Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Граев, Число инвариантных метрик Эйнштейна в однородном пространстве, многогранник Ньютона и сжатия алгебры Ли, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 2, 29–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/im569>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:18:56

УДК 515.16

М. М. Граев

Число инвариантных метрик Эйнштейна в однородном пространстве, многогранник Ньютона и сжатия алгебры Ли

Каждому однородному пространству $M = G/H$ группы Ли G с компактной группой изотропии H и с представлением изотропии, состоящим из d неприводимых компонент кратности 1, поставлен в соответствие компактный выпуклый многогранник $P = P_M$ в $\mathbb{R}^{d-1}$, а именно многогранник Ньютона рациональной функции $s(t)$, являющейся скалярной кривизной инвариантной метрики t в M . Для компактной полупростой группы G отношение объема P к объему стандартного $(d-1)$ -симплекса является целым положительным числом $\nu(M) > 0$. Отмечено, что во многих случаях $\nu(M)$ совпадает с числом $\mathcal{E}(M)$ изолированных инвариантных голоморфных метрик Эйнштейна (рассматриваемых с точностью до гомететии) в $M^{\mathbb{C}} = G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}$. Из результатов, полученных А. Г. Куширенко и Д. Н. Бернштейном, выведено, что во всех случаях $\delta_M = \nu(M) - \mathcal{E}(M) \geq 0$. Каждой собственной грани γ многогранника P поставлено в соответствие некомпактное однородное пространство $M_\gamma = G_\gamma/H_\gamma$, имеющее многогранник Ньютона γ и являющееся сжатием пространства M . Появление “дефекта” $\delta_M > 0$ объясняется существованием риччи-плоской голоморфной инвариантной метрики в комплексификации хотя бы одного из этих пространств M_γ .

Библиография: 12 наименований.

Введение

Посвящаю статью моему учителю, Д. В. Алексеевскому, в год его 65-летия.

0.1. Однородное пространство G/H с однократным спектром представления изотропии. Пусть (M, g) , $M = G/H$, – связное риманово однородное пространство группы Ли G с компактной группой изотропии H .касательное пространство к M в точке $x_0 = eH$ расщепляется на попарно ортогональные неприводимые H -инвариантные подпространства:

$$T_{x_0}M = \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathfrak{x}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{x}_d.$$

Если это расщепление единственно с точностью до порядка слагаемых, то M называется *однородным пространством с однократным спектром представления изотропии*. Далее через G/H обозначается только такое пространство M , например компактное пространство M положительной эйлеровой характеристики. Пусть $\dim(M) \geq 3$, $d \geq 2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-01-00363).

0.2. Содержание работы. Сформулируем утверждения для случая компактной полупростой группы G , хотя большинство утверждений в статье доказано при более слабом условии унимодулярности G .

В § 1 однородному пространству $M = G/H$ однозначно сопоставлен компактный выпуклый $(d - 1)$ -мерный многогранник, называемый *многогранником Ньютона* (п. 1.5 и п. 1.7.2). Отношение его объема к объему стандартного $(d - 1)$ -мерного симплекса называется *целым числом Ньютона* и обозначается через $\nu(M)$.

Приведем примеры однородных пространств M с треугольником Ньютона $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^3: x_1 + x_2 + x_3 = -1, x_1, x_2, x_3 \geq -1\}$ и числом Ньютона $\nu(M) = 4$.

Рис. 1

ПРИМЕР 0.1. Многогранником Ньютона всех перечисленных ниже однородных пространств M является треугольник Δ . Его можно разбить на четыре элементарных треугольника с вершинами в целых точках, как показано на рис. 1, поэтому $\nu(M) = 4$:

- 1) пространство $\mathrm{SO}_3 / (\mathbb{Z}_2)^2 = \mathrm{SU}_2 / \tilde{H}$, где $\tilde{H} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ – группа кватернионных единиц;
- 2) пространства $\mathrm{SU}_n / \mathrm{S}(\mathrm{U}_{n_1} \times \mathrm{U}_{n_2} \times \mathrm{U}_{n_3})$, $n_i \geq 1$, $\mathrm{Sp}_n / \mathrm{Sp}_{n_1} \times \mathrm{Sp}_{n_2} \times \mathrm{Sp}_{n_3}$, $n_i \geq 1$, $\mathrm{SO}_n / \mathrm{SO}_{n_1} \times \mathrm{SO}_{n_2} \times \mathrm{SO}_{n_3}$, $(n_1, n_2) \neq (1, 1), (2, 2)$, $n_3 \geq 3$, где $n = n_1 + n_2 + n_3$;
- 3) флаговые пространства $\mathrm{SO}_{2l} / \mathrm{U}_{l-1} \times \mathrm{U}_1$ и $E_6 / T^2 \cdot \mathrm{Spin}_8$;
- 4) односвязные пространства $E_6 / T^1 A_1 A_1 A_3$ и $E_7 / T^1 A_1 A_5$, не допускающие инвариантной кэлеровой структуры.

Через $\mathcal{E}(M)$ обозначено число изолированных голоморфных инвариантных метрик Эйнштейна в соответствующем комплексном однородном пространстве $M^{\mathbb{C}} = G^{\mathbb{C}} / H^{\mathbb{C}}$ (рассматриваемых с точностью до гомотетии), называемых также *комплексными метриками Эйнштейна* в M . Из теорем А. Г. Кушниренко–Д. Н. Бернштейна о многогранниках Ньютона следует оценка $\mathcal{E}(M) \leq \nu(M)$ и эффективный критерий равенства $\mathcal{E}(M) = \nu(M)$; см. предложения 1.2 и 1.4.

Для всех пространств из пп. 2)–4) примера 0.1 выполняется $\mathcal{E}(M) = \nu(M) = 4$ (см. п. 7.1). Для большинства факторов M простых компактных групп Ли G по их максимальным торам справедливо $\mathcal{E}(M) < \nu(M)$ (предложение 1.3). В примерах из § 1, 3, 7 для некоторых из простых многогранников P (пп. 0.3.5, 0.3.6) разобраны бесконечные серии однородных пространств с общим многогранником Ньютона P , где для большинства объектов типично равенство $\mathcal{E}(M) = \nu(M)$ и появляются исключения с $\mathcal{E}(M) < \nu(M)$.

Основные результаты § 2 и § 3 состоят в следующем.

Предположим для простоты, что $\chi(M) > 0$, и пусть $P = P_M$ – многогранник Ньютона, ассоциированный с M . В § 2 каждой точке двойственного конуса $\mathcal{C}(P)$ многогранника Ньютона P ставится в соответствие фильтрация алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Соответствующая градуированная алгебра Ли может рассматриваться как сжатие Иненю–Вигнера алгебры $\mathfrak{g}$. Пользуясь этим, можно сопоставить каждой p -границе γ многогранника P некомпактное однородное пространство $M_\gamma = G_\gamma/H$ (сжатие пространства $M = G/H$), где алгебра Ли $\mathfrak{g}_\gamma$ является градуированной алгеброй Ли, соответствующей общей точке двойственной к γ грани γ^* двойственного к P конуса $\mathcal{C}(P)$ (см. § 3).

Вообще (при $\chi(M) \geq 0$), всякая точка дуального конуса $\mathcal{C}(P)$ определяет фильтрацию некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}_P \supset \mathfrak{g}$ (теорема 2.1). Грани γ сопоставляется сжатое однородное пространство $M_\gamma = G_\gamma/H_P$ с ассоциированным многогранником Ньютона γ ($\gamma = P_{M_\gamma}$).

Существование риччи-плоской инвариантной комплексной метрики в сжатом однородном пространстве $M_\gamma = G_\gamma/H_P$ для некоторой грани γ при условии $\emptyset \subsetneq \gamma \subsetneq P$ приводит к появлению дефекта $\delta_M = \nu(M) - \mathcal{E}(M) > 0$, и обратно (теорема 3.1).

ПРИМЕР 0.2. В случае пространства $M = \mathrm{SU}_2/\tilde{H}$ из п. 1) примера 0.1 мы имеем $\mathfrak{g}_\Delta = \mathfrak{su}_2$. Пусть $G_\Delta := \mathrm{SU}_2$, $H_\Delta := \tilde{H}$. Сжатия группы G_Δ являются трехмерными группами Ли. Чтобы описать их алгебры Ли, обозначим стороны треугольника Δ через α, β, γ и кватернионные единицы – через $J_\alpha = i$, $J_\beta = j$, $J_\gamma = k$. Алгебры Ли групп G_Δ , G_α , $G_{\alpha\cap\beta}$ и $G_\emptyset$ имеют следующий вид:

- 1) $\mathfrak{g}_\Delta$ – полупростая алгебра Ли, $[J_\alpha, J_\beta] = 2J_\gamma$, $[J_\gamma, J_\alpha] = 2J_\beta$, $[J_\beta, J_\gamma] = 2J_\alpha$;
- 2) $\mathfrak{g}_\alpha$ – разрешимая алгебра Ли, $[J_\alpha, J_\beta] = 2J_\gamma$, $[J_\gamma, J_\alpha] = 2J_\beta$, $[J_\beta, J_\gamma] = 0$;
- 3) $\mathfrak{g}_{\alpha\cap\beta}$ – нильпотентная алгебра Ли, $[J_\alpha, J_\beta] = 2J_\gamma$, $[J_\gamma, J_\alpha] = [J_\beta, J_\gamma] = 0$;
- 4) $\mathfrak{g}_\emptyset$ – коммутативная алгебра Ли, $[J_\alpha, J_\beta] = [J_\gamma, J_\alpha] = [J_\beta, J_\gamma] = 0$.

Выражения для $\mathfrak{g}_\beta$, $\mathfrak{g}_\gamma$ и других получаются из предыдущих циклически-ми перестановками. Введем группы $G_\alpha \simeq G_\beta \simeq G_\gamma \simeq \mathbb{R}^2 \rtimes \tilde{\mathrm{O}}_2$, где $\tilde{\mathrm{O}}_2 = T^1 \tilde{H} \subset \mathrm{SU}_2$, $T^1 = \{e^{\theta J_\alpha}\}$, $\{e^{\theta J_\beta}\}$, $\{e^{\theta J_\gamma}\}$ соответственно, а $\tilde{\mathrm{O}}_2/(\pm 1) = \mathrm{O}_2 = \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$. Сжатое однородное пространство, сопоставляемое любой стороне треугольника Δ , имеет вид $\mathbb{R}^2 \rtimes \tilde{\mathrm{O}}_2/\tilde{H} \simeq \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{SO}_2/\mathbb{Z}_2$. Оно допускает $(\mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{O}_2)$ -инвариантную евклидову метрику. Каждая сторона треугольника Δ дает положительный вклад в дефект $4 - \mathcal{E}(M)$, и, таким образом, $\mathcal{E}(M) = 1$.

Сжатия применяются для доказательства следующей теоремы: *пусть задано G -эквивариантное отображение $\pi: M = G/H \rightarrow G/K$ со слоем $F = K/H$, $H \subset K$, тогда при некоторых естественных условиях наличие дефекта $\nu(F) - \mathcal{E}(F) > 0$ влечет $\nu(M) > \mathcal{E}(M)$. При $\nu(\pi M) - \mathcal{E}(\pi M) > 0$ имеется похожий результат (см. теорему 3.2).*

Основные утверждения из § 2 и § 3 подробно доказаны в § 5 и § 6.

0.3. Некоторые многогранники Ньютона. Ниже дается описание многогранников Ньютона P для некоторых классов компактных однородных пространств $M = G/H$.

0.3.1. Симметрическое пространство M простой группы G . Многогранник P сводится к одной точке, $d = 1$, и мы положим по определению $\nu(M) := 1$ (в других параграфах случай $d = 1$ не будет рассматриваться).

0.3.2. *Компактное односвязное пространство G/H положительной эйлеровой характеристики.* Пусть $M = G/H$ – фактор компактной полупростой группы Ли G по подгруппе максимального ранга H . Предположим, что многообразие M односвязно. Пусть Δ_G и $\Delta_H \subset \Delta_G$ – системы корней групп G и H относительно их общего максимального тора, $\Delta_M = \Delta_G \setminus \Delta_H$ – множество M -корней, т.е. корней из Δ_G , не являющихся корнями H . Обозначим через $\Omega = i(\Delta_M)$ образ Δ_M в (абелевой) факторгруппе $Q_M = \mathbb{Z}\Delta_G/\mathbb{Z}\Delta_H$ при естественной проекции i . Тогда

$$d = \text{Card}(\Omega/(\pm 1)),$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(P) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f(\omega) = f(-\omega) \geq 0, f(\alpha) + f(\beta) \geq f(\gamma), \alpha + \beta + \gamma = 0\},$$

т.е. $\mathcal{C}$ – конус всех четных неотрицательных функций на $\Omega = \{\omega_1, -\omega_1, \dots, \omega_d, -\omega_d\}$, удовлетворяющих неравенству треугольника. Многогранник Ньютона имеет вид

$$P = P(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^d: \langle x, 1 \rangle = -1, \langle x, f \rangle \leq 0 \quad \forall f \in \mathcal{C}\}, \quad (0.1)$$

где $\langle x, 1 \rangle := x_1 + \dots + x_d$ и $\langle x, f \rangle := x_1 f(\omega_1) + \dots + x_d f(\omega_d)$.

0.3.3. *Флаговое пространство.* Флаговые пространства образуют важный класс пространств с однократным спектром представления изотропии.

Пусть $M = G/H$ – флаговое пространство, т.е. факторпространство компактной полупростой группы Ли G по централизатору H любого тора в G . Это эквивалентно тому, что группа $Q_{G/H} = \mathbb{Z}\Omega$ (см. п. 0.3.2) свободна от кручения.

Следуя [1], будем называть Ω *системой T -корней* флагового пространства M . Это система характеров представления максимального центрального тора T^k группы H в векторном пространстве $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. (Например, треугольник Δ , рассмотренный в п. 0.2, равен $P(\Omega)$, где Ω – классическая система корней ранга 2 типа A_2 .)

0.3.4. *Классификация систем T -корней флаговых пространств* (уточнение классификации из [1]). Приведем классификацию с точностью до автоморфизмов группы $\mathbb{Z}^k = \mathbb{Z}\Omega$ систем T -корней Ω всех флаговых пространств классических простых компактных групп Ли G :

- 1) классические системы корней типов A_k , C_k и неприведенные системы корней типа BC_k ;
- 2) неполные системы корней типов

$$D_k, \dots, C_{k,j-1}, C_{k,j}, \dots, C_k, \quad B_k, \dots, BC_{k,j-1}, BC_{k,j}, \dots, BC_k$$

(среди которых системы корней $B_k = BC_{k,0}$ и $D_k = C_{k,0}$), где $X_{k,j-1}$ получается из $X_{k,j}$ исключением пары противоположных длинных корней, $1 \leq j \leq k$. Каждой из этих систем, кроме D_k , $k > 3$, отвечают бесконечные серии пространств M с общим многогранником Ньютона $P = P(\Omega)$, приведенные в табл. 1 (для доказательства этого см., например, [1]). Между системами T -корней существует несколько изоморфизмов, в том числе $A_1 \simeq B_1 \simeq C_1$, $A_2 \simeq C_{2,1}$.

Таблица 1

Системы T -корней Ω флаговых пространств
классических простых компактных групп Ли G

Тип G	Тип Ω	d	Пространство	Неравенства
A_l	A_k	$k(k+1)/2$	$SU_{l+1} / U^{\lambda+1} \cap SU_{l+1}$	$\ell = k+1 \geq 2$ $n = l+1$
C_l ($l \geq 2$)	C_k	k^2	$Sp_l / U^{\lambda+1}$	$\ell = k \geq 1$ $n = l$
	BC_k	$k^2 + k$	$Sp_l / U^{\lambda+1} \times Sp_m$	$\ell = k \geq 1$ $n = l - m \leq l - 1$
D_l ($l \geq 4$)	C_{k,ℓ_2}	$k^2 - k + \ell_2$	$SO_{2l} / U^{\lambda+1}$	$\ell = k \geq 1$ $n = l$
	BC_{k,ℓ_2}	$k^2 + \ell_2$	$SO_{2l} / U^{\lambda+1} \times SO_{2m}$	$\ell = k \geq 1$ $n = l - m \leq l - 2$
B_l ($l \geq 3$)	BC_{k,ℓ_2}	$k^2 + \ell_2$	$SO_{2l+1} / U^{\lambda+1} \times SO_{2m+1}$	$\ell = k \geq 1$ $n = l - m \leq l$

Примечание. Здесь использованы следующие обозначения: k – ранг системы T -корней; d – число неприводимых компонент представления изотропии; $\lambda_1 + 1 \geq \dots \geq \lambda_\ell + 1$ – любое разбиение длиной ℓ и весом n , $U^{\lambda+1} := U_{\lambda_1+1} \times \dots \times U_{\lambda_\ell+1}$; $\ell_2 = |i: \lambda_i > 0|$ – высота 2-го столбца диаграммы Юнга, соответствующей разбиению $\lambda + 1$.

0.3.5. *Простой многогранник.* Напомним, что компактный выпуклый многогранник P в $\mathbb{R}^k$ называется *простым многогранником*, если нормальные конусы к P во всех точках на границе P являются симплицальными конусами. Это эквивалентно условию, что в каждой вершине многогранника P сходятся в точности $\dim(P)$ ребер.

Очевидно, $P(\Omega)$ является простым многогранником, если и только если все собственные грани конуса $\mathcal{C}$ являются симплицальными конусами.

0.3.6. *Классификация систем T -корней Ω с простым многогранником Ньютона $P = P(\Omega)$.* Ниже приводится классификация систем T -корней Ω всех флаговых G -пространств, где G – любая простая компактная группа Ли, для которых $P(\Omega)$ является простым многогранником.

ТЕОРЕМА 0.1. *Многогранник $P = P(\Omega)$ является простым только для следующих систем T -корней Ω (для каждой из этих систем Ω указаны соответствующий многогранник $P = P(\Omega)$ и его число Ньютона $\nu = \nu(P(\Omega))$):*

- 1) A_1 ; тогда P – точка и $\nu := 1$;
- 2) BC_1 ; тогда P – отрезок и $\nu = 2$;
- 3) A_2 ; тогда P – треугольник и $\nu = 4$;
- 4) $B_2 = C_2$; тогда P – трехмерная призма с треугольным основанием и $\nu = 12$;
- 5) A_3 ; тогда $P = \Delta_3 \times \Delta_2$ – прямое произведение тетраэдра на треугольник и $\nu = 80$;
- 6) система точек на прямой $\Omega = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\} \subset \mathbb{Z}^1$; тогда P – трапеция и $\nu = 6$.

Если рассматривать флаговые пространства произвольных полупростых компактных групп Ли, то к этому списку добавляются только системы T -корней типов $n_0 A_1 \oplus n_1 BC_1 \oplus n_2 A_2$, $\nu = 2^{n_1+2n_2}$.

Случаи 3)–5) этой классификации обсуждаются в пп. 1.5, 3.2.3, 3.3.4, 3.3.5 и 7.1–7.3.

Приведем многогранники Ньютона других (не флаговых) однородных пространств.

0.3.7. *Седьмой простой многогранник $P(\Omega)$.* “Пространства Гессе” $E_8/(A_2)^4$ и SU_3/J , где J – конечная группа Жордана (расширение $(\mathbb{Z}_3)^2$ посредством $\mathbb{Z}_3$), связаны с конфигурацией Гессе в $\mathbb{C}P^2$, образованной точками третьего порядка на кубике в $\mathbb{C}P^2$ и двенадцатью прямыми, и с группой Гессе $SL_2(\mathbb{F}_3) \ltimes (\mathbb{F}_3)^2$. Их многогранники Ньютона P совпадают. Для $M = E_8/(A_2)^4$ выполняются условия из п. 0.3.2, откуда следует, что $P = P(\Omega)$, $\Omega = i(\Delta_M) = (\mathbb{F}_3)^2 \setminus 0$, где $\mathbb{F}_3$ – поле из трех элементов. В этом случае $P = P(\Omega)$ – трехмерный простой многогранник (усеченный тетраэдр, архимедово тело, $\nu = 23$), $\mathcal{E}(E_8/(A_2)^4) = 23$ (см. п. 7.1), $\mathcal{E}(SU_3/J) = 19$ (см. п. 3.3).

0.3.8. *Шестиугольник.* Шестиугольник $P = P(\Omega)$, изображенный на рис. 2, определяется формулой (0.1), где $\Omega = \mathbb{Z}_7 \setminus 0$, $d = 3$. Из предложений 1.2 и 1.4 без вычислений следует (см. пример 7.2), что $\mathcal{E}(M) = \nu(M) = 10$ для каждого однородного пространства $M = G/H$ полупростой группы G с многоугольником Ньютона P . Укажем такие пространства M :

$$\begin{aligned} SU_{7n} / S((U_n)^7) \cdot \mathcal{D}_7, \quad n \geq 1, & \quad Sp_{7n} / (Sp_n)^7 \cdot \mathcal{D}_7, \quad n \geq 1, \\ SO_{7n} / (SO_n)^7 \cdot \mathcal{D}_7, \quad n \geq 3, & \quad SO_7 / (\mathbb{Z}_2)^6 \cdot \mathcal{D}_7, \end{aligned}$$

где $\mathcal{D}_7$ – группа диэдра, а $(\mathbb{Z}_2)^6 = SO_7 \cap \{\text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)\}$.

Рис. 2

Как показывает вычисление, все десять попарно негомотетичных метрик Эйнштейна в пространстве $M = Sp_7 / (Sp_1)^7 \cdot \mathcal{D}_7$ вещественны и семь из них положительно определены. Аналогично строятся пространства M с многогранником Ньютона $P = P(\Omega)$ для $\Omega = \mathbb{Z}_p \setminus 0$, где p – натуральное число.

§ 1. Оценка числа инвариантных комплексных метрик Эйнштейна в G/H

Пусть (M, g) , $M = G/H$, – риманово однородное пространство, удовлетворяющее условиям, приведенным в п. 0.1. Обозначим через $1_i: TM \rightarrow TM$ G -инвариантный линейный оператор, ортогонально проектирующий $T_{x_0}M =$

$\mathfrak{x}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{x}_d$ на i -е неприводимое H -инвариантное подпространство $\mathfrak{x}_i$. Условимся тем же символом $\mathbf{1}_i$, $i = 1, \dots, d$, обозначать i -й базисный орт в $\mathbb{R}^d$ и, тем самым, отождествим $\mathbb{R}^d$ с пространством всех G -инвариантных симметрических тензорных полей типа $(1, 1)$ в M .

1.1. Инвариантные римановы метрики в G/H . Конус всех G -инвариантных римановых метрик в $M = G/H$ отождествляется с конусом $(\mathbb{R}_{>0})^d$. Для этого каждая такая метрика записывается в виде

$$g_t^M = g \circ (t_1 \mathbf{1}_1 \oplus \cdots \oplus t_d \mathbf{1}_d), \quad t = (t_1, \dots, t_d) \in (\mathbb{R}_{>0})^d.$$

Оператор Риччи метрики g_t^M инвариантен, т. е. имеет вид $\lambda_1 \mathbf{1}_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_d \mathbf{1}_d$. Следовательно, уравнение Эйнштейна для g_t^M принимает вид $\lambda_1 = \cdots = \lambda_d$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(t)$ и след $s = s(t)$ оператора Риччи метрики g_t^M являются не зависящими от точки пространства M однородными степени однородности -1 многочленами от $t_1, t_1^{-1}, \dots, \dots, t_d, t_d^{-1}$.*

Это предложение непосредственно следует из [2, пп. 7.38, 7.39].

Ниже приводятся явные формулы для $\lambda_i(t)$ и $s(t)$ в случае любой компактной полупростой группы Ли G .

ПРИМЕР 1.1. Пусть G – компактная полупростая группа Ли, B – форма Киллинга в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ – B -ортогональное разложение, и g – стандартная риманова метрика в G/H , соответствующая скалярному произведению $-B|_{\mathfrak{m}}$. Обозначим через $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}$ неприводимое H -инвариантное подпространство такое, что $\mathfrak{m}_i \cdot x_0 = \mathfrak{x}_i$, $i = 1, \dots, d$. Пусть $\{X_{i1}, \dots, X_{iN_i}\}$ – базис в $\mathfrak{m}_i$ такой, что $(-B)(X_{ip}, X_{iq}) = \delta_{pq}$. Положим

$$b_{i,j,k} = \sum_{p=1}^{N_i} \sum_{q=1}^{N_j} \sum_{r=1}^{N_k} (B([X_{ip}, X_{jq}], X_{kr}))^2, \quad a_{i,j,k} = \frac{b_{i,j,k}}{N_i},$$

где $N_i = \dim(\mathfrak{m}_i)$. Тогда

$$2s(t) = \sum_{i=1}^d \frac{N_i}{t_i} - \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d b_{i,j,k} \frac{t_i^2 + t_j^2 + t_k^2}{t_i t_j t_k},$$

$$2\lambda_i(t) = \frac{1}{t_i} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_{i,j,k} \frac{t_i^2 - t_j^2 - t_k^2}{t_i t_j t_k}.$$

В частности, для тензора Риччи стандартной метрики g с $t = (1, \dots, 1)$ мы получаем следующую формулу Вана–Циллера. Обозначим через $C \in \mathfrak{U}(\mathfrak{h})$ квадратичный центральный элемент Казимира, ассоциированный с ограничением формы B на $\mathfrak{h}$. Тогда

$$2\lambda_i(1, \dots, 1) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_{i,j,k} = \frac{1}{2} + c_i,$$

где $\frac{1}{2} \geq c_i \geq 0$ – единственное собственное значение оператора $C|_{\mathfrak{x}_i}$ относительно представления изотропии алгебры $\mathfrak{h}$.

Приведем некоторые важные значения c_i :

- 1) $c_i = \frac{1}{2}$, $i = 1, \dots, d$, – для симметрического пространства M группы G ;
- 2) $c_1 = \frac{1}{3}$ – для пространств Бореля–де Зибенталя $E_6/(A_2)^3$ и $E_7/A_2 \cdot A_5$, при этом $d = 1$.

1.2. Инвариантные комплексные метрики в G/H . Под комплексной метрикой в вещественном многообразии M мы будем подразумевать поле невырожденных билинейных симметрических форм в $\mathbb{C} \otimes TM$. Пространство всех G -инвариантных комплексных метрик в $M = G/H$ можно отождествить с $(\mathbb{C} \setminus 0)^d$. Очевидно, предложение 1.1 имеет смысл для всех инвариантных комплексных метрик g_t^M , соответствующих точкам $t = (t_1, \dots, t_d) \in (\mathbb{C} \setminus 0)^d$. Отсюда вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Уравнение Эйнштейна для комплексной G -инвариантной метрики $g_t^M = g \circ (t_1 \mathbf{1}_1 \oplus \dots \oplus t_d \mathbf{1}_d)$, $t \in (\mathbb{C} \setminus 0)^d$, является системой

$$\lambda_1(t) - \lambda_2(t) = \dots = \lambda_{d-1}(t) - \lambda_d(t) = 0 \quad (1.1)$$

$d-1$ однородных рациональных алгебраических уравнений (Лорана) для d переменных t_i . Здесь $g_t^M \circ (\lambda_1 \mathbf{1}_1 \oplus \dots \oplus \lambda_d \mathbf{1}_d) = \text{ricci}_t$ – тензор Риччи метрики g_t^M .

1.3. Дополнение. Отметим, что комплексные метрики Эйнштейна g_t^M в M однозначно соответствуют голоморфным инвариантным метрикам Эйнштейна в $M^{\mathbb{C}} = G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}$ (если группа G обладает комплексификацией $G^{\mathbb{C}}$ и, в частности, если G компактна).

В общем случае группу $G^{\mathbb{C}}$ достаточно ввести следующим образом (исходя из пространства M_0). Через $M_0, M_1, M_2, \dots$ обозначим любые связные однородные пространства $M_i = G_i/H_i$ групп Ли преобразований G_i с компактными подгруппами изотропии H_i . При этом $H_i \cong \text{Ad}_{\mathfrak{g}_i}(H_i)$. Пространства M_i и M_k называются эквивалентными, если $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i, \text{Ad}_{\mathfrak{g}_i}(H_i)) = (\mathfrak{g}_k, \mathfrak{h}_k, \text{Ad}_{\mathfrak{g}_k}(H_k))$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для каждого пространства M_0 существует естественная диаграмма

$$M_0 \leftarrow M_1 \xrightarrow{\pi} M_2 \subset M_2^{\mathbb{C}} = G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}, \quad i(M_2, g) = i(M_1, \pi^* g),$$

такая, что пространства M_0, M_1, M_2 эквивалентны, M_1 односвязно, стрелки являются накрытиями, множества всех инвариантных римановых (комплексных) метрик в M_0, M_1, M_2 отождествляются посредством этих накрытий, G_2 – вещественная форма комплексной группы Ли $G^{\mathbb{C}}$, H_2 – максимальная компактная подгруппа комплексной редуктивной группы Ли $H^{\mathbb{C}} \subset G^{\mathbb{C}}$, $H_2 = G_2 \cap H^{\mathbb{C}}$, и $M_2^{\mathbb{C}} = G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}$ – связное односвязное комплексное однородное пространство. Здесь g – любая G_2 -инвариантная риманова метрика в M_2 , $i(M_k, g_k)$ – алгебра Ли группы $I(M_k, g_k)$ всех изометрий в (M_k, g_k) .

Пространство M_2 обладает свойством универсальности: для любого комплексифицируемого однородного пространства M_k , эквивалентного M_0 , существует G_2 -эквивариантное накрытие $M_2 \rightarrow M_k$ (пространство M_k называется комплексифицируемым, если G_k является вещественной формой группы $G_k^{\mathbb{C}}$; и тогда $H_k = G_k \cap H^{\mathbb{C}}$).

1.4. Число $\mathcal{E}(M)$. Под решением системы (1.1) мы будем понимать всякий гомотетический класс $[g_t^M] = \{ag_t^M : a \in \mathbb{C} \setminus 0\}$ комплексных инвариантных метрик Эйнштейна. Очевидно, гомотетические классы всех комплексных инвариантных метрик образуют алгебраический тор $(\mathbb{C} \setminus 0)^{d-1}$. Поэтому каждое решение – это точка в $(\mathbb{C} \setminus 0)^{d-1}$.

Решение $[g_t^M]$ называется *изолированным*, если его можно отделить от других решений в $(\mathbb{C} \setminus 0)^{d-1}$ в классической топологии.

Следствие 1.1 показывает, что решения образуют алгебраическое множество в $(\mathbb{C} \setminus 0)^{d-1}$, а именно множество общих нулей системы $d-1$ многочленов Лорана $L_i(t) = \lambda_i(t) - \lambda_{i+1}(t)$, $i = 1, \dots, d-1$. Под кратностью изолированного решения системы уравнений $L_i(t) = 0$ достаточно понимать размерность над полем $\mathbb{C}$ соответствующей локальной алгебры $\mathcal{O}/I$, где I – идеал, порожденный всеми L_i (см. это и другие эквивалентные определения кратности, например, в книге [3, гл. 5, §2]). Изолированные решения подсчитываются с их кратностями (что позволяет говорить о слившихся решениях; см., например, [4, §5, п. 2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Обозначим через $\mathcal{E}(M)$ число всех изолированных решений $[g_t^M]$ системы (1.1) с учетом кратностей.

Мы переходим к оценке числа $\mathcal{E}(M)$ сверху целым числом Ньютона ν – приведенным объемом многогранника Ньютона X системы уравнений (1.1).

1.5. Многогранники Ньютона и число Ньютона. Носителем любого многочлена $f(t) \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, где $(t, t^{-1}) = (t_1, t_1^{-1}, \dots, t_d, t_d^{-1})$, называется множество $\text{supp}(f) \subset \mathbb{R}^d$ (векторных) показателей $\mathbf{a}$ всех его одночленов $\alpha t^{\mathbf{a}} = \alpha t_1^{a_1} \dots t_d^{a_d}$.

Многогранником Ньютона многочлена $f(t)$ называется выпуклая оболочка $\text{Nw}(f)$ носителя $\text{supp}(f)$.

Приведем три примера многогранников Ньютона $\text{Nw}(s)$ для трех многочленов Лорана $s(t)$ с неопределенными коэффициентами.

Далее через Δ , IB , Π обозначаются простые многогранники из п. 0.3.6, случаи 3)–5) соответственно (Δ – треугольник из п. 0.2), а через Δ_2 , с указанием размерности, обозначаются любые треугольники.

ПРИМЕР 1.2. Треугольник Δ в $\mathbb{R}^3$ имеет вершины $\mathbf{1}_i - \mathbf{1}_j - \mathbf{1}_k$, где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Он совпадает с многогранником Ньютона $\text{Nw}(s)$ следующего многочлена Лорана $s(t)$:

$$2s(t) = \frac{N_1}{t_1} + \frac{N_2}{t_2} + \frac{N_3}{t_3} - b \frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{t_1 t_2 t_3},$$

где $\frac{1}{2}N_i > b > 0$. Носитель $\text{supp}(s)$ состоит из вершин треугольника Δ и середин его сторон.

