассматривается в цилиндре $Q = \{(x, y) \in \Omega, z \in (-\infty, +\infty)\}$, где Ω – односвязная ограниченная область с кусочно гладкой границей (рис. 4).

Рис. 4

Рассматривается система уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} E = ik\mu H, \quad \operatorname{rot} H = -ik\varepsilon E, \quad (7.1)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon E = 0, \quad \operatorname{div} \mu H = 0. \quad (7.2)$$

Считаем, что $\varepsilon = I$, $\mu = I$ при $z < z_1$ и $z > z_2$. Диэлектрическая и магнитная проницаемости являются в общем случае эрмитовыми матрицами $\varepsilon = \varepsilon^*$, $\mu = \mu^*$, удовлетворяющими условиям ограниченности и положительной определенности

$$\sum_i |\xi_i|^2 \leq \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \xi_i \xi_j^* \leq \beta \sum_i |\xi_i|^2,$$

$$\sum_i |\xi_i|^2 \leq \sum_{i,j} \mu_{ij} \xi_i \xi_j^* \leq \beta \sum_i |\xi_i|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^3.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. В ряде работ (см. [1]) рассматривался случай, когда матрицы ε и μ диэлектрической и магнитной проницаемостей имеют вид

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 I, \quad \mu = \mu_1 + i\mu_2 I,$$

где матрицы ε_1 и μ_1 эрмитовы, I – единичная матрица, а ε_2, μ_2 – положительные константы, которые могут быть сколь угодно малыми. Введение малых величин ε_2, μ_2 позволяет установить существование решения, однако применение принципа предельного поглощения в общем случае невозможно. Это связано с тем, что решение задачи при $\varepsilon_2 \equiv 0, \mu_2 \equiv 0$ может быть не единственным при определенных значениях частоты поля.

На границе цилиндра Q поставим условия, соответствующие идеально проводящей стенке:

$$E \times \mathbf{n}|_{\partial Q} = 0, \quad \mu H \mathbf{n}|_{\partial Q} = 0. \quad (7.3)$$

Считаем, что матрицы ε и μ диэлектрической и магнитной проницаемостей отличны от единичной матрицы в области $V = \{(x, y) \in \Omega, z \in [z_1, z_2]\}$. На поверхностях S разрыва функций ε и μ введем условия сопряжения

$$[E \times \mathbf{n}]_S = 0, \quad [H \times \mathbf{n}]_S = 0, \quad (7.4)$$

$$\varepsilon E \mathbf{n}|_S = 0, \quad \mu H \mathbf{n}|_S = 0. \quad (7.5)$$

В качестве “условия на ребре” будем использовать условия

$$E \in L_2^{\text{loc}}, \quad H \in L_2^{\text{loc}}.$$

Уравнения (7.1), (7.2) с граничными условиями (7.3) и условиями сопряжения (7.4), (7.5) необходимо дополнить условиями излучения при $z \leq z_1$ и $z \geq z_2$ в полубесконечных областях, в которых поле удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } E &= ikH, & \text{rot } H &= -ikE, \\ \text{div } E &= 0, & \text{div } H &= 0. \end{aligned}$$

Считаем, что из $-\infty$ на неоднородный участок волновода падает нормальная волна, вид которой мы конкретизируем позже.

В случае наличия поглощения в среде, заполняющей волновод, разрешимость задачи дифракции следует из энергетических оценок, полученных в работе [17]. Целью настоящей работы является доказательство разрешимости этой задачи в случае отсутствия в среде поглощения.

Сведем систему уравнений Максвелла к эквивалентной системе уравнений относительно магнитного поля:

$$\text{rot } \varepsilon^{-1} \text{rot } H - k^2 \mu H = 0, \quad \text{div } \mu H = 0, \quad (7.6)$$

с граничными условиями на боковой поверхности цилиндра ∂Q :

$$\text{rot } H \times \mathbf{n}|_{\partial Q} = 0, \quad H \mathbf{n}|_{\partial Q} = 0, \quad (7.7)$$

и условиями сопряжения

$$[H \times \mathbf{n}]_S = 0, \quad (7.8)$$

$$[\varepsilon^{-1} \text{rot } H \times \mathbf{n}]_S = 0. \quad (7.9)$$

В качестве “условия на ребре” потребуем выполнения условий $H \in L_2^{\text{loc}}$, $\text{rot } H \in L_2^{\text{loc}}$, т. е. условия ограниченности L_2 -нормы векторов H и $\text{rot } H$ в любой конечной подобласти цилиндра Q .

Напомним [3], [19] определения некоторых функциональных пространств.

Введем пространство $H(\text{rot}, V) = \{H \in L_2(V), \text{rot } H \in L_2(V)\}$, которое является гильбертовым относительно нормы

$$\|H\|_{H(\text{rot})}^2 = \|H\|_{L_2(V)}^2 + \|\text{rot } H\|_{L_2(V)}^2.$$

Введем пространство $H(\text{div}, V) = \{H \in L_2(V), \text{div } H \in L_2(V)\}$, являющееся гильбертовым относительно нормы

$$\|H\|_{H(\text{div})}^2 = \|H\|_{L_2(V)}^2 + \|\text{div } H\|_{L_2(V)}^2.$$

Под условием $H\mathbf{n}|_{\partial Q} = 0$ для вектора $H \in H(\text{div}, V)$ понимаем выполнение равенства

$$(H, \text{grad } \phi)_{L_2(V)} = -(\text{div } H, \phi)_{L_2(V)} \quad \forall \phi \in H^1(V), \quad \phi|_{\partial\Omega_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

где Ω_i – сечения цилиндра плоскостями $z = z_i$, $i = 1, 2$.

Перейдем к постановке условий излучения, следуя [1]. Пусть в областях $Q_1 = \{(x, y) \in \Omega, z < z_1\}$ и $Q_2 = \{(x, y) \in \Omega_2, z > z_2\}$ вектор H удовлетворяет уравнению

$$\text{rot rot } H - k^2 H = 0, \quad (7.10)$$

граничным условиями

$$H\mathbf{n}|_{\partial Q_i} = 0, \quad \text{rot } H \times \mathbf{n}|_{\partial Q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (7.11)$$

и условиям $H \in L_2^{\text{loc}}$, $\text{rot } H \in L_2^{\text{loc}}$. Тогда $\text{rot rot } H \in L_2^{\text{loc}}$.

