Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Эллиптические структуры на трехмерных взвешенных гиперповерхностях Фано, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 4, 115–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im570>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:50:03

УДК 512.76

И. А. Чельцов

Эллиптические структуры на трехмерных взвешенных гиперповерхностях Фано

Классифицированы бирациональные перестройки в эллиптические расслоения общей квазигладкой, имеющей терминальные особенности гиперповерхности в $\mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)$ степени $\sum_{i=1}^4 a_i$.

Библиография: 12 наименований.

§ 1. Введение

Пусть X – квазигладкая взвешенная гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)$ степени $\sum_{i=1}^4 a_i$, имеющая терминальные особенности, где $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. Тогда X – многообразие Фано, а для четверки (a_1, a_2, a_3, a_4) имеется 95 возможностей. Пусть n – номер соответствующего семейства гиперповерхностей при нумерации, принятой в [1].

Предположим дополнительно, что гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)$ является достаточно общей. Тогда имеется следующий результат, который был получен в [2].

ТЕОРЕМА 1.1. *Многообразие X бирационально жестко¹ и, в частности, нерационально.*

Для каждого n в работе [2] были построены инволюции $\tau_1, \dots, \tau_{k_n} \in \text{Bir}(X)$, которые порождают всю группу $\text{Bir}(X)$ с точностью до бирегулярных автоморфизмов взвешенной гиперповерхности X . В случае, когда $k_n > 0$ и $n \notin \{7, 20, 60\}$, можно показать, что бирациональные инволюции $\tau_1, \dots, \tau_{k_n}$ индуцированы некоторым эллиптическим расслоением, в которое можно бирационально перестроить многообразие X , что позволило найти соотношения между инволюциями $\tau_1, \dots, \tau_{k_n}$ в [4].

Естественно рассмотреть вопрос классификации всех бирациональных перестроек гиперповерхности X в эллиптические расслоения. Последнее эквивалентно классификации доминантных рациональных отображений гиперповерхности X , нормализация общего слоя которого является неприводимой эллиптической кривой. Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 1.2. Пусть $n = 1$. Тогда X – трехмерная квартика. Пусть $\xi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – проекция из прямой, содержащейся в X . Тогда общий слой отображения ξ – эллиптическая кривая.

¹Многообразие Фано V , имеющее терминальные и $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности и $\text{rk Pic}(V) = 1$, принято называть *бirationally жестким* (см. [3]), если оно не может быть бирационально перестроено в расслоение Мори, которое небирегулярно многообразию V . Многообразие V принято называть *бirationally сверхжестким*, если оно бирационально жестко и $\text{Bir}(V) = \text{Aut}(V)$.

ПРИМЕР 1.3. Пусть $n = 2$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$ степени 5, имеющая одну особую точку типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\gamma} & Z \\ \pi \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow[\psi]{- - - - -} & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, π – взвешенное раздутие с весами $(1, 1, 1)$ особой точки (гиперповерхности X), γ – бирациональный морфизм, стягивающий 15 рациональных кривых $C_1, \dots, C_{15}$, а η – двулистное накрытие. Положим $\xi = \chi \circ \psi$, где $\chi: \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – проекция из точки $\eta \circ \gamma(C_i)$. Тогда общий слой рационального отображения ξ является эллиптической кривой.

ПРИМЕР 1.4. Пусть $n = 17$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 4, 4)$ степени 12, а ее особенности состоят из трех особых точек типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$. Рассмотрим рациональное отображение $\xi: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 4)$ такое, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \omega \\ X & \xrightarrow[\xi]{- - - - -} & \mathbb{P}(1, 1, 4) \end{array}$$

где α – взвешенное раздутие особой точки типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ с весами $(1, 1, 3)$, β – взвешенное раздутие с весами $(1, 1, 2)$ особой точки многообразия U , которая является особой точкой типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, а ω – морфизм, заданный линейной системой $|-4K_W|$. Тогда нормализация общего слоя рационального отображения ξ есть эллиптическая кривая.

ПРИМЕР 1.5. Пусть $n = 26$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 5, 6)$ степени 15, имеющая две особые точки типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$. Рассмотрим отображение $\xi: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 6)$ такое, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \omega \\ X & \xrightarrow[\xi]{- - - - -} & \mathbb{P}(1, 1, 6) \end{array}$$

где σ – взвешенное раздутие особой точки типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ с весами $(1, 1, 2)$, а ω является морфизмом, заданным линейной системой $|-6K_X|$. Тогда нормализация общего слоя отображения ξ есть эллиптическая кривая.

ПРИМЕР 1.6. Пусть $n = 31$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 4, 5, 6)$ степени 16, имеющая особую точку типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$. Рассмотрим отображение

$\xi: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 6)$ такое, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \omega \\ X & \dashrightarrow_{\xi} & \mathbb{P}(1, 1, 6) \end{array}$$

где α – взвешенное раздутие особой точки типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$ с весами $(1, 1, 4)$, β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая содержится в исключительном дивизоре бирационального морфизма α , с весами $(1, 1, 3)$, а ω – морфизм, который задан полной линейной системой $|-6K_W|$. Тогда общий слой отображения ξ есть эллиптическая кривая.

ПРИМЕР 1.7. Пусть $n \in \{7, 11, 19\}$. Тогда $a_2 = a_3$, а гиперповерхность X имеет $\frac{d}{a_2}$ особых точек типа $\frac{1}{a_2}(1, 1, a_2 - 1)$. Пусть $\mathcal{D}$ – линейная подсистема, состоящая из поверхностей линейной системы $|-a_2K_X|$, проходящих через одну фиксированную особую точку гиперповерхности X , имеющую тип $\frac{1}{a_2}(1, 1, a_2 - 1)$. Тогда линейная система $\mathcal{D}$ не имеет неподвижных компонент и задает рациональное отображение $\xi: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, a_1, a_2)$, нормализация общего слоя которого является эллиптической кривой.

ПРИМЕР 1.8. Пусть $n \in \{7, 9, 20, 30, 36, 44, 49, 51, 64\}$. Тогда X может быть задана как

$$w^2t + wg(x, y, z, t) + f(x, y, z, t) = 0$$

или

$$tz^k + \sum_{i=0}^{k-1} g_i(x, y, t, w)z^i = 0 \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = a_1$, $\text{wt}(z) = a_2$, $\text{wt}(t) = a_3$ и $\text{wt}(w) = a_4$, а g_i – общий квазиоднородный многочлен соответствующей степени. Пусть $\xi: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, a_1, a_3)$ – отображение, заданное линейной подсистемой полной линейной системы $|-a_1a_3K_X|$, которая состоит из поверхностей, заданных уравнением $f(x, y, t) = 0$, где $f(x, y, t)$ – квазиоднородный многочлен степени a_1a_3 . Тогда нормализация общего слоя отображения ξ есть эллиптическая кривая.

ПРИМЕР 1.9. Пусть $n \notin \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 60, 75, 84, 87, 93\}$. Тогда $a_2 \neq a_3$. Пусть $\xi: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, a_1, a_2)$ – естественная проекция. Тогда общий слой отображения ξ бирационален эллиптической кривой.

В настоящей работе будет доказан следующий результат².

ТЕОРЕМА 1.10. Пусть $\rho: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – рациональное отображение такое, что нормализация общего слоя отображения ρ является неприводимой эллиптической кривой. Тогда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow_{\sigma} & X \\ \downarrow \xi & & \downarrow \rho \\ \mathbb{P}(1, a_1, a_i) & \dashrightarrow_{\varphi} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

²При $n \in \{1, 3, 14, 22, 28, 34, 37, 39, 52, 53, 57, 59, 60, 66, 70, 72, 73, 75, 78, 81, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95\}$ утверждение теоремы 1.10 доказано в работах [4]–[6].

где σ и φ – бирациональные отображения, а ξ – одно из рациональных отображений, которые были построены в примерах 1.2–1.9.

СЛЕДСТВИЕ 1.11. Пусть $\rho: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – рациональное отображение такое, что нормализация общего слоя расслоения ρ является неприводимой эллиптической кривой. Предположим, что $n \notin \{1, 2, 7, 9, 11, 17, 19, 20, 26, 30, 31, 36, 44, 49, 51, 64\}$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \psi \swarrow & & \searrow \rho \\ \mathbb{P}(1, a_1, a_2) & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, а φ – бирациональное отображение.

СЛЕДСТВИЕ 1.12. Гиперповерхность X может быть бирационально перестроена в расслоение на эллиптические кривые в том и только в том случае, когда $n \notin \{3, 60, 75, 84, 87, 93\}$.