ПРИМЕР 1.3. Трехмерная призма $\text{IB} = \text{I} \times \Delta_2$ в $\mathbb{R}^4$ имеет треугольное основание Δ_2 . Вершины $v_i \in \Delta_2$ суть $v_1 = \mathbf{1}_2 - \mathbf{1}_1 - \mathbf{1}_4$, $v_2 = \mathbf{1}_1 - \mathbf{1}_2 - \mathbf{1}_4$, $v_3 = \mathbf{1}_3 - \mathbf{1}_1 - \mathbf{1}_2$. Остальные вершины призмы получаются из них сдвигом $v_i \mapsto u_i = v_i + \mathbf{1}_4 - \mathbf{1}_3$ на вектор, ортогональный основанию. Призма $\text{IB} = \text{I} \times \Delta_2$ совпадает с многогранником Ньютона $\text{Nw}(s)$ следующего многочлена Лорана $s(t)$:

$$2s(t) = \frac{N_1}{t_1} + \frac{N_2}{t_2} + \frac{N_3}{t_3} + \frac{N_4}{t_4} - \sum_{k=3,4} b_k \frac{t_1^2 + t_2^2 + t_k^2}{t_1 t_2 t_k},$$

где $\frac{1}{2}N_i > b_3 + b_4$, $b_i > 0$, $i = 1, 2$; $\frac{1}{2}N_i > b_i > 0$, $i = 3, 4$. Носитель $\text{supp}(s)$ состоит из вершин призмы Π , точек $-\mathbf{1}_i$, $i = 1, 2$, в центрах двух прямоугольных граней (v_i, u_i, u_3, v_3) и точек $-\mathbf{1}_i$, $i = 3, 4$, в серединах двух её ребер (u_1, u_2) и (v_1, v_2) .

ПРИМЕР 1.4. Пятимерный многогранник $\Pi = \Delta_3 \times \Delta_2$ в $\mathbb{R}^6$ можно описать следующим образом. Занумеруем вершины тетраэдра Δ_3 числами $i = 1, 2, 3, 4$, а вершины треугольника Δ_2 – числами $q = 1, 2, 3$. Индексируем базис $\{\mathbf{1}_e\}$ в $\mathbb{R}^6$ любыми ребрами $e = \{i, j\}$ тетраэдра Δ_3 . Каждой вершине $i \in \Delta_3$ сопоставим формальную сумму $a_i \in \mathbb{R}^6$ сторон противоположного треугольника, и каждой вершине $q \in \Delta_2$ – формальную сумму $b_q \in \mathbb{R}^6$ сторон четырехугольника $q' = (k, i, j, l)$, а именно

$$a_i = \mathbf{1}_{kj} + \mathbf{1}_{jl} + \mathbf{1}_{lk}, \quad b_q = \mathbf{1}_{ki} + \mathbf{1}_{ij} + \mathbf{1}_{jl} + \mathbf{1}_{lk}.$$

В этих обозначениях все 12 вершин многогранника $\Pi = \Delta_3 \times \Delta_2$ имеют вид

$$a_i - b_q = \mathbf{1}_{kj} - \mathbf{1}_{ki} - \mathbf{1}_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad q = 1, 2, 3.$$

Многогранник $\Pi = \Delta_3 \times \Delta_2$ совпадает с многогранником Ньютона $\text{Nw}(s)$ следующего многочлена Лорана $s(t)$:

$$2s(t) = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{N_{ij}}{t_{ij}} - \sum_{l=1}^4 \beta_l \frac{t_{ij}^2 + t_{jk}^2 + t_{ki}^2}{t_{ij}t_{jk}t_{ki}},$$

где $\frac{1}{2}N_{ij} > \beta_k + \beta_l$, $\beta_l > 0$; в неравенстве и в последней сумме (i, j, k, l) – циклическая перестановка индексов 1, 2, 3, 4. Многогранник Π имеет, очевидно, 18 квадратных 2-граней. Носитель $\text{supp}(s)$ состоит из всех вершин Π и шести точек $-\mathbf{1}_{ij}$ в центрах шести квадратных граней.

Введем новые переменные $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3$, которые потом будем рассматривать в качестве биоднородных координат в $\mathbb{C}P^3 \times \mathbb{C}P^2$, и положим формально: $t_{ij}^{-1} = x_i x_j y_i y_j$, $t_{k4}^{-1} = x_k x_4 y_i y_j$ для любой перестановки (i, j, k) индексов 1, 2, 3. Тогда $t^{a_i - b_q} = x_i^2 y_q^2$ для любых $i = 1, 2, 3, 4$, $q = 1, 2, 3$. Значит,

$$\begin{aligned} 2s(t) = & \sum_{(i,j,k)=\text{cycle}(1,2,3)} (N_{ij}x_i x_j + N_{k4}x_k x_4) y_i y_j \\ & - [y_1^2 \ y_2^2 \ y_3^2] \begin{bmatrix} \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 \\ \beta_3 & \beta_4 & \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_4 & \beta_3 \end{bmatrix} [x_1^2 \ x_2^2 \ x_3^2 \ x_4^2]^T, \end{aligned}$$

где суммирование ведется по циклическим перестановкам индексов 1, 2, 3.

На самом деле функции $s(t)$, такие как в примерах 1.2–1.4, служат многочленами скалярной кривизны некоторых однородных пространств G/H , где группа G компактна и полупроста. Тогда неравенства для коэффициентов многочлена $s(t)$ в этих примерах следуют из формулы Вана–Циллера (см. пример 1.1, где заведомо $c_i \geq 0$) и гипотезы, что связанная компонента группы H не имеет в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ инвариантных векторов (т. е. $c_i > 0$).

Далее, в пп. 7.1–7.3, приводятся бесконечные серии таких однородных пространств G/H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Многогранником Ньютона* системы (1.1), ассоциированной с однородным пространством $M = G/H$, или просто многогранником Ньютона пространства M , называется выпуклая оболочка $X \subset D = \{x \in \mathbb{R}^d: x_1 + \dots + x_d = -1\}$ объединения носителей всех многочленов $\lambda_i(t) - \lambda_j(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Числом Ньютона* называется целое число

$$\nu(M) = \frac{\text{vol}_E(X)}{\text{vol}_E(S)} = \frac{(d-1)!}{\sqrt{d}} \text{vol}_E(X),$$

где vol_E – стандартный евклидов объем многогранников в гиперплоскости D , а S – стандартный симплекс в D с вершинами $-1_1, \dots, -1_d$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Через $f_\gamma(t)$ для любой (замкнутой) грани γ многогранника X обозначается сумма всех одночленов $\alpha t^{\mathbf{a}} = \alpha t_1^{a_1} \dots t_d^{a_d}$ многочлена $f(t)$ от $t_1, t_1^{-1}, \dots, t_d, t_d^{-1}$ с показателями $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \gamma$.

Введем следующие обозначения, которые нам понадобятся позднее: $\text{aff}(Z)$ – аффинная плоскость, натянутая на любое подмножество $Z \subset \mathbb{R}^d$;

$$\mathbf{m} = \frac{(N_1, \dots, N_d)}{N_1 + \dots + N_d} \in \mathbb{Q}^d$$

– вектор, где $N_i = \dim(\mathfrak{r}_i)$.

Как мы увидим в пп. 7.1–7.3, простые многогранники Δ , IB , Π из примеров 1.2–1.4 служат многогранниками Ньютона некоторых компактных однородных пространств $M = G/H$. (Существуют бесконечные серии таких пространств M .)

ПРИМЕР 1.5. Многогранникам $X = \Delta$, IB , Π соответствуют числа Ньютона

$$\nu = 4, 12, 80.$$

Найдем, например, число Ньютона в случае многогранника $\Pi = \Delta_3 \times \Delta_2$. Заметим, что два вектора $a_i - a_j$ и $b_q - b_p$ в $\mathbb{R}^6$ параллельны различным неприводимым инвариантным подпространствам естественного действия симметрической группы S_4 . Поэтому они ортогональны. При этом $|a| = |a_i - a_j| = 2$ и $|b| = |b_p - b_q| = 2$. По формулам евклидовой геометрии для тетраэдра Δ_3 и правильного треугольника Δ_2 находим

$$\frac{(d-1)!}{\sqrt{d}} \text{vol}_E(\Pi) = \frac{(6-1)!}{\sqrt{6}} |\Delta_3| |\Delta_2| = \frac{120}{\sqrt{6}} \frac{|a|^3 \sqrt{2}}{12} \frac{|b|^2 \sqrt{3}}{4} = 10 \cdot \frac{|a|^3 |b|^2}{4} = 80.$$

Сравним полученный ответ с числом l общих нулей пяти биоднородных форм общего положения степени биоднородности $(2, 2)$ в $\mathbb{C}P^3 \times \mathbb{C}P^2$. Из теоремы Безу следует, что

$$\begin{aligned} l &= \int_{\mathbb{C}P^3 \times \mathbb{C}P^2} (2c_1(H_{\mathbb{C}P^3}) + 2c_1(H_{\mathbb{C}P^2}))^5 \\ &= 2^5 \binom{5}{2} \int_{\mathbb{C}P^3} c_1(H_{\mathbb{C}P^3})^3 \int_{\mathbb{C}P^2} c_1(H_{\mathbb{C}P^2})^2 = 2^5 \binom{5}{2} = 320. \end{aligned}$$

Очевидно, $l/\nu = 4$ есть число листов накрытия над $(\mathbb{C} \setminus 0)^5$, заданного прежними формулами $t_{ij}^{-1} = x_i x_j y_i y_j$, $t_{k4}^{-1} = x_k x_4 y_i y_j$, где точка $[x, y]$ пробегает открытый страт $\prod x_l y_q \neq 0$ в $\mathbb{C}P^3 \times \mathbb{C}P^2$.

1.6. Оценка $\mathcal{E}(M) \leq \nu(M)$. Из теории А. Г. Кушниренко–Д. Н. Бернштейна систем лорановых алгебраических уравнений [5]–[7] непосредственно вытекает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть $M = G/H$ – однородное пространство с однократным спектром представления изотропии, точно такое, как в п. 0.1. Тогда:

- i) $\nu(M) \geq \mathcal{E}(M)$ и при $\mathcal{E}(M) = \nu(M) > 0$ все решения (1.1) изолированы;
- ii) $\nu(M) \neq \mathcal{E}(M)$, если и только если $\nu(M) > 0$ и хотя бы для одной пары (γ, t) , где γ – собственная (замкнутая) грань многогранника X и $t \in (\mathbb{C} \setminus 0)^d$, выполняется условие

$$(\lambda_1 - \lambda_2)_\gamma(t) = \dots = (\lambda_{d-1} - \lambda_d)_\gamma(t) = 0; \quad (1.2)$$

- iii) в силу i) если $\mathcal{E}(M) = \nu(M) > 0$, то число попарно негомотетичных вещественных метрик Эйнштейна в M заведомо не превосходит $\nu(M)$.

Например, если $M = (\mathrm{SU}_2/T^1)^{\times d} = (\mathrm{SU}_2/T^1) \times \dots \times (\mathrm{SU}_2/T^1)$, где $d \geq 2$, то $X = S$ и $\nu(M) = 1$. При этом $\mathcal{E}(M) = 1$. Очевидно, инвариантная метрика Эйнштейна в M с точностью до гомотетии единственна.

Как мы увидим в п. 1.7.2, в случае полупростой группы Ли G решения системы (1.2) совпадают с особыми точками t комплексной гиперповерхности в $(\mathbb{C} \setminus 0)^d$, заданной однородным уравнением $s_\gamma(t) = 0$, где $s(t)$ – скалярная кривизна метрики g_t^M :

$$s_\gamma(t) = 0, \quad \frac{\partial s_\gamma(t)}{\partial t_i} = 0, \quad i = 1, \dots, d-1.$$

Ниже, в пп. 7.1–7.3, рассматриваются бесконечные серии компактных однородных пространств M с фиксированным многогранником Ньютона $X \neq S$, в которых равенство $\mathcal{E}(M) = \nu(M) > 0$ типично, т. е. выполняется для большинства объектов.

Будем называть *дефектом* разность $\nu(M) - \mathcal{E}(M)$.

ПРИМЕР 1.6. Пятимерный многогранник $\Pi = \Delta_3 \times \Delta_2$ с числом Ньютона $\nu = 80$ из примеров 1.4 и 1.5 служит общим многогранником Ньютона бесконечной серии однородных пространств $\mathrm{SU}_n / \mathrm{S}(\mathrm{U}_{n_1} \times \dots \times \mathrm{U}_{n_4})$, $n_i \geq 1$, $\mathrm{Sp}_n / \mathrm{Sp}_{n_1} \times \dots \times \mathrm{Sp}_{n_4}$, $n_i \geq 1$, $\mathrm{SO}_n / \mathrm{SO}_{n_1} \times \dots \times \mathrm{SO}_{n_4}$, $(n_1, n_2) \neq (1, 1), (2, 2)$, $n_3 \geq 3$, $n_4 \geq 3$, где $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$. В п. 7.3 мы найдем для этих пространств M дефект $80 - \mathcal{E}(M)$. Дефект принимает пять значений: 0, 2, 4, 12, 18. Все решения системы (1.1) изолированы. Случай $80 = \mathcal{E}(M)$ типичен.

Однако совсем другую серию, в которой многогранники Ньютона различны (см. введение), образуют факторпространства компактных простых групп Ли по максимальным торам. Для них справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть G – компактная простая группа Ли ранга $n \geq 2$, T^n – её максимальный тор, $M = G/T^n$. Тогда или $\nu(M) \neq \mathcal{E}(M)$, или $M = \mathrm{SU}_3/T^2$.

В силу утверждения (а) теоремы 3.2 (см. ниже) доказательство предложения 1.3 сводится к исследованию случаев $M = \mathrm{Sp}_2/T^2$, G_2/T^2 , SU_4/T^3 .

Случаи $M = \mathrm{SU}_3/T^2$, Sp_2/T^2 , SU_4/T^3 см. в пп. 7.1–7.3 соответственно. Они входят в серии однородных пространств с многогранниками Ньютона Δ , Π , Π .

ПРИМЕР 1.7. Если $M = \mathrm{SU}_4/T^3$, то $\nu(M) = 80$, $\mathcal{E}(M) = 62$ (имеется четырехкратное решение) и существует ровно $29 = 32 - 3$ вещественных (положительно определенных) решений без учета кратностей. Для проверки формулы $80 - \mathcal{E}(M) = 18$ (пример 1.6) все 59 = 62 - 3 решений можно найти явно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^d$ – многогранник Ньютона однородного пространства $M = G/H$ с однократным спектром представления изотропии такого, как в п. 0.1. Пусть S – стандартный $(d - 1)$ -мерный симплекс в $\mathbb{R}^d$ с вершинами $-\mathbf{1}_i$, $i = 1, \dots, d$. Пусть алгебра Ли группы G действует в M эффективно. Тогда:

- 1) если $\dim(X) = \dim(S) = d - 1$, то G – унимодулярная группа Ли¹;
- 2) если $X \supset S$, то G – полупростая группа Ли (ср. с предложением 2.2);
- 3) если $X = S$, то существует накрытие $G/H \rightarrow (G_1/H_1) \times \dots \times (G_d/H_d)$, $H_i \subsetneq G_i$, переводящее G в подгруппу конечного индекса в $\prod G_i$, в этом случае

$$\mathfrak{x}_i = \mathfrak{g}_i/\mathfrak{h}_i, \quad i = 1, \dots, d, \quad \mathcal{E}(M) = \nu(M) = 1.$$

В случае $\dim(X) = \dim(S)$ унимодулярность G доказана в сноске. В случае $X \supset S$ полупростота G вытекает, с учетом 1), из следствия 2.1. В случае $X = S$ поясним также, что достаточно, с учетом 2), факторизовать M по центру связной компоненты группы G .

1.7. Формула Гильберта–Йенсена и её следствия. Для инвариантных метрик g в G/H имеется аналог теоремы Гильберта. Здесь мы ограничимся рассмотрением случая унимодулярной группы Ли G (иначе потребовалась бы отдельная формулировка). Далее унимодулярность группы G предполагается всюду, кроме приведенного ниже утверждения (с) и его доказательства в § 4.

1.7.1. Аналог теоремы Гильберта. Пусть s_g – скалярная кривизна метрики g и $|\Omega_g|$ – её плотность. Для любого $\mu \geq 0$ рассматривается функция $g \mapsto \Phi_g^{(\mu)} = s_g |\Omega_g|^\mu$ на пространстве инвариантных псевдоримановых метрик g любой сигнатуры в $M = G/H$.

Имеем:

(а) градиент от $\Phi_g^{(\mu)}$ в точке g равен тензору $\frac{\mu}{2} s_g g - \mathrm{ricci}_g$, умноженному на $|\Omega_g|^\mu$ (формула Г. Йенсена; ср. с [8]); здесь ricci_g – тензор Риччи;

(b) в силу (а) G -инвариантные метрики Эйнштейна g в M совпадают с критическими точками функции $\Phi_g^{(2/\dim(M))}$ на пространстве G -инвариантных метрик;

(с) если равенство из (а) выполнено для некоторого $\mu = \mu_0$ хотя бы в одной точке g и метрика g риманова, то группа G унимодулярна.

Если $\mu = 1$, а группа G компактна, то интегрирование по M превращает равенство из (а) в классическую формулу Гильберта для финитных возмущений метрики g . Предположение об однократности спектра представления изотропии в (а)–(с) несущественно.

Доказательство (а) и (с) приводится в § 4.

¹Чтобы не прерывать изложение, докажем замечание 1.1, 1) в сноске. Если группа Ли G не унимодулярна, то в (M, g) существует инвариантное векторное поле Z такое, что производная Ли $L_Z g$ не равна нулю (см. § 4). Очевидно, Z индуцирует в пространстве всех инвариантных римановых метрик $g_t = g_t^M$, $t \in (\mathbb{R}_{>0})^d$, однопараметрическую группу линейных преобразований $e^{qz} = \mathrm{diag}(e^{qz_1}, \dots, e^{qz_d})$ для некоторого вектора $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \setminus 0$. Из инвариантности Z следует $L_Z \mathbf{1}_i = 0$ при $i = 1, \dots, d$, а потому $L_Z(g_t^{-1} \mathrm{ricci}_{g_t}) = 0$, т. е. $\lambda_i(t) \equiv \lambda_i(te^{qz})$ при $i = 1, \dots, d$. Это значит, что каждая точка из $\bigcup_{i=1}^d \mathrm{supp}(\lambda_i)$ ортогональна вектору $z \neq 0$. Итак, если группа G не унимодулярна, то $\dim(X) \leq d - 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В силу утверждения (b) имеем: если существует однопараметрическое семейство локальных преобразований, переводящих G -инвариантные метрики друг в друга и умножающих G -инвариантную плотность на любые постоянные, изменяющиеся от 1 до $c > 1$, то каждая G -инвариантная эйнштейнова метрика в M будет риччи-плоской.

1.7.2. Многогранник Ньютона $P = P_M$. Уравнение Эйнштейна как уравнение критических точек функции. Следующее предложение показывает, что многогранник Ньютона X системы (1.1) совпадает с многогранником Ньютона P одного многочлена Лорана $s(t) = s_M(t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Если группа Ли G унимодулярна, то:

1) выполнено

$$\lambda_i = -\frac{t_i}{N_i} \frac{\partial s}{\partial t_i}, \quad i = 1, \dots, d,$$

где $N_i = \dim(\mathfrak{r}_i)$, а $s(t) = \sum_i N_i \lambda_i(t)$ – постоянная в M скалярная кривизна комплексной метрики g_t^M ;

2) инвариантные комплексные метрики Эйнштейна в M совпадают (с учетом кратностей) с критическими точками многозначной функции $\Phi(t) = s(t)t^{\mathbf{m}}$, где $\mathbf{m} = (\frac{N_1}{N}, \dots, \frac{N_d}{N})$, $N = N_1 + \dots + N_d = \dim(M)$, $t^{\mathbf{m}} = \prod t_i^{N_i/N}$;

3) вообще, для любой (возможно, несобственной) грани γ многогранника Ньютона решения системы (1.2) совпадают с критическими точками функции $\Phi_{(\gamma)}(t) = s_{\gamma}(t)t^{\mathbf{m}}$, а (1.2) совпадает с системой $t^{-\mathbf{m}} t_i \partial \Phi_{(\gamma)}(t) / \partial t_i = 0$, $i = 1, \dots, d$ (с точностью до сложения уравнений и умножения на рациональные числа).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1) и 2) следуют из вариационного принципа (см. соответственно п. 1.7.1, (a) для $\mu = 0$ и п. 1.7.1, (b)). Утверждение 3) является простым следствием 1).

Пусть $P = P_M \subset D = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 + \dots + x_d = -1\}$ – многогранник Ньютона многочлена $s(t) \in \mathbb{R}[t, t^{-1}]$, т. е. выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^d$ конечного множества $\text{supp}(s)$ показателей всех его одночленов.

Из предложения 1.4 следует, что $\text{supp}(s) = \bigcup_{i=1}^{d-1} \text{supp}(\lambda_i - \lambda_{i+1})$.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. 1) Многогранник Ньютона системы (1.1) совпадает с P , откуда

$$\nu(M) = \frac{(d-1)!}{\sqrt{d}} \text{vol}_E(P).$$

2) При $-\mathbf{m} \notin \text{aff}(P)$ (аффинная плоскость, натянутая на P) решения системы (1.1) совпадают с особыми точками комплексной гиперповерхности $s(t) = 0$, таким образом, в этом случае каждая инвариантная комплексная метрика Эйнштейна g_t^M будет риччи-плоской.

3) Вообще, при $-\mathbf{m} \notin \text{aff}(\gamma)$, где γ – любая грань, $\emptyset \subset \gamma \subset P$, решения системы (1.2) совпадают с особыми точками комплексной гиперповерхности $s_{\gamma}(t) = 0$ в $(\mathbb{C} \setminus 0)^d$:

$$s_{\gamma}(t) = 0, \quad \frac{\partial s_{\gamma}(t)}{\partial t_i} = 0, \quad i = 1, \dots, d-1;$$

здесь $s_{\gamma}(t)$ – сумма одночленов многочлена $s(t)$ по грани γ (см. определение 1.4, $s_{\gamma}(t) = s(t)$ при $\gamma = P$).

Следствие 1.2, 3) полезно объединить со следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Если группа Ли G полупроста, то:*

- i) $D = \text{aff}(P)$;
- ii) $-\mathbf{m} \notin \text{aff}(\gamma)$ для каждой собственной грани γ многогранника Ньютона P .

(Очевидно, что $-\mathbf{m} \in D$.)

Чтобы подчеркнуть связь условий i), ii) с определением А. Г. Купниренко, введенным в [6, п. 1.5.III], можно назвать P и $(P, -\mathbf{m})$, удовлетворяющие условиям i), ii), соответственно *удобным многогранником* и *удобной парой*.

Предложение 1.5 следует из результатов, полученных в п. 2.4.

§ 2. Описания многогранника Ньютона с помощью фильтраций алгебр Ли и с помощью тройного отношения

2.1. Фильтрации алгебры Ли и многогранник Ньютона. Перейдем к двойственному описанию многогранника Ньютона P для однородного пространства $M = G/H$ унимодулярной группы Ли G (см. п. 1.7.2). В этом описании мы используем различные фильтрации алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Под фильтрацией алгебры Ли $\mathfrak{g}$ понимается возрастающая фильтрация

$$(F_a \mathfrak{g})_{a \in \mathbb{R}}: \dots \subset F_a \mathfrak{g} \subset \dots \subset F_{a+1} \mathfrak{g} \subset \dots, \quad [F_a \mathfrak{g}, F_b \mathfrak{g}] \subset F_{a+b} \mathfrak{g},$$

которая является исчерпывающей и отделимой и для которой функция $a \mapsto \dim(F_a \mathfrak{g})$ является полунепрерывной сверху.

Если спектр каждого оператора $\text{ad}(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, принадлежит мнимой оси, то $\bigcup_{a < 0} F_a \mathfrak{g} \subset \mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n}$ – наибольший нильпотентный идеал алгебры $\mathfrak{g}$. В общем случае имеется аналогичное утверждение о допустимых фильтрациях.

Фильтрация F называется *допустимой*, если $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)F_a \mathfrak{g} = F_a \mathfrak{g}$ для всех $a \in \mathbb{R}$ и $\mathfrak{h} \subset F_a \mathfrak{g}$ при $a = 0$ (а тогда и для всех $a \geq 0$).

Обозначим через $\mathcal{C}(P)$ двойственный конус многогранника Ньютона P :

$$\mathcal{C}(P) = \{f \in \mathbb{R}^d: \langle x, f \rangle \leq 0 \text{ для каждой точки } x \in P\}.$$

Пусть $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ – подконус всех точек $f = (f(1), \dots, f(d))$ конуса $\mathcal{C}(P)$, удовлетворяющих следующему условию: для каждого индекса i из $f(i) < 0$ следует, что i -е неприводимое H -инвариантное подпространство $\mathfrak{x}_i \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = T_{x_0}M$ касается орбиты наибольшего нильпотентного идеала $\mathfrak{n}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Пусть центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$ не пересекается с подалгеброй $\mathfrak{h}$ (а потому $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} = 0$). Тогда:*

- 1) если F – допустимая фильтрация алгебры $\mathfrak{g}$, то $\bigcup_{a < 0} F_a \mathfrak{g} \subset \mathfrak{n}$;
- 2) формула $\bigoplus_{f(i) \leq a} \mathfrak{x}_i = pF_a \mathfrak{g}$ для любого $a \in \mathbb{R}$, где $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ – естественная проекция, устанавливает взаимно однозначное соответствие допустимых фильтраций F и точек $f \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$.

Доказательство предложения 2.1 см. в п. 5.1.

Назовем i -е H -инвариантное подпространство $\mathfrak{x}_i \subset T_{x_0}M$ *устойчивым*, если выполняются следующие эквивалентные условия:

- a) $-\mathbf{1}_i \in P$,
- b) $f(i) \geq 0$ для каждой точки $f = (f(1), \dots, f(d)) \in \mathcal{C}(P)$,

и *неустойчивым* в противном случае.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Каждое подпространство $\mathfrak{x}_i$, касательное к орбите идеала $\mathfrak{n}$, неустойчиво.

2.2. Порождение неустойчивых подпространств касательного пространства ростками киллинговых полей. Обозначим через $U \subset T_{x_0}M$ сумму всех неустойчивых подпространств $\mathfrak{x}_i$.

По определению $\mathcal{C}(P) = \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$, если и только если каждое неустойчивое подпространство $\mathfrak{x}_i \subset T_{x_0}M$ касается орбиты идеала $\mathfrak{n}$.

В общем случае, когда $\mathcal{C}(P) \supset \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$, рассмотрим полную алгебру ростков киллинговых векторных полей однородного риманова многообразия (M, g) , $M = G/H$, в точке $x_0 = eH \in M$. Обозначим через $\mathfrak{j}$ подалгебру всех ростков, сохраняющих сразу все G -инвариантные римановы метрики в M . Из теоремы 2.1 (см. ниже) следует

$$U = \mathcal{N}(\mathfrak{j}) \cdot x_0,$$

где $\mathcal{N}(\mathfrak{j})$ – наибольший нильпотентный идеал алгебры $\mathfrak{j}$. В п. 2) этой теоремы явно строится транзитивная подалгебра $\hat{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{j}$, удовлетворяющая условию $U = \mathcal{N}(\hat{\mathfrak{g}}) \cdot x_0$. Подалгебры ростков $\mathfrak{j}$ и $\hat{\mathfrak{g}}$ обладают естественными конусами допустимых фильтраций $\mathfrak{C}(\mathfrak{j})$ и $\mathfrak{C}(\hat{\mathfrak{g}})$ соответственно, и

$$\mathcal{C}(P) = \mathfrak{C}(\mathfrak{j}) = \mathfrak{C}(\hat{\mathfrak{g}}) \supset \mathfrak{C}(\mathfrak{g}).$$

Подалгебра $\hat{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{j}$ определяется в теореме 2.1 по алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и некоторому тору $T \subset \mathrm{SO}(\mathfrak{m}) = \mathrm{SO}(T_{x_0}M)$. Конструкция тора T опирается на утверждение 1) следующей леммы.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ как векторное пространство, $B(\mathfrak{h}, \mathfrak{m}) = 0$, $\mathrm{Ker}(B) \subset \mathfrak{m}$, где B – форма Киллинга в $\mathfrak{g}$. Определим векторное подпространство $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{m}$ равенством $\mathfrak{v} \cdot x_0 = U$. Тогда $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{v} \subset \mathfrak{m}$ (см. следствие 2.1). отождествим $\mathfrak{m}$ с $\mathfrak{m} \cdot x_0 = T_{x_0}M$.

Обозначим теперь через $\mathbf{1}_i: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{m}$ проекцию на i -е неприводимое H -инвариантное подпространство $\mathfrak{m}_i$ в $\mathfrak{m}$ (так что $\mathfrak{m}_i \cdot x_0 = \mathfrak{x}_i$, $\mathbf{1}_i \mathfrak{h} = 0$, $\mathbf{1}_i \mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_i$, $\mathbf{1}_i \mathfrak{m}_j = 0$ при $i \neq j$). Определим отображение $\alpha: \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ формулой

$$\alpha(X)Y = \sum_{i=1}^d \mathbf{1}_i[X, \mathbf{1}_i Y] \quad \text{для любых } X \in \mathfrak{v}, \quad Y \in \mathfrak{m}.$$

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ – ортогональная алгебра Ли относительно метрики $g|_{T_{x_0}M}$, $\mathfrak{j}_{x_0} \subset \mathfrak{j}$ – стабилизатор точки $x_0 = eH \in M$ и $\mathfrak{j}_{x_0} \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ – естественное включение. Тогда:

- 1) $\alpha(X) \in \mathfrak{j}_{x_0} \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ и $[\alpha(X), \alpha(Y)] = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{v}$;
- 2) $\alpha(X) = 0$, если и только если $X \in \mathfrak{n}$;
- 3) если $\mathfrak{j}$ редуктивна и $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{j}$, то $X \in \mathfrak{v} \mapsto X - \alpha(X)$ есть изоморфизм на центр $\mathfrak{c}$ алгебры Ли $\mathfrak{j}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В п. 5.5 будет показано, что $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}$ – разрешимая подалгебра и $\alpha: \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ – гомоморфизм. Значит, образ α коммутативен. О включении $\alpha(X) \in \mathfrak{j}_{x_0}$ см. п. 5.6 (доказательство теоремы 5.1, (b)).

2) Это утверждение вытекает из следствия 5.5, 2) (см. ниже п. 5.5.2).

3) Если $\mathfrak{j}$ редуктивна, то из результатов, полученных в п. 5.4 и п. 5.5.1, следует $\mathfrak{c} \cdot x_0 = \mathfrak{v} \cdot x_0 = U$. Как видно из доказательства леммы 5.5, если $\mathfrak{g}$ эффективна, т.е. $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{j}$, то $\mathfrak{c} = \{X - \alpha(X): X \in \mathfrak{v}\}$.

Теперь перейдем от пространства $M = G/H$ к его односвязному накрывающему пространству, что позволяет одновременно продолжить все ростки $X \in \mathfrak{j}$ до киллинговых векторных полей.

2.3. Теорема двойственности для многогранника Ньютона P . Пусть P – многогранник Ньютона многочлена $s(t) = s_M(t)$ (см. п. 1.7.2), $\mathcal{C}(P)$ – двойственный конус. В следующей теореме пространство M односвязно, а группа G эффективна.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $M = G/H$ – связное односвязное риманово однородное пространство с однократным спектром представления изотропии такое, как в п. 0.1, унимодулярной группы изометрий G с компактной подгруппой изотропии H . Пусть J – группа всех преобразований h пространства $M = G/H$, сохраняющих все G -инвариантные римановы метрики g в M , т.е. $J = \{h: h^*g = g \text{ для всех } g\}$, и пусть $T \subset J_{x_0}$ – замыкание множества $\{\exp(\alpha(X)): X \in \mathfrak{v}\}$ (см. лемму 2.1). Тогда:

1) каждое неустойчивое подпространство $\mathfrak{x}_i \subset T_{x_0}M$ касается орбиты наибольшего нильпотентного идеала алгебры $\mathcal{L}\mathfrak{i} \mathfrak{j}$; иными словами, можно (записав $M = J/J_{x_0}$ и перейдя от G к J) получить

$$\mathcal{C}(P) = \mathfrak{C}(\mathfrak{j}) = \{\text{допустимые фильтрации алгебры } \mathcal{L}\mathfrak{i} \mathfrak{j} \text{ группы } J\};$$

2) T есть k -тор, $k \geq 0$, такой, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{t}] \subset \mathfrak{g}$, а $\hat{G} = G \cdot T$ – подгруппа $\mathcal{L}\mathfrak{i} \mathfrak{j}$ в J с алгеброй $\mathcal{L}\mathfrak{i} \hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{t}$, при этом наибольший нильпотентный идеал $\hat{\mathfrak{n}} \subset \hat{\mathfrak{g}}$ равен $\{X - \alpha(X): X \in \mathfrak{v}\}$; можно представить многообразие M в форме Клейна: $M = \hat{G}/\hat{H}$, $\hat{G} = G \cdot T$, $\hat{H} = H \cdot T$, перейти от G к $\hat{G}$ и получить

$$\mathcal{C}(P) = \mathfrak{C}(\hat{\mathfrak{g}});$$

3) если $\mathfrak{g}$ полупроста, то $\mathfrak{j}$ редуктивна и $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$ – центр алгебры $\mathfrak{j}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждения 1) и 3) и ограничимся пока пояснениями к доказательству 2). Факторпространства J/J_{x_0} и $L/L \cap J_{x_0}$ группы J и её замкнутых подгрупп L , $G \subset L \subset J$, удовлетворяют условиям теоремы для G/H . Унимодулярность групп $\mathcal{L}\mathfrak{i} \mathfrak{j}$, L следует из обращения теоремы Гильберта–Йенсена (см. п. 1.7.1, (с)), так как они действуют в M и сохраняют в точности G -инвариантные метрики в M .