Умножая уравнение (7.10) на произвольный достаточно гладкий вектор $\tilde{H}$, отличный от нуля только при z , принадлежащем некоторому конечному отрезку, получим

$$(\text{rot } H, \text{rot } \tilde{H})_{L_2(Q_i)} = k^2 (H, \tilde{H})_{L_2(Q_i)}. \quad (7.12)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.1. Пусть χ_n, ψ_n – ортонормированные собственные функции соответственно задач

$$-\Delta_{\perp} \chi_n = \lambda_{1n} \chi_n, \quad \chi_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad (7.13)$$

$$-\Delta_{\perp} \psi_n = \lambda_{2n} \psi_n, \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (7.14)$$

$$(\chi_n, \chi_m)_{L_2(\Omega)} = \delta_{nm}, \quad (\psi_n, \psi_m)_{L_2(\Omega)} = \delta_{nm}.$$

Тогда векторы $H \in L_2(V)$ и $\text{rot } H \in L_2(V)$ при почти всех z представимы в виде сходящихся в $L_2(\Omega)$ рядов:

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Z}_{2n} \text{grad}_{\perp} \psi_n + \sum_{n=1}^{\infty} Z_{1n} \text{rot } \chi_n e_z + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Z}_{3n} \psi_n e_z, \quad (7.15)$$

$$\text{rot } H = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Z}_{2n} \text{rot } \psi_n e_z + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Z}_{1n} \text{grad}_{\perp} \chi_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n} \bar{Z}_{3n} \chi_n e_z, \quad (7.16)$$

где

$$Z_{in} \in L_2[z_1, z_2], \quad \bar{Z}_{in} \in L_2[0, 1], \quad i = 1, 2, 3.$$

Это утверждение следует из полноты системы векторов $\text{grad}_\perp \psi_n$, $\text{rot } \chi_n e_z$ в $(L_2(\Omega))^2$, полноты каждой из систем функций χ_n , ψ_n в $L_2(\Omega)$ и равенств

$$(\text{rot } \chi_n e_z, \text{rot } \chi_m e_z)_{L_2(\Omega)} = \lambda_{1n} \delta_{nm}, \quad (\text{grad}_\perp \psi_n, \text{grad}_\perp \psi_m)_{L_2(\Omega)} = \lambda_{2n} \delta_{nm}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Поскольку функции ψ_n , χ_n удовлетворяют граничным условиям (7.13), (7.14), то $\text{grad}_\perp \psi_n$, $\text{rot } \chi_n e_z$ удовлетворяют граничному условию $H\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.2. Пусть $\text{div } H = 0$ в области V . Тогда вектор H представим в следующем виде:

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} Z'_{2n} \text{grad}_\perp \psi_n + \sum_{n=1}^{\infty} Z_{1n} \text{rot } \chi_n e_z + \sum_{n=1}^{\infty} Z_{2n} \psi_n e_z, \quad (7.17)$$

где ряды сходятся в $L_2(V)$.

Действительно, в силу условия $\text{div } H = 0$ имеет место равенство

$$(H, \text{grad } \tilde{Z}_n \psi_n)_{L_2(V)} = (H_\perp, \tilde{Z}_n \text{grad } \psi_n)_{L_2(V)} + (H_z, \tilde{Z}'_n \psi_n)_{L_2(V)} = 0$$

для любого $\tilde{Z}_n \in C_0^\infty$. Отсюда следует, что $\lambda_{2n} \overline{\tilde{Z}}_{2n} = \overline{\tilde{Z}}'_{3n}$. Обозначим $Z_{2n} = \frac{1}{\lambda_{2n}} \overline{\tilde{Z}}_{3n}$. Тогда $\overline{\tilde{Z}}_{2n} = Z'_{2n}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.3. Пусть $H \in H(\text{rot})$, $\text{div } H = 0$. Тогда

$$\text{rot } H = - \sum_{n=1}^{\infty} (Z''_{2n} - \lambda_{2n} Z_{2n}) \text{rot } \psi_n e_z + \sum_{n=1}^{\infty} (Z'_{1n} \text{grad}_\perp \chi_n + \lambda_{1n} Z_{1n} \chi_n e_z).$$

Воспользуемся тем, что для любого вектора $\tilde{H} = \tilde{Z}_n \chi_n e_z$, $\tilde{Z}_n \in C_0^\infty$, справедливо равенство

$$(\text{rot } H, \tilde{Z}_n \chi_n e_z)_{L_2(V)} = (H, \tilde{Z}_n \text{rot } \chi_n e_z)_{L_2(V)}.$$

Отсюда следуют равенства $\overline{\tilde{Z}}_{3n} = \lambda_{1n} Z_{1n}$, $\overline{\tilde{Z}}_{1n} = \lambda_{1n} Z'_{1n}$. Выбирая вектор $\tilde{H} = \text{rot } \text{rot}(\tilde{Z}_n \psi_n e_z)$, получим равенство

$$(\text{rot } H, \text{rot}(\tilde{Z}_n \psi_n e_z))_{L_2(V)} = (H, \text{rot } \text{rot}(\tilde{Z}_n \psi_n e_z))_{L_2(V)}.$$

Отсюда имеем

$$\overline{\tilde{Z}}_{2n} = -Z''_{2n} + \lambda_{2n} Z_{2n}.$$

При этом $(Z_{1n}, Z'_{1n}, Z_{2n}, Z'_{2n}, Z''_{2n} - \lambda_{2n} Z_{2n}) \in L_2[z_1, z_2]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Из утверждений 7.2 и 7.3 следует, что для векторов H , удовлетворяющих условиям $H \in H(\text{rot}, V)$, $\text{div } H = 0$, $H\mathbf{n}|_{\partial Q} = 0$, возможно определение величины $(H_\perp, \text{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega_i)}$, под которой мы подразумеваем $\lambda_{2n} Z'_{2n}(z_i)$, $i = 1, 2$.

Пусть вектор H удовлетворяет уравнению (7.12). Выберем в качестве вектора $\tilde{H}$ вектор $\tilde{Z}_n \text{rot } \chi_n e_z$. Считаем для определенности, что $n > N_1$. Выберем $\tilde{Z}_n \in C^\infty$, $Z_n \equiv 0$, $z < z_2 - \tau$. В результате для Z_{1n} получим

$$(Z'_{1n}, \tilde{Z}'_n)_{L_2} - (\lambda_{1n} - k^2)(Z_{1n}, \tilde{Z}_n) + \frac{1}{\lambda_{1n}} \gamma_n Z_{1n}(z_2) \tilde{Z}_n(z_2) = 0.$$

Следовательно, Z_{1n} удовлетворяет уравнению $Z_{1n}'' - (\lambda_{1n} - k^2)Z_{1n} = 0$.

Обозначим $\gamma_{1n} = \sqrt{\lambda_{1n} - k^2}$. Отсюда следует, что $Z_{1n}(z)$ представимо в области $(z_2 - \tau, z_2)$ в виде

$$Z_{1n} = a_{1n}e^{-\gamma_{1n}z} + a_{2n}e^{\gamma_{2n}z}.$$

Обозначим $\gamma_{2n} = \sqrt{\lambda_{2n} - k^2}$. Рассматривая в качестве вектора $\tilde{H}$ вектор $\tilde{Z}_n \psi_n e_z$, получим, что Z_{2n} имеет вид

$$Z_{2n} = c_{1n}e^{-\gamma_{2n}z} + c_{2n}e^{\gamma_{2n}z}.$$

В качестве условий излучения используем парциальные условия излучения А.Г. Свешникова [16] в областях $z < z_1$ и $z > z_2$ в виде

$$\begin{aligned} Z_{1n} &= a_{1n}e^{-\gamma_{1n}z}, & z > z_2, & & Z_{1n} &= a_{2n}e^{\gamma_{1n}z} + \delta_{nm}Ae^{i|\gamma_{1m}|z}, & z < z_1, \\ Z_{2n} &= c_{1n}e^{-\gamma_{2n}z}, & z > z_2, & & Z_{2n} &= c_{2n}e^{\gamma_{2n}z}, & z < z_1. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.4. Считаем далее везде, что $k^2 \neq \lambda_{1n}$, $k^2 \neq \lambda_{2n}$, т.е. k^2 не совпадает ни с одной из частот отсечки полого волновода.