Проиллюстрируем используемую технику в доказательстве следующего результата.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.13. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 14$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 14$. Тогда X – общая гиперповерхность степени 12 во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(1, 1, 1, 4, 6)$. Гиперповерхность X неособа вне одной особой точки, которая является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$. Пусть P – особая точка гиперповерхности X , а $\xi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – естественная проекция. Тогда общий слой рационального отображения ψ является эллиптической кривой. Пусть $\pi: U \rightarrow X$ – взвешенное раздутие особой точки P с весами $(1, 1, 1)$. Тогда $\xi \circ \pi$ – морфизм.

Пусть $\rho: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – рациональное отображение такое, что нормализация общего слоя расслоения ρ есть эллиптическая кривая. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X & \xrightarrow[\rho]{} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

такую, что многообразие V неособо, α – бирациональный морфизм, а β – морфизм такой, что достаточно общий слой морфизма β является эллиптической кривой. Пусть $\mathcal{B}$ – полная линейная система $|\beta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$, а $\mathcal{M}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{B}$ на гиперповерхности X . Для завершения доказательства достаточно показать, что собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U лежит в слоях расслоения $\xi \circ \pi$.

Существует такое натуральное число $k > 0$, что поверхности из $\mathcal{M}$ рационально эквивалентны дивизору $-kK_X$. Рассмотрим подвижную логпару $(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$. Тогда

$$K_V + \frac{1}{k}\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} \alpha^* \left(K_X + \frac{1}{k}\mathcal{M} \right) + \sum_{i=1}^{\delta} a_i E_i \sim_{\mathbb{Q}} \sum_{i=1}^{\delta} a_i E_i,$$

где E_i – α -исключительный дивизор, a_i – рациональное число, а δ – общее количество α -исключительных дивизоров. Из работы [2] следует, что $a_i \geq 0$ для всех i , а из леммы 2.1 следует, что существует индекс j такой, что $a_j \leq 0$. Положим $Z_j = \alpha(E_j)$.

Предположим, что Z_j – неособая точка гиперповерхности X . Пусть S_1 и S_2 – достаточно общие поверхности в линейной системе $\mathcal{M}$. Тогда из [7, лемма 1.10] следует, что выполнено неравенство $\text{mult}_{Z_j}(S_1 \cdot S_2) \geq 4k^2$. С другой стороны, линейная система $|-4K_X|$ не имеет базисных точек и задает естественное двулистное накрытие $X \rightarrow \mathbb{P}(1, 1, 1, 4)$. Имеем

$$2k^2 = H \cdot S_1 \cdot S_2 \geq \text{mult}_{Z_j}(S_1 \cdot S_2) \geq 4k^2,$$

где H – общий дивизор в $|-4K_X|$, проходящий через Z_j . Противоречие.

Из следствия 2.8 следует, что Z_j не может быть кривой. Показано, что Z_j – особая точка гиперповерхности X . Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U . Тогда из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$, откуда получаем, что линейная система $\mathcal{D}$ лежит в слоях расслоения $\xi \circ \pi$, что и требовалось доказать.

Опишем структуру настоящей работы. В §2 приведены результаты, которые будут использованы при доказательстве теоремы 1.10. В §3 рассмотрено начало доказательства теоремы 1.10, утверждение которой доказано в случае $n \in \{1, 3, 5, 11, 14, 22, 28, 34, 37, 39, 52, 53, 57, 59, 60, 66, 70, 72, 73, 75, 78, 81, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95\}$. Затем утверждение теоремы 1.10 будет доказано в оставшихся случаях.

Автор признателен М. М. Гриненко, В. А. Исковских, А. Корти, Ю. И. Манину, Дж. Парку, Ю. Г. Прохорову, А. В. Пухликову, Д. А. Степанову и В. В. Шокурову за интересные и плодотворные беседы и Институту математики Макса Планка в Бонне за предоставленные условия для работы.

§ 2. Предварительные результаты

Рассмотрим трехмерное многообразие X , имеющее терминальные и $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, линейную систему $\mathcal{M}$ на многообразии X , которая не имеет неподвижных компонент, и рациональное число $\lambda \geq 0$. В данном параграфе мы рассмотрим несколько утверждений технического характера о свойствах подвижной логпары $(X, \lambda\mathcal{M})$, на которые существенным образом опирается доказательство теоремы 1.10. Общие свойства подвижных логпар содержатся в работе [3]. Как обычно, множество центров канонических особенностей логпары $(X, \lambda\mathcal{M})$ будет обозначаться через $\text{CS}(X, \lambda\mathcal{M})$.

Геометрический смысл доказательства теоремы 1.10 состоит в итерационном использовании следующего результата, который обобщает классическое неравенство Нётера–Фано.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\rho: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – отображение такое, что нормализация общего слоя отображения ρ является эллиптической кривой, а $\pi: V \rightarrow X$ – бирациональный морфизм такой, что $\rho \circ \pi$ – морфизм. Предположим, что $\mathcal{M}$ является собственным прообразом линейной системы $|\rho \circ \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$, дивизор $-K_X$ является численно эффективным и объемным, но $K_X + \lambda\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Тогда особенности логпары $(X, \lambda\mathcal{M})$ не терминальны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [3, доказательство теоремы 1.4.4].

Практически всегда после применения леммы 2.1 в доказательстве теоремы 1.10 используется следующий хорошо известный результат.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть O – особая точка многообразия X , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{r}(1, a, r - a)$, где a и r – взаимно простые натуральные числа такие, что $r > a$. Определим рациональное число $\text{mult}_O(\mathcal{M})$ посредством соотношения

$$\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(\mathcal{M}) - \text{mult}_O(\mathcal{M})G,$$

где $\pi: U \rightarrow X$ – взвешенное раздутие точки O с весами $(1, a, r - a)$, G – исключительный дивизор взвешенного раздутия π , а $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U . Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \lambda\mathcal{M})$ содержит либо точку O , либо некоторую неприводимую кривую, проходящую через точку O . Тогда $\text{mult}_O(\mathcal{M}) \geq 1/(r\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимое неравенство доказано в работе [8].

После применения теоремы 2.2 в доказательстве теоремы 1.10 часто используется лемма 2.1 вместе со следующим несложным результатом.

ЛЕММА 2.3. В предположениях и обозначениях теоремы 2.2 дополнительно предположим, что особенности логпары $(X, \lambda\mathcal{M})$ канонические, множество $\mathbb{CS}(X, \lambda\mathcal{M})$ состоит из точки O , а множество $\mathbb{CS}(U, \lambda\mathcal{D})$ не пусто. Тогда выполнено следующее:

- множество $\mathbb{CS}(U, \lambda\mathcal{D})$ не содержит неособых точек поверхности $G \cong \mathbb{P}(1, a, r - a)$;
- если множество $\mathbb{CS}(U, \lambda\mathcal{D})$ содержит кривую L , то кривая L принадлежит линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, a, r - a)}(1)|$, а множество $\mathbb{CS}(U, \lambda\mathcal{D})$ содержит все особые точки поверхности G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим только случай $r = 5$ и $a = 2$, поскольку в общем случае требуемое утверждение доказывается аналогично. В этом случае $G \cong \mathbb{P}(1, 2, 3)$.

Пусть P и Q – различные особые точки поверхности G , а L – единственная кривая из линейной системы $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, 2, 3)}(1)|$. Тогда L проходит через точки P и Q , а из теоремы 2.2 следует, что выполнено равенство $\text{mult}_O(\mathcal{M}) = 1/(5\lambda)$, откуда $\mathcal{D}|_G \sim_{\mathbb{Q}} \lambda L$.

Предположим, что множество $\mathbb{CS}(U, \lambda\mathcal{D})$ содержит некоторое подмногообразие Z многообразия U , отличное от L и точек P и Q . Тогда $Z \subset G$. Покажем, что сделанное предположение противоречиво, откуда будет следовать требуемое утверждение по теореме 2.2.

Предположим, что Z – точка. Тогда Z является неособой точкой многообразия U , откуда следует, что выполнено строгое неравенство $\text{mult}_Z(\mathcal{D}) > 1/\lambda$. Пусть C – достаточно общая кривая в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, 2, 3)}(6)|$, проходящая через Z . Тогда кривая C не содержится в базисном множестве линейной системы $\mathcal{D}$. Значит, выполнены неравенства

$$\frac{1}{\lambda} = C \cdot \mathcal{D} \geq \text{mult}_Z(C) \text{mult}_Z(\mathcal{D}) > \frac{1}{\lambda},$$

что является противоречием с предположением.