Утверждение 1) сразу следует из 2), поскольку $\hat{J} = J$.

Подробное доказательство утверждения 2) приведено в п. 5.6. По лемме 2.1 определен тор $T = \exp(\mathfrak{t}) \subset J_{x_0}$ (см. также п. 5.5.3). По построению тор, а тогда и $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{t} \subset \mathfrak{j}$ будут H -инвариантными. В п. 5.6 будет доказано, что $\hat{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{j}$ – подалгебра вида $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{t}$ и что $X - \alpha(X) \in \hat{\mathfrak{n}}$ для любого $X \in \mathfrak{v}$. Отсюда ясно, что $\hat{G} \subset J$ – замкнутая подгруппа и что $\hat{\mathfrak{n}} \cdot x_0 \supset \mathfrak{v} \cdot x_0 = U$. Равенство конуса $\mathcal{C}(P)$ подконусу $\mathfrak{C}(\hat{\mathfrak{g}})$ следует теперь из определения $\mathfrak{C}(\hat{\mathfrak{g}})$. Формулу нильрадикала $\hat{\mathfrak{n}} = \mathcal{N}(\hat{\mathfrak{g}})$ алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ получаем из $\hat{\mathfrak{n}} \cdot x_0 = U$ (см. следствие 2.1).

Докажем утверждение 3). Если $\mathfrak{j}$ редуктивна, то по лемме 2.1 имеем $\hat{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} + \mathfrak{t} = \mathfrak{g} + \mathfrak{c}$. (Тогда $U = \mathfrak{c} \cdot x_0$, что следует также из утверждения 1). Последнее равенство влечет $\mathcal{C}(P) = \mathfrak{C}(\mathfrak{g} + \mathfrak{c})$.)

Редуктивность $\mathfrak{j}$ в утверждении 3) теоремы очевидна. Вообще, пусть L – группа $\mathcal{L}\mathfrak{i} \mathfrak{j}$, K – её компактная подгруппа и существует полупростая подалгебра $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{l}$, трансверсальная подалгебре $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{s} + \mathfrak{k} = \mathfrak{l}$. Тогда алгебра $\mathcal{L}\mathfrak{i} [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ полупроста, т.е. $\mathfrak{l}$ редуктивна.

Ниже, используя определение j , мы получим компактную вещественную форму алгебры $\mathbb{C}j$, откуда снова следует, что j редуктивна (см. следствие 2.6).

Итак, остается доказать утверждение 2) теоремы, а также предложение 2.1 и лемму 2.1. Отметим, что если $\mathfrak{g}$ полупроста, то утверждение 2) теоремы следует непосредственно из леммы 2.1, а лемма – из рассуждений, проведенных в п. 5.4.

Теорема 2.1 сохраняет силу для неодносвязного однородного пространства $M = G/H$ с односвязной комплексификацией; в самом деле, j , H и $\widehat{H} \subset H \exp(j_{x_0})$ не меняются при переходе от M к его односвязному накрывающему пространству $\widetilde{M}$ (см. п. 1.3).

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Фиксируем произвольную точку f конуса $\mathcal{C}(P)$. По теореме 2.1 ей соответствует допустимая фильтрация $F\Gamma$ каждой из алгебр Ли $\Gamma = j$ и $\widehat{g}$. Тогда:*

(а) *если, кроме f , и $-f \in \mathcal{C}(P)$, то существует градуировка $(j^a)_{a \in \mathbb{R}}$ алгебры j такая, что $j^0 \supset j_{x_0}$ и $F_c j = \sum_{a \leq c} j^a$ при $-\infty < c < +\infty$; обратно, если такая градуировка существует, то вместе с f и $-f \in \mathcal{C}(P)$;*

(б) *в п. (а) можно заменить (j, j_{x_0}) на $(\widehat{g}, \widehat{h})$.*

(В обратном утверждении п. (а) используется интегрирование по компактной группе.)

Пусть $P^\perp \subset \mathbb{R}^d$ – наибольшее векторное подпространство, лежащее в конусе $\mathcal{C}(P)$. По следствию 2.2 любой вектор $f \in P^\perp$ можно интерпретировать как векторное поле с неподвижной точкой $x_0 = eH$ в односвязном пространстве $M = G/H = J/J_{x_0}$. Таким образом, в M действует алгебра Ли $j \curvearrowright P^\perp$, где $[P^\perp, P^\perp + j_{x_0}] = 0$.

Пусть S_{x_0} – группа всех преобразований пространства M , сохраняющих точку x_0 и переводящих G -инвариантные римановы метрики друг в друга.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *В условиях теоремы 2.1 фактор S_{x_0}/J_{x_0} является группой Ли с конечным числом связных компонент и с коммутативной алгеброй Ли*

$$P^\perp = \{f \in \mathcal{C}(P) : -f \in \mathcal{C}(P)\}.$$

Тогда эквивалентны следующие условия:

(а) *существует элемент $\varphi \in S_{x_0}$, умножающий G -инвариантную форму объема Ω в M на число $c > 1$;*

(б) *в S_{x_0} существует однопараметрическое семейство такое, как в замечании 1.2, т. е. умножающее Ω на любые постоянные, изменяющиеся от 1 до $c > 1$;*

(с) *$-\mathfrak{m} \notin \text{aff}(P)$, т. е. выполняется предположение следствия 1.2, 2).*

Если выполняется любое из этих условий, то каждая G -инвариантная метрика Эйнштейна в M является риччи-плоской.

Перейдем к разложению конуса $\mathcal{C}(P)$ в случае компактного $M = G/H$. Заметим, что при этом алгебра Ли ростков $\widehat{g}$, а в односвязном случае и j компактны.

Пусть

$$\mathcal{C}_+(P) = \mathcal{C}(P) \cap (\mathbb{R}_{\geq 0})^d, \quad \mathcal{C}_-(P) = \mathcal{C}(P) \cap (\mathbb{R}_{\leq 0})^d.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *Если M компактно, то $\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}_+(P) + \mathcal{C}_-(P)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любую возрастающую фильтрацию F компактной алгебры Ли $\mathfrak{k}$ (в частности, алгебры $\mathfrak{k} = \hat{\mathfrak{g}}$) можно представить в виде свертки

$$F_a \mathfrak{k} = \sum_{c \in \mathbb{R}} F_{a-c}^+ \mathfrak{k} \cap F_c^- \mathfrak{k}$$

неотрицательной фильтрации F^+ , т. е. фильтрации с $F_a^+ \mathfrak{k} = 0$ при $a < 0$, и неположительной фильтрации F^- , т. е. фильтрации с $F_a^- \mathfrak{k} = \mathfrak{k}$ при $a \geq 0$. При $\mathfrak{k} = \hat{\mathfrak{g}}$, переходя к допустимым фильтрациям, легко получаем $\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}_+(P) + \mathcal{C}_-(P)$.

2.4. Многогранник Ньютона в случае полупростой группы G . Пусть $M = G/H$ – однородное пространство полупростой, вообще говоря, не связной группы Ли G , удовлетворяющее условиям, приведенным в п. 0.1, и пусть J – группа Ли изометрий его односвязного накрывающего пространства, определенная в теореме 2.1.

Однородное пространство $M = G/H$ полупростой группы Ли G называется принадлежащим классу $\mathbf{a}$, $M \in \mathbf{a}$, если J полупроста, и классу $\mathbf{c}$ в противном случае.

Компактные пространства G/H положительной эйлеровой характеристики и, в частности, все флаговые пространства принадлежат классу $\mathbf{a}$. Обобщенные расслоения Хопфа над флаговыми пространствами (п. 7.1) принадлежат классу $\mathbf{c}$.

Описание многогранника Ньютона $P = P_M$, как и многочлена $s(t) = s_M(t)$, сводится к компактному случаю. Опишем двойственный конус $\mathcal{C}(P)$ и носитель многочлена $s(t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть группа Ли G полупроста. Тогда

$$\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}_+(P) + \mathcal{C}_-(P), \quad \mathcal{C}_+(P) = \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$$

и эквивалентны следующие условия:

- (a) $M = G/H \in \mathbf{a}$;
- (b) каждое неприводимое H -инвариантное подпространство $\mathfrak{x}_i \subset T_{x_0} M$ является устойчивым;
- (c) $\mathcal{C}(P) = \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$;
- (d) $\mathcal{C}_-(P) = \{0\}$;
- (e) P содержит симплекс $S = \text{Conv}\{-\mathbf{1}_1, \dots, -\mathbf{1}_d\}$;
- (f) P содержит внутреннюю точку из S (например, точку $-\mathbf{m}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность утверждений (a)–(c) следует из теоремы 2.1, а утверждений (d)–(f) – из предложения 2.3.

Пусть $\mathbf{m}_i = \{X \in \mathfrak{g} : B(X, \mathfrak{h}) = 0, pX \in \mathfrak{x}_i\}$, $i = 1, \dots, d$, где B – форма Киллинга в $\mathfrak{g}$, а $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ – естественная проекция.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Если G полупроста, то $\mathcal{C}_-(P)$ – симплицальный конус в $\mathbb{R}^d$ с образующими

$$\{-\mathbf{1}_i : \mathfrak{x}_i \text{ неустойчиво}\} = \{-\mathbf{1}_i : [\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_i] = 0 \text{ и } [\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_j] \subset \mathbf{m}_j \text{ для всех } j\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Если H связна, то эквивалентны следующие условия:

- (a) $G/H \in \mathbf{c}$;
- (b) H сохраняет ненулевой вектор $v \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$;
- (c) G/H допускает эквивариантное расслоение на ориентированные окружности.

Положим $[d] = \{1, \dots, d\}$. Подмножество $T \subset [d] \times [d] \times [d]$, инвариантное относительно симметрической группы S_3 , называется *симметричным тройным отношением на $[d]$* . Симметричное тройное отношение на $[d]$

$$T = \{(i, j, k) : B([m_i, m_j], m_k) \neq 0\}$$

называется *инвариантом де Зибенталя* однородного пространства $M = G/H$ полупростой группы Ли G (такого, как в п. 0.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть T – инвариант де Зибенталя однородного пространства $M = G/H$ полупростой группы Ли G . Тогда носитель многочлена $s(t)$ имеет вид

$$\text{supp}(s) = \{-\mathbf{1}_i : \mathfrak{x}_i \text{ устойчиво}\} \cup \{\mathbf{1}_k - \mathbf{1}_i - \mathbf{1}_j : (i, j, k) \in T, i \neq k, j \neq k\}.$$

Конус $C_+(P)$ в $(\mathbb{R}_{\geq 0})^d$ задается неравенством треугольника

$$f(i) + f(j) \geq f(k) \quad \forall (i, j, k) \in T.$$

2.5. Дополнение к п. 2.4. Редукция к случаю компактной группы G . Доказательство предложений 2.2–2.4 в некомпактном случае сводится к рассмотрению компактного случая на основании следующих лемм.

Пусть $M = G/H$ – связное односвязное однородное пространство компактной полупростой группы Ли G , точно такое, как в п. 0.1. Пусть $A \subset \text{Aut}(\mathfrak{g})$ – подгруппа, порожденная всеми автоморфизмами θ , $\theta^2 = 1$, такими, что $\theta h = h\theta$ для любого $h \in \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$. Тогда $\theta|_{\mathfrak{m}_i} = \pm \text{id}$ для любого $i \in [d]$. Следовательно, $A \cong (\mathbb{Z}_2)^k$ для некоторого $k \geq 0$.

ПРИМЕР 2.1. Если M – флаговое пространство связной полупростой компактной группы Ли без центра G , то все $\theta \in A$ – внутренние автоморфизмы алгебры $\mathfrak{g}$ и $A = (\mathbb{Z}_2)^k$ – группа всех элементов 2-го порядка тора $T^k \subset G$ из п. 0.3.3.

Пользуясь инвариантом де Зибенталя T , мы можем записать:

$$A \cong \{a \in (\mathbb{Z}_2)^d : a_i + a_j + a_k = 0 \quad \forall (i, j, k) \in T\}.$$

Сопоставим каждому автоморфизму $\theta \in A \setminus 1$ некомпактную вещественную форму S комплексной группы Ли $G^{\mathbb{C}}$ с алгеброй Ли $\mathfrak{s} = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{q}$ такой, что

$$\mathfrak{k} := \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = X\}, \quad \mathfrak{q} := \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = -X\},$$

и, следовательно, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$, $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_d$. Поскольку $G^{\mathbb{C}} = H \exp(\mathbb{C}\mathfrak{g})$, она имеет подгруппу $S = H \exp(\mathfrak{s})$. Тем самым вещественная форма S корректно определена.

Имеем $S/H \subset G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}$, т.е. $H = H^{\mathbb{C}} \cap S$ (пересечение в $G^{\mathbb{C}}$).

Ясно, что однородные пространства $M(\theta) = S/H$ и $M = G/H$ имеют изоморфные представления изотропии в точке $x_0 = eH$ и x_0 – общая точка $M(\theta)$ и M в $G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}$. Отсюда $M(\theta) = S/H$ имеет однократный спектр представления изотропии. Назовем $M(\theta)$ *некомпактной формой* компактного односвязного пространства $M = G/H$.

Согласно пп. 1.3, 1.4, очевидно, имеем

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(M(\theta)) \quad \text{для любого автоморфизма } \theta \in A.$$

ЛЕММА 2.2. Каждое однородное пространство с односвязной комплексификацией (удовлетворяющее условиям из п. 0.1) некомпактной полупростой группы Ли является некомпактной формой $M(\theta) = S/H$ подходящего односвязного пространства $M = G/H$ компактной полупростой группы Ли G , где $\theta \in \mathfrak{A} = (\mathbb{Z}_2)^k$.

ЛЕММА 2.3. Следующие объекты, связанные с $M(\theta)$ и M , естественно отождествляются при их стандартных вложениях в $G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}$:

- 1) множества инвариантных псевдоримановых метрик;
- 2) комплексные алгебры Ли $\mathfrak{S}\mathfrak{j}$ и центры алгебр Ли $\mathfrak{j}$;
- 3) инварианты де Зибенталя T ;
- 4) неустойчивые неприводимые H -инвариантные подпространства касательных пространств $T_{x_0}(M(\theta))$ и $T_{x_0}M$; все они лежат в $\mathfrak{k}/\mathfrak{h} = T_{x_0}(M(\theta)) \cap T_{x_0}M$.

Для односвязного пространства $M = G/H$ определим группу изометрий J такую, как в теореме 2.1. В силу компактности G группа $J = J(G/H)$ компактна. Значит, комплексифицированная алгебра Ли $\mathfrak{S}\mathfrak{j}$ редуکتивна.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Алгебра Ли $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}(S/H)$ редуکتивна; $M(\theta) \in \mathfrak{a} \iff M \in \mathfrak{a}$.

Пересечение

$$J(S/H) := \bigcap_{t \in (\mathbb{R}_{>0})^d} I(S/H, g_t^{S/H})$$

семейства полных групп изометрий пространства $M(\theta) = S/H$ является группой Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{j}(S/H)$ (см. п. 1.3).

В доказательстве теоремы 3.1 (см. ниже) используется очевидное следствие п. 2) леммы 2.3.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Максимальная связная коммутативная нормальная подгруппа группы $J(S/H)$ компактна, т.е. является тором T^r , $r \geq 0$.

§ 3. Решения системы (1.2) как инвариантные метрики Эйнштейна в сжатиях однородного пространства

Пусть $M = G/H$ – однородное пространство с однократным спектром представления изотропии такое, как в п. 0.1, унимодулярной группы G , а $P = P_M$.

Используя теорему 2.1, мы интерпретируем каждую грань $\gamma \subset P$ как многогранник Ньютона для нового однородного пространства $M_\gamma = G_\gamma/H_P$ такого, как в п. 0.1. Грань $\gamma = P$ соответствует многообразию $M_P = G_P/H_P$, локально изометричному исходному пространству $M = G/H$ относительно каждой инвариантной метрики (часто $M_P = M$ и $G_P = G$). Каждое многообразие M_γ есть сжатие M_P .

Мы интерпретируем (1.2) как уравнение Эйнштейна (1.1) для инвариантных метрик в сжатом однородном многообразии M_γ .

3.1. Сжатия алгебры Ли, группы Ли и однородного пространства.

Вначале рассмотрим алгебраическую версию сжатий алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (напомним, что классическое определение сжатий Иненю–Вигнера, в аналитической форме, использует предельный переход). Пусть $f \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ – любая точка и F –

соответствующая допустимая фильтрация алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (предложение 2.1). Нетрудно убедиться в том², что градуированная алгебра Ли

$$\mathfrak{g}_f = \bigoplus_{a \in \mathbb{R}} \mathfrak{g}_f^{(a)}, \quad \text{где} \quad \mathfrak{g}_f^{(a)} := F_a \mathfrak{g} / \bigcup_{b < a} F_b \mathfrak{g},$$

после забывания градуировки зависит только от наименьшей грани конуса $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$, содержащей точку f .

Отсюда непосредственно следует

ЛЕММА 3.1. *При $\mathcal{C}(P) = \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ имеется естественное взаимно однозначное соответствие построенных алгебр Ли $\mathfrak{g}_f$ и граней γ многогранника Ньютона P . Пусть $\mathfrak{g}_\gamma$ – алгебра Ли, соответствующая грани γ . Тогда $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_\gamma$ и мы имеем:*

- 1) алгебры Ли $\mathfrak{g}_\gamma$ и $\mathfrak{g}$ совпадают как $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ -модули и $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(H) \subset \text{Aut}(\mathfrak{g}_\gamma)$;
- 2) $\mathfrak{g}_P = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_\emptyset = \mathfrak{h} \ltimes V$, где алгебра Ли V коммутативна.

Для доказательства леммы достаточно сопоставить каждой грани γ многогранника Ньютона P допустимую фильтрацию F алгебры $\mathfrak{g}$, заданную любой точкой $f \in \mathcal{C}(P)$ такой, что $\gamma = P \cap f^\perp$, где $f^\perp = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, f \rangle = 0\}$. Тогда $\mathfrak{g}_\gamma = \mathfrak{g}_f$.

3.1.1. Сжатия алгебры Ли $\mathfrak{g}$ посредством группы $(\mathbb{R}_{>0})^d$. Изложим эквивалентную версию сжатий Иненю–Вигнера алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Фиксируем любое редуктивное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m} = \mathfrak{h} + (\mathfrak{m}_1 + \dots + \mathfrak{m}_d)$, где $\mathfrak{m}_i$ – неприводимые H -подмодули в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{m}$ – любое H -инвариантное дополнение подалгебры $\mathfrak{h}$ такое, что $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$. отождествим $\mathfrak{m}$ с $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}_i$ с $\mathfrak{x}_i$.

Тем самым группа $(\mathbb{R}_{>0})^d$ вложена в $\text{GL}(\mathfrak{g})$ как подгруппа $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ -инвариантных преобразований $A = \mathbf{1}_0 + a_1 \mathbf{1}_1 + \dots + a_d \mathbf{1}_d$ (для любых $a_i > 0$), тождественных на $\mathfrak{h}$.

Пусть $p \in \text{Hom}(\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ – коммутатор Ли в $\mathfrak{g}$. Проведем через точку p орбиту O естественного действия группы $(\mathbb{R}_{>0})^d$ в $\text{Hom}(\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. Она состоит из операций Ли, эквивалентных p . Структура замыкания орбиты O в векторном пространстве изоморфна структуре всех непустых граней выпуклого полиэдрального конуса $C \subset \mathbb{R}^d$ (по стандартным соображениям о торических многообразиях). Точнее, замыкание $\bar{O}$ орбиты O есть объединение конечного набора орбит $\{O_\gamma : \gamma \text{ – непустая грань в } C\}$, и $O_\beta \subset \bar{O}_\gamma$, если и только если $\beta \subset \gamma$. Представитель $p_\gamma \in O_\gamma$ задает новую скобку Ли в $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m$. Пара $(\mathbb{R}^m, p_\gamma)$ называется *сжатием алгебры Ли $\mathfrak{g}$ посредством группы $(\mathbb{R}_{>0})^d$* .

Нетрудно видеть, что C – это двойственный конус конуса $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ допустимых фильтратий алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Заметим, что $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ – внутренняя точка конуса $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$. Поскольку $\dim(\mathfrak{C}(\mathfrak{g})) = d$, конус C всегда имеет вершину 0 . Чтобы её исключить, перейдем от C к сечению $C \cap D$ аффинной гиперплоскостью

²В самом деле, пусть $\{X_\alpha\}$ – базис в $\mathfrak{g}$, содержащий базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{n}$, такой, что $X_\alpha + \mathfrak{h} \in \mathfrak{x}_{i(\alpha)}$ для каждого α . Пусть $C_{\alpha,\beta}^\gamma$ – структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно этого базиса. Положим $i(\alpha) = 0$ при $X_\alpha \in \mathfrak{h}$ и $f(0) = 0$ для каждого $f = (f(1), \dots, f(d)) \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$. Тогда в силу предложения 2.1 конус $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ можно задать системой из $(\dim(\mathfrak{g}))^3$ неравенств $|C_{\alpha,\beta}^\gamma|^2(f(i(\alpha)) + f(i(\beta)) - f(i(\gamma))) \geq 0$. Ясно, что для каждой точки $f \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ множество S троек (α, β, γ) , для которых первый сомножитель положителен, а второй равен нулю, зависит только от наименьшей грани конуса, содержащей f (и полностью определяет эту грань). Но структурные константы алгебры $\mathfrak{g}_f$ равны $C_{\alpha,\beta}^\gamma$ при $(\alpha, \beta, \gamma) \in S$ и нулю в остальных случаях.

$D \perp 1$. Имеется взаимно однозначное соответствие граней выпуклого многогранника $C \cap D$ и непустых граней $\tilde{\gamma}$ конуса C , заданное равенством $\gamma = \tilde{\gamma} \cap D$. Пусть $O_{\tilde{\gamma}} := O_{\gamma}$ и $p_{\tilde{\gamma}} := p_{\gamma}$, где $\gamma = \tilde{\gamma} \cap D$.

Если теперь точка f пробегает конус $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$, то, очевидно, предел

$$p_{\gamma} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{\rho(f(1)\mathbf{1}_1 + \dots + f(d)\mathbf{1}_d)} p \quad (3.1)$$

пробегает конечное подмножество в $\text{Hom}(\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ и мы получаем по одной точке $p_{\gamma} \in O_{\gamma}$ на каждую грань γ многогранника $C \cap D$.

Если $\mathcal{C}(P) = \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$, то $C \cap D = P$ – многогранник Ньютона, определенный в п. 1.7.2.

Канонические представители $p_{\gamma} \in O_{\gamma}$ всех орбит O_{γ} можно получить или в форме Иненю–Вигнера (3.1), или в инвариантной форме, используя алгебраическую процедуру перехода от фильтрованной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, F)$ к градуированной алгебре Ли $\mathfrak{g}_f$.

3.1.2. Три конструкции однородных пространств $M_{\gamma} = G_{\gamma}/H_P$. В лемме 3.1 каждой грани γ многогранника P сопоставлена алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\gamma}$. Теперь мы хотим сопоставить каждой грани γ однородные пространства $M_{\gamma} = G_{\gamma}/H_P$ групп Ли с этой алгеброй Ли $\mathfrak{g}_{\gamma}$.

Далее до конца пункта предполагается, что выполнено условие леммы $\mathcal{C}(P) = \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ и что группа G почти эффективно действует в $M = G/H$. Имеем $\mathbf{H} := \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(H) \subset \text{Aut}(\mathfrak{g}_{\gamma})$. Легко видеть, что каждая тройка $\mathbf{t}_{\gamma} = (\mathfrak{g}_{\gamma}, \mathfrak{h}, \mathbf{H})$ удовлетворяет следующим условиям:

- (*) $\mathfrak{g}_{\gamma}$ – алгебра Ли, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{\gamma}$ – подалгебра и $\mathbf{H} \subset \text{Aut}(\mathfrak{g}_{\gamma})$ – подгруппа с алгеброй Ли $\text{ad}_{\mathfrak{g}_{\gamma}}(\mathfrak{h})$; $\mathbf{H}$ компактна; $\mathfrak{h} \cong \text{ad}_{\mathfrak{g}_{\gamma}}(\mathfrak{h})$ и $\mathbf{H} \cdot \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$; линейное представление $\mathbf{H} \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}_{\gamma}/\mathfrak{h})$ является точным.

В силу $\mathfrak{g}_P = \mathfrak{g}$ условия (*) выполняются для $\gamma = P$, а тогда и для всех граней $\gamma \subset P$.

Рассмотрим три естественные конструкции однородных пространств $M_{\gamma} = G_{\gamma}/H_P$.

(а) Первая конструкция. Тройке $\mathbf{t}_{\gamma} = (\mathfrak{g}_{\gamma}, \mathfrak{h}, \mathbf{H})$, как и всякой тройке³, удовлетворяющей условиям (*), соответствует единственное связное односвязное однородное пространство $'M_{\gamma}$ группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_{\gamma}$ и с подгруппой изотропии $\mathbf{H}$:

$$'M_{\gamma} = \mathbf{M}_1(\mathbf{t}_{\gamma}) = \mathbf{G}_1(\mathbf{t}_{\gamma})/\mathbf{H}, \quad \pi_1('M_{\gamma}) = 1, \quad \emptyset \subset \gamma \subset P. \quad (3.2)$$

(б) Вторая конструкция. Эта конструкция зависит от первой: $''M_{\gamma}$ – связное однородное пространство с односвязной комплексификацией $''M_{\gamma}^{\mathbb{C}} = \mathbf{M}_2(\mathbf{t}_{\gamma})^{\mathbb{C}} = \mathbf{G}_2(\mathbf{t}_{\gamma})^{\mathbb{C}}/\mathbf{H}^{\mathbb{C}}$; пространство $''M_{\gamma}$ эквивалентно в смысле п. 1.3 пространству $'M_{\gamma}$ из (3.2);

$$''M_{\gamma} = \mathbf{M}_2(\mathbf{t}_{\gamma}) = \mathbf{G}_2(\mathbf{t}_{\gamma})/\mathbf{H}, \quad \pi_1(''M_{\gamma}^{\mathbb{C}}) = 1, \quad \emptyset \subset \gamma \subset P. \quad (3.3)$$

В частности, при $\gamma = P$ однородные пространства $'M_P$ и $''M_P$ эквивалентны в смысле п. 1.3 исходному пространству $M = G/H$.

³Например, доказательство в случае связной компактной группы $\mathbf{H}$ сводится к простой проверке того, что $\tilde{H} = \exp(\mathfrak{h})$ – замкнутая подгруппа связной односвязной группы Ли $\tilde{G}_{\gamma}$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_{\gamma}$. Тогда $\mathbf{G}_1(\mathbf{t}_{\gamma}) := \tilde{G}_{\gamma}/C$, где $C = \tilde{H} \cap Z(\tilde{G}_{\gamma})$ – дискретная центральная подгруппа.

(с) Третья конструкция. Дополнительно предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ редуکتивна. По построению имеем $\mathfrak{g}_\gamma = \text{gr}_F(\mathfrak{g})$, где F – подходящая допустимая фильтрация алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{l} := F_0\mathfrak{g}$ (подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$). Утверждается, что $\mathfrak{l} \simeq \text{gr}_F(\mathfrak{l})$, а $(\mathfrak{g}_\gamma)^{>0}$ – нильпотентный идеал в $\mathfrak{g}_\gamma$; таким образом, $\mathfrak{g}_\gamma \simeq (\mathfrak{g}_\gamma)^{>0} \rtimes \mathfrak{l}$.

Имеем $\mathfrak{l} \supset \mathfrak{h}$ и $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(H) \cdot \mathfrak{l} = \mathfrak{l}$. Отсюда выводится, что $\mathfrak{l}$ редуکتивна (если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ компактна, то доказательство очевидно; некомпактный случай можно свести к компактному). Из предложения 2.1 в силу редуکتивности $\mathfrak{g}$ следует, что подалгебра $F_{<0}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{l}$ содержится в центре $\mathfrak{g}$. Отсюда следует утверждение.

Теперь все группы G_γ и их однородные пространства M_γ можно определить исходя из групп $G_P = G$ и $H_P = H$ следующим образом: $M_P = G/H$,

$$M_\gamma = G_\gamma/H, \quad G_\gamma := N \rtimes L, \quad H \subset L \subset G, \quad \emptyset \subset \gamma \subset P, \quad (3.4)$$

где $L = H \exp(\mathfrak{l})$ – подгруппа группы G с алгеброй Ли $\mathfrak{l} := F_0\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{l} \supset \mathfrak{h}$), N – связная односвязная нильпотентная группа Ли с алгеброй Ли $(\mathfrak{g}_\gamma)^{>0}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть $M_\gamma = G_\gamma/H$ имеет вид (3.4). Не обязательно замкнутое подмножество $L/H \subset M = G/H$ можно рассматривать как “пересечение” M_γ и M . Геометрически M_γ может рассматриваться как сжатие M вдоль их “пересечения” L/H в том же самом смысле, в котором цилиндр является сжатием сферы вдоль их общей окружности.

Назовем подмножество L_c/H , где $L_c \supset H$ – максимальная компактная подгруппа группы L , *компактным центром сжатия*.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Пусть M_γ , $'M_\gamma$ и $''M_\gamma$ заданы, как выше. Вообще говоря, $M_\gamma \neq 'M_\gamma$ даже при $M_P = 'M_P$, и $M_\gamma \neq ''M_\gamma$ даже при $M_P = ''M_P$ (как показывает рассмотрение L_c/H), кроме того, в некоторых случаях $'M_P \neq ''M_P$, т. е. $''M_P$ неоднозначно (например, $''M_P = \text{Spin}_{2,k} = \text{Spin}_{2,k} \rtimes A/A$, где $\text{Spin}_{2,k}$ – вещественная форма $\text{Spin}_{2+k}(\mathbb{C})$ с алгеброй Ли $\mathfrak{so}_{2,k}$ и $A \cong (\mathbb{Z}_2)^{k+1}$; ср. с п. 2.5).

3.2. Интерпретация уравнений (1.2) с помощью сжатий Иненю–Вигнера. В этом пункте система (1.2), связанная с каждой гранью γ многогранника Ньютона $P = P_M$ однородного пространства $M = G/H$, интерпретируется как уравнение Эйнштейна (1.1) для инвариантных метрик в подходящем однородном пространстве $M_\gamma = G_\gamma/H_P$, построенном с помощью сжатий. В частном случае компактного пространства G/H класса **a** можно считать, что M_γ – это сжатие (3.4) самого G/H .

Таким образом, отклонение числа $\mathcal{E}(M)$ изолированных инвариантных (комплексных) метрик Эйнштейна в $M = G/H$ от числа Ньютона $\nu(M)$ объясняется появлением инвариантных метрик Эйнштейна хотя бы в одном из однородных пространств M_γ , сопоставляемых граням γ многогранника Ньютона $P = P_M$.

3.2.1. Общий случай. Фиксируем выпуклый многогранник Q , $P \subset Q \subset D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Набор однородных пространств $M_\gamma = G_\gamma/H_Q$, занумерованных всеми гранями γ многогранника Q , $\emptyset \subset \gamma \subset Q$, называется *комплексом однородных пространств (над Q), ассоциированным с $M = G/H$* , при следующих условиях:

с1) $M_\gamma = G_\gamma/H_Q$ – однородное пространство с компактной группой изотропии H_Q (не зависящей от γ) и с однократным спектром изотропии в точке eH_Q ;

c2) $\mathfrak{g}_\emptyset = \mathfrak{h}_Q \ltimes V$, где V коммутативна; если $\gamma \subset \gamma_1$, то алгебра Ли $\mathfrak{g}_\gamma$ получается из $\mathfrak{g}_{\gamma_1}$ H_Q -инвариантным сжатием Иненю–Вигнера, не влияющим на $\mathfrak{h}_Q$; естественные представления группы H_Q во всех алгебрах Ли $\mathfrak{g}_\gamma$ совпадают;

c3) $\mathfrak{g}_\gamma/\mathfrak{h}_Q = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ и при этом H_Q -инвариантные подпространства в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ совпадают с H -инвариантными (достаточно наложить это условие на M_γ при $\gamma = Q$);

c4) многогранник Ньютона однородного пространства M_γ содержится в грани γ ; многогранник Ньютона (см. п. 1.5) определен в силу условия c1);

c5) оператор Риччи метрики $g_t^{M_\gamma}$ в точке $eH_Q \in M_\gamma$ совпадает с оператором

$$(\lambda_1)_\gamma \mathbf{1}_1 \oplus \cdots \oplus (\lambda_d)_\gamma \mathbf{1}_d,$$

в частности, при $\gamma = Q$ – с оператором Риччи метрики g_t^M в точке $eH \in M$ (для любого $t \in (\mathbb{C} \setminus 0)^d$); таким образом, уравнение Эйнштейна для метрики $g_t^{M_\gamma}$ совпадает с (1.2) и, в частности, при $\gamma = Q$ совпадает с (1.1).

Комплекс $\{M_\gamma\}$ называется *совершенным*, если каждая грань γ совпадает с многогранником Ньютона для M_γ (короче, $\gamma = P_{M_\gamma}$), и, в частности, $Q = P$.