Считаем, что из $-\infty$ падает нормальная волна вида $H = A \operatorname{rot}(\chi_m e_z)e^{i\gamma_{1m}z}$, где A – константа, $m \leq N_1$.

Условия излучения можно сформулировать как требование представления вектора H при $z < z_1 + \tau$ и $z > z_2 - \tau$ в виде сходящегося в $(L_2(\Omega))^3$ ряда:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{rot}(\chi_n e_z)e^{-\gamma_{1n}z} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} c_n (-\gamma_{2n} \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n + \lambda_{2n} \psi_n e_z)e^{-\gamma_{2n}z}, & z > z_2, \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{rot}(\chi_n e_z)e^{\gamma_{1n}z} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (\gamma_{2n} \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n + \lambda_{2n} \psi_n e_z)e^{\gamma_{2n}z} \\ &+ Ae^{i|\gamma_{1m}|z} \operatorname{rot} \chi_m e_z, & z < z_1. \end{aligned} \quad (7.19)$$

В случае если вектор H представим в областях $z < z_1 + \tau$ и $z > z_2 - \tau$ в виде сходящихся в $L_2(\Omega)$ рядов, то вектор $\operatorname{rot} H \in (L_2)^{3,\text{loc}}$ можно разложить в сходящиеся в $L_2(\Omega)$ ряды:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\gamma_{1n} \operatorname{grad}_{\perp} \chi_n + \lambda_{1n} \chi_n e_z)e^{-\gamma_{1n}z} \\ &+ k^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{rot}(\psi_n e_z)e^{\gamma_{2n}z}, & z > z_2, \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\gamma_{1n} \operatorname{grad}_{\perp} \chi_n + \lambda_{1n} \chi_n e_z)e^{\gamma_{1n}z} + k^2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{rot}(\psi_n e_z)e^{-\gamma_{2n}z} \\ &+ Ae^{i|\gamma_{1m}|z} (i\gamma_{1m} \operatorname{grad}_{\perp} \chi_m + \lambda_{1m} \chi_m e_z), & z < z_1. \end{aligned} \quad (7.21)$$

§ 8. Вариационная постановка задачи

Перейдем к вариационной постановке задачи дифракции. Сформулируем еще раз рассматриваемую задачу. Будем искать решения уравнений

$$\operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H - k^2 \mu H = 0, \quad (8.1)$$

$$\operatorname{div} \mu H = 0 \quad (8.2)$$

с краевыми условиями

$$\mu H \mathbf{n}|_{\partial Q} = 0, \quad \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H \times \mathbf{n}|_{\partial Q} = 0 \quad (8.3)$$

и условиями сопряжения на поверхностях разрыва S диэлектрической и магнитной проницаемостей:

$$[H \times \mathbf{n}]|_S = 0, \quad [\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H \times \mathbf{n}]|_S = 0. \quad (8.4)$$

Условия излучения зададим как требования представления поля H в виде сходящихся в $L_2(\Omega)$ рядов при $z < z_1$ и $z > z_2$:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{rot}(\chi_n e^{-\gamma_{1n} z} e_z) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\psi_n e^{-\gamma_{2n} z} e_z), \quad z > z_2, \\ H &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{rot}(\chi_n e^{\gamma_{1n} z} e_z) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\psi_n e^{\gamma_{2n} z} e_z) + A \operatorname{rot}(\chi_m e_z) e^{i\gamma_{1m} z}, \quad z < z_1. \end{aligned}$$

Умножим уравнение (8.1) на произвольный кусочно гладкий вектор $\tilde{H}$, удовлетворяющий граничным условиям, условиям сопряжения и условиям излучения, и проинтегрируем по области V :

$$\int_V (\operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \tilde{H}^* \operatorname{rot} H - k^2 \tilde{H}^* \mu H) dv = 0.$$

Интегрируя по частям (считаем, что это возможно), получим

$$\begin{aligned} &\int_V (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H \operatorname{rot} \tilde{H}^* - k^2 \mu H \tilde{H}^*) dv \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \frac{1}{\lambda_{1n}} (H_{\perp}, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_2)} (\tilde{H}_{\perp}, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_2)}^* \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^2}{\lambda_{2n} \gamma_{2n}} (H_{\perp}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)} (\tilde{H}_{\perp}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)}^* \\ &= 2i |\gamma_{1m}| A e^{i\gamma_{1m} z} (\operatorname{rot} \chi_m e_z, \tilde{H})_{L_2(\Omega_1)}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Под обобщенным решением задачи (8.1)–(8.4) будем понимать решение уравнения (8.5). Вопрос о том, в каком функциональном пространстве необходимо рассматривать задачу (8.5), требует специального изучения и будет исследован далее.

§ 9. Существование решения задачи рассеяния в волноводе

Рассмотрим [35] обобщенную постановку задачи (7.6)–(7.9), (7.18), (7.19). Обозначим

$$\gamma_{1n} = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \lambda_{1n}}, & n = 1, \dots, N_1, \\ \sqrt{\lambda_{1n} - k^2}, & n > N_1, \end{cases} \quad \gamma_{2n} = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \lambda_{2n}}, & n = 1, \dots, N_2, \\ \sqrt{\lambda_{2n} - k^2}, & n > N_2, \end{cases}$$

при условии $k^2 > \lambda_{1n}$, $n = 1, \dots, N_1$, $k^2 > \lambda_{2n}$, $n = 1, \dots, N_2$.

Будем искать решение уравнения

$$\begin{aligned} & (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H, \operatorname{rot} \tilde{H})_{L_2(V)} - k^2 (\mu H, \tilde{H})_{L_2(V)} \\ & - \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{N_1} i \gamma_{1n} \frac{1}{\lambda_{1n}} (H_{\perp}, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)} (\tilde{H}_{\perp}, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)}^* \\ & + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \gamma_{1n} \frac{1}{\lambda_{1n}} (H_{\perp}, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)} (\tilde{H}_{\perp}, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)}^* \\ & - \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{N_2} \frac{i k^2}{\lambda_{2n} \gamma_{2n}} (H_{\perp}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)} (\tilde{H}_{\perp}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)}^* \\ & - \sum_{i=1}^2 \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \frac{k^2}{\lambda_{2n} \gamma_{2n}} (H_{\perp}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)} (\tilde{H}_{\perp}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)}^* \\ & = 2i \gamma_{1m} A e^{i \gamma_{1m} z} (\operatorname{rot} \chi_m e_z, \tilde{H})_{L_2(\Omega_2)}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Введем полуторалинейные формы

$$\begin{aligned} a(H, \tilde{H}) &= (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H, \operatorname{rot} \tilde{H})_{L_2(V)} \\ &+ \sum_{i=1}^2 \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \gamma_{1n} \frac{1}{\lambda_{1n}} (H_{\perp}, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)} (\tilde{H}_{\perp}, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)}^*, \end{aligned} \quad (9.2)$$

$$\begin{aligned} b(H, \tilde{H}) &= -k^2 (\mu H, \tilde{H})_{L_2(V)} \\ &- \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{N_1} i \gamma_{1n} \frac{1}{\lambda_{1n}} (H_{\perp}, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)} (\tilde{H}_{\perp}, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)}^* \\ &- \sum_{n=1}^{N_2} \frac{i k^2}{\lambda_{2n} \gamma_{2n}} (H_{\perp}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)} (\tilde{H}_{\perp}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)}^* \\ &- \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \frac{k^2}{\lambda_{2n} \gamma_{2n}} (H_{\perp}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)} (\tilde{H}_{\perp}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)}^* \end{aligned} \quad (9.3)$$