Показано, что Z – кривая. Тогда $\text{mult}_Z(\mathcal{D}) \geq 1/\lambda$. Пусть C – достаточно общая кривая в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2,3)}(6)|$. Тогда кривая C не содержится в базисном множестве линейной системы $\mathcal{D}$, откуда следует, что выполнены неравенства

$$\frac{1}{\lambda} = C \cdot \mathcal{D} \geq \text{mult}_Z(\mathcal{D}) C \cdot Z \geq \frac{C \cdot Z}{\lambda},$$

откуда следует, что $C \cdot Z = 1$. Из равенства $C \cdot Z = 1$ следует, что кривая Z принадлежит полной линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2,3)}(1)|$, единственным эффективным дивизором в которой является кривая L . Значит, кривые L и Z совпадают. Противоречие. Лемма доказана.

После применения леммы 2.3 в доказательстве теоремы 1.10 несколько раз используется следующий простой результат.

ЛЕММА 2.4. *Предположим, что полная линейная система $|-mK_X|$ не имеет базисных точек для $m \gg 0$. Пусть C – кривая такая, что $C \in \mathbb{CS}(X, \lambda\mathcal{M})$. Тогда $-K_X \cdot C \leq -K_X^3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M_1 и M_2 – общие дивизоры в $\mathcal{M}$. Тогда

$$\text{mult}_C(M_1 \cdot M_2) \geq \text{mult}_C(M_1) \text{mult}_C(M_2) \geq \frac{1}{\lambda^2}.$$

Пусть H – общая поверхность в $|-mK_X|$. Тогда

$$\frac{-mK_X^3}{\lambda^2} = H \cdot M_1 \cdot M_2 \geq (-mK_X \cdot C) \text{mult}_C(M_1 \cdot M_2) \geq \frac{-mK_X \cdot C}{\lambda^2},$$

откуда следует, что $-K_X \cdot C \leq -K_X^3$.

Теперь рассмотрим один простой результат, который позволяет существенно упростить доказательство теоремы 1.10.

ЛЕММА 2.5. *Предположим, что $\mathcal{M}$ не составлена из пучка. Тогда не существует собственного замкнутого по Зарискому подмножества $\Sigma \subsetneq X$ такого, что*

$$\text{Supp}(S_1) \cap \text{Supp}(S_2) \subset \Sigma \subsetneq X,$$

где S_1 и S_2 – достаточно общие дивизоры в линейной системе $\mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует собственное подмножество $\Sigma \subset X$ такое, что для достаточно общих эффективных дивизоров в линейной системе $\mathcal{M}$ теоретико-множественное пересечение носителей дивизоров S_1 и S_2 содержится в Σ . Покажем, что сделанное предположение противоречиво.

Рассмотрим отображение $\rho: X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, заданное линейной системой $\mathcal{M}$, где n – размерность линейной системы $\mathcal{M}$, и коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X & \overset{\rho}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

такую, что многообразие W неособо, α – бирациональный морфизм, а β – морфизм. Положим $Y = \beta(W)$. Тогда выполнено неравенство $\dim(Y) \geq 2$,

поскольку $\mathcal{M}$ не составлена из пучка. Пусть Λ – замкнутое по Зарискому подмножество многообразия W такое, что морфизм $\alpha|_{W \setminus \Lambda}: W \setminus \Lambda \rightarrow X \setminus \alpha(\Lambda)$ бирегулярен. Пусть Δ – объединение Λ и замыкания собственного прообраза подмножества $\alpha^{-1}(\Sigma \setminus \alpha(\Lambda))$ на многообразии W . Тогда Δ – собственное подмножество многообразия W , которое замкнуто по Зарискому в W по построению.

Пусть B_1 и B_2 – общие гиперплоские сечения многообразия Y , а D_1 и D_2 – собственные прообразы соответственно дивизоров B_1 и B_2 на W . Тогда $\alpha(D_1)$ и $\alpha(D_2)$ являются общими элементами линейной системы $\mathcal{M}$. В теоретико-множественном смысле мы имеем

$$\emptyset \neq \beta^{-1}(\text{Supp}(B_1) \cap \text{Supp}(B_2)) = \text{Supp}(D_1) \cap \text{Supp}(D_2) \subset \Delta \subsetneq W, \quad (2.1)$$

поскольку $\dim(Y) \geq 2$. Очевидно, что теоретико-множественное соотношение (2.1) абсурдно ввиду общности гиперплоских сечений B_1 и B_2 многообразия $Y \subset \mathbb{P}^n$. Противоречие.

Из [9, лемма 0.3.3] и леммы 2.5 получаем удобное следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Предположим, что $\mathcal{M}$ не составлена из пучка. Пусть D – численно эффективный и объемный дивизор на X . Тогда $D \cdot S_1 \cdot S_2 > 0$, где S_1 и S_2 – общие поверхности в линейной системе $\mathcal{M}$.*

Из доказательства леммы 2.5 вытекает следующее простое обобщение леммы 2.5.

ЛЕММА 2.7. *Предположим, что $\mathcal{M}$ не составлена из пучка. Пусть $\mathcal{D}$ – линейная система на многообразии X , не имеющая неподвижных компонент. Тогда не существует собственного замкнутого подмножества $\Sigma \subsetneq X$ такого, что*

$$\text{Supp}(S) \cap \text{Supp}(D) \subset \Sigma,$$

где S и D – общие дивизоры из линейных систем $\mathcal{M}$ и $\mathcal{D}$ соответственно.

Из доказательства леммы 2.4 и утверждения леммы 2.5 получаем следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. *В предположениях и обозначениях леммы 2.4 дополнительно предположим, что линейная система $\mathcal{M}$ не составлена из пучка, а дивизор $-K_X$ численно эффективен и объемен. Тогда выполнено неравенство $-K_X \cdot C < -K_X^3$.*

Применения леммы 2.7 часто связаны со следующим простым результатом.

ЛЕММА 2.9. *Пусть S – проективная нормальная поверхность, D – эффективный дивизор на поверхности S и выполнено соотношение $D \equiv \sum_{i=1}^r a_i C_i$, где a_i – рациональное число, а $C_1, \dots, C_r$ – неприводимые кривые на поверхности S такие, что форма пересечения кривых $C_1, \dots, C_r$ отрицательно определена. Тогда $D = \sum_{i=1}^r a_i C_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D = \sum_{i=1}^k c_i B_i$, где B_i – неприводимая кривая на S , а c_i – неотрицательное рациональное число. Предположим, что

$$\sum_{i=1}^k c_i B_i \neq \sum_{i=1}^r a_i C_i,$$

а кривая B_i не является одной из кривых $C_1, \dots, C_r$ для каждого возможного значения индекса i . Можно также считать, что не все числа $c_1, \dots, c_k$ равны нулю. Мы покажем, что сделанные предположения приводят к противоречию, откуда будет следовать требуемое утверждение.

Из отрицательной определенности формы пересечения кривых $C_1, \dots, C_r$ следует, что

$$\begin{aligned} 0 &\geq \left(\sum_{a_i > 0} a_i C_i \right) \left(\sum_{a_i > 0} a_i C_i \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^k c_i B_i \right) \left(\sum_{a_i > 0} a_i C_i \right) - \left(\sum_{a_i \leq 0} a_i C_i \right) \left(\sum_{a_i > 0} a_i C_i \right) \geq 0, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что выполнена численная эквивалентность

$$\sum_{c_i \geq 0} c_i B_i \equiv \sum_{a_i \leq 0} a_i C_i,$$

следовательно, $c_i = 0$ и $a_i = 0$ для каждого i . Противоречие.

§ 3. Начало классификации

Воспользуемся обозначениями и предположениями, введенными в § 1. В данном параграфе мы начнем доказательство теоремы 1.10. Предположим, что существуют бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow V$ и морфизм со связными слоями $\nu: V \rightarrow \mathbb{P}^2$ такие, что V неособо, а общий слой морфизма ν является эллиптической кривой. Требуется показать, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X & \xrightarrow{\rho} & V \\ \xi \downarrow & & & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, a_1, a_i) & \xrightarrow{\zeta} & & & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (3.1)$$

где σ и ζ – бирациональные отображения, а ξ – одно из рациональных отображений, которые были построены в примерах 1.2–1.9.