Унимодулярность каждой группы G_γ , $\emptyset \subset \gamma \subset Q$, следует по условию c2) из унимодулярности G_Q , а по условиям c3) и c5) – из унимодулярности G (см. п. 1.7.1, (c)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть G – унимодулярная группа Ли, H – её компактная подгруппа, $M = G/H$ – связное однородное пространство с однократным спектром представления изотропии, точно такое, как в п. 0.1. Пусть $P = P_M$ – многогранник Ньютона многочлена Лорана

$$s(t) = s_M(t) := (\text{скалярная кривизна инвариантной метрики } g_t^M).$$

1) Существует совершенный комплекс (СК) однородных пространств

$$\{M_\gamma = G_\gamma/H_P : \emptyset \subset \gamma \subset P\},$$

ассоциированный с $M = G/H$.

2) Таким образом, если $\nu(M) > 0$, т.е. $\dim(P) = d - 1$, то появление дефекта $\nu(M) - \mathcal{E}(M) > 0$ эквивалентно существованию инвариантной комплексной метрики Эйнштейна $g_t^{M_\gamma}$ в $M_\gamma = G_\gamma/H_P$ для некоторой грани γ , $\emptyset \subsetneq \gamma \subsetneq P$; здесь $\{M_\gamma\}$ – произвольный СК из утверждения 1).

3) Если $\mathcal{C}(P) = \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ и группа G почти эффективно действует в $M = G/H$, то три набора $\{M_\gamma\}_{\gamma \subset P}$ из (3.2)–(3.4) являются СК такими, как в утверждении 1).

4) Пользуясь теоремой 2.1, представим односвязную накрывающую $\widetilde{M}$ многообразия M в двух формах: $\widetilde{M} = J/J_{x_0}$ и $\widetilde{M} = \widehat{G}/\widehat{H}$, таких, что $\mathcal{C}(P) = \mathfrak{C}(\mathfrak{j}) = \mathfrak{C}(\widehat{\mathfrak{g}})$. Тогда определения СК, ассоциированных с J/J_{x_0} , $\widehat{G}/\widehat{H}$ и G/H , совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\implies$ 2) непосредственно вытекает из предложения 1.2 и следствия 1.2, 1). Импликация 3), 4) $\implies$ 1) очевидна. Докажем утверждение 3). По условию из 3) имеем

$$\mathcal{C}(P) = \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \{\text{допустимые фильтрации алгебры Ли } \mathfrak{g}\}.$$

Это дает набор алгебр Ли $(\mathfrak{g}_\gamma)_{\emptyset \subset \gamma \subset P}$, где $\mathfrak{g}_P = \mathfrak{g}$ (см. лемму 3.1). В п. 3.1.2 (см. (3.2)–(3.4)) построены три набора $\{M_\gamma = G_\gamma/H_P\}_{\emptyset \subset \gamma \subset P}$ (где $\text{Ad}_{\mathfrak{g}_\gamma}(H_P) = \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$). Для этих наборов выполняются условия c1)–c3). В силу $\mathfrak{g}_P = \mathfrak{g}$

группа G_P , а тогда и все группы G_γ являются унимодулярными. В пп. 5.2 и 5.3 (леммы 5.3 и 5.4) приводятся формулы для $s_M(t)$. Сравнивая $s_{M_\gamma}(t)$ и $s_\gamma(t) = (s_M)_\gamma(t)$, получаем

$$s_{M_\gamma}(t) = (s_M)_\gamma(t) \quad \text{для любой грани } \gamma, \emptyset \subset \gamma \subset P, \quad \text{при любом } t. \quad (3.5)$$

Из (3.5) и предложения 1.4 следуют остальные свойства с4), с5) и равенство $P_{M_\gamma} = \gamma$. Это доказывает утверждение 3). Утверждение 4) вытекает из следующего замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3 (о замене G/H на G_1/H_1). Пусть G_1 – другая группа Ли, G_1/H_1 – связное однородное пространство, где H_1 компактна, и существует локальный диффеоморфизм многообразий G_1/H_1 и G/H , отождествляющий семейства всех G - и G_1 -инвариантных римановых метрик (структуры однородных пространств игнорируются). Тогда:

– группа G_1 снова унимодулярна (по формуле Гильберта–Йенсена; см. п. 1.7.1, (с) или § 4);

– подгруппа H_1 дает однократный спектр представления изотропии (очевидно);

– определения СК, ассоциированных с G_1/H_1 и G/H , совпадают.

Например, $M = G/H$ можно заменить на $M_P = G_P/H_P$ из п. 3.1.2, (а) и (b).

3.2.2. Случай однородного пространства полупростой группы Ли G . Суммируем результаты, относящиеся к случаю полупростой группы G .

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть G – компактная (соответственно, некомпактная) полупростая группа Ли, а $M = G/H$ – однородное пространство из п. 0.1. Пусть $\{G_\gamma/H_P\}_{\gamma \subset P}$ – совершенный комплекс однородных пространств, ассоциированный с $M = G/H$. Имеют место следующие утверждения.

1) Число Ньютона положительно, $\nu(M) > 0$.

2) Каждая инвариантная метрика Эйнштейна в G_γ/H_P при $\gamma \neq P$ является риччи-плоской.

3) Таким образом, наличие дефекта $\nu(M) - \mathcal{E}(M) > 0$ эквивалентно существованию инвариантной комплексной риччи-плоской метрики $g_t^{M_\gamma}$ в однородном пространстве $M_\gamma = G_\gamma/H_P$ для некоторой собственной грани γ многогранника P , $\emptyset \subsetneq \gamma \subsetneq P$.

4) Существует указанный выше комплекс $\{G_\gamma/H_P\}_{\gamma \subset P}$, где группа G_P компактна (соответственно, редуктивна).

При $\nu(M) - \mathcal{E}(M) > 0$ мы будем говорить, что M обладает положительным дефектом, накопленным в сжатых многообразиях M_γ с инвариантными комплексными риччи-плоскими метриками. Далее мы рассмотрим два примера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ – любая грань многогранника Ньютона $P = P_M$ однородного пространства $M = G/H$. Пусть P_{M_γ} – многогранник Ньютона однородного пространства $M_\gamma = G_\gamma/H_P$. Тогда $P_{M_\gamma} = \gamma$ по определению совершенного комплекса. Согласно предложению 1.5 P является удобным многогранником, т.е. $\nu(M) > 0$ и $-\mathbf{m} \notin \text{aff}(P_{M_\gamma})$ при $\gamma \neq P$. Отсюда по следствию 1.2, 2) любая инвариантная метрика Эйнштейна в $M_\gamma = G_\gamma/H_P$ при $\gamma \neq P$ будет риччи-плоской. Этим доказаны утверждения 1)–3) теоремы согласно утверждению 2) предложения 3.1.

Докажем утверждение 4) теоремы. Из утверждений 3), 4) предложения 3.1 следуют различные конструкции совершенного комплекса $\{M_\gamma\}$. При этом если (полупростая) группа G компактна, то $M_P = G_P/H_P$ компактно, а тогда и группа G_P компактна.

Остается добиться редуктивности группы G_P в случае некомпактной группы G , например, следующим образом. Начнем построение с однородного пространства (с односвязной комплексификацией) ${}''M_P = G_2(\mathfrak{t})/H$ (см. (3.3)), где $\mathfrak{t} = (j, j_{x_0}, J_{x_0})$ или $\mathfrak{t} = (\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{h}}, \hat{H})$ (см. теорему 2.1). Тогда $\mathcal{C}(P) = \mathfrak{C}(j) = \mathfrak{C}(\hat{\mathfrak{g}})$. Алгебра Ли j или $\hat{\mathfrak{g}}$ группы $G_2(\mathfrak{t})$ редуктивна.

Утверждается, что в обоих случаях максимальная связная коммутативная нормальная подгруппа группы $G_2(\mathfrak{t})$ компактна, т. е. является тором T^k . В первом случае это утверждение следует из леммы 2.3, 2); ср. с леммами 5.7 и 5.3, 3). Во втором случае утверждение легко следует из описания $\hat{H}$ в теореме 2.1.

Теперь можно представить группы $G_2(\mathfrak{t})^{\mathbb{C}}$, $G_2(\mathfrak{t})$ и H соответственно в виде $G_2(\mathfrak{t})^{\mathbb{C}} = F^{\mathbb{C}}/C$, $G_2(\mathfrak{t}) = F/C$ и $H = \tilde{H}/C$, где $F^{\mathbb{C}}$ – комплексная группа Ли, $C \subset F^{\mathbb{C}}$ – её конечная центральная подгруппа, $F \subset F^{\mathbb{C}}$ – её вещественная форма и $\tilde{H} \subset F$ – компактная подгруппа, так что ${}''M_P^{\mathbb{C}} = F^{\mathbb{C}}/\tilde{H}^{\mathbb{C}}$, ${}''M_P = F/\tilde{H}$, $F := \tilde{H} \cdot F^0$, F^0 – связная компонента группы F , $F^0 = T^k \times \Sigma$, $(F^{\mathbb{C}})^0 = (\mathbb{C} \setminus 0)^k \times \Sigma^{\mathbb{C}}$, $\Sigma^{\mathbb{C}}$ – связная односвязная комплексная полупростая группа Ли, Σ – её вещественная форма, определенная вещественной структурой на $\Sigma^{\mathbb{C}}$, группы F и Σ транзитивно почти эффективно действуют в ${}''M_P$, а группы $F^{\mathbb{C}}$ и $\Sigma^{\mathbb{C}}$ – в ${}''M_P^{\mathbb{C}}$.

Из односвязности $\Sigma^{\mathbb{C}}$ следует связность и редуктивность Σ . Отсюда $F^0 = T^k \times \Sigma$, а тогда и $F := \tilde{H} \cdot F^0$ – тоже редуктивные ($\mathbb{R}$ -алгебраические) группы.

Определим набор $\{M_\gamma = G_\gamma/H_P\}$ формулой (3.4), где по доказанному группа $G_P := F$ редуктивна и почти эффективна, а $H_P := \tilde{H}$. Набор $\{M_\gamma\}$ является искомым совершенным комплексом однородных пространств (см. утверждение 3) предложения 3.1).

3.2.3. Случай однородного пространства G/H класса $\mathbf{a}$. Примеры. Напомним, что однородное пространство $M = G/H$ полупростой группы Ли G принадлежит классу $\mathbf{a}$, если и только если $\mathcal{C}(P) = \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ (предложение 2.2).

Из утверждения 3) предложения 3.1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть G – полупростая группа Ли. Тогда формула (3.4), где $G_P = G$, $H_P = H$, определяет совершенный комплекс однородных пространств в точности при $M = G/H \in \mathbf{a}$.

Вообще, если G полупроста, то над двойственным многогранником $Q \subset D$ конуса $\mathcal{C}_+(P) = \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ существует комплекс однородных пространств $M_\gamma = G_\gamma/H$ такой, что $M_Q = M$ и $G_Q = G$, заданный формулой (3.4), где γ пробегает грани Q . При $\mathcal{C}(P) = \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ (т. е. при $P = Q$) он является совершенным комплексом.

Заметим, что классу $\mathbf{a}$ принадлежат все однородные пространства G/H с многогранниками Ньютона Δ , IV , П из п. 1.5 (в силу замечания 1.1, 2)). Рассмотрим два примера.

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим флаговые пространства $M = G/H$ с многогранником Ньютона $\text{IV} = \text{I} \times \Delta_2$ (см. пример 1.3) и числом Ньютона $\nu(M) = 12$; в частности,

$$\text{Sp}_{2n}/\text{U}_n \times \text{U}_n, \quad n \geq 1, \quad \text{SO}_{4n}/\text{U}_n \times \text{U}_n, \quad n \geq 2, \quad \text{SO}_n/T^2 \times \text{SO}_{n-4}, \quad n \geq 7.$$

Фиксируем грань $\gamma = \gamma_0$ трехмерной призмы IB – четырехугольник с вершинами v_1, v_2, u_1, u_2 , и для каждого из только что перечисленных пространств $M = G/H$ построим сжатое однородное пространство $M_\gamma = G_\gamma/H$ вида (3.4), а именно

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(\mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^{2n}) \rtimes (\operatorname{Sp}_n \times \operatorname{Sp}_n) / \operatorname{U}_n \times \operatorname{U}_n, \\ & (\mathbb{R}^{2n} \otimes \mathbb{R}^{2n}) \rtimes (\operatorname{SO}_{2n} \times \operatorname{SO}_{2n}) / \operatorname{U}_n \times \operatorname{U}_n, \\ & (\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^{n-4}) \rtimes (\operatorname{SO}_4 \times \operatorname{SO}_{n-4}) / T^2 \times \operatorname{SO}_{n-4} \end{aligned}$$

соответственно. В M_γ существует семейство G_γ -инвариантных риччи-плоских метрик $g_t^{M_\gamma}$, $t = (t_1, t_2, t_3, t_4)$, заданное уравнениями

$$t_3 t_4^{-1} = -1, \quad t_1 t_2^{-1} = c \pm \sqrt{c^2 - 1},$$

где компоненты (t_1, t_2) и (t_3, t_4) метрики отвечают некомпактному и компактному направлениям в M_γ и $c = \frac{2n+1}{n}, \frac{2n-1}{n}, \frac{n-2}{n-4}$ соответственно ($c^{-1} = 2a_{1,2,3} = 2a_{1,2,4}$; см. пример 1.1). Каждое из перечисленных пространств $M = G/H$ обладает дефектом $12 - 10 = 2$, накопленным в сжатом многообразии $M_\gamma = G_\gamma/H$, где $\gamma = \gamma_0$. Для всех остальных пространств M имеем $\mathcal{E}(M) = \nu(M) = 12$ (см. п. 7.2).

Перейдем к следующей серии пространств G/H . Пусть $G = \operatorname{SU}_n, \operatorname{Sp}_n, \operatorname{SO}_n$. Воспользуемся стандартным вложением $G \subset \operatorname{GL}(n, K)$, где $K = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{R}$ соответственно, и обозначим через $H = H(n_1, \dots, n_m) \subset G$ наибольшую связную подгруппу группы G , сохраняющую флаг

$$K^{n_1} \subset K^{n_1+n_2} \subset \dots \subset K^{n_1+\dots+n_m} = K^n.$$

Пусть $Z = Z(n_1, \dots, n_m) \subset \operatorname{GL}(n, K)$ – наибольшая (нильпотентная) подгруппа группы $\operatorname{GL}(n, K)$, сохраняющая тот же флаг и тождественно действующая на всех факторпространствах K^{n_i} , $i = 1, \dots, m$. Группа H действует на группе Z сопряжениями.

Допустим, что H не имеет в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ инвариантных векторов, а $m > 2$. Тогда G/H удовлетворяет условиям из п. 0.1 (очевидно) и $G/H \in \mathbf{a}$ (следствие 2.5).

Имеется сжатие однородного пространства G/H в nilпотентное групповое многообразие Z , рассматриваемое как однородное пространство $Z \rtimes H/H$ вида (3.4).

Далее $m = 4$. Опишем инвариантные риччи-плоские метрики в Z . Для этого введем в пространстве всех $(Z \rtimes H)$ -инвариантных метрик в Z , где группа Z действует слева, естественные координаты $t = (t_{ij})_{1 \leq i < j \leq 4}$. Легко проверяется следующая лемма.

ЛЕММА 3.2. Пусть $m = 4$, $n_i \geq 1$, $i = 1, \dots, 4$. Если в группе Z существует левоинвариантная H -инвариантная риччи-плоская метрика g , то $n_1 n_3 = n_2 n_4$. При этом $g = g_t$, где $n_1 t_{14} t_{23} + n_2 t_{13} t_{24} = n_2 t_{13} t_{34} + n_3 t_{12} t_{24} = 0$. В частности, этим уравнениям удовлетворяет метрика со следующими координатами $t = (t_{ij})_{1 \leq i < j \leq 4}$:

$$t_{12} = t_{13} = n_1, \quad t_{23} = -t_{24} = t_{14} = n_2, \quad t_{34} = n_3.$$

Обратно, если $n_1 n_3 = n_2 n_4$, то все эти метрики g_t в Z являются риччи-плоскими.

Перейдем от метрик в Z к метрикам в G/H . Пусть G/H удовлетворяет условиям примера 1.6. Тогда многочлен $s(t)$ удовлетворяет условиям из примера 1.4. Напомним, что $t = (t_{ij})_{1 \leq i < j \leq 4}$, а многогранником Ньютона $Nw(s)$ служит пятимерный многогранник $\Pi = \Delta_3 \times \Delta_2$ в $\mathbb{R}^6$ с вершинами $a_i - b_q$, $i = 1, 2, 3, 4$, $q = 1, 2, 3$. (Здесь $a_i = \mathbf{1}_{jk} + \mathbf{1}_{kl} + \mathbf{1}_{lj}$ при $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, $b_1 = \mathbf{1}_{12} + \mathbf{1}_{24} + \mathbf{1}_{43} + \mathbf{1}_{31}$, $b_2 = \mathbf{1}_{12} + \mathbf{1}_{23} + \mathbf{1}_{34} + \mathbf{1}_{41}$, $b_3 = \mathbf{1}_{13} + \mathbf{1}_{32} + \mathbf{1}_{24} + \mathbf{1}_{41}$, $\{\mathbf{1}_{ij} = \mathbf{1}_{ji}\}_{1 \leq i < j \leq 4}$ – базис в $\mathbb{R}^6$.)

Обозначим через $\gamma_p \subset \Pi$ четырехмерную грань с вершинами $a_i - b_q$, $a_i - b_r$, $i = 1, 2, 3, 4$, где $\{p, q, r\} = \{1, 2, 3\}$, и через $\gamma_p^{ij} \subset \gamma_p$, где $1 \leq i < j \leq 4$, двумерную квадратную грань с вершинами $a_k - b_q$, $a_k - b_r$, $k = i, j$. Тогда

$$\Pi = \Delta_3 \times \Delta_2, \quad \gamma_p \simeq \Delta_3 \times I, \quad \gamma_p^{ij} \simeq I \times I.$$

Квадратная грань $\gamma_3^{23} \subset \Pi$ служит многогранником Ньютона однородного пространства $Z \rtimes H/H \simeq Z$. Поэтому $Z = Z(n_1, \dots, n_4) = G_\gamma/H$ при $\gamma = \gamma_3^{23}$.

ПРИМЕР 3.2. Рассмотрим перечисленные в примере 1.6 однородные пространства $M = G/H$ компактных классических групп $G = \mathrm{SU}_n, \mathrm{Sp}_n, \mathrm{SO}_n$ с многогранником Ньютона $\Pi = \Delta_3 \times \Delta_2$ и числом Ньютона $\nu(M) = 80$. Здесь подгруппы $H = H(n_1, \dots, n_4)$ определяются подходящими разбиениями $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$. Для каждого пространства $M = G/H$ построим сжатые однородные пространства $M_\gamma = G_\gamma/H$ вида (3.4):

(а) $M_\gamma = Z(n_1 + n_4, n_2 + n_3) \rtimes H(n_1 + n_4, n_2 + n_3)/H(n_1, n_4, n_2, n_3)$ при $\gamma = \gamma_1$, где, очевидно, группа $Z(p, q)$ коммутативна;

(б) $M_\gamma \simeq Z = Z(n_3, n_1, n_2, n_4), Z(n_1, n_3, n_4, n_2), Z(n_2, n_1, n_3, n_4), Z(n_1, n_2, n_4, n_3)$ соответственно при $\gamma = \gamma_2^{12}, \gamma_2^{34}, \gamma_3^{13}, \gamma_3^{24}$; в этом случае $G_\gamma = Z \rtimes H$.

По лемме 3.2 G_γ -инвариантные риччи-плоские метрики в каждом из четырех групповых многообразий (б) существуют, если и только если $n_1 n_4 = n_2 n_3$. Запишем теперь условие существования такой метрики в пространстве (а), т. е. при $\gamma = \gamma_1 \simeq \Delta_3 \times I$:

$$\frac{(n + \varepsilon)^2 - (n_1 + n_4)^2}{n_1 n_4} = \frac{(n + \varepsilon)^2 - (n_2 + n_3)^2}{n_2 n_3},$$

где $\varepsilon = 0, 1, -2$ соответственно для $G = \mathrm{SU}_n, \mathrm{Sp}_n, \mathrm{SO}_n$. Если это равенство выполняется, то, обозначив через $(x - \frac{1}{x})^2$ его правую часть и введя в пространстве всех G -инвариантных метрик в M (а тем самым и в пространстве всех G_γ -инвариантных метрик в M_γ) координаты t так же, как в примере 1.1, нетрудно убедиться в том, что семейство (всех) G_γ -инвариантных риччи-плоских метрик $g_t^{M_\gamma}$, $t = (t_{ij})_{1 \leq i < j \leq 4}$, в M_γ , где $\gamma = \gamma_1$, задается формулами (см. также п. 7.3.4)

$$\frac{t_{23}}{t_{14}} = -1, \quad \frac{t_{12}}{t_{24}} = \frac{n_3 x^2 + n_2}{n + \varepsilon}, \quad \frac{t_{34}}{t_{24}} = \frac{n_1 x^2 + n_4}{n + \varepsilon}, \quad \frac{t_{13}}{t_{24}} = \frac{1}{x^2} \frac{t_{12}}{t_{24}} \frac{t_{34}}{t_{24}}.$$

Тогда имеет место утверждение (см. п. 7.3).

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$. Если $M = G/H$ обладает положительным дефектом $\delta_M = 80 - \mathcal{E}(M) > 0$, то возможны только следующие случаи:

- (а) дефект $\delta_M = 2$ накоплен в сжатом многообразии M_γ , где $\gamma = \gamma_1$;
 (б) дефект $\delta_M = 4$ накоплен в четырех сжатых риччи-плоских многообразиях M_γ , соответствующих граням $\gamma = \gamma_2^{12}, \gamma_2^{34}, \gamma_3^{13}, \gamma_3^{24}$;
 (с) дефект $\delta_M = 12$ накоплен в десяти многообразиях M_γ : пяти, приведенных в пп. (а), (б), и пяти аналогичных, где $\gamma = \gamma_2, \gamma_1^{12}, \gamma_1^{34}, \gamma_3^{23}, \gamma_3^{14}$;
 (д) дефект $\delta_M = 18$ накоплен в пятнадцати многообразиях M_γ : десяти, приведенных в пп. (а)–(с), и пяти аналогичных, где $\gamma = \gamma_3, \gamma_2^{23}, \gamma_2^{14}, \gamma_1^{13}, \gamma_1^{24}$.

Каждое из сжатых многообразий M_γ в пп. (а)–(д) дает вклад $\frac{\dim(\gamma)}{2} = 1, 2$. При $n < 44$ существуют три пространства M с $\delta_M = 2$, а именно

$$\begin{aligned} & \text{SU}_{39} / \text{S}(\text{U}_1 \times \text{U}_5 \times \text{U}_8 \times \text{U}_{25}), \quad \text{Sp}_{21} / \text{Sp}_1 \times \text{Sp}_4 \times \text{Sp}_4 \times \text{Sp}_{12}, \\ & \text{SO}_{27} / \text{SO}_5 \times \text{SO}_5 \times \text{SO}_{16}. \end{aligned}$$

3.3. Применение сжатий. В доказанной теореме 3.1 были использованы сжатия групп Ли и однородных пространств, чтобы объяснить появление дефекта $\delta_M = \nu(M) - \mathcal{E}(M) > 0$. Применим эти результаты в ситуации эквивариантного отображения $\pi: M \rightarrow M'$.

Пусть $H \subset K \subset G$ – последовательность компактных групп Ли,

$$\pi: G/H \rightarrow G/K$$

– соответствующее отображение, $M'' = K/H$, $M = G/H$, $M' = G/K$. Пусть группа G полупроста, а G/H – однородное пространство с однократным спектром представления изотропии, принадлежащее классу **a** (см. п. 2.4).

ПРИМЕР 3.3. Восьмимерное “пространство Гессе” SU_3/J (где J – конечная подгруппа из п. 0.3.7) допускает четыре таких расслоения π с плоскими слоями T^2 . Оно обладает положительным дефектом

$$\delta = \nu - \mathcal{E} = 23 - 19 = 4,$$

накопленным в четырех сжатых многообразиях вида (3.4) с плоскими инвариантными метриками⁴, точнее, в сжатиях вида $\mathbb{C}^3 \rtimes_\sigma J \cdot T^2/J$, где $J \cdot T^2 \xrightarrow{\tau} \text{SU}_3$ – подгруппа.

ВОПРОС. Когда из условия $\delta_{M''} > 0$ или $\delta_{M'} > 0$ следует, что $\delta_M > 0$?

Используя риччи-плоские сжатые многообразия M''_α , M_γ , M'_β , мы решим этот вопрос в п. 3.3.3 при следующем предположении.

Обозначим через $\tilde{G}$ почти эффективно действующую в связной компоненте M^0 слоя $M'' = K/H$ факторгруппу группы $\{k \in K: kM^0 = M^0\}$, так что $M^0 = \tilde{G}/\tilde{H}$.

Пусть группа $\tilde{G}$ полупроста, а $\tilde{G}/\tilde{H}$, G/H и G/K принадлежат классу **a**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Будем обозначать через F' , F , F'' соответственно любые допустимые фильтрации для M' , M , M'' . Четверка (F', F, F'', c) , где c – положительное число,

$$F'_a \mathfrak{g} = \mathfrak{k} + F_{ac} \mathfrak{g}, \quad F''_a \tilde{\mathfrak{g}} = F_a \mathfrak{k} / \text{Ker}(\mathfrak{h} \rightarrow \tilde{\mathfrak{h}}) \quad \text{для всякого } a \geq 0, \quad (3.6)$$

⁴Вообще, пусть $M'' = K/H$ – тор. Тогда существует аналогичное сжатие пространства M с компактным центром M'' такое, что сжатое однородное пространство допускает плоскую инвариантную метрику. Теперь из $M = G/H \in \mathbf{a}$ следует $\delta_M > 0$ (для $M \in \mathbf{c}$ возможно $\delta_M = 0$; см. пример 7.5).

называется *расщеплением*. Расщепление (F', F, F'', c) называется *регулярным*, если существует расщепление (F', Φ, F'', b) , где $b < c$.

Допустимая фильтрация F' алгебры $\mathfrak{g}$ называется *хорошей фильтрацией*, а соответствующая грань β многогранника $P_{M'}$ – *хорошей гранью*, если для каждой допустимой фильтрации F'' алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ существует регулярное расщепление (F', F, F'', c) .

Например, если $F'_0 \mathfrak{g} = \mathfrak{k}$, то F' – хорошая фильтрация и β – хорошая грань многогранника $P_{M'}$. В частности, если $F'_a \mathfrak{g}$ равно 0 при $a < 0$, $\mathfrak{k}$ при $0 \leq a < 1$ и $\mathfrak{g}$ при $1 \leq a$, то F' является хорошей фильтрацией. Поэтому пустая грань $\emptyset$ в $P_{M'}$ является хорошей гранью.

Таким образом, естественное отображение $\rho: \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{g}})$ конусов допустимых фильтраций является сюръективным. Это значит, что для каждой грани α многогранника Ньютона $P_{M''} := P_{M^0}$, где $M'' \subset M$ – слой π , существует включение $M''_\alpha \subset M_\gamma$ сжатий M''_α и M_γ вида (3.4) (для некоторой грани γ многогранника P_M), что поясняется также в п. 6.3. Более того, в п. 6.3 будет доказано сформулированное ниже предложение 3.2.

3.3.1. Соответствие регулярных расщеплений прямым произведениям римановых пространств $M''_\alpha \times M'_\beta$. Пусть задано расщепление (F', F, F'', c) . Пусть β, γ, α – соответственно грани многогранников Ньютона $P_{M'}, P_M, P_{M''}$, заданные фильтрациями F', F, F'' .

Фиксируем любое $t \in (\mathbb{R}_{>0})^d$ такое, что проекция $\pi: M \rightarrow M'$ является римановой субмерсией относительно метрики g_t^M . Тем самым слой M'' и база M' субмерсии π снабжаются метриками, индуцированными метрикой g_t^M .

Тогда и сжатые однородные пространства $M''_\alpha, M'_\beta, M_\gamma$ вида (3.4) автоматически снабжаются инвариантными метриками, однозначно зависящими от t .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *При этих условиях M''_α является вполне геодезическим подмногообразием в $(M_\gamma, g_t^{M_\gamma})$. Вложение $M''_\alpha \subset M_\gamma$ продолжается до локальной изометрии из прямого произведения римановых пространств $M''_\alpha \times M'_\beta$ в пространство M_γ , если и только если F' – хорошая фильтрация и (F', F, F'', c) – регулярное расщепление.*

В § 6 для доказательства предложения 3.2 строится риманова субмерсия со вполне геодезическими слоями $(\psi, g_t^{M_\gamma})$, $\psi: M_\gamma \rightarrow M'_\beta$, со слоем M''_α и базой $\psi(M_\gamma) = M'_\beta$.

3.3.2. Грань $\gamma = \alpha \boxtimes \beta$. Пусть F' – хорошая фильтрация, (F', F, F'', c) – регулярное расщепление, β, γ, α – грани из п. 3.3.1. Тогда справедлива следующая

ЛЕММА 3.3. *Грань $\gamma \subset P_M$ (обозначаемая через $\alpha \boxtimes \beta = \gamma$) зависит только от грани $\alpha \subset P_{M''}$ и хорошей грани $\beta \subset P_{M'}$. При этом выполняются равенства $\emptyset = \emptyset \boxtimes \emptyset$, $\alpha \boxtimes \beta = \text{Conv}(\alpha \boxtimes \emptyset, \emptyset \boxtimes \beta)$, $(\alpha \boxtimes \emptyset) \cap (\emptyset \boxtimes \beta) = \emptyset$; $\alpha \boxtimes \emptyset$ является наименьшей гранью в P_M , содержащей $\alpha \subset P_{M''}$, при естественном включении $P_{M''} \subset P_M$. Если $\alpha \boxtimes \beta = \alpha_1 \boxtimes \beta_1$, то $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \beta_1$.*

Вследствие этой леммы $C = AB + A + B$, где C – число собственных граней $\gamma = \alpha \boxtimes \beta$, $\alpha \neq P_{M''}$, многогранника P_M , A – число всех граней $\emptyset \subsetneq \alpha \subsetneq P_{M''}$, B – число всех хороших граней $\emptyset \subsetneq \beta \subset P_{M'}$.

3.3.3. Теорема об эквивариантном отображении π . Выведем из предложения 3.2 следующую теорему (ср. с предложением 1.3).

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть слой M'' , тотальное пространство M и база M' отображения π – компактные однородные пространства класса **a**. Тогда:

- (а) если слой M'' обладает дефектом $\nu(M'') - \mathcal{E}(M'') > 0$, то $\nu(M) > \mathcal{E}(M)$;
- (б) если база M' обладает дефектом $\nu(M') - \mathcal{E}(M') > 0$, накопленным в сжатых однородных многообразиях M'_β с инвариантными комплексными риччи-плоскими метриками, и если некоторое из этих M'_β соответствует хорошей собственной грани β многогранника Ньютона $P_{M'}$, то $\nu(M) > \mathcal{E}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В предложении 3.2 заведомо можно перейти к $t \in (\mathbb{C} \setminus 0)^d$. Тогда для доказательства теоремы остается заметить, что $M''_\emptyset$ и $M'_\emptyset$ – евклидовы пространства, и применить к $M_{\alpha \boxtimes \emptyset} \sim M''_\alpha \times M'_\emptyset$ и $M_{\emptyset \boxtimes \beta} \sim M''_\emptyset \times M'_\beta$ теорему 3.1.

3.3.4. Число риччи-плоских сжатий. В заключение определим понятие риччи-плоских сжатий. Число этих сжатий полезно при оценке дефекта $\nu(M) - \mathcal{E}(M)$ в теореме 3.2. Для каждой непустой грани γ многогранника $P = P_M$ отождествим группу $\mathbb{T} = (\mathbb{C} \setminus 0)^d$ с пространством всех G_γ -инвариантных комплексных метрик в однородном пространстве $M_\gamma = G_\gamma/H$. Пусть $\mathbb{T}^1 \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^d$ – подгруппа гомотетий, $\mathbb{T}^1 = (\mathbb{C} \setminus 0)^1$, и $\mathbb{T}_\gamma \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^d$ – подгруппа с алгеброй Ли $\mathbb{C}\gamma^\perp$.

Геометрический смысл алгебры Ли $\gamma^\perp$ и группы $\mathbb{T}_\gamma$ ясен из следствия 2.3 (поскольку $\gamma = P_{M_\gamma}$ – многогранник Ньютона для M_γ).

Пусть $[\gamma, t]$ – образ любой точки $t \in \mathbb{T}$ при естественном отображении $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}/(\mathbb{T}^1 \cdot \mathbb{T}_\gamma)$. В частности, $[P, t]$ – гомотетический класс метрики g_t^M (здесь $M_P = M$, $H_P = H$, как в (3.4)). Обозначим через $Z_\gamma(M)$ множество точек $[\gamma, t]$, где $g_t^{M_\gamma}$ – метрика Эйнштейна, а через $Z(M)$ и $Z_\infty(M)$ – соответственно объединения множеств $Z_\gamma(M)$ по всем непустым и всем собственным граням γ многогранника Ньютона P .