и линейную форму

$$l(\tilde{H}) = 2i \gamma_{1m} A (\operatorname{rot} \chi_m e_z, \tilde{H})_{L_2(\Omega_2)}. \quad (9.4)$$

В обозначениях (9.2), (9.3) уравнение (9.1) имеет вид

$$a(H, \tilde{E}) + b(H, \tilde{E}) = l(\tilde{H}). \quad (9.5)$$

Для обобщенной постановки задачи (7.6)–(7.19) необходимо ввести векторное функциональное пространство, в котором будем рассматривать задачу. В областях $z \leq z_1 + \tau$ и $z \geq z_2 - \tau$ компоненты магнитного поля H , представимого в виде рядов (7.18), (7.19), связаны соотношениями

$$\begin{aligned} (H_\perp, \text{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega_2)} &= \begin{cases} i\gamma_{2n}(H_z, \psi_n)_{L_2(\Omega_2)}, & n = 1, \dots, N_2, \\ -\gamma_{2n}(H_z, \psi_n)_{L_2(\Omega_2)}, & n > N_2, \end{cases} \\ (H_\perp, \text{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega_1)} &= \begin{cases} -i\gamma_{2n}(H_z, \psi_n)_{L_2(\Omega_1)}, & n = 1, \dots, N_2, \\ \gamma_{2n}(H_z, \psi_n)_{L_2(\Omega_1)}, & n > N_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.6)$$

Введем функциональное пространство, на элементы которого наложим условия (9.6):

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \Big\{ H \in H(\text{rot}, V), \text{ div } \mu H = 0, \mu H n|_{\partial Q} = 0, \\ \sum_{i=1}^2 \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{1n}} \gamma_{1n}(H_\perp, \text{rot } \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)}^2 < \infty, \\ (H_\perp, \text{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega_2)} = i\gamma_{2n}(H_z, \psi_n)_{L_2(\Omega_2)}, \quad n = 1, \dots, N_2, \\ (H_\perp, \text{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega_2)} = -\gamma_{2n}(H_z, \psi_n)_{L_2(\Omega_2)}, \quad n > N_2, \\ (H_\perp, \text{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega_1)} = -i\gamma_{2n}(H_z, \psi_n)_{L_2(\Omega_1)}, \quad n = 1, \dots, N_2, \\ (H_\perp, \text{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega_1)} = \gamma_{2n}(H_z, \psi_n)_{L_2(\Omega_1)}, \quad n > N_2 \Big\}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. В силу утверждений (7.2) и 7.3 для вектора H , удовлетворяющего условиям $H \in H(\text{rot}, V)$, $\text{div } \mu H = 0$, $\mu H n|_{\partial Q} = 0$, определено значение $(H_\perp, \text{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega_i)}$, $i = 1, 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Будем называть вектор $H \in \mathcal{V}$ *обобщенным решением* задачи (7.6)–(7.19), если он удовлетворяет уравнению (9.5) для любого $\tilde{H} \in \mathcal{V}$.

Докажем существование обобщенного решения задачи (7.6)–(7.19), т. е. решения задачи (9.5).

Полуторалинейная форма $a(H, \tilde{H})$ задает скалярное произведение в пространстве $\mathcal{V}$. Пространство $\mathcal{V}$ является гильбертовым с нормой, порождаемой скалярным произведением $a(H, \tilde{H})$. Проверки требует, очевидно, только полнота пространства $\mathcal{V}$, доказательство которой осуществляется аналогично доказательству, приведенному в работе [42].

УТВЕРЖДЕНИЕ 9.1. Для элементов пространства $\mathcal{V}$ определена полуторалинейная форма $b(H, \tilde{H})$. При фиксированном $H \in \mathcal{V}$ она определяет ограниченный функционал в $\mathcal{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждения следует из приведенной ниже леммы 9.2.

Таким образом, в силу теоремы Рисса [28] существуют ограниченный в пространстве $\mathcal{V}$ оператор T и вектор F такие, что

$$a(TH, \tilde{H}) = b(H, \tilde{H}), \quad (9.7)$$

$$a(F, \tilde{H}) = l(\tilde{H}). \quad (9.8)$$

Уравнение (9.5) сводится к уравнению

$$H + TH = F. \quad (9.9)$$

Докажем, что оператор T является компактным в пространстве $\mathcal{V}$. Отсюда будет следовать существование решения задачи (9.9). В то же время решение задачи может быть не единственным.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9.2. Пусть при некотором k , которое по условию является вещественным, существует нетривиальное решение однородного уравнения (9.9). Тогда ядро сопряженного уравнения ортогонально правой части уравнения (9.5), поскольку оно удовлетворяет условиям

$$(H_{\perp}, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)} = 0, \quad n = 1, \dots, N_2, \quad i = 1, 2. \quad (9.10)$$

Действительно, если существует решение H однородного сопряженного уравнения $H + T^*H = 0$, то оно удовлетворяет уравнению $(b(H, H))^* = 0$, что приводит к равенству

$$-\sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{N_1} i \frac{1}{\lambda_{1n}} \gamma_{1n} |(H_{\perp}, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_2)}|^2 = 0.$$

Учитывая, что $a(F, H) = l(H)$, приходим к ортогональности правой части уравнения (9.9) ядру сопряженной задачи относительно скалярного произведения $a(H, \tilde{H})$.

Введем пространство

$$W = \left\{ H \in L_2(V), \sum_{i=1}^2 \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2n} \gamma_{2n}} |(H_{\perp}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)}|^2 \right\},$$

которое является гильбертовым относительно нормы

$$\|H\|_W^2 = \|H\|_{L_2(V)}^2 + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2n} \gamma_{2n}} |(H_{\perp}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)}|^2. \quad (9.11)$$

ТЕОРЕМА 9.1. Пространство $\mathcal{V}$ компактно вложено в W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы разобьем на доказательства двух лемм.

ЛЕММА 9.1. Пространство $\mathcal{V}$ вложено в $(L_2(V))^3$ компактно.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.2. Доказать теорему 9.1 достаточно для случая $\mu = I$. В работе [20] доказан данный фундаментальный факт для теоремы о компактности вложения пространства векторов, удовлетворяющих условиям $H \in H(\operatorname{rot}, V)$, $\mu H \in H_0(\operatorname{div}, V)$, в $L_2(V)$. Доказательство того, что достаточно рассматривать случай $\mu = I$, для пространства $\mathcal{V}$ полностью аналогично. Особенностью применяемого в настоящей работе метода является единообразное рассмотрение вопроса о компактности вложения для векторов электрического и магнитного полей, удовлетворяющих разным граничным условиям.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 9.1. Рассмотрим ограниченную в пространстве $\mathcal{V}$ последовательность векторов H_k : $\|H_k\|_{\mathcal{V}}^2 < C$. Представим векторы H_k и $\text{rot } H_k$ в виде

$$H_k = \sum_{n=1}^{\infty} Z'_{2k_n} \text{grad}_{\perp} \psi_n + \sum_{n=1}^{\infty} Z_{1k_n} \text{rot } \chi_n e_z + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} Z_{2k_n} \psi_n e_z, \quad (9.12)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } H_k = & - \sum_{n=1}^{\infty} (Z''_{2k_n} - \lambda_{2n} Z_{2k_n}) \text{rot } \psi_n e_z \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (Z'_{1k_n} \text{grad}_{\perp} \chi_n + \lambda_{1n} Z_{1k_n} \chi_n e_z), \end{aligned} \quad (9.13)$$

где $Z_{1k_n} \in L_2$, $Z'_{1k_n} \in L_2$, $Z_{2k_n} \in L_2$, $Z'_{2k_n} \in L_2$, $Z''_{2k_n} - \lambda_{2n} Z_{2k_n} \in L_2$.