Отметим, что диаграмма (3.1) влечет коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & V \\ \xi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, a_1, a_i) & \xrightarrow{\zeta} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (3.2)$$

в случае, когда для каждого бирационального автоморфизма σ гиперповерхности X выполнено соотношение $\xi \circ \sigma = \chi \circ \xi$ для некоторого $\chi \in \text{Bir}(\mathbb{P}(1, a_1, a_i))$.

ПРИМЕР 3.1. Пусть $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, a_1, a_2)$ – естественная проекция. Предположим дополнительно, что $n \notin \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 20, 36, 60, 75, 84, 87, 93\}$. Тогда из результатов, полученных в работе [2], следует, что для каждого бирационального автоморфизма σ гиперповерхности X имеет место соотношение $\psi \circ \sigma = \chi \circ \psi$, где χ – бирациональный автоморфизм поверхности $\mathbb{P}(1, a_1, a_2)$.

Пусть $\mathcal{M}$ – собственный прообраз полной линейной системы $|\nu^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$ на гиперповерхности X . Тогда $\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_X$ для некоторого натурального числа k , а особенности подвижной логпары $(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не являются терминальными по лемме 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Из результатов, полученных в работе [2], следует, что существует такой бирациональный автоморфизм σ гиперповерхности X , что особенности логпары $(X, \frac{1}{k'}\sigma(\mathcal{M}))$ канонические, где k' – такое натуральное число, что выполнено соотношение $\sigma(\mathcal{M}) \sim_{\mathbb{Q}} -k'K_X$.

Можно считать, что особенности логпары $(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ канонические.

ТЕОРЕМА 3.3. *Предположим, что $n \neq 1$ и $n \neq 2$. Тогда множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит неособых точек гиперповерхности X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение следует из аргументов, использованных в доказательстве теоремы 5.1.1 из работы [2].

Из леммы 2.4 вытекает следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Пусть $n \geq 6$. Тогда множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит кривых, которые не проходят через особые точки гиперповерхности X .*

В частности, множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку в $\text{Sing}(X)$ при $n \geq 6$ по теореме 2.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит особую точку O гиперповерхности X , являющуюся факторособенностью типа $\frac{1}{r}(1, r-a, a)$, где a и r – взаимно простые натуральные числа такие, что $r > a$. Пусть $\pi: Y \rightarrow X$ – взвешенное раздутие особой точки O с весами $(1, a, r-a)$. Тогда выполнено неравенство $-K_Y^3 \geq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $-K_Y^3 = -K_X^3 - 1/(ra(r-a)) < 0$. Пусть E – π -исключительный дивизор, а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на Y . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$ по теореме 2.2.

Пусть $\overline{\text{NE}}(Y)$ – замыкание в $\mathbb{R}^2$ конуса, порожденного эффективными одномерными циклами многообразия Y . Тогда класс цикла $-E \cdot E$ порождает один из экстремальных лучей конуса $\overline{\text{NE}}(Y)$. Более того, из [2, следствие 5.4.6] следует, что существуют некоторые целые числа $b > 0$ и $c \geq 0$ такие, что цикл $-K_Y \cdot (-bK_Y + cE)$ численно эквивалентен эффективной, неприводимой и приведенной кривой Γ на многообразии Y , которая порождает экстремальный луч конуса $\overline{\text{NE}}(Y)$, отличный от луча, порожденного циклом $-E \cdot E$.

Пусть S_1 и S_2 – различные поверхности в $\mathcal{B}$. Тогда $S_1 \cdot S_2 \in \overline{\text{NE}}(Y)$, но выполнена численная эквивалентность $S_1 \cdot S_2 \equiv k^2 K_Y^2$. Значит, цикл $S_1 \cdot S_2$ порождает экстремальный луч конуса $\overline{\text{NE}}(Y)$, содержащий Γ . Для каждого эффективного цикла $C \in \mathbb{R}^+ \Gamma$ имеем

$$\text{Supp}(C) = \text{Supp}(S_1 \cdot S_2),$$

поскольку $S_1 \cdot \Gamma < 0$ и $S_2 \cdot \Gamma < 0$. Последнее невозможно по лемме 2.5, поскольку линейная система $\mathcal{B}$ не составлена из пучка. Противоречие.

Из предложения 3.5 легко получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. *Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n \in \{14, 22, 28, 34, 37, 39, 52, 53, 57, 59, 66, 70, 72, 73, 78, 81, 86, 88, 89, 90, 92, 94, 95\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется показать, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, a_1, a_2) & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (3.3)$$

где ψ – естественная проекция, а φ – некоторое бирациональное отображение.

Из теоремы 3.3, леммы 2.4 и теоремы 2.2 следует, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит особую точку P гиперповерхности X типа $\frac{1}{r}(1, a, r-a)$, где a и r – взаимно простые натуральные числа такие, что $r > a$.

Пусть $\pi: Y \rightarrow X$ – взвешенное раздутие точки P с весами $(1, a, r-a)$, E – исключительный дивизор раздутия π , а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Y . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$ по теореме 2.2. Более того, непосредственно проверяется, что для всех выбранных значений индекса n либо $-K_Y^3 < 0$, либо $-K_Y^3 = 0$.

Из предложения 3.5 следует, что $-K_Y^3 = 0$. Тогда линейная система $|-rK_Y|$ не имеет базисных точек для $r \gg 0$ и задает морфизм $\eta: Y \rightarrow \mathbb{P}(1, a_1, a_2)$ такой, что общий слой морфизма η является эллиптической кривой, а диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \pi \swarrow & & \searrow \eta \\ X & \xrightarrow{\quad \psi \quad} & \mathbb{P}(1, a_1, a_2) \end{array}$$

коммутативна. Пусть C – достаточно общий слой морфизма η , а S – достаточно общая поверхность в линейной системе $\mathcal{B}$. Тогда $S \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$ по теореме 2.2. Значит, выполнено равенство $S \cdot C = 0$, откуда следует, что поверхность S лежит в слоях эллиптического расслоения η , откуда следует существование коммутативной диаграммы (3.3).

Теперь докажем лемму, из которой вытекает утверждение следствия 1.12.

ЛЕММА 3.7. В сделанных предположениях $n \notin \{3, 60, 75, 84, 87, 93\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 3.5 следует, что $n \notin \{75, 84, 87, 93\}$. Таким образом, требуется показать, что $n \neq 3$ и $n \neq 60$.

Пусть $n = 3$. Тогда гиперповерхность X неособа, множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит неприводимую кривую Γ на многообразии X . Тогда выполнено равенство $-K_X \cdot \Gamma = 1$ по лемме 2.4. Пусть $\gamma: \bar{X} \rightarrow X$ – раздутие кривой Γ , а G – исключительный дивизор бирационального морфизма γ . Тогда $\gamma^*(-3K_X) - G$ численно эффективен и объемен, но

$$(\eta^*(-3K_X) - G) \cdot \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_1 = 0,$$

где $\bar{S}_i$ – собственный прообраз общей поверхности из $\mathcal{M}$ на $\bar{X}$, что противоречит следствию 2.6.

Итак, имеем $n = 60$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 4, 5, 6, 9)$ степени 24, а из предложения 3.5 и следствия 2.8 следует, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из особой точки O гиперповерхности X , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{9}(1, 4, 5)$.

ТЕОРЕМА 3.9. *Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит неприводимую кривую C на гиперповерхности X , но $n \neq 1$ и $n \neq 2$. Тогда существуют поверхности S_1 и S_2 в линейной системе $|-K_X|$ такие, что кривая C является компонентой кривой $S_1 \cap S_2$.*

Следующий результат получен в диссертации Д. Рэйдера.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. *Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 5$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 5$. Тогда X – достаточно общая квазигладкая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$ степени 7, выполнено равенство $-K_X^3 = 7/6$, а особенности гиперповерхности X состоят из двух изолированных особых точек P и Q таких, что P является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, а Q является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$.

Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2 f_1(x, y, z) + f_4(x, y, z, t)w + f_7(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3) \\ \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = \text{wt}(z) = 1$, $\text{wt}(t) = 2$ и $\text{wt}(w) = 3$, f_i – достаточно общий квазиоднородный многочлен степени i , P задается уравнениями $x = y = z = w = 0$, а Q задается уравнениями $x = y = z = t = 0$. Имеется коммутативная диаграмма

где χ и ξ – естественные проекции, ω – эллиптическое расслоение, α – взвешенное раздутие точки Q с весами $(1, 1, 2)$, γ – бирациональный морфизм, стягивающий 14 неособых неприводимых рациональных кривых $C_1, \dots, C_{14}$ в соответственно 14 изолированных обыкновенных двойных точек $P_1, \dots, P_{14}$ многообразия Y , η – двулистное накрытие, разветвленное в поверхности $R \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$, которая задается уравнением

$$f_4(x, y, z, t)^2 - 4f_1(x, y, z)f_7(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t])$$

и имеет 14 изолированных обыкновенных двойных точек $\eta(P_1), \dots, \eta(P_{14})$, заданных уравнениями $f_4 = f_1 = f_7 = 0$, β – композиция взвешенных раздутий с весами $(1, 1, 1)$ двух особых точек многообразия W , являющихся особенностями типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, одна из которых есть собственный прообраз точки P , а вторая содержится в α -исключительном дивизоре.