Точки $[\gamma, t]$ из $Z_\infty(M)$ называются *риччи-плоскими сжатиями* (см. теорему 3.1).

ПРИМЕР 3.4. Для любого пространства $M = G/H$ из примеров 3.1 и 3.2 (см. п. 3.2.3) число риччи-плоских сжатий $[\gamma, t]$ конечно и равно $\nu(M) - \mathcal{E}(M)$; см. далее § 7.

Вернемся к рассмотрению прежних M , M' , M'' . Пусть $Z_\infty^*(M')$ – объединение $Z_\beta(M')$ по всем хорошим собственным граням β многогранника $P_{M'}$.

Используя предложение 3.2 (его вариант с $t \in (\mathbb{C} \setminus 0)^d$) и лемму 3.3, нетрудно доказать следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $Z_\infty(M'')$, $Z_\infty^*(M')$, $Z_\infty(M)$ и $Z(M)$ – конечные множества из a , b , c , t элементов соответственно (где M'' , M' , M из класса **a**). Тогда

$$a + b \leq c \leq \nu(M) - \mathcal{E}(M), \quad ab = 0.$$

3.3.5. Замечания. В следующих замечаниях рассматриваются торические многообразия $V = V(M)$ и $\tilde{V} = \tilde{V}(M)$, подчиненные многограннику $P = P_M$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Понятие риччи-плоского сжатия проясняется при переходе к подходящей торической компактификации $V(M)$ пространства гомотетических классов $\mathbb{T}/\mathbb{T}^1 = (\mathbb{C} \setminus 0)^{d-1}$. Такой компактификацией является нормальное

торическое многообразие $V(M)$, ассоциированное с многогранником $P = P_M$:

$$V(M) = \bigcup_{\emptyset \subsetneq \gamma \subset P} \mathbb{T}/(\mathbb{T}^1 \cdot \mathbb{T}_\gamma).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5 (накрытие $\tilde{V}(M) \rightarrow V(M)$). Рассмотренное в п. 3.1.1 замыкание $\overline{O} = \cup O_\gamma$ орбиты группы $(\mathbb{R}_{>0})^d$ в пространстве $\text{Hom}(\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ после исключения точки $O_\emptyset$, комплексификации, факторизации по однопараметрической группе и нормализации становится 2^n -листной разветвленной накрывающей $\tilde{V}(M)$ для $V(M)$ (для некоторого $n \geq 0$). Подобно многограннику Ньютона P_M , это покрытие мало зависит от M . Это связано с группой $A \cong (\mathbb{Z}_2)^k$ инволютивных автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. п. 2.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Пусть M – флаговое пространство, не являющееся эрмитовым симметрическим. Тогда $n = d - 1 - k$ и $k = b_2(M)$ – второе число Бетти. Пяти простым многогранникам Ньютона $P = P_M$ из п. 0.3.6, 2)–6) соответственно отвечают гладкие торические многообразия $\tilde{V}(M) = \mathbb{CP}^1, \mathbb{CP}^2, \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^2, \mathbb{CP}^3 \times \mathbb{CP}^2$ и комплексная поверхность, полученная раздутием одной точки в $\mathbb{CP}^2$, $2^n = 1, 1, 2, 4, 2$.

Если P не является простым многогранником, то оба торических многообразия $\tilde{V}(M)$ и $V(M)$ заведомо имеют особые точки. Точнее, для гладкости каждого из них вдоль орбиты тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^{d-1}$, отвечающей грани $\gamma \subsetneq P$, необходимо, чтобы ортогональная к γ грань конуса $\mathcal{C}(P)$ (т. е. по существу конуса всех неположительных аффинно-линейных функций на многограннике P) была симплицальным конусом. Это известное общее свойство торических многообразий. Судя по некоторым наблюдениям, кажется, что вдоль такой орбиты бывает гладким скорее многообразие $\tilde{V}(M)$, чем $V(M)$.

§ 4. Доказательство формулы Гильберта–Йенсена

Докажем вариант теоремы Гильберта для G -инвариантных псевдоримановых метрик g в $M = G/H$, использованный в п. 1.7.2, а также в пп. 2.3 и 3.2.1. Пусть s_g – скалярная кривизна метрики g , $|\Omega_g|$ – ее плотность, δ_g – оператор дивергенции симметрических p -форм, понижающий степень p на 1, U – окрестность с компактным замыканием точки $x_0 = eH$ в G/H , h – любая G -инвариантная симметрическая билинейная форма в G/H , $g(h', h'')$ – поточечное скалярное произведение однотипных тензоров h' и h'' в G/H .

Имеем

$$\left. \frac{d}{d\tau} \Phi_{g+\tau h}^{(\mu)} \right|_{\tau=0} = |\Omega_g|^\mu g \left(\frac{\mu}{2} s_g g - \text{ricci}_g, h \right) + |\Omega_g|^\mu \left(\int_U |\Omega_g| \right)^{-1} \gamma_{g,h},$$

где величина

$$\gamma_{g,h} = \left(\frac{d}{d\tau} \right)_{\tau=0} \int_U s_{g+\tau h} |\Omega_{g+\tau h}| - \int_U g \left(\frac{1}{2} s_g g - \text{ricci}_g, h \right) |\Omega_g|$$

не зависит от параметра $\mu \geq 0$ (полезно взять $\mu = 1$). По теореме Гильберта $\gamma_{g,h}$ обращается в нуль при замене h сосредоточенным внутри U финитным возмущением метрики g .

Перейдем к доказательству утверждений (а) и (с) из п. 1.7.1. Требуется доказать:

(а) если группа Ли G унимодулярна, то $\gamma_{g,h} = 0$ для всех инвариантных форм h ;

(с) обратное к (а) утверждение в случае римановой метрики g .

В силу инвариантности g и h имеем $\gamma_{g,h} = \int_U (\delta_g(\delta_g h)) |\Omega_g|$ (ср. с [2]); тогда при естественных предположениях об U получаем $\gamma_{g,h} = -\int_{\partial U} (V_h \lrcorner \Omega_g)$, где $V_h = g^{-1}(\delta_g h) - G$ -инвариантное векторное поле (и. в. п.) в M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (а). Если в группе Ли G , или, что равносильно (ввиду компактности H и связности $M = G/H$), в связной компоненте единицы G^0 группы G существует двусторонне инвариантная мера, то, очевидно, производная Ли $L_W \Omega_g$ равна нулю для каждого и. в. п. W в M ; поэтому, очевидно, $\gamma_{g,h} = 0$ для всех h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (с). Препятствие к унимодулярности группы G выражается замкнутой левоинвариантной (т. е. биинвариантной) 1-формой $\zeta(X) = \text{trace}(\text{ad}(X))$ в G^0 . Форма ζ опускается на $M = G^0/H \cap G^0$, и $L_W \Omega_g = -\zeta(W) \Omega_g$ для всякого и. в. п. W в M . Рассмотрим и. в. п. $Z = g^{-1}\zeta$ в M . Введем в M симметрическую билинейную форму $h_0 := \frac{1}{2} L_Z g$. Она G -инвариантна. Воспользуемся равенством, которое проверим далее:

$$\frac{1}{4} |L_Z g|^2 = |h_0|^2 = \delta_g(\delta_g h_0), \quad \text{откуда} \quad \gamma_{g,h_0} = |h_0|^2 \int \Omega_g \geq 0, \quad (4.1)$$

где $|h|^2 = g(h, h)$ – квадрат нормы относительно g . Если $h_0 = 0$, Z – киллингово векторное поле, то $L_Z \Omega_g = -g(Z, Z) \Omega_g = 0$ и $Z = 0$, т. е. группа G унимодулярна. Итак, число $\gamma_{g,h_0} \geq 0$ выражает отклонение от унимодулярности для группы G .

Проверим (4.1). Пусть δ_g^* – дифференциальный оператор в M , формально сопряженный к оператору δ_g (см. [2]); $\eta(\cdot) = g(Y, \cdot)$ – любая G -инвариантная 1-форма в M ; $h(\cdot, \cdot) = g(A \cdot, \cdot)$; пусть φ – неотрицательная гладкая финитная функция в U . Тогда

$$\begin{aligned} g(\delta_g^* \eta, h) \int \varphi \Omega_g &= \langle \delta_g^* \eta, \varphi h \rangle = \langle \eta, \delta_g(\varphi h) \rangle = \langle \eta, (\delta_g h) \varphi - d\varphi \circ A \rangle \\ &= g(\eta, \delta_g h) \int \varphi \Omega_g - \int (AY \cdot \varphi) \Omega_g \\ &= g(\eta, \delta_g h) \int \varphi \Omega_g + \int \varphi L_{AY} \Omega_g = g(\eta, \delta_g h) \int \varphi \Omega_g - h(Y, Z) \int \varphi \Omega_g. \end{aligned}$$

Сократив на $\int \varphi \Omega_g$, получаем (i) $g(\delta_g^* \eta, h) = g(\eta, \delta_g h) - h(Y, Z)$. Воспользуемся тем, что $h_0(Z, Z) = Z(g(Z, Z)) = 0$. Из тождеств (ii) $\delta_g^* \xi = +\frac{1}{2} L_X g$, где $\xi(\cdot) = g(X, \cdot)$ – любая гладкая 1-форма в M , и (iii) $\delta_g \eta = \eta(Z) = g(Y, Z)$ следует

$$|h_0|^2 := \frac{1}{4} |L_Z g|^2 \stackrel{(ii)}{=} g(\delta_g^* \zeta, \delta_g^* \zeta) \stackrel{(i)}{=} g(\zeta, \delta_g \delta_g^* \zeta) \stackrel{(iii)}{=} \delta_g(\delta_g h_0).$$

§ 5. Доказательство теоремы двойственности

Докажем предложение 2.1 и теорему 2.1 о двойственности между многогранником Ньютона P и конусом допустимых фильтраций подходящей алгебры Ли.

Пусть $M = G/H$ – риманово однородное пространство унимодулярной группы Ли G с компактной группой изотропии H и с однократным спектром представления изотропии, удовлетворяющее условиям из п. 0.1.

В настоящем параграфе примем следующие соглашения. Пусть центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$ не пересекается с подалгеброй $\mathfrak{h}$. Пусть $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^\perp$ (всюду, кроме п. 5.3) – ортогональное дополнение подалгебры $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга $B = B_{\mathfrak{g}}$ в $\mathfrak{g}$ (очевидно, $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h} = 0$), $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \cap p^{-1}\mathfrak{x}_i$, где $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ – естественная проекция, $\mathfrak{x}_i$ – i -е неприводимое H -инвариантное подпространство в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathfrak{x}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{x}_d$, $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ – разрешимый радикал алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{r}$ – наибольший нильпотентный идеал, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ – подалгебра, определенная ниже в доказательстве леммы 5.2, $\text{center}(\mathfrak{l})$ – центр любой алгебры Ли $\mathfrak{l}$.

5.1. Доказательство предложения 2.1. Описание конуса допустимых фильтраций алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Возрастающая фильтрация F (п. 2.1) алгебры $\mathfrak{g}$ называется *допустимой*, если $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(H) \cdot F_a \mathfrak{g} = F_a \mathfrak{g}$ для всех $a \in \mathbb{R}$ и $\mathfrak{h} \subset F_a \mathfrak{g}$ при $a \geq 0$.

ЛЕММА 5.1. *Для любой допустимой фильтрации F алгебры $\mathfrak{g}$ подпространство $F_{<0} \mathfrak{g} = \bigcup_{a < 0} F_a \mathfrak{g}$, состоящее из нильпотентных элементов, содержится в $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^\perp$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

ЛЕММА 5.2. *Если подпространство $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \cap p^{-1}\mathfrak{x}_i$, $i \in \{1, \dots, d\}$, содержит хотя бы один нильпотентный элемент $X \neq 0$, то $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{n}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q \supset \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ – максимальная компактная подгруппа группы $\text{Ad}(G)$, а $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ – Q -инвариантная подалгебра Леви. Подалгебра $\mathfrak{l}$ существует (см. [10, т. 2, приложение 9]).

Пусть K , $H \subset K \subset G$, – полный прообраз Q в группе G . Очевидно, существуют $\text{Ad}(K)$ -инвариантные разложения $\mathfrak{k} = \mathfrak{t} \oplus (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{l})$, $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \oplus \text{center}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{t}_2 \oplus [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$, где $[\mathfrak{t}, \mathfrak{l}] = [\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] = 0$. Пусть $\mathfrak{l} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{l}) \oplus \mathfrak{p}$ – симметрическое разложение Картана в $\mathfrak{l}$. Тогда $B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$. Заметим⁵, что

$$\mathfrak{m} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}) + \mathfrak{p} + (\mathfrak{r} \cap \mathfrak{m}),$$

где $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ – разрешимый радикал ($\dim(\mathfrak{m}) \leq \dim(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}) + \dim(\mathfrak{p}) + \dim(\mathfrak{r} \cap \mathfrak{m})$).

Следовательно, каждое из неприводимых и попарно неэквивалентных $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ -инвариантных подпространств $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_d$, содержится хотя бы в одном из следующих трех $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ -инвариантных подпространств:

$$\mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{r} \cap \mathfrak{m}. \quad (5.1)$$

Окончательно, форма $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{m}_i}$ знакоопределена или равна нулю на $\mathfrak{m}_i$, и для подпространства $\mathfrak{m}_i$ и нильпотентного элемента $X \in \mathfrak{m}_i$ имеются только следующие возможности:

- 1) $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}_i \not\subset \mathfrak{n}$; тогда $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{m}_i} < 0$, откуда $X = 0$;
- 2) $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{p}$; тогда $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{m}_i} > 0$, откуда $X = 0$;
- 3) $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{r} \cap \mathfrak{m}$; тогда нильпотент $X \neq 0$ существует, если и только если $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{n}$.

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Для любой допустимой фильтрации F алгебры $\mathfrak{g}$ подпространство $F_{<0} \mathfrak{g} = \bigcup_{a < 0} F_a \mathfrak{g}$ содержится в её наибольшем нильпотентном идеале $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$.*

⁵В самом деле, $\mathfrak{k} + \mathfrak{l} = \mathfrak{t} + \mathfrak{l}$ трансверсально своему $B_{\mathfrak{g}}$ -ортогональному дополнению в $\mathfrak{g}$, $(\mathfrak{k} + \mathfrak{l}) \cap (\mathfrak{k} + \mathfrak{l})^\perp$, откуда $(\mathfrak{k} + \mathfrak{l}) \cap (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{l}^\perp)$, т.е. $(\mathfrak{k} + \mathfrak{p}) \cap (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r})$. Следовательно, $\mathfrak{m} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}) + \mathfrak{p} + (\mathfrak{r} \cap \mathfrak{m})$.

По сделанному в начале п. 2.1 замечанию это справедливо также для произвольной возрастающей фильтрации F компактной алгебры Ли или алгебры Ли, полученной из компактной сжатием Иненю–Вигнера (тогда форма B положительна, $B(X, X) \leq 0$, и $\text{Ker}(B) = \mathfrak{n}$, а потому каждый нильпотентный элемент $X \in \mathfrak{g}$ содержится в $\mathfrak{n}$).

Определим приближенно групповое умножение векторов $X, Y \in \mathfrak{g}$ формулой

$$X \cdot Y = X + Y + \frac{1}{2} [X, Y]$$

(начало ряда Кемпбелла–Хаусдорфа) и умножение векторных подпространств $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \subset \mathfrak{g}$ формулой

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \mathfrak{y} + [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] = \text{span}\{X \cdot Y : X \in \mathfrak{x}, Y \in \mathfrak{y}\}.$$

Тем самым множество всех подпространств в $\mathfrak{g}$ наделяется структурой коммутативной неассоциативной алгебры с идемпотентным сложением, т. е. $\mathfrak{x} + \mathfrak{x} = \mathfrak{x}$ и $\mathfrak{x} \cdot (\mathfrak{y} + \mathfrak{z}) = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} + \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{z}$, а подпространства $\mathfrak{x}$, содержащие $\mathfrak{h}$, образуют подалгебру. Таким образом построена алгебра подпространств пространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Пусть $\mathfrak{x}_i \cdot \mathfrak{x}_j \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ – произведение i -го и j -го неприводимых H -инвариантных подпространств в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Множество допустимых фильтраций алгебры Ли $\mathfrak{g}$ отождествляется с конусом всех точек $f = (f(1), \dots, f(d)) \in \mathbb{R}^d$ таких, что*

$$f(i) \geq 0 \quad \text{при} \quad \mathfrak{x}_i \not\subset p\mathfrak{n}, \quad f(i) + f(j) \geq f(k) \quad \text{при} \quad \mathfrak{x}_i \cdot \mathfrak{x}_j \supset \mathfrak{x}_k, \quad i \neq k, \quad j \neq k. \quad (5.2)$$

Двойственный конус $\mathcal{C}(P) \subset \mathbb{R}^d$ многогранника Ньютона P многочлена $s(t) \in \mathbb{R}[t, t^{-1}]$ задается следующей системой неравенств:

$$f(i) \geq 0 \quad \text{при} \quad q_i \neq 0, \quad f(i) + f(j) \geq f(k) \quad \text{при} \quad \mathfrak{x}_i \cdot \mathfrak{x}_j \supset \mathfrak{x}_k, \quad i \neq k, \quad j \neq k, \quad (5.3)$$

где q_i – коэффициент $s(t)$ при t_i^{-1} , причем $q_i = 0$ при $\mathfrak{x}_i \subset p\mathfrak{n}$.

Отсюда и из следствия 5.1 вытекает предложение 2.1.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть $f \in \mathbb{R}^d$, Φ – фильтрация $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, F – фильтрация $\mathfrak{g}$ как векторного пространства такие, что $\Phi_a = \bigoplus_{f(i) \leq a} \mathfrak{x}_i$ для всякого $a \in \mathbb{R}$, $F_a = \mathfrak{m} \cap p^{-1}\Phi_a$ при $a < 0$ и $F_a = p^{-1}\Phi_a$ при $a \geq 0$. Утверждается, что если каждое подпространство $F_a = F_a \mathfrak{g}$ при $a < 0$ содержится в наибольшем нильпотентном идеале $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$, то для тройки (f, Φ, F) эквивалентны следующие условия:

- (i) из $\mathfrak{x}_i \cdot \mathfrak{x}_j \supset \mathfrak{x}_k$, $i \neq k$, $j \neq k$, следует $f(i) + f(j) \geq f(k)$ (для любых i, j, k);
- (ii) из $\mathfrak{x}_i \subset \Phi_a$, $\mathfrak{x}_j \subset \Phi_b$ следует $\mathfrak{x}_i \cdot \mathfrak{x}_j \subset \Phi_{a+b} + \mathfrak{x}_i + \mathfrak{x}_j$ (для любых $a, b \in \mathbb{R}$);
- (iii) $[F_a, F_b] \subset F_{a+b}$ ($a, b \in \mathbb{R}$), т. е. F – допустимая фильтрация алгебры $\mathfrak{g}$.

Импlication (iii) $\implies$ (ii) $\iff$ (i) очевидны, а (ii) $\implies$ (iii) сводится к простой проверке того, что $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset F_{a+b}$ при $\mathfrak{m}_i \subset F_a$ и $\mathfrak{m}_j \subset F_b$ (где $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \cap p^{-1}\mathfrak{x}_i$) в четырех случаях:

$$a \geq 0, \quad b \geq 0; \quad a < 0, \quad a + b \geq 0; \quad a + b < 0, \quad b \geq 0; \quad a < 0, \quad b < 0.$$

Отсюда, впервые используя леммы 5.1 и 5.2 (следствие 5.1), непосредственно получаем (5.2), а выражения (5.3) следуют из описания $s(t)$ (см. ниже).

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Каждое подпространство $\mathfrak{x}_i$, касательное к орбите большего нильпотентного идеала $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$, является неустойчивым в смысле п. 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Расширим естественную (и потому H -инвариантную) возрастающую фильтрацию F алгебры Ли $\mathfrak{n}$ с $F_a \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$ при $a \geq -1$ до фильтрации алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с $F_a \mathfrak{g} = F_a \mathfrak{n}$ при $a < 0$ и $F_a \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ при $a \geq 0$. Поскольку $\mathfrak{h} \subset F_0 \mathfrak{g}$, фильтрация F допустима. Тогда по доказанному она определяется точкой $f = (f(1), \dots, f(d)) \in \mathcal{C}(P)$. Очевидно, $f(i) < 0$ при $\mathfrak{x}_i \subset \mathfrak{n}$ и $f(i) = 0$ для остальных значений i . Стало быть, каждое подпространство $\mathfrak{x}_i \subset \mathfrak{n}$ неустойчиво.

5.2. Описание многочлена $s(t)$. Пусть, как и выше, $M = G/H$ – риманово однородное пространство унимодулярной группы Ли G с компактной группой изотропии H и с однократным спектром представления изотропии, удовлетворяющее условиям из п. 0.1. Пусть $s(t) = s_M(t)$ – скалярная кривизна G -инвариантной метрики g_t^M .

ЛЕММА 5.3. При сформулированных условиях $s(t)$ является многочленом от $t_1, t_1^{-1}, \dots, t_d, t_d^{-1}$ вида

$$s(t) = \sum_{i=1}^d q_i t_i^{-1} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d s_{i,j}^k t_i^{-1} t_j^{-1} t_k \quad (5.4)$$

с коэффициентами $q_i, s_{i,j}^k$. Числа q_i удовлетворяют следующим условиям:

- 1) если $\mathfrak{x}_i \subset p\mathfrak{n}$, то $q_i = 0$, где $\mathfrak{n}$ и $p\mathfrak{n}$ отождествляются, так как $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{h} = 0$;
- 2) если $\mathfrak{x}_i \subset \mathfrak{k}/\mathfrak{h}$, то $q_i \geq 0$;
- 3) если $\mathfrak{x}_i \subset \mathfrak{l}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}$, то $q_i < 0$.

Коэффициенты $s_{i,j}^k$ удовлетворяют следующим условиям:

- 4) $s_{i,j}^k = s_{j,i}^k \geq 0$;
- 5) $s_{i,j}^i = s_{i,j}^j = 0$;
- 6) $s_{i,j}^k > 0$, если и только если $\mathfrak{x}_k \subset \mathfrak{x}_i \cdot \mathfrak{x}_j$, $i \neq k$, $j \neq k$.

(Подалгебры $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{l}$ алгебры $\mathfrak{g}$ определены в доказательстве леммы 5.2.)

5.3. Формула для коэффициентов $s(t)$. Фиксируем любое H -инвариантное дополнение $\mathfrak{m}$ подалгебры $\mathfrak{h}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_d$, где $\mathfrak{m}_i = p^{-1}\mathfrak{x}_i \cap \mathfrak{m}$. Отождествим векторные пространства $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Обозначим через $T \in \text{Hom}(\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ тензор кручения в точке $x_0 = eH$ канонической аффинной связности в $M = G/H$, определенной дополнением $\mathfrak{m}$ (в стандартных обозначениях из [10, гл. 10], $T(X, Y) = -[X, Y]_{\mathfrak{m}}$ для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$). Пусть $T_{i,j}^k$ – проекция T на подпространство $\mathfrak{m}_{[i,j],k} = \text{Hom}(\mathfrak{m}_i \wedge \mathfrak{m}_j, \mathfrak{m}_k)$. При $i \neq j$ имеется H -инвариантное разложение

$$\mathfrak{m}_{[i,j],j} = \text{Hom}(\mathfrak{m}_i, \wedge^2 \mathfrak{m}_j) \oplus \text{Hom}(\mathfrak{m}_i, S_0^2 \mathfrak{m}_j) \oplus \text{Hom}(\mathfrak{m}_i, \mathbb{R}) \otimes 1_{\mathfrak{m}_j}.$$

Пусть $\alpha_i^j, \sigma_i^j, \tau_i^j$ – соответствующие проекции тензора $T_{i,j}^j$. Тогда $T_{i,j}^j = \alpha_i^j + \sigma_i^j + \tau_i^j$, $i \neq j$. Пусть ⁶ $\alpha_i^i = \sigma_i^i = \tau_i^i = 0$, $\tau_{i,j}^k = T_{i,j}^k$ при $i \neq k$, $j \neq k$

⁶В этих обозначениях $(\sigma_i^j, \tau_{i,j}^k)$ – препятствие к редуцируемости связностей Леви-Чивита G -инвариантных метрик g^M к естественному подрасслоению расслоения линейных реперов в M со структурной группой $(\mathbb{R}_{>0})^d \times O(N_1) \times \dots \times O(N_d)$.

и $\tau_{i,j}^i = \tau_{i,j}^j = 0$. Большинство проекций τ_i^j обращается в нуль⁷. Пусть

$$|\alpha_i|^2 := \sum_j |\alpha_i^j|^2, \quad |\sigma_i|^2 := \sum_j |\sigma_i^j|^2, \quad |\tau_i|^2 := \sum_j |\tau_i^j|^2,$$

где $|\cdot|^2$ – квадрат нормы относительно метрики g_1^M , $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in (\mathbb{R}_{>0})^d$.

При переходе от дополнения $\mathfrak{m}$ к $\tilde{\mathfrak{m}}$ вместо $|\alpha_i|^2$, α_i^j , $T_{i,j}^k$ будем записывать $|\tilde{\alpha}_i|^2$ и т. д.

Пусть $\{X_\gamma\}$ – ортонормированный базис в $\mathfrak{m}_i$, согласованный с метрикой g_1^M , $C_i = \sum_\gamma X_\gamma \otimes X_\gamma$, $X_\gamma \in \mathfrak{m}_i$. Пусть $B = B_{\mathfrak{g}}$ – форма Киллинга в $\mathfrak{g}$.

ЛЕММА 5.4. *В принятых обозначениях $T_{i,j}^k$, α_i^j , σ_i^j , τ_i^j , $\tau_{i,j}^k$ для проекций тензора кручения T канонической аффинной связности в $M = G/H$ скалярная кривизна $s(t)$ метрики g_t^M выражается многочленом (5.4) с коэффициентами*

$$s_{i,j}^k = |\tau_{i,j}^k|^2, \quad 2q_i = -B(C_i) - |\alpha_i|^2 - |\sigma_i|^2 - |\tau_i|^2 - \frac{1}{2} |T_{i,i}^i|^2. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из [2, п. 7.39].

Лемма 5.3 следует из леммы 5.4.

5.4. Исключительные подпространства. Перед доказательством теоремы 2.1 рассмотрим неустойчивые (в смысле п. 2.1) подпространства специального вида. Пусть $\mathfrak{z}$ – централизатор $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{c}$ – центр алгебры Ли $\mathfrak{z}$, т. е.

$$\mathfrak{z} = \{X \in \mathfrak{j} : [X, \mathfrak{g}] = 0\}, \quad \mathfrak{c} = \{X \in \mathfrak{z} : [X, \mathfrak{z}] = 0\}.$$

Назовем i -е неприводимое H -инвариантное подпространство $\mathfrak{x}_i \subset T_{x_0}M$ *исключительным*, если выполняются условия следующей леммы.

ЛЕММА 5.5. *Для i -го слагаемого $\mathfrak{x}_i$ в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathfrak{x}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{x}_d$ эквивалентны следующие условия:*

1) *некоторый (и тогда любой) ненулевой вектор из $\mathfrak{x}_i$ касается орбиты алгебры $\mathfrak{c}$;*

2) $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{h}] = [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i] = 0$, $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_j$ для всех j , $|\sigma_i|^2 = |\tau_i|^2 = 0$, где $\mathfrak{m}$ – ортогональное дополнение $\mathfrak{h}$ относительно формы Киллинга $B = B_{\mathfrak{g}}$, а $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \cap \rho^{-1}\mathfrak{x}_i$ для каждого $i = 1, \dots, d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ сумму всех подпространств $\mathfrak{m}_i$, удовлетворяющих условиям 2). Пусть $\mathfrak{h} = \oplus \mathfrak{m}_i$ – сумма всех подпространств $\mathfrak{m}_i$, удовлетворяющих условиям $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{h}] = 0$, $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_j$ для всех j и следующем условии: для каждого j все операторы $\text{ad}(X)|_{\mathfrak{m}_j}$, где $X \in \mathfrak{m}_i$, антисимметричны (по отношению к любой H -инвариантной евклидовой метрике в $\mathfrak{m}_j$). Тогда $\mathfrak{h}$ – H -инвариантная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $|\sigma_i|^2 = |\tau_i|^2 = 0$ для каждого $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{h}$. Каждое слагаемое $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{h}$ является H -инвариантным идеалом в $\mathfrak{h}$. Поэтому, очевидно, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{a}$ совпадает с центром алгебры $\mathfrak{h}$. Имеется изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{z} \cong \mathfrak{h}$. При этом изоморфизме $\mathfrak{c} \cong \mathfrak{a}$. Алгебры Ли $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}$

⁷Из однократности спектра представления изотропии следует, что существует не более одного i такого, что $|\tau_i|^2 \neq 0$. Если $|\tau_{i_0}|^2 \neq 0$, то $\dim(\mathfrak{m}_{i_0}) = 1$ и подпространство $\mathfrak{m}_{i_0}$ натянуто на H -инвариантный вектор, а $|\sigma_{i_0}|^2 = |\tau_{i_0,j}^k|^2 = 0$; значит, $[\mathfrak{m}_{i_0}, \mathfrak{h}] = 0$ и (при $B(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) = 0$) для любого j имеется включение $[\mathfrak{m}_{i_0}, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_j$.

и касательные пространства $\mathfrak{c} \cdot x_0$, $\mathfrak{a} \cdot x_0$ к их орбитам в точке $x_0 \in M$ естественно отождествляются:

$$\begin{aligned}\mathfrak{c} &\cong \mathfrak{c} \cdot x_0, & \mathfrak{a} &\cong \mathfrak{a} \cdot x_0, \\ \mathfrak{c} \cdot x_0 &= \mathfrak{a} \cdot x_0.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.6. Пусть $\mathfrak{x}_{i_0} \subset T_{x_0}M$ – исключительное подпространство, т.е. $\mathfrak{x}_{i_0} \subset \mathfrak{c} \cdot x_0$. Тогда:

- 1) $\mathfrak{x}_{i_0}$ неустойчиво;
- 2) $s(t) = a + bt_{i_0}$, где многочлены Лорана a и b не зависят от t_{i_0} , $t_{i_0}^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 2). Заменяя, если необходимо, алгебру Ли $\mathfrak{g}$ подалгеброй $\mathfrak{c} + \mathfrak{g} \subset \mathfrak{j}$, можем считать, что подпространство $\mathfrak{x}_{i_0}$ касается орбиты центра алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда утверждение 2) легко следует из леммы 5.4.

Докажем утверждение 1). В силу 2) многогранник P содержится в $\{x \in \mathbb{R}^d : x_{i_0} \geq 0\}$. Отсюда $-\mathbf{1}_{i_0} \notin P$, т.е. $\mathfrak{x}_{i_0}$ неустойчиво.

Пусть $H \subset K_1 \subset K \subset G$, где K_1 – максимальная компактная подгруппа группы G , K – подгруппа, определенная в доказательстве леммы 5.2, $\mathfrak{k} \supset \mathfrak{h}$ – её алгебра Ли. Пусть $q_i t_i^{-1}$ – одночлен многочлена $s(t)$ (см. леммы 5.3 и 5.4).

ЛЕММА 5.7. Пусть $\mathfrak{x}_{i_0} \subset \mathfrak{k} \cdot x_0 = \mathfrak{k}/\mathfrak{h}$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\mathfrak{x}_{i_0}$ исключительно;
- 2) $\mathfrak{x}_{i_0}$ неустойчиво;
- 3) $q_{i_0} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\implies$ 2) содержится в лемме 5.6, а импликация 2) $\implies$ 3) очевидна. Докажем 3) $\implies$ 1). Пусть $\tilde{\mathfrak{m}}$ – ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ относительно любого K -инвариантного евклидова скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в $\mathfrak{g}$. Пусть метрика g_1^M , соответствующая $t = (1, \dots, 1)$, определяется ограничением $(\cdot, \cdot)$ на $\tilde{\mathfrak{m}}$. Если $\tilde{\mathfrak{m}}_{i_0} \subset \mathfrak{k}$, то

$$|\sigma_{i_0}|^2 = |\tau_{i_0}|^2 = 0, \quad -B(C_{i_0}) = -\text{trace} \sum_{\gamma} (\text{ad}(X_{\gamma}))^2 \geq |\tilde{\alpha}_{i_0}|^2 + |\tilde{T}_{i_0, i_0}^{i_0}|^2,$$

т.е. $4q_{i_0} \geq |\tilde{T}_{i_0, i_0}^{i_0}|^2$, где равенства имеют место в том и только в том случае, когда $[\tilde{\mathfrak{m}}_{i_0}, \mathfrak{h}] = 0$ и $[\tilde{\mathfrak{m}}_{i_0}, \tilde{\mathfrak{m}}_j] \subset \tilde{\mathfrak{m}}_j$ для всех j . Остается положить $q_{i_0} = 0$ и перейти от $\tilde{\mathfrak{m}}$ к $\mathfrak{m}$. Таким образом, из $q_{i_0} = 0$ и $\mathfrak{m}_{i_0} \subset \mathfrak{k}$ следует условие 2) леммы 5.5, т.е. $\mathfrak{x}_{i_0}$ исключительно.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть группа Ли G компактна и полупроста. Для i -го неприводимого H -инвариантного подпространства в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, где $i = 1, \dots, d$, эквивалентны следующие условия:

- 1) $\mathfrak{x}_i$ – неустойчивое подпространство, т.е. $-\mathbf{1}_i \notin P$;
- 2) $\mathfrak{x}_i$ – исключительное подпространство;
- 3) $\mathfrak{x}_i$ касается орбиты центра алгебры Ли $\mathfrak{j}$;
- 4) $q_i = 0$, т.е. $-\mathbf{1}_i \notin \text{supp}(s)$.