Справедливы равенства

$$\|H_k\|_{L_2(V)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n} \|Z'_{2k_n}\|^2 + \lambda_{2n}^2 \|Z_{2k_n}\|^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z'_{1k_n}\|^2, \quad (9.14)$$

$$\begin{aligned} \|\text{rot } H_k\|_{L_2(V)}^2 = & \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} \|Z''_{2k_n} - \lambda_{2n} Z_{2k_n}\|^2 \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{1n} \|Z'_{1k_n}\|^2 + \lambda_{1n}^2 \|Z_{1k_n}\|^2), \end{aligned} \quad (9.15)$$

где $\|Z\| = \|Z\|_{L_2[z_1, z_2]}$. В силу условий $Z'_{1k_n} \in L_2$, $Z''_{2k_n} \in L_2$ определены величины $Z_{1k_n}(z_i)$, $Z'_{2k_n}(z_i)$, $i = 1, 2$.

В силу выполнения условий

$$\begin{aligned} (H_{\perp k}, \text{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_2)} &= \begin{cases} i\gamma_{2n}(H_{z_k}, \psi_n)_{L_2(\Omega_2)}, & n = 1, \dots, N_2, \\ -\gamma_{2n}(H_{z_k}, \psi_n)_{L_2(\Omega_2)}, & n > N_2, \end{cases} \\ (H_{\perp k}, \text{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_1)} &= \begin{cases} -i\gamma_{2n}(H_{z_k}, \psi_n)_{L_2(\Omega_1)}, & n = 1, \dots, N_2, \\ -\gamma_{2n}(H_{z_k}, \psi_n)_{L_2(\Omega_1)}, & n > N_2, \end{cases} \end{aligned}$$

справедливы условия

$$\begin{aligned} Z'_{2k_n}(z_2) &= \begin{cases} i\gamma_{2n} Z_{2k_n}(z_2), & n = 1, \dots, N_2, \\ -\gamma_{2n} Z_{2k_n}(z_2), & n > N_2, \end{cases} \\ Z'_{2k_n}(z_1) &= \begin{cases} -i\gamma_{2n} Z_{2k_n}(z_1), & n = 1, \dots, N_2, \\ \gamma_{2n} Z_{2k_n}(z_1), & n > N_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} \|Z''_{2k_n} - \lambda_{2n} Z_{2k_n}\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n} \|Z''_{2k_n}\|^2 + 2\lambda_{2n}^2 \|Z'_{2k_n}\|^2 \\ &+ \lambda_{2n}^3 \|Z_{2k_n}\|^2) + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \lambda_{1n}^2 \gamma_{1n} |Z_{2k_n}(z_i)|^2. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \|\operatorname{rot} H_k\|_{L_2(V)}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n} \|Z''_{2k_n}\|^2 + 2\lambda_{2n}^2 \|Z'_{2k_n}\|^2 + \lambda_{2n}^3 \|Z_{2k_n}\|^2) \\ &+ \sum_{i=1}^2 \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \lambda_{2n}^2 \gamma_{2n} |Z_{2k_n}(z_i)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{1n} \|Z'_{1k_n}\|^2 + \lambda_{1n}^2 \|Z_{1k_n}\|^2). \end{aligned} \quad (9.16)$$

Легко видеть, что из любой последовательности, ограниченной по норме

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{1n} \|Z'_{1k_n}\|^2 + \lambda_{1n}^2 \|Z_{1k_n}\|^2),$$

можно выделить подпоследовательность, фундаментальную относительно нормы $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2$.

Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^2 \|Z_{1k_n}\|^2 < C$, то имеет место неравенство

$$\sum_{n=N_1+1}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2 < \lambda_{1N_1} \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2 < \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2 < C.$$

Так как

$$\sum_{n=N_1+1}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2 < \frac{C}{\lambda_{1,N_1+1}}$$

и $\lambda_{1,N_1+1} = O(N_1 + 1)$ при $N_1 \rightarrow \infty$, то $\sum_{n=N_1+1}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2$ сколь угодно мала при больших N_1 , не зависящих от k . Для конечной суммы

$$\sum_{n=1}^{N_1} \lambda_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2$$

применима теорема Релиха [23]. В результате справедливо утверждение о возможности выделить фундаментальную подпоследовательность относительно нормы $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2$. Аналогично, из любой последовательности, ограниченной по норме

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n} \|Z''_{2k_n}\|^2 + 2\lambda_{2n}^2 \|Z'_{2k_n}\|^2 + \lambda_{2n}^3 \|Z_{2k_n}\|^2) + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \lambda_{2n}^2 \gamma_{2n} |Z_{2k_n}(z_i)|^2,$$

можно выделить сходящуюся подпоследовательность по норме

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n} \|Z'_{2k_n}\|^2 + \lambda_{2n}^2 \|Z_{2k_n}\|^2).$$

Таким образом, пространство $\mathcal{V}$ вложено в $(L_2(V))^3$ компактно.

ЛЕММА 9.2. *Из любой ограниченной по норме $\mathcal{V}$ последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность следов по норме*

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2n} \gamma_{2n}} |(H_{\perp}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega)}|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к установлению равенства

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2n} \gamma_{2n}} |(H_{\perp k}, \text{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega)}|^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \lambda_{2n} \gamma_{2n} |Z_{2k_n}(z_2)|^2$$

и ограниченности суммы

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \lambda_{2n}^2 \gamma_{2n} |Z_{2k_n}(z_2)|^2,$$

что следует из доказательства теоремы 9.1.

Отсюда имеем, что из любой ограниченной последовательности по норме пространства $\mathcal{V}$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность по указанной полунорме.

Из ограниченности в L_2 норм $\|Z'_{2k_n}\|$, $\|Z''_{2k_n}\|$, $n = 1, \dots, N_2$, $\|Z_{1k_n}\|$, $\|Z'_{1k_n}\|$, $n = 1, \dots, N_1$, следует, что из последовательности функций, ограниченных по норме пространства $\mathcal{V}$, можно выделить фундаментальную подпоследовательность по полунорме

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{N_2} |Z'_{2k_n}(z_i)|^2 + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{N_1} |Z_{1k_n}(z_i)|^2,$$

или по полунорме

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{N_2} \frac{1}{\lambda_{2n} \gamma_{2n}} (H_{\perp}, \text{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)}^2 + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{N_1} \frac{1}{\lambda_{1n}} \gamma_{1n} (H_{\perp}, \text{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)}^2.$$

В результате получаем, что оператор T компактный.