Несложно видеть, что из теоремы 3.9 следует (см. ниже доказательство леммы 8.3), что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subset \{P, Q\}$.

Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{Q\}$. Пусть O – особая точка многообразия W такая, что $\alpha(O) = Q$, а $\mathcal{D}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на W . Тогда из теоремы 2.2 и лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит

точку O . Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{D}$ на многообразии Y . Тогда из теоремы 2.2 и лемм 2.3 и 2.4 следует, что множество $\mathbb{CS}(Y, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит кривую C такую, что $-K_Y \cdot C = 1/2$ и $\chi \circ \eta(C)$ – точка.

Существует кривая $Z \subset Y$ такая, что $\eta(Z) = \eta(C)$ и $C \neq Z$. Пусть S – общая поверхность в линейной системе $|-K_Y|$, которая содержит C . Тогда $Z^2 < 0$ и $\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} kC + kZ$ на поверхности S , что противоречит лемме 2.7, поскольку $\mathcal{B}$ не составлена из пучка.

Из теоремы 2.2 и лемм 2.3 и 2.4 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P, Q\}$. Теперь из следствия 2.8 и лемм 2.1 и 2.3 следует, что $O \in \mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{D})$, а из теоремы 2.2 следует, что собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U содержится в слоях расслоения ω .

Из теоремы 3.9 несложно получить следующую лемму.

ЛЕММА 3.11. Пусть $a_2 \neq 1$. Тогда $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит кривых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит некоторую неприводимую кривую C на гиперповерхности X . Тогда из теоремы 3.9 следует, что существуют поверхности S_1 и S_2 в линейной системе $|-K_X|$ такие, что кривая C является компонентой кривой $S_1 \cap S_2$. Из условия $a_2 \neq 1$ следует, что пересечение $S_1 \cap S_2$ приведено и неприводимо, откуда вытекает, что $-K_X \cdot C = -K_X^3$. Последнее противоречит лемме 2.4.

Проиллюстрируем применение леммы 3.11 на доказательстве следующего результата.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.12. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 18$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 18$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 2, 3, 5)$ степени 12, а особенности гиперповерхности X состоят из точек $O_1, \dots, O_6$, каждая из которых является особенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, и точки P , которая является особенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$. Выполнено равенство $-K_X^3 = 1/5$, и существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow[\psi]{-} & \mathbb{P}(1, 2, 2) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, морфизм α – взвешенное раздутие точки P с весами $(1, 2, 3)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ на U , с весами $(1, 1, 2)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки P .

Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U . Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2, а из леммы 2.1 следует, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не пусто. Пусть G – исключительный дивизор бирационального морфизма α , а Q и O – особые точки поверхности G , которые являются факторособенностями типов $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ на многообразии U . Тогда из леммы 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит либо точку Q , либо точку O .

Предположим, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит точку O . Пусть $\pi: Y \rightarrow U$ – взвешенное раздутие точки O с весами $(1, 1, 1)$, F – π -исключительный дивизор, а $\mathcal{H}$ и $\mathcal{P}$ – собственные прообразы соответственно $\mathcal{M}$ и $|-3K_U|$ на Y . Тогда $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$ по теореме 2.2, но

$$\mathcal{P} \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(-3K_U) - \frac{1}{2}F,$$

а базисное множество линейной системы $\mathcal{P}$ состоит из неприводимой кривой Z такой, что кривая $\alpha \circ \pi(Z)$ является базисной кривой линейной системы $|-3K_X|$. Более того, для общей поверхности S в линейной системе $\mathcal{P}$ выполнено неравенство $S \cdot Z > 0$, откуда следует, что дивизор $\pi^*(-6K_U) - F$ численно эффективен и объемен. С другой стороны, для общих поверхностей D_1 и D_2 в линейной системе $\mathcal{H}$ выполнены равенства

$$(\pi^*(-6K_U) - F) \cdot D_1 \cdot D_2 = (\pi^*(-6K_U) - F) \cdot \left(\pi^*(-kK_U) - \frac{k}{2}F \right)^2 = 0,$$

что противоречит утверждению следствия 2.6.

Таким образом, множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит точку Q . Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2, откуда следует требуемое утверждение.

В завершение данного параграфа мы докажем утверждение теоремы 1.10 для общей неособой трехмерной кватрики, которое было получено в работах [5] и [6].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.13. *Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени 4. Требуется показать, что для некоторой прямой $L \subset X$ существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\quad \sigma \quad} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (3.4)$$

где ψ – проекция из прямой L , а σ – бирациональное отображение.

Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P кватрики X . Тогда выполнено строгое неравенство $\text{mult}_P(\mathcal{M}) > k$, откуда несложно получить, что через точку P проходит лишь конечное число прямых, содержащихся в кватрике X . Пусть H – общее гиперплоское сечение кватрики X , проходящее через P . Тогда из [7, лемма 1.10] следует, что

$$4k^2 \leq \text{mult}_P(D_1 \cdot D_2) \leq D_1 \cdot D_2 \cdot H = 4k^2,$$

где D_1 и D_2 – общие поверхности в линейной системе $\mathcal{M}$. Таким образом, носитель эффективного одномерного цикла $D_1 \cdot D_2$ принадлежит объединению конечного числа прямых на кватрике X , проходящих через точку P . Последнее невозможно по лемме 2.5.

Итак, множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит неприводимую кривую $C \subset X$. В частности, выполнено неравенство $\text{mult}_C(\mathcal{M}) \geq k$, а из леммы 2.4 следует, что $\deg(C) \leq 3$.

Предположим, что кривая C не содержится ни в каком двумерном линейном подпространстве в $\mathbb{P}^4$. Тогда C является либо гладкой кривой степени 3 или 4, либо рациональной кривой степени 4 с одной двойной точкой.

Предположим, что C неособа. Пусть $\alpha: U \rightarrow X$ – раздутие кривой C , F – исключительный дивизор раздутия α , $\mathcal{D}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U . Тогда базисное множество линейной системы $|\alpha^*(-\deg(C)K_X) - F|$ не содержит кривых, но непосредственные вычисления показывают, что выполнено строгое неравенство

$$(\alpha^*(-\deg(C)K_X) - F) \cdot D_1 \cdot D_2 < 0,$$

где D_1 и D_2 – общие поверхности в линейной системе $\mathcal{D}$. Противоречие.

Значит, кривая C – рациональная кватрика с одной двойной точкой P . Рассмотрим композицию $\beta: W \rightarrow X$ раздутия точки P с последующим раздутием собственного прообраза кривой C . Пусть G и E – исключительные дивизоры бирационального морфизма β такие, что $\beta(E) = C$ и $\beta(G) = P$. Тогда несложно видеть, что базисное множество полной линейной системы $|\beta^*(-4K_X) - E - 2G|$ не содержит кривых, но непосредственные вычисления показывают, что выполнено строгое неравенство

$$(\beta^*(-4K_X) - E - 2G) \cdot D_1 \cdot D_2 < 0,$$

где D_1 и D_2 – общие поверхности в $\mathcal{D}$. Противоречие. Значит, кривая C содержится в некотором двумерном линейном подпространстве в $\mathbb{P}^4$.

Предположим, что $\deg(C) \neq 1$. Тогда возможны следующие случаи:

- (i) кривая C – неособая коника;
- (ii) кривая C – неособая плоская кубика;
- (iii) кривая C – плоская кубика с одной двойной точкой.

Предположим, что C неособа. Пусть $\alpha: U \rightarrow X$ – раздутие кривой C , F – исключительный дивизор бирационального морфизма α , а $\mathcal{D}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на многообразии U . Тогда базисное множество линейной системы $|\alpha^*(-\deg(C)K_X) - F|$ не содержит кривых. В частности, дивизор $\alpha^*(-\deg(C)K_X) - F$ численно эффективен, но несложно видеть, что дивизор $\alpha^*(-\deg(C)K_X) - F$ также и объемен. С другой стороны, непосредственные вычисления показывают, что выполнено равенство

$$(\alpha^*(-\deg(C)K_X) - F) \cdot D_1 \cdot D_2 = 0,$$

где D_1 и D_2 – общие поверхности в $\mathcal{D}$, что невозможно по следствию 2.6.