Кроме того, $\text{center}(\mathfrak{j}) = \text{center}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{c}$.

Следствие 5.3 сохраняет силу для некомпактной полупростой группы Ли G .

5.5. Сумма всех неустойчивых подпространств как разрешимая алгебра Ли. В настоящем пункте изучается сумма $\mathfrak{v} \cdot x_0$ всех неустойчивых подпространств $\mathfrak{x}_i \subset T_{x_0}M$. В п. 5.5.1 описана разрешимая подалгебра $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}$, в п. 5.5.2 – точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{v} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{so}(\mathfrak{m}),$$

а в п. 5.5.3 – алгебраическое замыкание $\mathfrak{t}$ образа α , используемое в теореме 2.1, которая будет доказана в п. 5.6.

5.5.1. *Разрешимая подалгебра $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}$.* Обозначим через $\mathfrak{v} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{m}_i$ (соответственно, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{v}$) сумму всех неприводимых H -инвариантных подпространств $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}$ таких, что $\mathfrak{x}_i = \mathfrak{m}_i \cdot x_0$ неустойчиво (соответственно, исключительно). Тогда $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a} + \mathfrak{h}] = 0$ (лемма 5.5).

Структура $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{m}$ описана в следующем предложении. Пусть снова $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ – разрешимый радикал, $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{r}$ – нильрадикал, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ – подалгебра, определенная в доказательстве леммы 5.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Имеем:*

- 1) $\mathfrak{v} = (\mathfrak{v} \cap \mathfrak{r}) + \mathfrak{a}$, $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{v}$, $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{v} \subset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{a} = \text{center}(\mathfrak{g})$;
- 2) $[\mathfrak{v}, \mathfrak{v} + \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{n}$; в частности, $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}$ – разрешимая подалгебра с коммутативной факторалгеброй $\mathfrak{v}/\mathfrak{n}$;
- 3) $[\mathfrak{v}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\implies$ 2) выполнена в силу $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a} + \mathfrak{h}] = 0$, $[\mathfrak{r}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{n}$, а импликация 2) $\implies$ 3) – в силу $B([\mathfrak{g}, \mathfrak{v}], \mathfrak{h}) = B(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}) = 0$. Докажем утверждение 1). Имеем $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{v}$ по следствию 5.1 и $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{v} \subset \mathfrak{a}$ по лемме 5.7. Далее, по условию однократности спектра из п. 0.1 любое неприводимое подпространство $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}$ содержится хотя бы в одном из трех подпространств $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$ или $\mathfrak{r}$ (см. (5.1)). Если $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{v}$, то $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{k} \cap \mathfrak{v}$ или $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{r} \cap \mathfrak{v}$ (лемма 5.3, случай $q_i = 0$). Следовательно, $\mathfrak{v} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{v} \cap \mathfrak{r})$.

В частности, имеем

СЛЕДСТВИЕ 5.4. *Пусть $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ – коммутант алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда:*

- (а) *если $\mathfrak{g}'$ транзитивен, т. е. $\mathfrak{g}' + \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$, то $\mathfrak{v} = \mathfrak{n} + \mathfrak{a}$;*
- (б) *если $\mathfrak{g}$ редуктивна, т. е. $\mathfrak{g}'$ – полупростая алгебра Ли, то $\mathfrak{v} = \mathfrak{a}$; и обратнo, если $\mathfrak{v} = \mathfrak{a}$, то $\mathfrak{g}$ редуктивна (так как $\mathfrak{n}$ есть центр $\mathfrak{g}$);*
- (с) *если $\mathfrak{j}$ редуктивна, то $\text{center}(\mathfrak{z}) = \text{center}(\mathfrak{j})$ и $\mathfrak{g}$ редуктивна.*

Здесь (б) $\implies$ (с). При выводе (с) достаточно предположить, что пространство M односвязно, и представить его в форме $M = J/J_{x_0}$.

5.5.2. *Вложение $\alpha: \mathfrak{v}/\mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$.* Определим два отображения $\alpha: \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $u: \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ формулой

$$\alpha(X)Y = [X, Y] - u(X)Y = \sum_{i=1}^d \mathbf{1}_i[X, \mathbf{1}_i Y] \quad \text{для любых } X \in \mathfrak{v}, \quad Y \in \mathfrak{g},$$

где через $\mathbf{1}_i$ обозначена стандартная проекция $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_d$ на $\mathfrak{m}_i$.

Пусть $\mathfrak{x}_{i_0} \subset T_{x_0}M$ – неустойчивое подпространство. Тогда по определению существует точка $f = (f(1), \dots, f(d))$ конуса $\mathcal{C}(P)$ такая, что $f(i_0) < 0$.

Воспользовавшись d -мерностью конуса $\mathcal{C}(P) \subset \mathbb{R}^d$ (это всегда так), можно считать, что $f \in \mathcal{C}(P)$ – внутренняя точка конуса, и малым шевелением добиться того, чтобы значения $f(i)$, $i = 1, \dots, d$, стали попарно различными.

По точке f определим возрастающую фильтрацию $(F_b \mathfrak{m})_{b \in \mathbb{R}}$ векторного пространства $\mathfrak{m}$ формулой $F_b \mathfrak{m} = \bigoplus_{f(i) \leq b} \mathfrak{m}_i$.

ЛЕММА 5.8. Пусть $\mathfrak{m}_{i_0} \subset \mathfrak{r} \cap \mathfrak{v}$, $\mathfrak{m}_{i_0} \cap \mathfrak{n} = 0$, пусть $f \in \mathcal{C}(P)$ – указанная точка, $F \mathfrak{m}$ – соответствующая фильтрация в $\mathfrak{m}$, и пусть, для простоты, $f(i_0) = -1$. Тогда:

- 1) каждое факторпространство $F_b \mathfrak{m} / \bigcup_{c < b} F_c \mathfrak{m}$ равно 0 или $\mathfrak{m}_i$, $i = 1, \dots, d$;
- 2) $u(X)F_b \mathfrak{m} \subset \bigcup_{c < b-1} F_c \mathfrak{m} \subset F_{b-1} \mathfrak{m}$ для всех $b \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{m}_{i_0}$;
- 3) $\alpha(X) \in \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ для всякого $X \in \mathfrak{m}_{i_0}$, где $\mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ – ортогональная алгебра относительно любого H -инвариантного евклидова скалярного произведения в $\mathfrak{m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 2). Пусть $u(\mathfrak{m}_{i_0})\mathfrak{m}_j = \bigoplus_{k \in I_j} \mathfrak{m}_k$. В силу $\mathfrak{m}_{i_0} \not\subset [\mathfrak{m}_{i_0}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{n}$ имеем $T_{i_0, j}^{i_0} = 0$ при $j = 1, \dots, d$. Поэтому $I_j = \{k: \tau_{i_0, j}^k \neq 0\}$. Значит, если $k \in I_j$, то $k \neq i_0$, $k \neq j$ и $\mathbf{1}_k - \mathbf{1}_j - \mathbf{1}_{i_0} \in P$. Отсюда $f(k) < f(j) - 1$ для любого $k \in I_j$.

Докажем утверждение 3). Учитывая $T_{i_0, i_0}^{i_0} = 0$, мы можем записать это утверждение в виде $|\sigma_{i_0}|^2 = |\tau_{i_0}|^2 = 0$. Пусть $C_{i_0} = \sum_{\gamma} \text{ad}(X_{\gamma})^2$ – линейный оператор в $\mathfrak{g}$ (лемма 5.4). Имеем $C_{i_0} \mathfrak{h} = [\mathfrak{m}_{i_0}, \mathfrak{h}] = 0$, $C_{i_0} \mathfrak{m} \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$. В силу утверждения 2) имеем

$$\text{trace}(C_{i_0}) = \text{trace} \sum_{\gamma} \alpha(X_{\gamma})^2.$$

(Точнее, C_{i_0} как H -инвариантный оператор сохраняет каждое $\mathfrak{m}_i$, а потому $C_{i_0} = \sum_{\gamma} \alpha(X_{\gamma})^2$.) Разлагая каждый оператор $\alpha(X_{\gamma})$ на симметрическую и антисимметрическую части, находим

$$B(C_{i_0}) = \text{trace}(C_{i_0}) = |\sigma_{i_0}|^2 + |\tau_{i_0}|^2 - |\alpha_{i_0}|^2,$$

где использовано равенство $T_{i_0, i_0}^{i_0} = 0$. Непосредственно из $T_{i_0, i_0}^{i_0} = 0$ следует

$$B(C_{i_0}) + |\sigma_{i_0}|^2 + |\tau_{i_0}|^2 + |\alpha_{i_0}|^2 + 2q_{i_0} = 0,$$

а из неустойчивости $\mathfrak{r}_{i_0}$ следует $q_{i_0} = 0$. Окончательно имеем $|\sigma_{i_0}|^2 + |\tau_{i_0}|^2 = -q_{i_0} = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. Пусть $0 \neq X \in \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{v}$. Тогда:

- 1) оператор $\alpha(X)$ антисимметричен, $\alpha(X) \in \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$;
- 2) $\alpha(X) = 0$, если и только если $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{n}$;
- 3) оператор $u(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ нильпотентен, $u(X)^{d+1} = 0$;
- 4) $u(X) = 0$, если и только если $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{a}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{a}$, то по определению имеем $\alpha(X) = \text{ad}(X) \in \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$, $u(X) = 0$.

Если $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{n}$, то $\mathfrak{m}_k \not\subset [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_k]$, $k = 1, \dots, d$, значит, $\alpha(X) = 0$, и оператор $u(X) = \text{ad}(X)$ нильпотентен.

Если $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{r} \cap \mathfrak{v}$, $\mathfrak{m}_i \not\subset \mathfrak{n}$, то по лемме 5.8 получаем, что $\alpha(X) \in \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ и оператор $u(X)$ нильпотентен. Это доказывает утверждения 1), 3).

Если теперь $u(X) = 0$, то в силу утверждения 1) имеем $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{a}$. Если $\alpha(X) = 0$, то в силу утверждения 3) оператор $\text{ad}(X)$ нильпотентен, и тогда $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{n}$ по лемме 5.2.

5.5.3. Алгебраическое замыкание $\alpha(\mathfrak{v})$ в алгебре $\mathfrak{so}(\mathfrak{m})$. По следствию 5.5 имеем $\alpha(\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}/\mathfrak{n} \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$. Введем абелеву подалгебру $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ и убедимся, что $\alpha(\mathfrak{v}) \subset \mathfrak{t}$, в частности $[\alpha(\mathfrak{v}), \alpha(\mathfrak{v})] = 0$, и что $\mathfrak{t}$ вкладывается в алгебру Ли $\text{Der}(\mathfrak{g})$.

Обозначим через $\mathfrak{d} = |\text{ad}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{v})|$ наименьшую $\mathbb{R}$ -алгебраическую подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, натянутую на подалгебру $\text{ad}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{v})$. Из сказанного выше следует:

- а) алгебра Ли $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ разрешима (поскольку $\mathfrak{v}$ разрешима; см. п. 5.5.1);
- б) подалгебра $\mathfrak{t} := \mathfrak{d} \cap \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ коммутативна (поскольку $\mathfrak{d}$ разрешима);
- с) $\text{ad}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{u} \cap \text{ad}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{v})$, где $\mathfrak{u}$ – унитарный радикал алгебры Ли $\mathfrak{d}$ (совпадающий со множеством всех её унитарных элементов).

Обозначим теперь через $\mathfrak{v}^0 \subset \mathfrak{v}$ централизатор $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{v}$ и через $\mathfrak{d}^0 = |\text{ad}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{v}^0)|$ наименьшую алгебраическую подалгебру в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, содержащую $\text{ad}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{v}^0)$.

Выведем из леммы 5.8 следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть $\mathfrak{t} = \mathfrak{d} \cap \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$, и пусть $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{d}$ – наибольшая унитарная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$. Тогда $\mathfrak{d} = \mathfrak{u} \rtimes \mathfrak{t}$, $\mathfrak{d}^0 = \mathfrak{u}^0 \rtimes \mathfrak{t}$, где $\mathfrak{u}^0 = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{d}^0$, и при этом $\mathfrak{t}$ является наименьшей алгебраической подалгеброй в $\mathfrak{so}(\mathfrak{m})$, содержащей $\alpha(\mathfrak{v})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathfrak{d}_i = |\text{ad}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}_i)|$, где $i \in I$, т.е. $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{v}$, наименьшую $\mathbb{R}$ -алгебраическую подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, содержащую векторное подпространство $\text{ad}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}_i)$. Пусть $\mathfrak{u}_i \subset \mathfrak{d}_i$ – её наибольшая унитарная подалгебра, $\mathfrak{t}_i = \mathfrak{d}_i \cap \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$.

Докажем, что $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{t}_i \ltimes \mathfrak{u}_i$, $\alpha(\mathfrak{m}_i) \subset \mathfrak{t}_i$. При $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ это очевидно ($\mathfrak{t}_i = \mathfrak{d}_i$, $\mathfrak{u}_i = 0$ или $\mathfrak{t}_i = 0$, $\mathfrak{u}_i = \mathfrak{d}_i$). Поэтому можно предположить, что $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{r}$, $\mathfrak{m}_i \not\subset \mathfrak{n}$. Тогда на основании леммы 5.8 имеем $\mathfrak{u}_i = \{A \in \mathfrak{d}_i : AF_b \mathfrak{m} \subset F_{b-1} \mathfrak{m} \ \forall b \in \mathbb{R}\}$, где $(F_b \mathfrak{m})_{b \in \mathbb{R}}$ – фильтрация из этой леммы. Пусть $D_i \subset \text{GL}(\mathfrak{m})$ – связная разрешимая подгруппа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{d}_i$, а $C_i \subset \text{GL}(\mathfrak{m})$ – максимальная компактная подгруппа такая, что $\bar{H} \subset C_i \subset \bar{H} \cdot D_i$, где $\bar{H} \subset \text{SO}(\mathfrak{m})$ – естественный образ группы H . В силу естественности конструкции подалгебра $\mathfrak{d}_i$ является H -инвариантной. Поэтому $\bar{H} \cdot D_i$ есть группа Ли, а пересечение $T_i = C_i \cap D_i$ есть $\bar{H}$ -инвариантный максимальный тор в D_i . В силу леммы 5.8, 2) $C_i \cdot (F_b \mathfrak{m}) = F_b \mathfrak{m}$ для всех $b \in \mathbb{R}$. В соответствии с утверждением 1) леммы 5.8 отличные от нуля факторы $F_b \mathfrak{m} / \bigcup_{c < b} F_c \mathfrak{m}$ неприводимы и попарно неэквивалентны относительно группы $C_i \supset \bar{H}$. Следовательно,

$$C_i \cdot \mathfrak{m}_j = T_i \cdot \mathfrak{m}_j = \mathfrak{m}_j, \quad j = 1, \dots, d, \quad i \in I. \quad (5.7)$$

Обратимся к п. 3) леммы 5.8. Имеем $T_i \subset \text{SO}(\mathfrak{m})$. Иными словами, $\mathfrak{t}_i = \mathfrak{d}_i \cap \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ есть алгебра Ли максимального тора T_i разрешимой группы D_i . Имеем $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{t}_i \ltimes \mathfrak{u}_i$. Очевидно, $\alpha(\mathfrak{m}_i) \subset \mathfrak{t}_i$, $\mathfrak{u}(\mathfrak{m}_i)|_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{u}_i$.

По доказанному $\alpha(\mathfrak{v}) \subset \mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}(\mathfrak{v})|_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{u}$. Следовательно, $\mathfrak{d}$ совпадает с наименьшей алгебраической подалгеброй в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, содержащей $\alpha(\mathfrak{v})$ и $\mathfrak{u}(\mathfrak{v})|_{\mathfrak{m}}$, откуда

$$\mathfrak{d} = \left(\sum \mathfrak{t}_i \right) \ltimes \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{t} = \sum \mathfrak{t}_i.$$

Расщепление $\mathfrak{d}^0 = \mathfrak{u}^0 \rtimes \mathfrak{t}$ подалгебры $\mathfrak{d}^0 \subset \mathfrak{d}$ можно получить так же, как и расщепление $\mathfrak{d} = \mathfrak{u} \rtimes \mathfrak{t}$, поскольку $\alpha(\mathfrak{v}^0) = \alpha(\mathfrak{v})$. Это доказывает предложение.

СЛЕДСТВИЕ 5.6. Из (5.7) и очевидного включения $\mathfrak{d}^0 \subset \{A \in \text{Der}(\mathfrak{g}): A\mathfrak{h} = 0, A\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}\}$, где $\text{Der}(\mathfrak{g})$ – алгебра Ли всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{g}$, следует, что

$$\mathfrak{t} \subset \{A \in \text{Der}(\mathfrak{g}): A\mathfrak{h} = 0, A\mathfrak{m}_j \subset \mathfrak{m}_j, j = 1, \dots, d\}. \quad (5.8)$$

5.6. Доказательство теоремы 2.1. Предположим теперь, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ эффективно действует в римановом однородном пространстве (M, g) , $M = G/H$. Пусть снова $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ – ортогональное разложение относительно формы Киллинга в $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим полную алгебру Ли ростков киллинговых векторных полей риманова многообразия (M, g) в точке $x_0 = eH \in M$. Обозначим через $\mathfrak{j} \supset \mathfrak{g}$ подалгебру всех ростков, сохраняющих сразу все G -инвариантные римановы метрики в M .

Пусть $\mathfrak{j}_{x_0} \subset \mathfrak{j}$ – стабилизатор точки x_0 , $\mathfrak{j}_{x_0} \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ – естественное вложение и $\mathfrak{t} = \mathfrak{d} \cap \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ – алгебра Ли тора $T \subset \text{SO}(\mathfrak{m})$, определенная в п. 5.5.3. Мы заметим, что $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{j}_{x_0}$, и выведем из результатов, полученных в п. 5.5, следующую версию теоремы 2.1.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ эффективна, а $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{j}_{x_0}$, $\mathfrak{t}$ определены, как и выше. Тогда между $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{j}$ лежит H -инвариантная подалгебра $\hat{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g} \subset \hat{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{j}$, такая, что:

(а) каждое неустойчивое неприводимое H -инвариантное подпространство касательного пространства $T_{x_0}M = \mathfrak{m} \cdot x_0$ касается орбиты её нильрадикала;

(б) алгебра $\hat{\mathfrak{g}}$ разлагается в полупрямое произведение алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{t}$, более подробно, $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{t}$ и $\hat{\mathfrak{h}} := \hat{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{j}_{x_0} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{t}$ при естественном вложении $\mathfrak{j}_{x_0} \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$;

(с) $\hat{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{f}$ для любой H -инвариантной подалгебры $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{j}$ со свойством (а) такой, что $[\mathfrak{f}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g} \subset \mathfrak{f}$ и $\mathfrak{f}_{x_0} := \mathfrak{f} \cap \mathfrak{j}_{x_0}$ – алгебраическая подалгебра алгебры $\mathfrak{so}(\mathfrak{m})$.

Выведем теорему 2.1 из теоремы 5.1. Утверждение 2) следует из (а), (б). Утверждение 1) следует из 2), поскольку $\hat{\mathfrak{j}} = \mathfrak{j}$. В п. 3) утверждается, что если $\mathfrak{g}$ полупроста, то $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$ – центр $\mathfrak{j}$. В самом деле, тогда $\mathfrak{v} \cdot x_0 = \mathfrak{c} \cdot x_0$ (см. (5.6) и предложение 5.2, 1)), т.е. алгебра $\mathfrak{g} \times \mathfrak{c}$ обладает свойством (а) и $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{c}$ в силу (с).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Построим подалгебру $\hat{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{j}$ и докажем (б). В силу (5.7) и (5.8) имеем $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{j}_{x_0}$, и тор T с алгеброй Ли $\mathfrak{t}$ нормализует исходную подалгебру $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{j}$.

Тем самым определены подалгебры $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} + \mathfrak{t} \subset \mathfrak{j}_{x_0} \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ и $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{t} \subset \mathfrak{j}$. Осталось убедиться в том, что $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{t} = 0$. Достаточно проверить, что образы естественных отображений $\alpha: \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{t} \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ и $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ ортогональны. Действительно, для любых $X \in \mathfrak{v}$, $Y \in \mathfrak{h}$ имеем

$$\begin{aligned} \text{trace}(\alpha(X) \cdot \text{ad}_{\mathfrak{m}}(Y)) &= \text{trace}(\text{ad}_{\mathfrak{m}}(X) \cdot \text{ad}_{\mathfrak{m}}(Y)) \\ &= \text{trace}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X) \cdot \text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)) = B(X, Y) = 0, \end{aligned}$$

где B – форма Киллинга в $\mathfrak{g}$. Значит, $\hat{\mathfrak{h}} \cong \mathfrak{h} \times \mathfrak{t}$ и $\hat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{t}$.

Докажем (а). Обозначим через $\hat{\mathfrak{n}}$ нильрадикал построенной алгебры $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{t}$. Обозначения для $\mathfrak{v}, \mathfrak{t}, \mathfrak{n} \subset \hat{\mathfrak{g}}$ см. в п. 5.5. Достаточно проверить следующее условие:

(*) для любого $X \in \mathfrak{v}$ элемент $X - \alpha(X) \in \hat{\mathfrak{g}}$ содержится в нильрадикале $\hat{\mathfrak{n}} \subset \hat{\mathfrak{g}}$.

Проверим эквивалентное условие: $X - \alpha(X)$ – нильпотентный элемент алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ такой, что $[X - \alpha(X), \hat{\mathfrak{g}}] \subset \hat{\mathfrak{n}}$. Для этого заметим, что

$$u(\mathfrak{v})\mathfrak{g} = u(\mathfrak{v} \cap \mathfrak{t})\mathfrak{g} \subset [\mathfrak{t}, \mathfrak{g}], \quad \alpha(\mathfrak{v})\mathfrak{v} \subset [\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] \subset [\mathfrak{t}, \mathfrak{g}], \quad [\mathfrak{t}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{n} \subset \hat{\mathfrak{n}}.$$

Отсюда для любых $X \in \mathfrak{v}$, $Y \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathfrak{t}$ имеем $[X - \alpha(X), Y + A] = u(X)Y - AX \in \mathfrak{n}$. Ввиду следствия 5.5 имеем

$$\text{ad}(X - \alpha(X))^{d+1}(Y + A) = u(X)^d(u(X)Y - AX) = 0.$$

Докажем (с). По условию для любого $X \in \mathfrak{v}$ существует единственный элемент $\tilde{\alpha}(X) \in \mathfrak{f}_{x_0}$ такой, что $X - \tilde{\alpha}(X)$ содержится в нильрадикале алгебры $\mathfrak{f}$. Тогда $[X - \tilde{\alpha}(X), \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$. В силу нильпотентности $X - \tilde{\alpha}(X)$ и H -инвариантности отображения $\tilde{\alpha}$ имеем $\mathbf{1}_i[X - \tilde{\alpha}(X), \mathfrak{m}_i] = 0$ при $i = 1, \dots, d$, где $\mathbf{1}_i$ – естественная проекция $\mathfrak{m}$ на $\mathfrak{m}_i$. Тогда $\mathbf{1}_i[X - \alpha(X), \mathfrak{m}_i] = 0$ (по доказанному) и $[\alpha(X) - \tilde{\alpha}(X), \mathfrak{m}_i] = 0$ для любого i . Из точности представления j_{x_0} в пространстве $\mathfrak{m}$, $j_{x_0} \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$, следует, что $\tilde{\alpha}(X) = \alpha(X)$ для любого $X \in \mathfrak{v}$.

§ 6. Сжатие эквивариантной римановой субмерсии.

Доказательство теоремы 3.2

Докажем предложение 3.2 и теорему 3.2. Пусть $M = G/H$ – однородное пространство компактной полупростой группы Ли G с однократным спектром представления изотропии, такое, как в п. 0.1, и принадлежащее классу $\mathfrak{a}$ (см. п. 2.4). Пусть $T \subset [d] \times [d] \times [d]$ – его инвариант де Зибенталя (см. п. 2.4).

Для каждой грани γ многогранника Ньютона $P = P_M \subset \mathbb{R}^d$ определим группу Ли $G_\gamma = N \rtimes L$ (сжатие группы G) формулой (3.4), где $G_P = G$, $H_P = H$, $G \supset L \supset H$, N – связная односвязная нильпотентная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{n} := (\mathfrak{g}_\gamma)^{>0}$.

Пусть $f = (f(1), \dots, f(d))$ – любая точка двойственного к P конуса $\mathcal{C}(P)$. Пусть $\Gamma_f = f^\perp \cap P$ – соответствующая грань многогранника P . При $\gamma = \Gamma_f$ положим

$$M_f = M_\gamma = G_f/H, \quad G_f = G_\gamma, \quad N_f = N, \quad L_f = L.$$

6.1. Сжатия подалгебры, подгруппы и эквивариантной римановой субмерсии. Сжатия G -эквивариантного отображения $\pi: M = G/H \rightarrow G/K$ и других объектов рассматриваются совместно с метриками в M и M_f . Фиксируем $f \in \mathcal{C}(P)$.

6.1.1. *Сжатие подалгебры $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$.* Вначале рассмотрим сжатие подалгебры $\mathfrak{k}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ такой, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ и $\text{Ad}_g(H) \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{k}$, т. е. любой подалгебры вида

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{g}(S) = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}_S, \quad \text{где} \quad \mathfrak{m}_S := \bigoplus_{i \in S} \mathfrak{m}_i$$

(суммирование проводится по подмножеству $S = S_K \subset [d]$). Здесь, как и выше, $\mathfrak{m}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_d = \mathfrak{m}$ – ортогональное дополнение подалгебры $\mathfrak{h}$ относительно формы Киллинга в $\mathfrak{g}$.

При стандартном отождествлении векторных пространств $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_f$ подалгебра $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ переходит снова в подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}_f$. Эта подалгебра обозначается через $\mathfrak{k}_f \subset \mathfrak{g}_f$ и называется *сжатием подалгебры $\mathfrak{k}$* .

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1 (о сжатии комплексной и CR -структур). При стандартном отождествлении $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_f$ комплексная $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ -инвариантная подалгебра $\mathfrak{w} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, такая что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{w} \cap \mathfrak{g}$, переходит снова в подалгебру алгебр Ли $\mathfrak{g}_f^{\mathbb{C}}$. Отсюда любая G -инвариантная комплексная структура $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w} + \bar{\mathfrak{w}} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{w} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, или, соответственно, CR -структура $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, в M обладает сжатием – G_f -инвариантной комплексной или CR -структурой $\mathfrak{w}_f$ в $M_f = G_f/H$.

Алгебра Ли $\mathfrak{k}_f \subset \mathfrak{g}_f = \mathfrak{n} \rtimes \mathfrak{l}$ изоморфна полупрямому произведению $(\mathfrak{k}_f \cap \mathfrak{n}) \rtimes (\mathfrak{k}_f \cap \mathfrak{l})$.

6.1.2. Сжатие подгруппы $K \subset G$. Пусть задана подгруппа (соответственно, подгруппа Ли) K , $H \subset K \subset G$, группы G . Пусть $\mathfrak{k}$ – её алгебра Ли. Определим подгруппу (соответственно, подгруппу Ли) K_f , $H \subset K_f \subset G_f$, группы $G_f = N \rtimes L$ формулой

$$K_f := N_K \rtimes L_K, \quad N_K \subset N, \quad L_K \subset L,$$

где N_K – связная односвязная подгруппа Ли нильпотентной группы N с алгеброй Ли $\mathfrak{n}_K := \mathfrak{k}_f \cap \mathfrak{n}$, а $L_K := K \cap L$ (пересечение подгрупп компактной группы G).

Через $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}$ обозначается ортогональное дополнение подалгебры $\mathfrak{k}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга в $\mathfrak{g}$, т.е. $\mathfrak{m}' = \bigoplus_{i \notin S} \mathfrak{m}_i$.

ЛЕММА 6.1. 1) В алгебре Ли $\mathfrak{g}_f$ существует $\text{Ad}_{\mathfrak{g}_f}(K_f)$ -инвариантное разложение

$$\mathfrak{g}_f = \mathfrak{k}_f \oplus \mathfrak{m}', \quad \text{Ad}_{\mathfrak{g}_f}(K_f) \cdot \mathfrak{m}' = \mathfrak{m}'.$$

2) Проекция $\mathfrak{m}'$ в $\mathfrak{g}_f/\mathfrak{h} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ортогональна подпространству $\mathfrak{k}_f/\mathfrak{h} = \mathfrak{k}/\mathfrak{h}$ относительно всех H -инвариантных евклидовых скалярных произведений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из вложения $\text{ad}_{\mathfrak{g}_f}(\mathfrak{k}_f) \cdot \mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}'$ (по определению $\mathfrak{g}_f$, данному в §3) и равенств $\text{Ad}_{\mathfrak{g}_f}(L) = \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(L)$ (по определению группы G_f) и $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(L_K) \cdot \mathfrak{m}' = \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(K) \cdot \mathfrak{m}' = \mathfrak{m}'$. Утверждение 2) леммы следует из однократности спектра представления изотропии группы H .

6.1.3. Римановы метрики в G_f/K_f . Предположим, что $K \subset G$, а тогда и $K_f \subset G_f$ являются замкнутыми подгруппами. Следующие условия эквивалентны:

- (a) в G_f/K_f существует G_f -инвариантная риманова метрика;
- (b) $\text{ad}_{\mathfrak{g}_f}(\mathfrak{n}_K) \cdot \mathfrak{m}' = 0$, где $\mathfrak{n}_K = \text{Lie}(N_K)$ – нильпотентный идеал в $\mathfrak{k}_f$;
- (c) из $f(i) + f(j) = f(k)$, $(i, j, k) \in T$, $i \in S$, $j \notin S$, следует $f(i) = 0$.

В силу леммы 6.1 инвариантные римановы метрики в G_f/K_f однозначно соответствуют $\text{Ad}_{\mathfrak{g}_f}(K_f)$ -инвариантным евклидовым скалярным произведениям $g': \mathfrak{m}' \times \mathfrak{m}' \rightarrow \mathbb{R}$. Условие (b) означает, что $\text{Ad}_{\mathfrak{g}_f}(K_f) \mid \mathfrak{m}'$ сводится к подгруппе $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(L_K)$ компактной ортогональной группы $O(B)$ формы Киллинга B алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Отсюда следует эквивалентность условий (a) и (b).

Обозначим через g'_t ограничение на подпространство $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}$ любого $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ -инвариантного евклидова скалярного произведения $g_t: \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in (\mathbb{R}_{>0})^d$.

ЛЕММА 6.2. Пусть $f \in \mathcal{C}(P)$. Если в однородном пространстве G_f/K_f существует хотя бы одна G_f -инвариантная риманова метрика, то естественное отображение

$$\psi: M_f = G_f/H \rightarrow G_f/K_f$$

является римановой субмерсией со вполне геодезическими слоями по отношению ко всякой G_f -инвариантной метрике $g_t^{M_f}$, $t \in (\mathbb{R}_{>0})^d$, такой, что евклидово скалярное произведение $g'_t: \mathfrak{m}' \times \mathfrak{m}' \rightarrow \mathbb{R}$ является $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(L_K)$ -инвариантным.

В частности, при $f = 0$ пространство M_f совпадает с M , расслоение ψ совпадает с $\pi: M = G/H \rightarrow G/K$, а группа $L_K = K$ компактна. В этом случае лемма 6.2 немедленно следует из теоремы, доказанной в [2, п. 9.80].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Метрика в ортогональных дополнениях слоев ψ , индуцированная такой метрикой $g_t^{M_f}$, является обратным образом G_f -инвариантной римановой метрики в базе G_f/K_f , т. е. по определению расслоение ψ является римановой субмерсией. Полная геодезичность слоев расслоения ψ следует из леммы 6.1; доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы в [2, п. 9.80].

6.1.4. Сжатие римановой субмерсии. Пусть $(\pi, g_{t_0}^M), \pi: M = G/H \rightarrow G/K$, — G -эквивариантная риманова субмерсия. Тогда по лемме 6.2 (поскольку $L_K \subset K$) пара $(\psi, g_{t_0}^{M_f}), \psi: M_f = G_f/H \rightarrow G_f/K_f$, является G_f -эквивариантной римановой субмерсией со вполне геодезическими слоями, совпадающей с $(\pi, g_{t_0}^M)$ при $f = 0$.

Для каждой функции $f \in \mathcal{C}(P_M)$ естественно называть $(\psi, g_{t_0}^{M_f})$ *сжатием* G -эквивариантной римановой субмерсии $(\pi, g_{t_0}^M)$ пространства $M = G/H$.

6.1.5. Разложение в риманово прямое произведение. Обозначим через $\mathcal{H}$ естественное горизонтальное распределение в $M_f = G_f/H$, ортогональное к слоям расслоения ψ относительно всех инвариантных метрик одновременно. Оно существует вследствие условия однократности спектра из п. 0.1. Из леммы 6.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть G_f/K_f — риманово однородное пространство, и пусть $(\psi, g_t^{M_f})$ — пара из леммы 6.2. Следующие условия эквивалентны:

1) риманово пространство $(M_f, g_t^{M_f})$, $M_f = G_f/H$, стандартным образом локально изометрично риманову прямому произведению базы и слоя расслоения ψ ;

2) распределение $\mathcal{H}$ интегрируемо.