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 9.2. *Существует решение задачи (9.5).*

ЗАМЕЧАНИЕ 9.3. Будем считать, что существует такое малое τ , что в областях $(z_1, z_1 + \tau)$ и $(z_2 - \tau, z_2)$ коэффициенты системы уравнений имеют вид $\varepsilon = I$, $\mu = I$. Решение задачи (9.5) имеет вид (7.18), (7.19) при $z > z_2 - \tau$ и $z < z_1 + \tau$. В самом деле, в качестве вектора $\tilde{H}$ можно выбрать как произвольный вектор вида $\tilde{H} = \tilde{Z}(z) \psi_n e_z$, где $\tilde{Z}(z_2) = 0$, $\tilde{Z}(z) = 0$, $z \leq z_2 - \tau$, так и вектор $\tilde{H} = \tilde{Z}(z) \text{rot} \chi_n e_z$, где $\tilde{Z}(z_2) = 0$, $\tilde{Z}(z) = 0$, $z \leq z_2 - \tau$. Отсюда, учитывая результаты, полученные в § 7, имеем, что решение представимо в виде (7.18), (7.19).

§ 10. Дискретный спектр задачи рассеяния

Дискретный спектр задачи рассеяния на диэлектрическом теле может быть непуст. В задачах акустики и теории упругости подобный вопрос исследовался во многих работах (см., например, [39]–[41]). Для доказательства будем использовать метод, аналогичный методу, применяемому в работах [36]–[38]. Несложно доказать непустоту дискретного спектра в случае, когда $\mu = I$, $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)I$ и $1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max}$. Считаем, что $\varepsilon > 1$ при $(x, y, z) \in V_1$, $\varepsilon = 1$ при $(x, y, z) \notin V$,

область V_1 , занятая рассеивателем, ограничена, $V_1 \subset \{(x, y) \in \Omega, z \in [z_1, z_2]\}$. Рассматривается задача в цилиндре Q :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H - k^2 H &= 0, & \operatorname{div} H &= 0, \\ H \mathbf{n}|_{\partial Q} &= 0, & \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H \times \mathbf{n}|_{\partial Q} &= 0, & H &\in L_2(Q). \end{aligned} \quad (10.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. *Обобщенным решением* задачи (10.1) будем называть вектор $H \in H(\operatorname{rot}, Q)$, $\operatorname{div} H = 0$, $H \mathbf{n}|_{\partial Q} = 0$, удовлетворяющий уравнению

$$(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H, \operatorname{rot} \tilde{H})_{L_2(Q)} = k^2 (\mu H, \tilde{H})_{L_2(Q)} \quad \forall \tilde{H} \in H(\operatorname{rot}, Q).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2. Будем говорить, что *дискретный спектр задачи рассеяния непуст*, если существует обобщенное решение $H \neq 0$, $k^2 \in \mathbb{R}$ задачи (10.1).

Для доказательства непустоты дискретного спектра рассмотрим спектральную задачу вида

$$\begin{aligned} &(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H, \operatorname{rot} \tilde{H})_{L_2(V)} + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{1n} \frac{1}{\lambda_{1n}} (H, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)} (\tilde{H}, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)} \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^2}{\gamma_{2n} \lambda_{2n}} (H, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)} (\tilde{H}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)} \\ &= k^2 (H, \tilde{H})_{L_2(V)}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Из существования решения задачи (10.2) следует существование решения в цилиндре Q . Для доказательства существования собственного значения $k \in \mathbb{R}$ и собственной функции H задачи (10.2) рассмотрим вспомогательную задачу относительно нового спектрального параметра ν :

$$\begin{aligned} &(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H, \operatorname{rot} \tilde{H})_{L_2(V)} + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{1n} \frac{1}{\lambda_{1n}} (H, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)} (\tilde{H}, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)} \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^2}{\gamma_{2n} \lambda_{2n}} (H, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)} (\tilde{H}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)} = \nu(k) (H, \tilde{H})_{L_2(V)}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Считаем, что k изменяется на промежутке $(0, \lambda_{21}]$, где λ_{21} – первое ненулевое собственное значение задачи

$$-\Delta_{\perp} \psi = \lambda_2 \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0,$$

рассматриваемой в поперечном сечении Ω . Будем рассматривать задачу в пространстве $\mathcal{V}$.

Справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 10.1. *Билинейная форма*

$$\begin{aligned} a(A, \tilde{A}) + C(A, \tilde{A})_{L_2(V)} &= (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H, \operatorname{rot} \tilde{H})_{L_2(V)} \\ &+ \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{1n} \frac{1}{\lambda_{1n}} (H, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)} (\tilde{H}, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)} \\ &- \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^2}{\gamma_{2n} \lambda_{2n}} (H, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)} (\tilde{H}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)} + C(A, \tilde{A})_{L_2(V)}, \end{aligned}$$

где C – достаточно большая константа, порождает скалярное произведение в пространстве V .

Необходимо доказать только то, что

$$a(H, H) + C(H, H) > 0. \quad (10.4)$$

Для этого достаточно рассмотреть равенство

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^2}{\gamma_{2n} \lambda_{2n}} (H_{\perp}, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)}^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} k^2 \lambda_{2n} \gamma_{2n} |Z_{2n}(z_i)|^2.$$

В силу соотношений

$$\begin{aligned} \lambda_{2n} \gamma_{2n} |Z_{2n}(z_i)|^2 &\leq C_1 \lambda_{2n}^2 \|Z_{2n}\|^2 + C_2 \gamma_{2n}^2 \|Z'_{2n}\|^2 \leq C_1 \lambda_{2n}^2 \|Z_{2n}\|^2 + C_3 \lambda_{2n} \|Z'_{2n}\|^2, \\ \|H\|_{L_2(V)}^2 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} \|Z'_{2n}\|^2 + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n}^2 \|Z_{2n}\|^2, \end{aligned}$$

можно выбрать C таким образом, чтобы выполнялось условие (10.4).

УТВЕРЖДЕНИЕ 10.2. *Существует по крайней мере одно собственное значение спектральной задачи (10.3), которое определяется равенством*

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \inf_{H \in V} \frac{1}{(H, H)_{L_2(V)}} (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H, \operatorname{rot} H)_{L_2(V)} \\ &+ \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{1n} \frac{1}{\lambda_{1n}} (H, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)}^2 - \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} (H, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_i)}^2. \end{aligned}$$

Это утверждение справедливо в силу компактности вложения пространства V в $L_2(V)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10.3. *Собственное значение $\nu_1(k)$ убывает монотонно и непрерывно на отрезке $[0, \lambda_{21}]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непрерывности и монотонности $\nu_1(k)$ аналогично доказательству, приведенному в работе [42]. Следовательно, если $\nu_1(\lambda_{21}) < \lambda_{21}$, то существует собственное значение спектральной задачи (10.2). Действительно, рассмотрим отношение Релея при $H = \psi_1(x, y)e_z$ и $k = \lambda_{21}$. В результате получим

$$\nu_1 < \frac{(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi_1 e_z, \operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi_1 e_z)_{L_2(V)}}{(\operatorname{rot} \psi_1 e_z, \operatorname{rot} \psi_1 e_z)_{L_2(V)}} < \frac{(\Delta \psi_1, \Delta \psi_1)_{L_2(V)}}{(\operatorname{rot} \psi_1 e_z, \operatorname{rot} \psi_1 e_z)_{L_2(V)}} = \lambda_{21}.$$