Итак, показано, что C – плоская кубическая кривая с одной двойной точкой P . Рассмотрим композицию $\beta: W \rightarrow X$ раздутия точки P с последующим раздутием неособой кривой, являющейся собственным прообразом кривой C . Пусть G и E – исключительные дивизоры бирационального морфизма β такие, что $\beta(E) = C$ и $\beta(G) = P$. Тогда базисное множество линейной системы $|\beta^*(-3K_X) - E - 2G|$ не содержит кривых, откуда сразу следует, что дивизор $\beta^*(-3K_X) - E - 2G$ численно эффективен и объемен. С другой стороны, имеем

$$(\beta^*(-3K_X) - E - 2G) \cdot D_1 \cdot D_2 \leq 0,$$

где D_1 и D_2 – общие поверхности в $\mathcal{D}$, что невозможно по следствию 2.6.

Показано, что C – прямая. Теперь из равенства $\text{mult}_C(D) = k$ сразу следует существование коммутативной диаграммы (3.4) для прямой $L = C$.

§ 4. Случай $n = 2$, гиперповерхность степени 5 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 2$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$ степени 5, выполнено равенство $-K_X^3 = 5/2$, а особенности гиперповерхности X состоят из одной особой точки O , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$. Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2 f_1(x, y, z, t) + f_3(x, y, z, t)w + f_5(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2) \\ \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = \text{wt}(z) = \text{wt}(t) = 1$ и $\text{wt}(w) = 2$, $f_i(x, y, z, t)$ – однородный многочлен степени i , а O задается уравнениями $x = y = z = t = 0$. Пусть $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ – естественная проекция. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & \xleftarrow{\alpha_i} & W_i \\ & \swarrow \pi & \searrow \gamma & & \searrow \omega_i \\ X & & Z & \xleftarrow{\beta_i} & U_i \\ & \searrow \psi & \swarrow \eta & & \swarrow \xi_i \\ & & \mathbb{P}^3 & \xrightarrow{\chi_i} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где π – взвешенное раздутие точки O с весами $(1, 1, 1)$, γ – бирациональный морфизм, стягивающий 15 неособых неприводимых рациональных кривых $C_1, \dots, C_{15}$ в соответственно 15 изолированных обыкновенных двойных точек $P_1, \dots, P_{15}$ многообразия Z , η – двулистное накрытие, разветвленное в поверхности $R \subset \mathbb{P}^3$ степени 6, которая задается уравнением

$$f_3(x, y, z, t)^2 - 4f_1(x, y, z, t)f_5(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}^3 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t])$$

и имеет 15 изолированных обыкновенных двойных точек $\eta(P_1), \dots, \eta(P_{15})$, заданных уравнениями $f_3 = f_1 = f_5 = 0$, α_i – раздутие кривой C_i , β_i – раздутие точки P_i , w_i – бирациональный морфизм, χ_i – проекция из точки $\eta(P_i)$, а ξ_i – эллиптическое расслоение.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Пусть τ – бирациональная инволюция многообразия X , индуцированная двулистным накрытием η . Тогда группа $\text{Bir}(X)$ порождена инволюцией τ и бирегулярными автоморфизмами гиперповерхности X согласно работе [2]. Более того, несложно видеть, что для каждого индекса $i \in \{1, \dots, 15\}$ бирациональная инволюция τ оставляет общий слой рационального отображения $\chi_i \circ \psi$ инвариантным.

В оставшейся части данного параграфа мы докажем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\rho} & V \\ \xi_i \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (4.1)$$

для некоторого индекса $i \in \{1, \dots, 15\}$, где φ – бирациональное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}_i$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на многообразии W_i . Тогда для доказательства существования коммутативной диаграммы (4.1) достаточно показать, что $\mathcal{B}_i$ содержится в слоях расслоения $\xi_i \circ \omega_i$, что легко следует из соотношения $\mathcal{B}_i \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{W_i}$.

ЛЕММА 4.3. *Предположим, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит гладкую точку многообразия X . Тогда для некоторого значения индекса $i \in \{1, \dots, 15\}$ существует коммутативная диаграмма (4.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит гладкую точку P гиперповерхности X . Пусть S – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-K_X|$, проходящая через точку P . В случае, когда $P \notin \bigcup_{i=1}^{15} \pi(C_i)$, поверхность S не содержит неприводимых компонент эффективного цикла $D_1 \cdot D_2$ для общих поверхностей D_1 и D_2 в $\mathcal{M}$, откуда

$$\text{mult}_P(D_1 \cdot D_2) \leq D_1 \cdot D_2 \cdot S = -k^2 K_X^3 = \frac{5}{2} k^2,$$

что противоречит [7, лемма 1.10]. Таким образом, существует индекс i такой, что P содержится в кривой $\pi(C_i)$. Следуя аргументам, использованным в работе [2], положим $C = \pi(C_i)$ и

$$\mathcal{M}|_S = \mathcal{L} + \text{mult}_C(\mathcal{M})C,$$

где $\mathcal{L}$ – линейная система без неподвижных компонент. Из [11, теорема 7.5] следует, что особенности логпары

$$\left(S, \frac{1}{k}\mathcal{L} + \frac{\text{mult}_C(\mathcal{M})}{k}C \right)$$

не логтерминальны в точке P . Таким образом, для общих кривых L_1 и L_2 в $\mathcal{L}$ имеем

$$\text{mult}_P(L_1 \cdot L_2) \geq 4 \left(1 - \frac{\text{mult}_C(\mathcal{M})}{k} \right) k^2$$

в силу [7, теорема 3.1]. С другой стороны, на поверхности S выполнено равенство

$$L_1 \cdot L_2 = \frac{5}{2} k^2 - \text{mult}_C(\mathcal{M})k - \frac{3}{2} \text{mult}_C^2(\mathcal{M}),$$

поскольку $C^2 = -3/2$. Итак, мы получили неравенство

$$\frac{5}{2} k^2 - \text{mult}_C(\mathcal{M})k - \frac{3}{2} \text{mult}_C^2(\mathcal{M}) \geq 4 \left(1 - \frac{\text{mult}_C(\mathcal{M})}{k} \right) k^2,$$

которое сразу влечет выполнение равенства $\text{mult}_C(\mathcal{M}) = k$. Таким образом, неприводимая кривая $\pi(C_i)$ также принадлежит множеству $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$. Теперь из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{B}_i \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{W_i}$, откуда следует требуемое утверждение.

Итак, можно считать, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит неособых точек гиперповерхности X .

ЛЕММА 4.4. Пусть C – кривая на X такая, что $C \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$. Тогда $C \notin \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит кривую C . В этом случае выполнено равенство $\text{mult}_C(\mathcal{M}) = k$. Пусть H – очень обильный дивизор на X . Тогда выполнено соотношение $H \sim_{\mathbb{Q}} -\lambda K_X$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{N}$. Следовательно, получаем

$$\frac{5\lambda k^2}{2} = -\lambda k^2 K_X^3 = H \cdot S_1 \cdot S_2 \geq \text{mult}_C^2(\mathcal{M}) H \cdot C \geq -\lambda k^2 K_X \cdot C,$$

где S_1 и S_2 – общие поверхности в $\mathcal{M}$. Таким образом, возможны следующие случаи:

- (i) выполнено равенство $-K_X \cdot C = 1$, а кривая C неособа и рациональна;
- (ii) выполнено равенство $-K_X \cdot C = 2$, а кривая C неособа и рациональна;
- (iii) выполнено равенство $-K_X \cdot C = 2$, а кривая C имеет арифметический род 1.