Это переносится на комплексные метрики $g_t^{M_f}$, $t \in (\mathbb{C} \setminus 0)^d$, с L_K -инвариантной горизонтальной частью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 6.2 распределение $\mathcal{H}$ интегрируемо, если и только если оно параллельно относительно связности Леви-Чивита в M_f .

Условие интегрируемости $\mathcal{H}$ задается следующей очевидной леммой.

ЛЕММА 6.3. Фиксируем G -эквивариантное отображение $\pi: M = G/H \rightarrow G/K$, а тем самым G_f -эквивариантное отображение $\psi: M_f = G_f/H \rightarrow G_f/K_f$ для каждой функции $f \in \mathcal{C}(P)$. Следующие условия эквивалентны:

1) горизонтальное распределение $\mathcal{H}$ в M_f интегрируемо;

2) $\text{ad}_{\mathfrak{g}_f}(\mathfrak{m}') \cdot \mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}' + \mathfrak{h}$, т. е. $\mathfrak{m}' + \mathfrak{h}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}_f$;

3) из $(i, j, k) \in T$, $i \in S$, $j \notin S$, следует $f(i) < f(j) + f(k)$;

4) $\Gamma_f \cap \Gamma_{2-\chi_S} = \emptyset$, где $\Gamma_f = f^\perp \cap P$ — грань многогранника Ньютона P .

Здесь через $\chi_S(i)$, $i \in [d]$, обозначена функция (мы называем ее *характеристикой*), равная 0 при $i \in S$ и 1 при $i \notin S$. Очевидно, $2 - \chi_S \in \mathcal{C}(P)$.

Заметим, что $2 - \chi_S \in \mathcal{C}(P)$ для любого подмножества S в $[d]$, а $\chi_S \in \mathcal{C}(P)$, если и только если S отвечает подалгебре $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}(S)$ в $\mathfrak{g}$. Поэтому определены грани $\Gamma_{\chi_S}, \Gamma_{2-\chi_S} \supseteq \emptyset$ многогранника P . Эти грани противоположны и

$$\Gamma_{\chi_S} \cap \Gamma_{2-\chi_S} = \emptyset.$$

ПРИМЕР 6.1. Пусть $f = \chi_S$ и $K = L$ (здесь подгруппа $K \subset G$ не обязательно замкнута). Тогда $M_{\chi_S} = G_{\chi_S}/H = \mathfrak{m}' \curvearrowright L/H$ (где $\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$), а $\psi: M_{\chi_S} \rightarrow \mathfrak{m}'$. Очевидно, распределение $\mathcal{H}$ интегрируемо. При условиях из леммы 6.2 для метрики $g_t^{M_f}$ риманово пространство $(M_f, g_t^{M_f})$, где $f = \chi_S$, глобально изометрично прямому произведению евклидова пространства $\mathfrak{m}'$ на L/H .

6.2. Совместные сжатия тотального пространства и базы римановой субмерсии. Фиксируем G -эквивариантное отображение $\pi: M = G/H \rightarrow G/K$, $H \subset K$.

6.2.1. *Связь между двойственными конусами многогранников Ньютона P_M и $P_{\pi M}$.* Существует естественное вложение конусов

$$\pi^*: \mathcal{C}(P_{\pi M}) \hookrightarrow \mathcal{C}(P), \quad \pi^* 1 = \chi_S,$$

где $P = P_M$. Образ π^* состоит из любых функций $f \in \mathcal{C}(P)$ таких, что:

- а) если $i \in S$, то $f(i) = 0$;
- б) если $i, j \notin S$ и $\mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j$ содержится в неприводимом $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(K)$ -инвариантном подпространстве, то $f(i) = f(j)$.

Если слой K/H связан, то из а) следует б).

Таким образом, попутно доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.1. *Если слой K/H отображения $\pi: G/H \rightarrow G/K$ связан, то конус $\pi^* \mathcal{C}(P_{\pi M})$ является гранью $\mathbb{R}_+^S \cap \mathcal{C}(P)$ конуса $\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}(P_M)$.*

ЛЕММА 6.4. *Для любой функции $\varphi \in \mathcal{C}(P_{\pi M})$ выполнено:*

- 1) $G_{\pi^* \varphi} \subset G_{\varphi}$, $L_{\pi^* \varphi} \subset L_{\varphi}$ – подгруппы конечного индекса, $N_{\pi^* \varphi} = N_{\varphi}$;
- 2) если слой K/H связан, то $G_{\pi^* \varphi} = G_{\varphi}$.

Обозначим через $\mathcal{C}(P)(\pi) \subset \mathcal{C}(P)$ подконус, определенный только условием б). Легко видеть, что

$$\mathcal{C}(P)(\pi) = \{f = \varphi_0 + \pi^* \varphi \in \mathcal{C}(P) : \varphi \in \mathcal{C}(P_{\pi M}), \varphi_0(i) = 0 \ \forall i \notin S\}.$$

Далее под $f = \varphi_0 + \pi^* \varphi \in \mathcal{C}(P)(\pi)$ понимается только такое разложение.

ЛЕММА 6.5. *Разложения $f = \varphi_0 + \pi^* \varphi$ точек $f \in \mathcal{C}(P)(\pi)$, где $c > 0$, однозначно соответствуют расщеплениям (F', F, F'', c) из п. 3.3; фильтрации F'', F, F' задаются соответственно точками $\varphi_0 \in \mathcal{C}(P_{M''})$, $f \in \mathcal{C}(P_M)$, $\varphi \in \mathcal{C}(P_{M'})$, где $M' = \pi M$.*

Леммы 6.4 и 6.5 вытекают непосредственно из определений.

6.2.2. *Совместные сжатия пространств M и πM .* Сжатия M_f и $(\pi M)_{\varphi}$ пространств M и πM называются *совместными*, если существует гомоморфизм групп Ли $\eta: G_f \rightarrow G_{\varphi}$ со следующими свойствами:

- η1) группа $\overline{G_f} = \eta(G_f)$ действует в G_{φ}/K транзитивно и $\eta|_H = \text{id}$, тем самым определено сюръективное G_f -эквивариантное отображение $\psi: M_f \rightarrow (\pi M)_{\varphi}$ однородного пространства $M_f = G_f/H$ на $(\pi M)_{\varphi} = G_{\varphi}/K$;

$\eta 2) \bigoplus_{i \in S} \mathfrak{m}_i$ – касательное пространство слоя ψ в точке eH , $\bigoplus_{i \notin S} \mathfrak{m}_i$ – ортогональное дополнение слоя относительно G_f -инвариантных метрик;

$\eta 3)$ выбор пары G_f -инвариантных римановых метрик в слоях и образе ψ превращает ψ в риманову субмерсию со вполне геодезическими слоями.

Следующее предложение показывает, что свойства $\eta 1)$ – $\eta 3)$ следуют из уравнения $f(i) = (\pi^*\varphi)(i)$ при $i \notin S$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть $f = \varphi_0 + \pi^*\varphi \in \mathcal{C}(P)(\pi)$. Тогда в G_f/K_f существует G_f -инвариантная риманова метрика, т. е. выполняются эквивалентные условия (a)–(c) из п. 6.1.3. Существует гомоморфизм групп Ли $\eta: G_f \rightarrow G_{\pi^*\varphi} \subset G_\varphi$ такой, что

$$(\pi M)_\varphi = G_\varphi/K = G_f/K_f.$$

Тогда η удовлетворяет предыдущим условиям $\eta 1)$ – $\eta 3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последнее утверждение следует из леммы 6.2.

Пусть $G_f = N \rtimes L$, $G_{\pi^*\varphi} = N_\varphi \rtimes L_{\pi^*\varphi}$, $G_\varphi = N_\varphi \rtimes L_\varphi$. За подгруппой K_f группы G_f сохраним обозначение $K_f = N_K \rtimes L_K$ (см. п. 6.1.2).

Условие (c) из п. 6.1.3 очевидно для $f \in \mathcal{C}(P)(\pi)$ (поскольку $f(j) = f(k)$). Значит, G_f/K_f является римановым однородным пространством. Нильпотентная подгруппа $N_K \subset K_f$ является инвариантной подгруппой всей группы G_f (это следует из условия (b) п. 6.1.3). Пусть $\overline{G}_f = G_f/N_K = (N/N_K) \rtimes L$ – факторгруппа. Тогда:

1) $N/N_K = N_\varphi$ (или, что равносильно, факторалгебра $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_K$ изоморфна нильпотентному идеалу $\mathfrak{n}_\varphi$ в $\mathfrak{g}_\varphi = \mathfrak{g}_{\pi^*\varphi}$);

2) $L := L_f \subset L_{\pi^*\varphi}$ (вообще, из $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(P)$, $S_{f_1} \subset S_{f_2}$, где $S_X \subset [d]$ – нуль-множество функции $X(i)$, $i \in [d]$, ввиду связности L_X/H следует $L_{f_1} \subset L_{f_2}$);

3) $\overline{G}_f = N_\varphi \rtimes L \subset G_{\pi^*\varphi} = N_\varphi \rtimes L_{\pi^*\varphi}$ вследствие 1) и 2).

Значит, $\overline{G}_f = G_f/N_K$ является⁸ подгруппой $N_\varphi \rtimes L$ группы $G_{\pi^*\varphi} = N_\varphi \rtimes L_{\pi^*\varphi}$, и тем самым построен гомоморфизм $\eta: G_f \rightarrow G_{\pi^*\varphi}$. Далее,

4) $G_f/K_f = \overline{G}_f/L_K \subset G_\varphi/K$, т. е. $L_K = K \cap \overline{G}_f$ (пересечение в $G_\varphi = N_\varphi \rtimes L_\varphi$).

В самом деле, $L_K := K \cap L$ определялась как пересечение двух подгрупп группы G , но обе они содержатся в подгруппе L_φ (в частности, $L := L_f \subset L_{\pi^*\varphi} \subset L_\varphi$). Далее,

5) подмножество $\overline{G}_f/L_K$ открыто в G_φ/K в силу очевидного равенства $\dim(G_\varphi/K) = \dim(G/K) = \dim(G_f/K_f)$.

Окончательное равенство $\overline{G}_f/L_K = G_\varphi/K$ следует, например, из того, что подгруппа $\overline{G}_f$ содержит локально транзитивный связный нормальный делитель группы G_φ с алгеброй Ли $(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_K) \rtimes \mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}_\varphi$, где $\mathfrak{i}$ – следующий $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(K)$ -инвариантный идеал подалгебры $\mathfrak{l}_\varphi = \mathfrak{l}_{\pi^*\varphi} : \mathfrak{i} = \mathfrak{m}_J + [\mathfrak{m}_J, \mathfrak{m}_J]$, $J = \{i \notin S : (\pi^*\varphi)(i) = 0\} = S_{\pi^*\varphi} \setminus S = S_f \setminus S$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Пусть $f = \varphi_0 + \pi^*\varphi \in \mathcal{C}(P)(\pi)$ (см. п. 6.2.1), и пусть $f_c = \varphi_0 + c\pi^*\varphi$, $c \geq 1$. Очевидно, $f_c \in \mathcal{C}(P)(\pi)$. Можно проверить, что при $c > 1$

$$G_{f_c} \cong N_K \rtimes \overline{G}_{f_c}, \quad \overline{G}_{f_c} \cong \overline{G}_f \cong N_\varphi \rtimes L, \quad N_{f_c} \cong N_K \times N_\varphi.$$

Группы $K_f = N_K \rtimes L_K$ и $G_\varphi = N_\varphi \rtimes L_\varphi$, а значит, слой и база расслоения $\psi: M_f \rightarrow (\pi M)_\varphi$ сохраняются при замене f на f_c .

⁸Подгруппа $\overline{G}_f$ группы $G_{\pi^*\varphi}$, вообще говоря, не замкнута.

6.3. Доказательство теоремы 3.2 (окончание). Докажем предложение 3.2, а с ним и теорему 3.2. Фиксируем любую точку $f = \varphi_0 + \pi^* \varphi \in \mathcal{C}(P)(\pi)$, где $\varphi \in \mathcal{C}(P_{\pi M})$ (см. п. 6.2.1). Легко видеть, что $\varphi_0 \in \mathcal{C}(P_{M''})$, где $M'' = K/H$.

Пусть $(\psi, g_t^{M_f})$, $\psi: M_f = G_f/H \rightarrow G_f/K_f$, – соответствующее сжатие римановой субмерсии (π, g_t^M) , $\pi: M = G/H \rightarrow M' = G/K$; см. п. 6.1.4.

Как следует из предложения 6.1, $\psi(M_f) = G_\varphi/K = (\pi M)_\varphi = M'_\varphi$, т. е. база ψ является сжатием базы π . Далее, слой K_f/H субмерсии ψ можно рассматривать как сжатие слоя $M'' = K/H$ субмерсии π , отвечающее точке $\varphi_0 \in \mathcal{C}(P_{M''})$.

Пусть M''_{φ_0} – сжатие вида (3.4) связной компоненты $M^0 \subset M''$, заданное фильтрацией F'' (допустимой фильтрацией факторалгебры алгебры Ли $\mathfrak{k}$; ср. с леммой 6.5 и формулой (3.6)), зависящей только от φ_0 . Тогда

$$M''_{\varphi_0} = N_K \rtimes L_K^+/H, \quad K_f/H = N_K \rtimes L_K/H,$$

где $L_K^+ = H \exp(\mathfrak{l}_K)$ – подгруппа группы L_K (см. п. 6.1.2). Поэтому сжатое однородное пространство M''_{φ_0} является связной компонентой в K_f/H .

В силу п. 6.1.5 риманово пространство M_f стандартным образом локально изометрично $M''_{\varphi_0} \times M'_\varphi$, если и только если $\Gamma_f \cap \Gamma_{2-\chi_S} = \emptyset$, где $\Gamma_f = f^\perp \cap P$ – грань многогранника Ньютона P , а χ_S – характеристика.

Для доказательства предложения 3.2 остается воспользоваться следующей леммой. Пусть (F', F, F'', c) – расщепление из леммы 6.5.

ЛЕММА 6.6. 1) *Допустимая фильтрация F' алгебры $\mathfrak{g}$ является хорошей фильтрацией, если и только если $\Gamma_{\pi^* \varphi} \cap \Gamma_{2-\chi_S} = \emptyset$.*

2) *Расщепление (F', F, F'', c) , где $c > 0$, является регулярным расщеплением с хорошей фильтрацией F' , если и только если $\Gamma_{\varphi_0 + c\pi^* \varphi} \cap \Gamma_{2-\chi_S} = \emptyset$.*

Окончательно, при условии из предложения 3.2 (повторенном в лемме 6.6, 2)) сжатие M_f пространства $M = G/H$ локально изометрично $M''_{\varphi_0} \times M'_\varphi$, т. е. прямому произведению сжатий слоя $M'' = K/H$ и базы $M' = G/K$ эквивариантного отображения $\pi: G/H \rightarrow G/K$, $H \subset K$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Геометрический смысл условия $\Gamma_{\pi^* \varphi} \cap \Gamma_{2-\chi_S} = \emptyset$ состоит в том, что при любом $c > 0$ компактный центр сжатия $M_{\varphi_0 + c\pi^* \varphi}$ (см. замечание 3.1) локально изометричен прямому произведению компактных центров сжатий M''_{φ_0} и M'_φ .

§ 7. Серии однородных пространств компактных простых групп Ли с простыми многогранниками Ньютона (добавление к § 1)

В настоящем параграфе разбираются примеры однородных пространств $M = G/H$ как с $\mathcal{E}(M) = \nu(M)$, так и с $\mathcal{E}(M) < \nu(M)$. Основное внимание уделяется сериям флаговых пространств M простых компактных групп G с простыми многогранниками Ньютона $P = P_M$. Рассматриваются три из пяти простых многогранников P , перечисленных в п. 0.3.6 (они уже были явно описаны в п. 1.5). Попутно рассматривается семейство обобщенных расслоений Хопфа $M' \rightarrow M$ над флаговыми пространствами $SU_3/T^2, \dots, E_6/T^2 \cdot \text{Spin}_8$, перечисленными в п. 0.2. Их общий многогранник Ньютона $P_{M'}$ аффинно эквивалентен октаэдру. Октаэдр не является простым многогранником: в его вершине сходятся не три, а четыре ребра.

Используются соглашения из примера 1.1. Приводятся также инварианты де Зибенталя (см. п. 2.4).

7.1. Примеры. Равенство $\nu(M) = \mathcal{E}(M)$ в сериях однородных пространств с фиксированным многогранником Ньютона. Равенство в оценке $\mathcal{E}(M) \leq \nu(M)$ при $\nu(M) > 0$ часто достигается в бесконечной серии однородных пространств $M = G/H$ с фиксированным многогранником Ньютона $\text{Nw}(s_M) = X$.

Вначале рассмотрим очевидный пример.

ПРИМЕР 7.1. Пусть M – прямое произведение d изотропно неприводимых однородных пространств G_i/H_i полупростых групп Ли G_i , $i = 1, \dots, d$. Тогда $\text{Nw}(s_M) = S$ – стандартный $(d-1)$ -мерный симплекс такой, как в замечании 1.1, и $\mathcal{E}(M) = \nu(M) = 1$.

В этом пункте мы построим другие примеры однородных пространств $M = G/H$ компактных полупростых связных групп Ли G , удовлетворяющих условию $\nu(M) = \mathcal{E}(M)$. Каждый раз мы будем искать собственные грани γ многогранника Ньютона $X = \text{Nw}(s_M)$, для которых система уравнений (1.2) несовместна. В этом случае будем говорить, что *грань γ отвергается*. Заведомо отвергаются все вершины многогранника X (по определению многогранника Ньютона). Если отвергаются все собственные грани γ , то $\nu(M) = \mathcal{E}(M)$ (предложение 1.2).

Укажем простые достаточные условия (признаки 7.1 и 7.2), основанные на следствии 1.2 и предложении 1.5, по которым отвергаются некоторые грани γ . Напомним, что здесь G – полупростая группа Ли.

ПРИЗНАК 7.1 (лемма о пирамиде). *Если $\gamma \subsetneq X$ – пирамида с вершиной α и основанием B , а пересечение $\gamma \cap \text{supp}(s)$ содержится в $\alpha \cup B$, то система уравнений (1.2) несовместна и грань γ отвергается.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО признака вытекает из следствия 1.2, 3).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Пусть Ω – система корней типа G_2 , BC_2 , C_3 , B_3 или A_4 , и пусть W – её группа Вейля. Пусть $g = g(\Omega)$ – число граней многогранника $P(\Omega)$ (см. введение) с точностью до действия W , оставшихся не отвергнутыми по признаку 7.1. Можно проверить, что тогда $g = 11, 15, 42, 66, 24$ соответственно.

Под p -мерным ортаэдром с центром z в $\mathbb{R}^d$ понимается выпуклая оболочка $2p$ точек $z \pm v_1, \dots, z \pm v_p$, где v_i – линейно независимые векторы.

ПРИЗНАК 7.2 (исключение ортаэдра и шестиугольника). *Пусть грань $\gamma \subsetneq X$ многогранника Ньютона X есть p -мерный ортаэдр или центрально-симметричный шестиугольник. Пусть $-\mathbf{1}_{i_0}$ есть центр γ и $-\mathbf{1}_i \notin \gamma$ при $i \neq i_0$. Пусть $\mathfrak{m}_i$ и c_i , $i = 1, \dots, d$, те же, что в примере 1.1. Тогда:*

1) система (1.2) является совместной, если и только если подпространство $\mathfrak{m}_{i_0} \subset \mathfrak{g}$ является абелевым, в таком случае $c_{i_0} = 0$;

2) если связная компонента группы H не имеет в $\mathfrak{f}_{i_0} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ инвариантных векторов, т. е. $c_{i_0} > 0$ (например, если $\chi(M) > 0$), то грань γ отвергается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО⁹ признака использует результаты, полученные в п. 2.4.

ПРИМЕР 7.2. Пусть M – это $\mathrm{Sp}_7/(\mathrm{Sp}_1)^7 \cdot \mathcal{D}_7$ или любое другое пространство G/H из бесконечной серии, приведенной в п. 0.3.8 (см. рис. 2). Тогда $\mathrm{supp}(s)$ состоит из всех вершин шестиугольника $X = P(\Omega)$ и точек $-\mathbf{1}_1, -\mathbf{1}_2, -\mathbf{1}_3$, находящихся строго внутри X . Все стороны шестиугольника X отвергаются по признаку 7.1. Значит, $\mathcal{E}(M) = \nu(M) = 10$.

Инвариант де Зибенталья: $T = \{\text{любые перестановки троек } (1, 2, 3), (1, 1, 2), (2, 2, 3), (3, 3, 1)\}$.

ПРИМЕР 7.3. Пусть $M = E_8/(A_2)^4$ – “пространство Гессе” из п. 0.3.7. Тогда $X = P(\Omega)$ – восьмигранное архимедово тело. Носитель $\mathrm{supp}(s)$ состоит из всех вершин X и точек $-\mathbf{1}_1, -\mathbf{1}_2, -\mathbf{1}_3, -\mathbf{1}_4$ в центрах шестиугольных граней. Эти четыре грани отвергаются по признаку 7.2, а четыре треугольные грани и все ребра – по признаку 7.1. Значит, $\mathcal{E}(M) = \nu(M) = 23$.

Инвариант де Зибенталья: $T = \{(i, i, i), (j, k, l), \text{ где } \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}\}$.

Рассмотрим две серии примеров: с треугольником Ньютона Δ и трехмерным ортаэдром. Пусть Δ – треугольник из примера 1.2.

ПРИМЕР 7.4. Пусть $M = G/H$ входит в бесконечную серию однородных пространств из п. 0.2 с треугольником Ньютона $X = \Delta$. Носитель $\mathrm{supp}(s)$ описан в примере 1.2. При $\dim(M) > 3$ все стороны треугольника Δ отвергаются по признаку 7.2, значит, $\mathcal{E}(M) = \nu(M) = 4$.

Инвариант де Зибенталья T состоит из перестановок тройки $(1, 2, 3)$.

В частности, рассмотрим $M = \mathrm{SU}_3/T^2$ или любое другое флаговое пространство M с системой T -корней типа A_2 (см. введение). Оно имеет треугольник Ньютона $P(A_2) = \Delta$ и содержится в той же серии. Все четыре попарно нехомотетичные инвариантные метрики Эйнштейна в M вещественны и положительно определены. Приведем для них явную формулу [9]

$$t = (c_1, c_2, c_1 + c_2), (c_2 + c_3, c_2, c_3), (c_1, c_1 + c_3, c_3), (c_1, c_2, c_3), \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1,$$

где c_i – числа Казимира из примера 1.1; три первые¹⁰ из них суть метрики Кэлера–Эйнштейна для различных инвариантных комплексных структур в M .

Перейдем от флагового пространства $M = G/H$ к обобщенному расслоению Хопфа $M' = G/K$ над M , где H/K – окружность.

Под обобщенным расслоением Хопфа $M' = G/K$ над любым флаговым пространством $M = G/H$ компактной полупростой связной группы Ли G понимается расслоение единичных окружностей обильного линейного расслоения над M (относительно некоторой инвариантной комплексной структуры в M). Пусть X' и X – многогранники Ньютона для M' и M соответственно. Используя инвариантную контактную структуру в M' и результаты, полученные

⁹Между признаками 7.1 и 7.2 имеется следующее отличие. Если грань γ отвергается по признаку 7.1, то соответствующее дискриминантное уравнение для коэффициентов многочлена $s(t)$ никогда не выполняется при замене $s(t)$ любым многочленом Лорана с коэффициентами из $\mathbb{C}$ и тем же самым носителем. Напротив, в признаке 7.2 используются неравенства для коэффициентов многочлена $s(t)$, ясные из формулы Вана–Циллера в примере 1.1, где $c_i \geq 0$.

¹⁰Для каждой из этих четырех метрик проверка уравнения Эйнштейна сводится к одному и тому же равенству $c_1 + c_2 + c_3 = 1$, т. е. $\frac{1}{2b} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_3}$ (в обозначениях из примера 1.2).

в п. 2.4, нетрудно показать, что X' – выпуклая оболочка двух параллельных гиперграней, одна из которых равна X , а другая является симплексом. Носитель $\text{supp}(s_{M'})$ состоит из всех вершин X' и точек $-\mathbf{1}_i \in X$.

ПРИМЕР 7.5. В случае флагового пространства $M = G/H$ из примера 7.4 многогранник X' является трехмерным ортаэдром, а наш треугольник $X = \Delta$ – его гранью. Все грани X' , не принадлежащие Δ , отвергаются по лемме о пирамиде, стороны Δ – по признаку 7.2, сам треугольник Δ , как легко убедиться, тоже может быть отвергнут. Отсюда $\mathcal{E}(M') = \nu(M') = 16$.

Инвариант $T = \{\text{перестановки троек } (1, 2, 3), (1, 1, 4), (2, 2, 4), (3, 3, 4)\}$.

7.2. Примеры. Серия с простым многогранником Ньютона $\text{IB} = \text{I} \times \Delta_2$. В настоящем и следующем пунктах рассматриваются бесконечные серии компактных однородных пространств $M = G/H$ с многогранниками Ньютона $\text{IB} = \text{I} \times \Delta_2$ и $\text{II} = \Delta_3 \times \Delta_2$ из п. 1.5.

Для этих серий типично равенство $\mathcal{E}(M) = \nu(M) \in \{12, 80\}$ и появляются исключения с $\mathcal{E}(M) < \nu(M)$; см. также п. 3.2.3.

Пусть $\text{IB} = \text{I} \times \Delta_2$ – трехмерная призма¹¹ приведенного объема $\nu = 12$ ($d = 4$), описанная в примере 1.3.

ПРИМЕР 7.6. Ниже перечислены все флаговые пространства M с многогранником Ньютона $\text{IB} = \text{I} \times \Delta_2$. Для этих пространств $\mathcal{E}(M) \in \{10, 12\}$. А именно:

- 1) $\mathcal{E} = 10$ для флаговых пространств $\text{SO}_n / \text{SO}_2 \times \text{SO}_2 \times \text{SO}_{n-4}$, $6 \neq n \geq 5$, $\text{SO}_{4n} / \text{U}_n \times \text{U}_n$, $n \geq 2$, $\text{Sp}_{2n} / \text{U}_n \times \text{U}_n$, $n \geq 1$, включая Sp_2 / T^2 (см. п. 3.2.3);
- 2) $\mathcal{E} = 12$ для флаговых пространств $\text{SO}_{2p+2q} / \text{U}_p \times \text{U}_q$, $p > q \geq 2$, $\text{Sp}_{p+q} / \text{U}_p \times \text{U}_q$, $p > q \geq 1$, $E_6 / T^2 \cdot A_4$, $E_7 / T^2 \cdot D_5$;
- 3) $\mathcal{E} = 12$ для нефлаговых односвязных пространств $E_7 / T^1 \cdot A_3^2(\circ \circ \circ \bullet \circ \circ \circ)$ и $E_8 / T^1 \cdot A_7(\circ \circ \circ \circ \circ \bullet \bullet)$ с тем же самым многогранником Ньютона $\text{IB} \subset \mathbb{R}^4$.

Многочлены $s(t)$ удовлетворяют условиям примера 1.3. В пп. 1) и 2) перечислены все флаговые пространства с системой T -корней типа B_2 (см. п. 0.3.3).

Инвариант де Зибенталя: $T = \{\text{любые перестановки троек } (1, 2, 3), (1, 2, 4)\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Для пространств из 1) укажем явно все решения уравнения (1.1), т.е. перечислим 10 попарно негомометичных метрик Эйнштейна $t = [t_1, t_2, t_3, t_4]$ (где $x = \frac{2b_3}{N_3} = \frac{n-4}{n-2}$, $\frac{n}{2n-1}$, $\frac{n}{2n+1}$, $\frac{1}{3}$ соответственно):

- a) $[1, x, 1+x, 1-x]$, $[x, 1, 1+x, 1-x]$, $[1, x, 1-x, 1+x]$, $[x, 1, 1-x, 1+x]$;
- b) $t_1 = t_2 = 1$, $t_3 = t_4 = 1 \pm \sqrt{2x-1}$;
- c) $t_1 = t_2 = (x+1)/2$, $t_3 + t_4 = 2$, $t_3 - t_4 = \pm \sqrt{2(x^3 + x^2 + x - 1)}/x$;
- d) $t_3 = t_4 = 1$, $t_1 + t_2 = 1/(1-x)$, $t_1 - t_2 = \pm \sqrt{(1-2x)/(1-x^2)}$.

В п. а) перечислены метрики Кэлера–Эйнштейна (относительно различных инвариантных комплексных структур). Итак, все вещественные решения знакоопределены; их по шесть для $\text{SO}_{4n} / \text{U}_n \times \text{U}_n$, $n \geq 7$, и $\text{Sp}_{2n} / \text{U}_n \times \text{U}_n$, $n \geq 1$, и по восемь в остальных случаях.

¹¹ *Предупреждение.* Имеется другое бесконечное семейство однородных пространств M , $\nu(M) = 12$, с общим многогранником Ньютона $P \subset \mathbb{R}^4$, трудно отличимым от призмы IB , а именно односвязные однородные пространства $E_8 / T^1 \cdot A_1 \cdot D_6$, $F_4 / T^1 \cdot C_2 \cdot A_1$, $E_8 / T^1 \cdot E_6 \cdot A_1$, $E_8 / T^1 \cdot A_7$ и три серии (где $l = m' + n + m$): $\text{SO}_{2l+1} / \text{SO}_{2m'} \times \text{U}_n \times \text{SO}_{2m+1}$, $0 \leq m$, $2 \leq m'$, $\text{SO}_{2l} / \text{SO}_{2m'} \times \text{U}_n \times \text{SO}_{2m}$, $2 \leq m \leq m'$, $\text{Sp}_l / \text{Sp}_{m'} \times \text{U}_n \times \text{Sp}_m$, $1 \leq m \leq m'$, а также серия пространств $G/H = \text{SU}_n / \text{S}(\text{Sp}_{n_1} \cdot T^1 \times \text{U}_{n_2} \times \text{U}_{n_3})$, $n = 2n_1 + n_2 + n_3$, с $\text{rank}(G) > \text{rank}(H)$. Инвариант де Зибенталя (п. 2.4) каждого из этих пространств состоит из троек $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 4)$, $(2, 2, 4)$ и всех их перестановок. Призму IB можно перевести в призму P преобразованием из $\text{GL}(4, \mathbb{Z})$, но это не распространяется на носители $\text{supp}(s)$.

Разберем пример 7.6. Будем считать известным, что многочлен Лорана $s(t)$ удовлетворяет условиям примеров 1.1 и 1.3, и ограничимся проверкой следующей леммы.

ЛЕММА 7.1. *Имеем $\mathcal{E}(M) < 12$ для однородных пространств $M = G/H$ вида 1) и $\mathcal{E}(M) = 12$ для пространств видов 2) и 3).*

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Вначале покажем, что система уравнений (1.2) несовместна для всех граней γ призмы IV , кроме четырехугольной грани $\gamma = \gamma_0$ с вершинами v_1, v_2, u_1, u_2 .

Как видно из описания многочлена $s(t)$ в примере 1.3, носитель $\text{supp}(s)$ состоит из вершин призмы IV , векторов $-\mathbf{1}_i$, $i = 1, 2$, в центрах двух прямоугольных граней $\gamma_i = (v_i, u_i, u_3, v_3)$ и векторов $-\mathbf{1}_i$, $i = 3, 4$, в серединах двух её ребер $\gamma_3 = (u_1, u_2)$ и $\gamma_4 = (v_1, v_2)$. Очевидно, все ребра призмы, кроме γ_i , $i = 3, 4$, и обе треугольные грани отвергаются по признаку 7.1, а грани γ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ (с учетом $\chi(M) > 0$), – по признаку 7.2. Остается только грань $\gamma_0 = (v_1, v_2, u_1, u_2)$.

Далее, используя следствие 1.2, 3), легко найти условие совместности системы (1.2), связанной с гранью γ_0 , в виде $N_3/N_4 = b_3/b_4$.

Следовательно, $\mathcal{E}(M) < 12$, если и только если $N_3/N_4 = b_3/b_4$. Используя неравенства $\frac{1}{2}N_i - b_i > 0$ при $i = 3, 4$ (см. п. 1.5) и переходя к торическому многообразию, можно было бы легко доказать, что $\mathcal{E}(M) \in \{10, 12\}$, но мы этого делать не будем.