Отсюда следует, что справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 10.4. *Существует решение спектральной задачи (10.2).*

Построим решение в бесконечной области Q . Для этого продолжим его в область $z > z_2$ по формуле

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{1n}} (H, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_2)} \operatorname{rot}(\chi_n e_z) e^{-\gamma_{1n} z} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2n}} (H, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_2)} (-\gamma_{2n} \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n + \lambda_{2n} \psi_n e_z) e^{-\gamma_{2n} z}$$

и в область $z < z_1$ аналогичным образом:

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{1n}} (H, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_2)} \operatorname{rot}(\chi_n e_z) e^{\gamma_{1n} z} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2n}} (H, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_2)} (\gamma_{2n} \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n + \lambda_{2n} \psi_n e_z) e^{\gamma_{2n} z}.$$

Легко видеть, что $H \in L_2(Q)$ и $\operatorname{rot} H \in L_2(Q)$, $\operatorname{div} H = 0$, $H\mathbf{n}|_{\partial Q} = 0$. Проверка этого при $z < z_1$ и $z > z_2$ осуществляется непосредственным вычислением. На сечениях Ω_i для следов $H \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega_i}$, $H\mathbf{n}|_{\partial\Omega_i}$ выполняются условия $[H \times \mathbf{n}]|_{z=z_i} = 0$, $[H\mathbf{n}]|_{z=z_i} = 0$, $i = 1, 2$. Проверка первого условия осуществляется рассмотрением соответствующего ряда при $z = z_i$. Второе условие следует из равенств

$$(H, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_2)} = -\gamma_{2n} (H_z, \psi_n)_{L_2(\Omega_2)}, \\ (H, \operatorname{grad}_{\perp} \psi_n)_{L_2(\Omega_1)} = \gamma_{2n} (H_z, \psi_n)_{L_2(\Omega_1)}.$$

Несложно проверить, что таким образом построенный вектор H является решением задачи

$$(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H, \operatorname{rot} \tilde{H})_{L_2(Q)} - k^2 (H, \tilde{H})_{L_2(Q)} = 0 \quad \forall \tilde{H} \in H(\operatorname{rot}, Q)$$

и, следовательно, справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 10.5. *Существует обобщенное решение задачи (10.1).*

§ 11. О компактности вложения пространства $H(\operatorname{rot}, V) \cap H_0(\operatorname{div}, V)$ в $L_2(V)$

Для доказательства теоремы 9.1 о компактности вложения применяется метод, который может быть использован единообразно для доказательства компактности вложения как пространства $H_0(\operatorname{rot}, V) \cap H(\operatorname{div}, V)$, так и пространства $H(\operatorname{rot}, V) \cap H_0(\operatorname{div}, V)$ в $L_2(V)$ для определенного частного случая областей. Наиболее важные результаты, относящиеся к теоремам вложения в областях с негладкой границей для векторных полей, получены в работах [19]–[21]. В настоящей работе мы рассматриваем другой метод доказательства этих теорем вложения. Этот метод, в отличие от методов, используемых

в работах [19]–[21], применим единообразно к доказательству соответствующих теорем вложения.

Пусть V – цилиндр конечной высоты: $V = \{(x, y) \in \Omega, z \in [z_1, z_2]\}$. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 11.1. *Пространство $H(\text{rot}, V) \cap H_0(\text{div}, V)$ вложено в $L_2(V)$ компактно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из [19], достаточно рассмотреть случай, когда векторы H удовлетворяют условию $\text{div } H = 0$. Используем представление вектора H в виде ряда:

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} Z'_{2n} \text{grad}_{\perp} \psi_n + \sum_{n=1}^{\infty} Z_{1n} \text{rot } \chi_n e_z + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} Z_{2n} \psi_n e_z,$$

и учтем, что $Z_{2n}(z_i) = 0$, $i = 1, 2$. В остальном доказательство не отличается от доказательства теоремы 9.1. Учитывая граничные условия, имеем

$$\begin{aligned} \|H\|_{H(\text{rot}, V)}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z'_{1n}\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^2 \|Z_{1n}\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|-Z'_{2n} + \lambda_{2n} Z_{2n}\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z'_{1n}\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^2 \|Z_{1n}\|^2 \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} \|Z'_{2n}\|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n}^2 \|Z'_{2n}\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n}^3 \|Z_{2n}\|^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\|H\|_{L_2(V)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z_{1n}\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} \|Z'_{2n}\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n}^2 \|Z_{2n}\|^2,$$

приходим к доказательству утверждения теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.1. Теорема 11.1, очевидно, может быть распространена на некоторые области более широкого класса. В частности, к областям, на которые распространяется теорема, относятся области с границами, описываемыми в работе [21].

Список литературы

1. А. С. Ильинский, В. В. Кравцов, А. Г. Свешников, *Математические модели электродинамики*, Высш. школа, М., 1991.
2. Л. И. Седов, *Механика сплошной среды*, т. 1, Наука, М., 1970; англ. пер.: L. I. Sedov, *Mechanics of continuous media*, Vol. 1, 2, Ser. Theoret. Appl. Mech., 4, World Scientific, River Edge, NJ, 1997.
3. Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980; пер. с фр.: G. Duvaut, J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
4. А. С. Зильбергейт, Ю. И. Копилевич, *Спектральная теория регулярных волноводов*, Изд-во Физ.-тех. ин-та, Л., 1983.