Пусть $\sigma: \check{X} \rightarrow X$ – раздутие пучка идеалов кривой C , а G – исключительный дивизор бирационального морфизма σ . Тогда $\check{X}$ неособо, если кривая C неособа. В случае, когда кривая C имеет одну обыкновенную двойную точку, особенности многообразия $\check{X}$ в окрестности дивизора G состоят из одной изолированной обыкновенной двойной точки, а в случае, когда кривая C имеет каспидальную особенность, особенности многообразия $\check{X}$ в окрестности дивизора G состоят из изолированной двойной точки такой, что $\check{X}$ в окрестности этой точки локально изоморфно гиперповерхности

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^3 = 0 \subset \mathbb{C} \cong \text{Spec}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]).$$

Допустим, что $-K_X \cdot C = 1$. В этом случае C высекается в теоретико-множественном смысле поверхностями в $|-2K_X|$, которые проходят через кривую C . Более того, легко видеть, что схемное пересечение двух достаточно общих поверхностей в $|-2K_X|$, проходящих через C , приведено в общей точке кривой C . Значит, дивизор $\sigma^*(-2K_X) - G$ является численно эффективным (см. [2, лемма 5.2.5]). Более того, дивизор $\sigma^*(-2K_X) - G$ также является объемным, но, в частности, выполнено неравенство

$$(\sigma^*(-2K_X) - G) \cdot \check{S}_1 \cdot \check{S}_2 = 0,$$

где $\check{S}_1$ и $\check{S}_2$ – собственные прообразы соответственно поверхностей S_1 и S_2 на многообразии $\check{X}$. Последнее невозможно по следствию 2.6. Противоречие.

Предположим, что $-K_X \cdot C = 2$, а кривая C является неособой и рациональной. В этом случае дивизор $\sigma^*(-2K_X) - G$ является численно эффективным, поскольку в теоретико-множественном смысле кривая C высекается поверхностями из $|-2K_X|$, а схемное пересечение двух общих поверхностей из $|-2K_X|$, проходящих через кривую C , приведено в общей точке кривой C . В частности, мы получаем, что

$$0 > -3k^2 = (\sigma^*(-2K_X) - G) \cdot \check{S}_1 \cdot \check{S}_2 \geq 0,$$

где $\check{S}_1$ и $\check{S}_2$ – собственные прообразы соответственно S_1 и S_2 на $\check{X}$. Противоречие.

Итак, показано, что выполнено равенство $-K_X \cdot C = 2$, а неприводимая кривая C имеет арифметический род 1. В этом случае кривая C является теоретико-множественным пересечением поверхностей из линейной системы $|-4K_X|$, которые проходят через C , а схемное пересечение двух достаточно общих поверхностей из линейной системы $|-4K_X|$, проходящих через кривую C , приведено в общей точке кривой C . Из последнего следует, что дивизор $\sigma^*(-4K_X) - G$ численно эффективен и объемен (см. [2, лемма 5.2.5]), но

$$(\sigma^*(-4K_X) - G) \cdot \check{S}_1 \cdot \check{S}_2 = 0,$$

где $\check{S}_1$ и $\check{S}_2$ – собственные прообразы соответственно поверхностей S_1 и S_2 на многообразии $\check{X}$. Последнее невозможно по следствию 2.6. Противоречие.

Из теоремы 2.2 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку O . Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Y . Тогда из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$. Существование коммутативной диаграммы (4.1) очевидно в случае, когда множество $\mathbb{CS}(Y, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит кривую C_i . Итак, можно считать, что

$$\mathbb{CS}\left(Y, \frac{1}{k}\mathcal{D}\right) \cap \{C_1, \dots, C_{15}\} = \emptyset.$$

ЛЕММА 4.5. *Множество $\mathbb{CS}(Y, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не содержит гладких точек многообразия Y .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит гладких точек многообразия X . Таким образом, достаточно показать, что множество $\mathbb{CS}(Y, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не содержит точек исключительного дивизора морфизма π . Последнее следует из леммы 2.3.

Положим $\mathcal{H} = \gamma(\mathcal{D})$. Тогда $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$, особенности логпары $(Z, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ каноничны, а из леммы 2.1 следует, что множество $\mathbb{CS}(Z, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ не пусто.

ЛЕММА 4.6. *Множество $\mathbb{CS}(Z, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ не содержит точек многообразия Z .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4.5 следует, что неособые точки многообразия Z не содержатся в $\mathbb{CS}(Z, \frac{1}{k}\mathcal{H})$. С другой стороны, если точка $P_i \in \mathbb{CS}(Z, \frac{1}{k}\mathcal{H})$, то $\mathbb{CS}(Y, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит либо кривую C_i , либо точку на кривой C_i , что невозможно.

Таким образом, существует неприводимая кривая Γ на многообразии Z , которая принадлежит множеству $\mathbb{CS}(Z, \frac{1}{k}\mathcal{H})$. В частности, выполнено равенство $\text{mult}_{\Gamma}(\mathcal{H}) = k$.

ЛЕММА 4.7. *Выполнено равенство $-K_Z \cdot \Gamma = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – общий дивизор в $|-K_Z|$. Тогда

$$2k^2 = H \cdot D_1 \cdot D_2 \geq \text{mult}_{\Gamma}(D_1 \cdot D_2)H \cdot \Gamma \geq -k^2K_Z \cdot \Gamma,$$

где D_1 и D_2 – достаточно общие поверхности в линейной системе $\mathcal{H}$. Таким образом, выполнено неравенство $-K_Z \cdot \Gamma \leq 2$, причем в случае выполнения равенства $-K_Z \cdot \Gamma = 2$ носитель эффективного цикла $D_1 \cdot D_2$ совпадает с кривой Γ . Последнее противоречит утверждению леммы 2.5, поскольку $\mathcal{H}$ не составлена из пучка.

Итак, показано, что $\eta(\Gamma)$ – прямая в $\mathbb{P}^3$, а ограничение $\eta|_{\Gamma}: \Gamma \rightarrow \eta(\Gamma)$ является изоморфизмом. Более того, из доказательства леммы 4.7 следует, что множество центров канонических особенностей $\mathbb{CS}(Z, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ не содержит никаких подмногообразий многообразия Z , кроме кривой Γ , и выполнено неравенство $\text{mult}_{\Gamma}(D_1 \cdot D_2) < 2k^2$ для достаточно общих поверхностей D_1 и D_2 в линейной системе $\mathcal{H}$.

ЛЕММА 4.8. *Прямая $\eta(\Gamma)$ содержится в поверхности ветвления R накрытия η .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\eta(\Gamma)$ не содержится в поверхности ветвления R двулистного накрытия η . Пусть S – общая поверхность в линейной системе $|-K_Z|$, проходящая через кривую Γ . Тогда ограничение $\mathcal{H}|_S$ имеет неподвижные компоненты. А именно, имеем

$$\mathcal{H}|_S = \text{mult}_{\Gamma}(\mathcal{H})\Gamma + \text{mult}_{\Omega}(\mathcal{H})\Omega + \mathcal{L},$$

где $\mathcal{L}$ – линейная система на поверхности S без неподвижных компонент, а Ω – неособая рациональная кривая на Z такая, что $\eta(\Omega) = \eta(\Gamma)$, но $\Omega \neq \Gamma$. Отметим, что по построению

$$\text{Sing}(Z) \cap \Gamma = \{P_{i_1}, \dots, P_{i_r}\} \subsetneq \{P_1, \dots, P_{15}\} = \text{Sing}(Z),$$

а P_{i_j} является обыкновенной двойной точкой на S , на которой $\Gamma^2 = \Omega^2 = -2 + r/2$, но $r \leq 3$, откуда следует, что выполнено строгое неравенство $\Omega^2 < 0$ и соотношение

$$(k - \text{mult}_{\Omega}(\mathcal{H}))\Omega^2 = (\text{mult}_{\Gamma}(\mathcal{H}) - k)\Gamma \cdot \Omega + L \cdot \Omega = L \cdot \Omega \geq 0,$$

где L – общая кривая в $\mathcal{L}$. Значит, выполнено неравенство $\text{mult}_{\Omega}(\mathcal{H}) \geq k$, откуда следует, что множество $\mathbb{CS}(Z, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ содержит кривую Ω . С другой стороны, как уже отмечалось ранее, последнее невозможно, поскольку множество $\mathbb{CS}(Z, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ не содержит никаких подмногообразий многообразия Z , кроме кривой Γ . Противоречие.