Осталось проверить, что равенство $N_3/N_4 = b_3/b_4$ выполняется для пространств вида 1) и не выполняется для пространств видов 2) и 3). Заметим, что

$$\frac{b_4}{N_4} - \frac{b_3}{N_3} = c_3 - c_4, \quad (7.1)$$

где c_i – числа Казимира из примера 1.1. Найдем c_3 и c_4 исходя из значений $c_i = \frac{1}{2}$ для симметрических пространств. В соответствии с п. 2.5 алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ допускают группу автоморфизмов $A \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ с образующими

$$\theta_1 = 1_{\mathfrak{h}} + 1_{\mathfrak{m}_1} - 1_{\mathfrak{m}_2} - 1_{\mathfrak{m}_3} - 1_{\mathfrak{m}_4}, \quad \theta_2 = 1_{\mathfrak{h}} - 1_{\mathfrak{m}_1} + 1_{\mathfrak{m}_2} - 1_{\mathfrak{m}_3} - 1_{\mathfrak{m}_4}.$$

Здесь $\mathfrak{m}_k \in \mathfrak{g}$ – неприводимые H -модули такие, как в примере 1.1. Значит, каждое из рассматриваемых пространств $M = G/H$ имеет по три эквивариантные проекции в симметрические пространства группы G . Автоморфизму $\theta_1\theta_2$ отвечает проекция со слоем $M_3 \times M_4$, где M_k – симметрическое пространство группы с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{m}_k + [\mathfrak{m}_k, \mathfrak{m}_k]$, $k = 3, 4$. Из симметричности M_k и простоты $\mathfrak{g}_k$ сразу следует, что

$$c_k = \frac{1}{2} \frac{j_{\text{ad } \mathfrak{g}_k}}{j_{\text{ad } \mathfrak{g}} \cdot j_{\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}}}, \quad k = 3, 4,$$

где $j_{\text{ad } \mathfrak{g}_k}$ и $j_{\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}}$ – индексы Дынкина соответственно присоединенного представления $\mathfrak{g}_k$ и подалгебры $\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}$. Но $j_{\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}} = 1$, поскольку $\mathfrak{m}_3^{\mathbb{C}}$ и $\mathfrak{m}_4^{\mathbb{C}}$ заведомо содержат корневые подпространства длинных корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$. (Для флаговых пространств 1) и 2), имеющих систему T -корней типа B_2 , последнее ясно из того, что неприводимые H -модули $\mathfrak{m}_k$ с номерами $k = 3, 4$ отвечают двум парам противоположных длинных корней типа B_2 ; в прообразах этих корней заведомо содержатся вершины выпуклой оболочки системы корней алгебры $\mathfrak{g}$, т. е. длинные корни алгебры $\mathfrak{g}$.)

С учетом (7.1) мы доказали, что $\mathcal{E}(M) < 12$, если и только если $c_3 = c_4$, т. е.

$$j_{\text{ad } \mathfrak{g}_3} = j_{\text{ad } \mathfrak{g}_4},$$

иначе $\mathcal{E}(M) = 12$. Это сокращает вычисления (отметим, что число Кокстера любой простой алгебры Ли $\mathfrak{s}$ без коротких корней совпадает с $\frac{1}{2}j_{\text{ad } \mathfrak{s}}$).

Например, в случае 3), т. е. для $M = E_7/T^1 \cdot (A_3)^2$ и $M = E_8/T^1 \cdot A_7$, находим $M_4 = \mathbb{C}P^1$ (в обоих случаях), значит, $\frac{1}{2}j_{\text{ad } \mathfrak{g}_4} = \frac{1}{2}j_{\text{ad } A_1} = 2$; $M_3 = D_6/(A_3)^2$ и $M_3 = E_7/A_7$ (соответственно), имеем $\frac{1}{2}j_{\text{ad } D_6} = 10$ и $\frac{1}{2}j_{\text{ad } E_7} = 18$, следовательно, $j_{\text{ad } \mathfrak{g}_3} \neq j_{\text{ad } \mathfrak{g}_4}$, откуда $\mathcal{E}(M) = 12$.

7.3. Примеры. Серия с простым многогранником Ньютона $\Pi = \Delta_3 \times \Delta_2$. В заключение рассмотрим серию однородных пространств $M = G/H$ с многогранником Ньютона из п. 5) теоремы 0.1 (см. также пример 3.2).

7.3.1. Серия однородных пространств. Пусть $\Pi = \Delta_3 \times \Delta_2$ – пятимерный многогранник приведенного объема $\nu = 80$ ($d = 6$), описанный в п. 1.5.

ПРИМЕР 7.7. Пятимерный многогранник $\Pi = \Delta_3 \times \Delta_2$ является многогранником Ньютона следующих однородных пространств $M = G/H$:

$$\begin{aligned} & \text{SU}_n / \text{S}(\text{U}_{n_1} \times \cdots \times \text{U}_{n_4}), \quad n_i \geq 1, \quad \text{Sp}_n / \text{Sp}_{n_1} \times \cdots \times \text{Sp}_{n_4}, \quad n_i \geq 1, \\ & \text{SO}_n / \text{SO}_{n_1} \times \cdots \times \text{SO}_{n_4}, \quad (n_1, n_2) \neq (1, 1), (2, 2), \quad n_3 \geq 3, \quad n_4 \geq 3, \end{aligned}$$

где $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$. Их многочлены $s(t) = s_M(t)$ удовлетворяют условиям примера 1.4. Таким образом, даже носитель $\text{supp}(s)$ не зависит от $M = G/H$.

Эта бесконечная серия однородных пространств M включает, в частности, и все флаговые пространства с системой T -корней типа A_3 (см. п. 0.3.3).

7.3.2. Формула для разности числа Ньютона и числа $\mathcal{E}(M)$ изолированных решений уравнения Эйнштейна. Будем называть *дефектом* разность

$$\delta_M \stackrel{\text{def}}{=} \nu(M) - \mathcal{E}(M).$$

Утверждается, что для пространств M из п. 7.3.1 дефект $80 - \mathcal{E}(M)$ принимает пять значений: 0, 2, 4, 12, 18.

Приведем точную формулу дефекта. Пусть

$$f = n_2 n_3 - n_1 n_4, \quad d_\varepsilon = \det \begin{bmatrix} n + n_1 + n_4 + \varepsilon & (n_1 + n_4 + \varepsilon)n_1 n_4 \\ n + n_2 + n_3 + \varepsilon & (n_2 + n_3 + \varepsilon)n_2 n_3 \end{bmatrix},$$

где $\varepsilon = 0, 1, -2$ соответственно для $G = \text{SU}_n, \text{Sp}_n, \text{SO}_n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$. Тогда:

- 1) $80 = \mathcal{E}(M)$, если и только если $f \neq 0$, $d_\varepsilon \neq 0$;
- 2) дефект $\delta = 80 - \mathcal{E}(M)$ положителен только в следующих четырех случаях:

$$\begin{aligned} \delta = 2 & \quad \text{при} \quad d_\varepsilon = 0, \quad f \neq 0, & \delta = 12 & \quad \text{при} \quad n_1 = n_2 < n_3 = n_4, \\ \delta = 4 & \quad \text{при} \quad d_\varepsilon \neq 0, \quad f = 0, & \delta = 18 & \quad \text{при} \quad n_1 = n_2 = n_3 = n_4; \end{aligned}$$

- 3) все решения $[g_t^M]$ уравнения Эйнштейна изолированы.

Утверждения 1)–3) разбираются в пп. 7.3.3–7.3.7.

ПРИМЕР 7.8. Приведем все пространства из примера 7.7 такие, что $d_\varepsilon = 0$, $f \neq 0$, $n < 44$ (отметим появление размерностей 10 и 26):

$$\begin{aligned} & \mathrm{Sp}_{21} / \mathrm{Sp}_1 \times \mathrm{Sp}_4 \times \mathrm{Sp}_4 \times \mathrm{Sp}_{12}, \\ & \mathrm{SO}_{27} / \mathrm{SO}_5 \times \mathrm{SO}_5 \times \mathrm{SO}_{16}, \quad n_1 = 1, \\ & \mathrm{SU}_{39} / \mathrm{S}(\mathrm{U}_1 \times \mathrm{U}_5 \times \mathrm{U}_8 \times \mathrm{U}_{25}). \end{aligned}$$

7.3.3. Проверка утверждения 1) предложения 7.1 (случай $\delta_M = 0$). Утверждение 1) проверяется по критерию предложения 1.2 с учетом п. 3) следствия 1.2 и предложения 1.5.

Вначале определим те собственные грани $\gamma \subset \Pi$, для которых система уравнений (1.2) может быть совместной.

Как мы видели в примере 1.4, носитель $\mathrm{supp}(s)$ состоит из всех вершин многогранника Π и шести точек $-\mathbf{1}_{ij}$ в центрах шести квадратных граней. Эти шесть граней немедленно отвергаются по признаку 7.2. Кроме них есть еще 12 других квадратных граней $\square$; грани $\square$ составляют одну орбиту группы S_4 .

Из оставшихся граней многогранника $\Pi = \Delta_3 \times \Delta_2$ большинство отвергается сразу без вычислений по признаку 7.1.

Остаются только грани видов $\square$, $\mathrm{I} \times \Delta_2$, $\Delta_2 \times \mathrm{I}$, $\Delta_2 \times \Delta_2$ и $\Delta_3 \times \mathrm{I}$. Достаточно рассмотреть по одной грани каждого вида. Грани $\mathrm{I} \times \Delta_2$, $\Delta_2 \times \mathrm{I}$ и $\Delta_2 \times \Delta_2$ отвергаются по разным причинам. Призмы $\mathrm{I} \times \Delta_2$ и $\Delta_2 \times \mathrm{I}$ отвергаются после короткого вычисления в силу неравенств из примера 1.4 (для случая Π), т. е., по существу, в силу неравенств $c_i > 0$, связанных с формулой Вана–Циллера из примера 1.1. Этих неравенств впервые не хватило в случае 4-мерной грани $\Delta_2 \times \Delta_2$ (но их достаточно, чтобы исключить некоторые компоненты дискриминанта), потребовавшем рутинных вычислений и подстановки (использовалась программа MAPLE) следующих явных выражений для коэффициентов многочлена $s(t)$:

$$N_{ij} = 2^{\sigma+1} n_i n_j, \quad \beta_l = \frac{2^\sigma n_i n_j n_k}{n + \varepsilon} = \frac{2^\sigma}{n_l} \frac{n_1 n_2 n_3 n_4}{n + \varepsilon},$$

где $\sigma = 0, 1, -1$ соответственно для SU_n , Sp_n , SO_n .

Итак, отвергнуты все грани, кроме 15 граней видов $\square$ и $\Delta_3 \times \mathrm{I}$.

7.3.4. Условия совместности систем (1.2), связанных с гранями $\square$ и $\Delta_3 \times \mathrm{I}$. Проверим, что для каждой из 15 граней видов $\square$ и $\Delta_3 \times \mathrm{I}$ условием совместности системы уравнений (1.2) является одно из следующих шести уравнений для коэффициентов многочлена $s(t)$: $f(n_i, n_j, n_k, n_4) = n_j n_k - n_i n_4 = 0$ и $d_\varepsilon(n_i, n_j, n_k, n_4) = 0$, где (i, j, k) пробегает циклические перестановки индексов 1, 2, 3.

Имеются три фасеты вида $\Delta_3 \times \mathrm{I}$. Обозначим их через γ_i , $i = 1, 2, 3$. Выражение для $s_{\gamma_i}(t)$ находим из выражения для $s(t)$ в примере 1.4, выполнив указанную там подстановку

$$t_{lj}^{-1} = x_l x_j y_l y_j, \quad t_{k4}^{-1} = x_k x_4 y_l y_j \quad \text{при} \quad \{l, j, k\} = \{1, 2, 3\}$$

и отбросив все члены, зависящие от y_i . Пусть для определенности $i = 1$. Полагая $y_2 = z^{-1}$, $y_3 = z$, получаем

$$2s_{\gamma_1}(t) = N_{23}x_2x_3 + N_{14}x_1x_4 - [z^{-2} \quad z^2] \begin{bmatrix} \beta_3 & \beta_4 & \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_4 & \beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{bmatrix}^T.$$

Нетрудно найти дискриминантное уравнение для коэффициентов $s_{\gamma_1}(t)$ и уравнения для z в особой точке $t = t^0$ гиперповерхности $s_{\gamma_1}(t) = 0$, а именно уравнения

$$z^4 + \frac{1}{z^4} - 2 = \frac{N_{23}^2/4 - (\beta_1 + \beta_4)^2}{\beta_1\beta_4} = \frac{N_{14}^2/4 - (\beta_2 + \beta_3)^2}{\beta_2\beta_3} > 0, \quad (7.2)$$

где правая часть строго положительна в силу неравенств из примера 1.4. Значит,

$$\begin{aligned} z^4 + \frac{1}{z^4} - 2 &= \frac{(n + \varepsilon + n_1 + n_4)(n + \varepsilon - n_1 - n_4)}{n_1 n_4} \\ &= \frac{(n + \varepsilon + n_2 + n_3)(n + \varepsilon - n_2 - n_3)}{n_2 n_3}. \end{aligned}$$

Множество всех особых точек гиперповерхности $s_{\gamma_1}(t) = 0$ в $(\mathbb{C} \setminus 0)^5$ задается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{t_{23}}{t_{14}} &= -1, & \frac{t_{12}}{t_{24}} &= \frac{n_3 z^4 + n_2}{n + \varepsilon}, \\ \frac{t_{34}}{t_{24}} &= \frac{n_1 z^4 + n_4}{n + \varepsilon}, & \frac{t_{13}}{t_{24}} &= \frac{(n_1 z^4 + n_4)(n_3 z^4 + n_2)}{z^4(n + \varepsilon)^2}. \end{aligned}$$

(В примере 3.2 мы уже интерпретировали каждую из этих особых точек t как вещественную или комплексную риччи-плоскую метрику в некомпактном однородном пространстве.)

Каждая из 12 квадратных граней вида $\square$ содержится ровно в одной фасете вида $\Delta_3 \times I$. Предыдущая фасета γ_1 содержит ровно четыре такие подграни $\square$. Они соответствуют подматрицам

$$A = \begin{bmatrix} \beta_3 & \beta_4 \\ \beta_2 & \beta_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_4 & \beta_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \beta_3 & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \beta_4 & \beta_2 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

матрицы $\begin{bmatrix} \beta_3 & \beta_4 & \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_4 & \beta_3 \end{bmatrix}$. Пусть A заключается в столбцах $1 \leq i < j \leq 4$. Тогда из выражения для $s_{\gamma_1}(t)$ следует, что

$$2s_{\gamma_A}(t) = -[z^{-2} \quad z^2] A \begin{bmatrix} x_i^2 & x_j^2 \end{bmatrix}^T.$$

Дискриминантное уравнение для коэффициентов $s_{\gamma_A}(t)$ есть, очевидно, $0 = \frac{\beta_4}{\beta_1} - \frac{\beta_3}{\beta_2} \equiv \frac{n_1}{n_4} - \frac{n_2}{n_3}$ в двух первых случаях и $0 = \frac{\beta_4}{\beta_1} - \frac{\beta_2}{\beta_3} \equiv \frac{n_1}{n_4} - \frac{n_3}{n_2}$ в двух других.

7.3.5. Проверка утверждения 1) предложения 7.1. Окончание. Для завершения доказательства формулы из п. 1) предложения 7.1 достаточно воспользоваться следующей очевидной леммой. Обозначим через $d'_\varepsilon, d''_\varepsilon, f', f''$ многочлены от n_1, n_2, n_3, n_4 , полученные из $d_\varepsilon = d_\varepsilon(n_1, n_2, n_3, n_4)$ и $f = n_2 n_3 - n_1 n_4$ циклическими перестановками трех первых аргументов.

ЛЕММА 7.2. В камере $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ в $\mathbb{Z}^4$ многочлены $d_\varepsilon, d'_\varepsilon, d''_\varepsilon, f, f', f''$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} d_\varepsilon &= d'_\varepsilon = d''_\varepsilon = 0, & f &= f' = f'' = 0 & \text{при } n_1 = n_2 = n_3 = n_4, \\ d''_\varepsilon &< d_\varepsilon = d'_\varepsilon = 0, & f'' &< f = f' = 0 & \text{при } n_1 = n_2 < n_3 = n_4, \\ d'_\varepsilon &< 0, \quad d''_\varepsilon < 0, & f' &< 0, \quad f'' < 0 & \text{в остальных случаях.} \end{aligned}$$

Таким образом, из равенства $d'_\varepsilon d''_\varepsilon f' f'' = 0$ следует, что $n_1 = n_2 \leq n_3 = n_4$, т. е. $d_\varepsilon = f = 0$.

Лемма 7.2 немедленно следует из развернутых выражений

$$\begin{aligned} d_\varepsilon &= ((n + \varepsilon)^2 - (n_1 + n_4)^2) n_2 n_3 - ((n + \varepsilon)^2 - (n_2 + n_3)^2) n_1 n_4, \\ d'_\varepsilon &= ((n + \varepsilon)^2 - (n_2 + n_4)^2) n_1 n_3 - ((n + \varepsilon)^2 - (n_1 + n_3)^2) n_2 n_4, \\ d''_\varepsilon &= ((n + \varepsilon)^2 - (n_3 + n_4)^2) n_1 n_2 - ((n + \varepsilon)^2 - (n_1 + n_2)^2) n_3 n_4 \end{aligned}$$

и $f = n_2 n_3 - n_1 n_4$, $f' = n_1 n_3 - n_2 n_4$, $f'' = n_1 n_2 - n_3 n_4$.

7.3.6. Проверка пп. 2), 3) предложения 7.1 (точная формула для δ_M). Для доказательства точной формулы дефекта $\delta_M = \nu(M) - \mathcal{E}(M) = 80 - \mathcal{E}(M)$ применим теорему Безу к пяти сечениям пучка $\mathcal{O}(2, 2)$ над $\mathbb{C}P^3 \times \mathbb{C}P^2$ (см. примеры 1.5, 1.4).

Рассмотрим стандартную стратификацию многообразия $\tilde{V} = \mathbb{C}P^3 \times \mathbb{C}P^2$, определенную биоднородными координатами $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3$; страты $\tilde{V}_\gamma = \mathbb{C}P^3_\alpha \times \mathbb{C}P^2_\beta$ отвечают любым непустым граням $\gamma = \alpha \times \beta$ многогранника $\Pi = \Delta_3 \times \Delta_2$. Например, страт $\{(x, y) : x_1 x_2 x_3 x_4 y_2 y_3 \neq 0, y_1 = 0\}$ отвечает первой фасете $\gamma = \gamma_1$ вида $\Delta_3 \times I$.

Согласно примеру 1.5 число $4 \cdot \mathcal{E}(M)$ совпадает с числом изолированных решений (x, y) на открытом страте $\tilde{V}_\Pi = \{(x, y) : x_1 x_2 x_3 x_4 y_1 y_2 y_3 \neq 0\}$ системы пяти уравнений (1.1), где выполнена подстановка $t_{ij}^{-1} = x_i x_j y_i y_j$, $t_{k4}^{-1} = x_k x_4 y_i y_j$ из примера 1.4.

Таким образом, задана система E пяти глобальных сечений пучка $\mathcal{O}(2, 2)$ таких, что $4 \cdot \mathcal{E}(M)$ – число их изолированных общих нулей на открытом страте $\tilde{V}_\Pi$.

Обозначим через k_γ число общих нулей системы E без учета кратностей на страте $\tilde{V}_\gamma$ коразмерности ≥ 1 . Все они по существу уже явно найдены; в частности, $k_\gamma < \infty$.

Рассмотрим, например, случай $\gamma = \gamma_1$, $k_{\gamma_1} \neq 0$. Тогда (7.2) выполняется. Множество всех решений (x, y) системы E на страте $\tilde{V}_{\gamma_1}$, где $y = [0 : 1 : z^2] \in \mathbb{C}P^2$, $x = [x_1 : a x_2 : a x_3 : x_4] \in \mathbb{C}P^3$, задается уравнениями

$$\begin{aligned} (z^2 - z^{-2})^2 &= \text{const} > 0, \quad a^2 = 1, \\ \frac{x_1 x_4}{x_2 x_3} &= -\frac{N_{14} \beta_1 \beta_4}{N_{23} \beta_2 \beta_3}, \quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{2(z^2 \beta_4 + z^{-2} \beta_1)}{N_{23}}, \quad \frac{x_4}{x_1} = \frac{2(z^2 \beta_2 + z^{-2} \beta_3)}{N_{14}}. \end{aligned}$$

Значит, $k_{\gamma_1} \in \{0, 8\}$.

Следующая лемма утверждает, что для всякого однородного пространства M из п. 7.3.1 все найденные общие нули системы E на стратах положительной коразмерности изолированы и невырождены, т. е. имеют кратность 1. Поэтому нуль-множество системы E в $\mathbb{C}P^3 \times \mathbb{C}P^2$ не содержит комплексных алгебраических кривых.

Таким образом, из следующей леммы вытекает, что все нули системы на открытом страте изолированы и по теореме Безу (см. пример 1.5)

$$320 - 4 \cdot \mathcal{E}(M) = \sum k_\gamma.$$

Значит, $\delta_M = 4^{-1} \sum k_\gamma$. Эту сумму мы подсчитаем после доказательства леммы.

ЛЕММА 7.3. Пусть γ – собственная грань многогранника Π и $k_\gamma \neq 0$. Тогда каждое решение $(x, y) = p \in \tilde{V}_\gamma$ системы E на страте $\tilde{V}_\gamma$ изолировано и невырождено как (а) относительно страта, так и (б) относительно всего $\tilde{V} = \mathbb{C}P^3 \times \mathbb{C}P^2$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА (частный случай $\gamma = \gamma_1$). Для проверки (а) используется неравенство $0 < z^4 \neq 1$ (в формуле (7.2)) – очевидное следствие неравенств из примера 1.4.

Рассмотрим (б). Обозначим через $f \in \mathbb{R}^6$ примитивный целочисленный вектор такой, что $\langle f, x \rangle < 0$ для всех $x \in \Pi \setminus \gamma_1$ и $\langle f, x \rangle = 0$ для всех $x \in \gamma_1$. Вектор f однозначно определен в силу того, что грань γ_1 – фасета, а именно

$$X_f := \sum_{\alpha} f_{\alpha} t_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} = t_{13} \frac{\partial}{\partial t_{13}} + t_{24} \frac{\partial}{\partial t_{24}} + t_{12} \frac{\partial}{\partial t_{12}} + t_{34} \frac{\partial}{\partial t_{34}}.$$

Можно доказать отдельно, используя простые общие соображения, что условие невырожденности (б) леммы (в случае фасеты $\gamma = \gamma_1$) эквивалентно неравенству

$$0 \neq (1 - \langle f, \mathbf{m} \rangle) s'(p) |s''(p)|, \quad (7.3)$$

где $\mathbf{m} = (N_{ij} / \dim(M))$ – вектор такой, как в п. 1.7.2, а $s'(p)$ и $|s''(p)| = \text{Hess}_p(s|_{\tilde{V}_{\gamma_1}})$ – соответственно первая производная от функции s (точнее, от сечения пучка $\mathcal{O}(2, 2)$) в точке p по нормали к страту $\tilde{V}_{\gamma_1}$ и гессиан от ограничения s на страт в критической точке $(x, y) = p$ этого ограничения с критическим значением $s(p) = 0$.

Рассматриваемый страт $\tilde{V}_{\gamma_1}$ коразмерности 1 имеет вид $x_1 x_2 x_3 x_4 y_2 y_3 \neq 0$, $y_1 = 0$, а потому с точностью до не обращающегося в нуль множителя выполнено

$$s'(p) = \frac{-1}{x_1 x_3 y_3} \frac{\partial s(p)}{\partial y_1} \quad \left(\text{при этом } \frac{-1}{x_1 x_3 y_3} \frac{\partial s}{\partial y_1} \equiv t_{13} X_f s \right).$$

Проверим, что (7.3) выполняется. Имеем

$$(1 - \langle f, \mathbf{m} \rangle) \sum N_{ij} = N_{23} + N_{14} > 0.$$

Далее, имеем $\frac{1}{x_1 x_3 y_3} \frac{\partial s}{\partial y_1} \Big|_{y_1=0} = \frac{1}{x_1 x_3 y_3} ((N_{13} x_1 x_3 + N_{24} x_2 x_4) y_3 + (N_{12} x_1 x_2 + N_{34} x_3 x_4) y_2) = N_{13} + N_{24} u v z^4 + N_{12} u + N_{34} v$, где $u := \frac{x_2}{x_3} \left(\frac{1}{z}\right)^2$, $v := \frac{x_4}{x_1} \left(\frac{1}{z}\right)^2$. Из явного выражения критической точки $(x, y) = p$ следует $z^4 > 0$, $u = \frac{2(\beta_4 + z^{-4} \beta_1)}{N_{23}} > 0$, $v = \frac{2(\beta_2 + z^{-4} \beta_3)}{N_{14}} > 0$. Значит, $s'(p) \neq 0$. Кроме того, в силу утверждения (а) гессиан $|s''_{\gamma_1}(p)|$ отличен от нуля.

7.3.7. Вычисление дефекта $\delta_M = \nu(M) - \mathcal{E}(M)$. Из леммы 7.3 следует, как уже отмечалось, что $\delta_M = 4^{-1} \sum k_\gamma$. Осталось подсчитать эту сумму.

Как видно из п. 7.3.4, каждое число $k_\gamma \in \{0, 4, 8\}$. Точнее, $k_\gamma \in \{0, 4\}$ для 12 граней γ вида $\square$, $k_{\gamma_i} \in \{0, 8\}$ для фасет γ_i , $i = 1, 2, 3$, вида $\Delta_3 \times I$ и $k_\gamma = 0$ в остальных случаях. Заметим, что каждое из равенств $f = 0$, $f' = 0$, $f'' = 0$ (п. 7.3.5) означает появление нулей сразу на четырех стратах вида $\square$ и каждое

из равенств $d_\varepsilon = 0$, $d'_\varepsilon = 0$, $d''_\varepsilon = 0$ – на одном страте $\Delta_3 \times I$. По лемме 7.2 из формулы $\delta_M = 4^{-1} \sum k_\gamma$ следует:

$$\begin{aligned} \delta_M &= 4^{-1} [8 + 8 + 8 + 4 \cdot (4 + 4 + 4)] = 18 && \text{при } n_1 = n_2 = n_3 = n_4, \\ \delta_M &= 4^{-1} [8 + 8 + 4 \cdot (4 + 4)] = 12 && \text{при } n_1 = n_2 < n_3 = n_4, \\ \delta_M &= 4^{-1} [4 \cdot 4] = 4 && \text{при } d_\varepsilon \neq 0, \quad f = 0, \\ \delta_M &= 4^{-1} 8 = 2 && \text{при } d_\varepsilon = 0, \quad f \neq 0, \\ \delta_M &= 0 && \text{в остальных случаях.} \end{aligned}$$

Мы получили утверждение 2) предложения 7.1, а утверждение 3) следует непосредственно из леммы 7.3. Отметим, кроме того, что при $k_\gamma \neq 0$ естественное 4-листное накрытие $\pi: \tilde{V} \rightarrow V = \tilde{V}/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ из п. 3.3.5 нигде не разветвлено вдоль страта $\tilde{V}_\gamma$; множество ветвления π состоит из стратов $\tilde{V}_\gamma$, где $\dim(\gamma) \leq 1$ или γ – одна из тех квадратных граней, которые в п. 7.3.3 мы сразу отвергли по признаку 7.2.

Применяя полученную формулу дефекта к пространству $M = \text{SU}_4/T^3$, находим $\delta_M = 18$, откуда $\mathcal{E}(M) = 80 - 18 = 62$. Как утверждалось в примере 1.7, без учета кратностей существует не 62, а 59 гомотетических классов (г.к.) инвариантных комплексных метрик Эйнштейна в M , г.к. двадцати девяти положительно определенных и тридцати мнимых метрик¹².

Автор выражает признательность А.Г. Хованскому за полезные консультации и замечания.

¹² *Прим. при корректуре.* С точностью до гомотетии и изометрии в $M = \text{SU}_4/T^3$ существуют четыре положительно определенные инвариантные метрики Эйнштейна g_t^M , а вовсе не три, как утверждается в [11, табл. 1] со ссылкой на работу Ю. Сакане. Достаточно их классифицировать с точностью до гомотетии и до правого действия в M группы Вейля S_4 (так как по теореме Онищика [12] связная компонента группы всех изометрий инвариантной метрики в M совпадает с PSU_4). Следующие четыре римановы метрики попарно неэквивалентны:

- (i) метрика Кэлера–Эйнштейна с естественными координатами $t_{ab} = b - a$, $1 \leq a < b \leq 4$;
- (ii) стандартная метрика Вана–Циллера, т.е. метрика с координатами $t_{ab} = 1$, $1 \leq a < b \leq 4$;
- (iii) метрика Арванитоеоргоса (A. Arvanitoyeorgos), $t_{ij} = 5$, $t_{k4} = 3$ при $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$;
- (iv) риманова метрика вида $t_{12} = (2 + 3\theta)(7 - 12\theta)/(17 - 6\theta)$, $t_{34} = 2/3 + \theta$, $t_{23} = t_{13} = 1 + \eta$, $t_{14} = t_{24} = 1 - \eta$, где $\eta = (\theta + 2/3)\sqrt{(5 + 3\theta)/(34 - 12\theta)}$, а $\theta = \theta_1 \approx -0.028$ – действительный корень приводимого над полем $\mathbb{Q}(l)$, $l^3 = 3\sqrt{57} \pm 1$, кубического уравнения

$$f(\theta) = 2/27 + (8/3)\theta + \theta^3 = 0.$$

Следующие три мнимые комплексные метрики попарно неэквивалентны: метрики (v) и (vi) вида (iv), отвечающие мнимым корням $\theta = \theta_2, \theta_3$ многочлена $f(\theta)$, где $|\theta_2/\theta_1| \approx 59$; метрика (vii) с координатами $t_{12} = \overline{t_{34}} = (4 + \sqrt{-2})/3$ и $t_{ij} = t_{k4} = 1$ в остальных случаях.

Из предложения 7.1 следует, что каждую инвариантную комплексную метрику Эйнштейна в M можно перевести в одну и только одну из метрик (i)–(vii) действием группы S_4 и умножением на скаляр, т.е. существует $59 = 29 + 30 = (12 + 1 + 4 + 12) + (12 + 12 + 6)$ г.к., состоящих из метрик Эйнштейна, как сказано в примере 1.7. Уравнение Эйнштейна (1.1) для метрик (i)–(vii) можно проверить элементарно, причем г.к. метрики (ii) является его четырехкратным решением. Осталось воспользоваться неравенством $\mathcal{E}(M) \leq 62 = 59 + 3$.

Выяснилось, что в упомянутой работе Ю. Сакане (Y. Sakane) в явной, но громоздкой форме построена метрика (iv) и указано, что этот случай ранее рассматривал Р. Сенда.

Судя по [11, табл. 1], существование инвариантных “римановых некэлеровых” метрик Эйнштейна в G_2/T^2 было открытым вопросом. Мною они найдены во всех флаговых пространствах с системой T -корней типа G_2 , т.е. в G_2/T^2 , $E_6/T^2(A_2)^2$, E_7/T^2A_5 , E_8/T^2E_6 , F_4/T^2A_2 .

Список литературы

1. Д. В. Алексеевский, А. М. Переломов, “Инвариантные метрики Кэлера–Эйнштейна на компактных однородных пространствах”, *Функц. анализ и его прилож.*, **20**:3 (1986), 1–16; англ. пер.: D. V. Alekseevskii, A. M. Perelomov, “Invariant Kähler–Einstein metrics on compact homogeneous spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **20**:3 (1986), 171–182.
2. А. Л. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, т. 1, 2, Мир, М., 1990; пер. с англ.: A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), **10**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
3. Ф. А. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, т. 2, Мир, М., 1982; пер. с англ.: P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, vol. 2, Pure Appl. Math., J. Wiley & Sons, New York, 1978.
4. В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов*, Наука, М., 1982; англ. пер.: V. I. Arnol’d, S. M. Gusejn-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, vol. I: The classification of critical points, caustics and wave fronts, Monogr. Math., **82**, Birkhäuser, Boston, 1985; vol. II: Monodromy and asymptotics of integrals, Monogr. Math., **83**, Birkhäuser, Boston, MA, 1988.
5. Д. Н. Бернштейн, “Число корней системы уравнений”, *Функц. анализ и его прилож.*, **9**:3 (1975), 1–4; англ. пер.: D. N. Bernshtein, “The number of roots of a system of equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **9**:3 (1975), 183–185.
6. A. G. Kouchnirenko, “Polyèdres de Newton et nombres de Milnor”, *Invent. Math.*, **32**:1 (1976), 1–31.
7. А. Г. Кушниренко, “Многогранники Ньютона и теорема Безу”, *Функц. анализ и его прилож.*, **10**:3 (1976), 82–83; англ. пер.: A. G. Kushnirenko, “Newton polytopes and the Bezout theorem”, *Funct. Anal. Appl.*, **10**:3 (1976), 233–235.
8. G. R. Jensen, “The scalar curvature of left-invariant Riemannian metrics”, *Indiana Univ. Math. J.*, **20** (1971), 1125–1144.
9. M. Kimura, “Homogeneous Einstein metrics on certain Kähler C -spaces”, *Recent topics in differential and analytic geometry*, Adv. Stud. Pure Math., **18**-I, Academic Press, Boston, MA, 1990, 303–320.
10. Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 1, 2, Наука, М., 1981; пер. с англ.: Sh. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. 1, Interscience Publ., New York, 1963; vol. 2, 1969.
11. C. Böhm, M. Kerr, “Low dimensional homogeneous Einstein manifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **358**:4 (2006), 1455–1468.
12. А. Л. Онищик, “Отношения включения между транзитивными компактными группами преобразований”, *Тр. ММО*, **11** (1962), 199–242.

М. М. ГРАЕВ (M. M. GRAEV)
 Научно-исследовательский институт
 системных исследований РАН
 E-mail: graev_36@mtu-net.ru

Поступило в редакцию
 12.09.2005