5. Ю. Г. Смирнов, “Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для системы эллиптических уравнений”, *Дифференц. уравн.*, **27**:1 (1991), 140–147; англ. пер.: Yu. G. Smirnov, “Operator-bundle method for conjugation boundary-value problems for a system of elliptic equations”, *Differ. Equ.*, **27**:1 (1991), 112–118.
6. Ю. Г. Смирнов, “О полноте системы собственных и присоединенных волн частично заполненного волновода с нерегулярной границей”, *ДАН СССР*, **297**:4 (1987), 829–832; англ. пер.: Yu. G. Smirnov, “Completeness of the system of eigen- and associated waves of a partially filled waveguide with an irregular boundary”, *Soviet Physics Dokl.*, **32**:12 (1987), 963–964.
7. Ю. Г. Смирнов, “Применение метода операторных пучков в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода”, *ДАН СССР*, **312**:3 (1990), 597–599; англ. пер.: Yu. G. Smirnov, “The application of the operator pencil method in a problem concerning the natural waves of a partially filled wave guide”, *Soviet Physics Dokl.*, **35**:5 (1990), 430–431.
8. П. Е. Краснушкин, Е. И. Моисеев, “О возбуждении вынужденных колебаний в слоистом радиоволноводе”, *ДАН СССР*, **264**:5 (1982), 1123–1127; англ. пер.: P. E. Krasnushkin, E. I. Moiseev, “The excitation of forced oscillations in a stratified radio-waveguide”, *Soviet Physics Dokl.*, **27**:6 (1982), 458–460.
9. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
10. А. Г. Костюченко, М. Б. Оразов, “Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней самосопряженные операторные пучки”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **6** (1981), 97–146.
11. А. А. Самарский, А. Н. Тихонов, “О возбуждении радиоволноводов. 1”, *Журн. техн. физики*, **17**:11 (1947), 1284–1296.
12. А. А. Самарский, А. Н. Тихонов, “О возбуждении радиоволноводов. 2”, *Журн. техн. физики*, **17**:12 (1947), 1431–1440.
13. А. А. Самарский, А. Н. Тихонов, “О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ”, *Журн. техн. физики*, **18**:7 (1948), 959–970.
14. А. Гараджаев, М. Б. Оразов, “Об условиях затухания решений и принципе излучения для одного дифференциального уравнения с операторными коэффициентами на полуоси”, *Дифференц. уравн.*, **19**:6 (1983), 944–954; англ. пер.: A. Garadzhayev, M. B. Orazov, “Conditions for the attenuation of solutions and the radiation principle for a differential equation with operational coefficients in the plane”, *Differ. Equ.*, **19**:6 (1983), 682–691.
15. А. Г. Свешников, “Принцип излучения”, *ДАН СССР*, **73**:5 (1950), 917–920.
16. А. Г. Свешников, “Принцип предельного поглощения для волноводов”, *ДАН СССР*, **80**:3 (1951), 345–347.
17. А. Г. Свешников, “К обоснованию метода расчета электромагнитных полей в нерегулярных волноводах”, *ЖВМ и МФ*, **3**:2 (1963), 314–326.
18. А. Г. Свешников, “Обоснование методов исследования распространения электромагнитных колебаний в волноводах с анизотропным заполнением”, *ЖВМ и МФ*, **3**:5 (1963), 935–955.
19. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, “Оператор Максвелла в областях с негладкой границей”, *Сиб. матем. журн.*, **28**:1 (1987), 23–36; англ. пер.: M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak, “Maxwell operator in regions with nonsmooth boundaries”, *Siberian Math. J.*, **28**:1 (1987), 12–24.
20. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, “Самосопряженный оператор Максвелла в произвольных областях”, *Алгебра и анализ*, **1**:1 (1989), 96–110; англ. пер.: M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak, “The self-adjoint Maxwell operator in arbitrary domains”, *Leningrad Math. J.*, **1**:1 (1990), 99–115.

21. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, “Главные особенности электрической составляющей электромагнитного поля в областях с экранами”, *Алгебра и анализ*, **5**:1 (1993), 143–159; англ. пер.: M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak, “On the main singularities of the electric component of the electro-magnetic field in regions with screens”, *St. Petersburg Math. J.*, **5**:1 (1994), 125–139.
22. F. Rellich, “Das Eigenwertproblem von $\Delta u + \lambda u = 0$ in Halbröhren”, *Studies and essays presented to R. Courant on his 60th birthday*, Inters. Publ., New York, 1948, 329–344.
23. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973; англ. пер.: О. А. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Appl. Math. Sci., **49**, Springer-Verlag, New York, 1985.
24. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964; англ. пер.: О. А. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York–London, 1968.
25. А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. Г. Свешников, “О полноте корневых векторов радиоволновода”, *Докл. РАН*, **369**:4 (1999), 458–460; англ. пер.: A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, A. G. Sveshnikov, “On the completeness of root vectors of a radio waveguide”, *Dokl. Math.*, **60**:3 (1999), 453–455.
26. А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. Г. Свешников, “Об условиях разрешимости задачи возбуждения волновода”, *Докл. РАН*, **370**:4 (2000), 453–456; англ. пер.: A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, A. G. Sveshnikov, “On conditions for the solvability of the problem of the excitation of a radio waveguide”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **61**:1 (2000), 126–129.
27. V. Girault, P.-A. Raviart, *Finite element methods for Navier–Stokes equations. Theory and algorithms*, Springer Ser. Comput. Math., **5**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
28. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979; пер. с фр.: F. Riesz, B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris; Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965.
29. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики. Уравнения с частными производными*, т. 2, Гостехиздат, М.–Л., 1945; пер. с нем.: R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, **2**, Julius Springer, Berlin, 1937.
30. М. В. Келдыш, “О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений”, *ДАН СССР*, **77**:1 (1951), 11–14.
31. М. В. Келдыш, “О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов”, *УМН*, **26**:4 (1971), 15–41; англ. пер.: M. V. Keldysh, “On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators”, *Russian Math. Surveys*, **26**:4 (1971), 15–44.
32. А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, М. Д. Малых, “О системе корневых векторов цилиндрического волновода”, *ЖВМ и МФ*, **41**:1 (2001), 126–129; англ. пер.: A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, M. D. Malych, “On the root vectors of a cylindrical waveguide”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **41**:1 (2001), 121–124.
33. Г. И. Веселов, С. Б. Раевский, *Слоистые металло-диэлектрические волноводы*, Радио и связь, М., 1988.
34. Г. И. Веселов, П. Е. Краснушкин, “О дисперсионных свойствах двухслойного экранированного круглого волновода и комплексных волнах в нем”, *ДАН СССР*, **260**:3 (1981), 576–579; англ. пер.: G. I. Veselov, P. E. Krasnushkin, “Dispersion properties of a two-layer screened round waveguide and complex waves in it”, *Soviet Phys. Dokl.*, **26**:9 (1981), 835–837.
35. А. Л. Делицын, “Задача дифракции электромагнитного поля в цилиндрической области”, *Докл. РАН*, **398**:3 (2004), 310–313.
36. A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Joly, “Mathematical analysis of guided water waves”, *SIAM J. Appl. Math.*, **53**:6 (1993), 1507–1550.

37. Р. З. Даутов, Е. М. Карчевский, “Об одной спектральной задаче теории диэлектрических волноводов”, *ЖВМ и МФ*, **39**:8 (1999), 1348–1355; англ. пер.: R. Z. Dautov, E. M. Karchevskii, “A spectral problem in the theory of dielectric waveguides”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **39**:8 (1999), 1293–1299.
38. А. Л. Делицын, “О задаче рассеяния на неоднородности в волноводе”, *ЖВМ и МФ*, **40**:4 (2000), 606–610; англ. пер.: A. L. Delitsyn, “On the problem of scattering in a nonuniform waveguide”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **40**:4 (2000), 577–581.
39. D. S. Jones, “The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are on semi-infinite domains”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **49** (1953), 668–684.
40. В. А. Бабешко, И. И. Ворович, И. Г. Образцов, “Явление высокочастотного резонанса в полугораниченных телах с неоднородностями”, *Механика твердого тела*, **3** (1990), 74–84.
41. W. Bulla, F. Gesztesy, W. Renger, B. Simon, “Weakly coupled bound states in quantum waveguides”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**:5 (1997), 1487–1495.
42. А. Л. Делицын, “О дискретном спектре оператора Лапласа в локально деформированном цилиндре”, *Дифференц. уравн.*, **40**:2 (2004), 198–207; англ. пер.: A. L. Delitsyn, “The discrete spectrum of the Laplace operator in a cylinder with locally perturbed boundary”, *Differ. Equ.*, **40**:2 (2004), 207–217.

А. Л. Делицын (A. L. DELITSYN)
 МГУ им. М. В. Ломоносова, физический ф-т
E-mail: delitsyn@mail.ru

Поступило в редакцию
 01.12.2004