Пусть H – общая гиперплоскость в $\mathbb{P}^3$, содержащая прямую $\eta(\Gamma)$. Тогда кривая

$$\Delta = H \cap R = \eta(\Gamma) \cup \Upsilon$$

приведена и $\eta(\Gamma) \not\subset \text{Supp}(\Upsilon)$, где Υ – плоская кривая степени 5. Более того, приводимая кривая Δ особа в каждой особой точке $\eta(P_i)$ поверхности R , лежащей на прямой $\eta(\Gamma)$, но множество $\eta(\Gamma) \cap \Upsilon$ состоит не более чем из пяти точек. С другой стороны, имеем

$$\text{Sing}(\Delta) \cap \eta(\Gamma) = \Upsilon \cap \eta(\Gamma),$$

откуда следует, что $|\text{Sing}(Z) \cap \Gamma| \leq 5$. Более того, поверхность R задается уравнением

$$f_3(x, y, z, t)^2 = 4f_1(x, y, z, t)f_5(x, y, z, t) \subset \mathbb{P}^3 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

а ее особые точки задаются уравнениями $f_1 = f_3 = f_5 = 0$, но многочлены f_1, f_3, f_5 являются достаточно общими по исходному предположению. В частности, мы можем считать, что уравнения $f_1 = f_3 = 0$ и $f_1 = f_5 = 0$ задают в $\mathbb{P}^3$

неприводимые плоские кривые, откуда следует, что не более чем три точки подмножества $\text{Sing}(R) \subset \mathbb{P}^3$ могут лежать на одной прямой. Таким образом, из теоремы Бертини следует, что пересечение $\eta(\Gamma) \cap \Upsilon$ содержит по крайней мере две различные точки O_1 и O_2 , не принадлежащие множеству $\text{Sing}(R)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.9. Гиперплоскость H касается поверхности R в точках O_1 и O_2 .

Пусть L_j – общая прямая в плоскости H , проходящая через точку O_j , $\tilde{O}_j$ – собственный прообраз точки O_j на многообразии Z , а $\tilde{L}_j$ – собственный прообраз прямой L_j на многообразии Z . Тогда прямая L_j касается поверхности R в точке O_j , а кривая $\tilde{L}_j$ неприводима и особа в точке $\tilde{O}_j$. С другой стороны, мы имеем $-K_Z \cdot \tilde{L}_j = 2$. Пусть $\tilde{H}$ – собственный прообраз поверхности H на Z , а D – общая поверхность в $\mathcal{H}$. Тогда

$$D|_{\tilde{H}} = \text{mult}_\Gamma(\mathcal{H})\Gamma + \Psi,$$

где Ψ – эффективный дивизор на $\tilde{H}$ такой, что $\Gamma \not\subset \text{Supp}(\Psi)$. Пусть $\Lambda_j = (D \setminus \Gamma) \cap \tilde{L}_j$. Тогда

$$\begin{aligned} 2k = D \cdot \tilde{L}_j &\geq \text{mult}_{\tilde{O}_j}(\tilde{L}_j) \text{mult}_\Gamma(D) + \sum_{P \in \Lambda_j} \text{mult}_P(D) \text{mult}_P(\tilde{L}_j) \\ &\geq 2k + \sum_{P \in \Lambda_j} \text{mult}_P(D) \text{mult}_P(\tilde{L}_j), \end{aligned}$$

откуда следует, что $D \cap \tilde{L}_j \subset \Gamma$. С другой стороны, при варьировании прямых L_1 и L_2 на плоскости H кривые $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_2$ порождают два различных пучка на поверхности $\tilde{H}$, базисные множества которых состоят из точек $\tilde{O}_1$ и $\tilde{O}_2$ соответственно, откуда следует, что дивизор Ψ тривиален. Таким образом, показано, что $\text{Supp}(D) \cap \text{Supp}(\tilde{H}) = \text{Supp}(\Gamma)$ для общего дивизора $\tilde{H}$ в линейной системе $| -K_Z |$, проходящего через кривую Γ , и общего дивизора D в $\mathcal{H}$, что невозможно по лемме 2.7. Итак, предложение 4.2 доказано.

§ 5. Случай $n = 4$, гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 4$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2)$ степени 6, а особенности гиперповерхности X состоят из точек P_1 , P_2 и P_3 , которые являются факторособенностями типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$.

Пусть $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – естественная проекция. Тогда общий слой отображения ψ является эллиптической кривой, а $\psi \circ \eta$ является морфизмом, где $\eta: Y \rightarrow X$ – композиция взвешенных раздутий точек P_1 , P_2 и P_3 с весами $(1, 1, 1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо показать, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (5.1)$$

где $\varphi \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$. Пусть Z – элемент множества $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$. Возможны следующие случаи:

- (i) подмногообразие Z – кривая, которая целиком содержится в $X \setminus \text{Sing}(X)$;
- (ii) подмногообразие Z – кривая, содержащая особую точку гиперповерхности X ;
- (iii) подмногообразие Z – особая точка гиперповерхности X .

Предположим, что Z – неприводимая кривая, которая не содержит особых точек гиперповерхности X . Тогда $-K_X \cdot Z = 1$ по лемме 2.4, откуда следует, что Z является неособой кривой. Пусть $\gamma: W \rightarrow X$ – раздутие кривой Z , а G – исключительный дивизор морфизма γ . Тогда $\gamma^*(-4K_X) - G$ численно эффективен, откуда следует, что

$$(\gamma^*(-4K_X) - G) \cdot \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 \geq 0,$$

где $\bar{S}_i$ – собственный прообраз достаточно общей поверхности из линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W . Таким образом, имеем

$$0 \leq (\gamma^*(-4K_X) - G) \cdot \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 = -k^2.$$

Противоречие.

Пусть Z – неприводимая кривая, которая проходит через одну из особых точек гиперповерхности X . Тогда $-K_X \cdot Z \leq 1$ по лемме 2.4. Таким образом, кривая C стягивается рациональным отображением ψ в точку, и либо $-K_X \cdot Z = 1/2$, либо $-K_X \cdot Z = 1$.

Пусть F – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-K_X|$, которая содержит кривую Z . Тогда поверхность F неособа вне точек P_1, P_2 и P_3 , в которых F имеет особенность типа $\mathbb{A}_1$. Пусть $\tilde{Z}$ – слой отображения ψ над точкой $\psi(Z)$. Тогда из общности гиперповерхности X следует, что Z – неприводимая компонента приводимой кривой $\tilde{Z}$.

Предположим, что слой $\tilde{Z}$ состоит ровно из двух неприводимых компонент: рациональных кривых Z и $\bar{Z}$. Тогда на поверхности F выполнено неравенство $\bar{Z}^2 < 0$, но выполнено соотношение $\mathcal{M}|_F \sim_{\mathbb{Q}} kZ + \bar{Z}$. С другой стороны, имеем

$$\mathcal{M}|_F = \text{mult}_Z(\mathcal{M})Z + \text{mult}_{\bar{Z}}(\mathcal{M})\bar{Z} + \mathcal{F},$$

где $\mathcal{F}$ – линейная система на поверхности F без неподвижных компонент, но выполнено соотношение $(k - \text{mult}_{\bar{Z}}(\mathcal{M}))\bar{Z} \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{F}$, откуда следует, что имеет место равенство $\text{mult}_{\bar{Z}}(\mathcal{M}) = k$, а носитель эффективного цикла $S_1 \cdot S_2$ содержится в $Z \cup \bar{Z}$, что невозможно по лемме 2.5. Противоречие.

Предположим, что $\tilde{Z}$ состоит из трех неприводимых компонент: Z , $\hat{Z}$ и $\check{Z}$. Тогда

$$-K_X \cdot \hat{Z} = -K_X \cdot \check{Z} = -K_X \cdot Z = \frac{1}{2},$$

а на поверхности F форма пересечения кривых $\hat{Z}$ и $\check{Z}$ отрицательно определена, откуда следует, что носитель эффективного одномерного цикла $S_1 \cdot S_2$ содержится в объединении $Z \cup \hat{Z} \cup \check{Z}$, где S_1 и S_2 – общие поверхности в линейной системе $\mathcal{M}$, что невозможно по лемме 2.5. Противоречие. Итак, показано, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_1, P_2, P_3\}$.

Пусть $\pi: U \rightarrow X$ – композиция взвешенных раздутий с весами $(1, 1, 1)$ особых точек многообразия X , принадлежащих множеству $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$, а $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U . Тогда из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$, причем дивизор $-K_U$ является численно эффективным.

Предположим, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит некоторое подмногообразие Δ многообразия U . Тогда Δ содержится в π -исключительном дивизоре. Пусть G – исключительный дивизор морфизма π , который содержит Δ . Тогда из леммы 2.3 следует, что Δ является прямой на поверхности $G \cong \mathbb{P}^2$. С другой стороны, линейная система $|\pi^*(-2K_X) - G|$ не имеет базисных точек, а дивизор $\pi^*(-2K_X) - G$ является численно эффективным и объемным, откуда следует (см. [9, лемма 0.3.3]), что существует собственное замкнутое подмножество $\Lambda \subset U$ такое, что все кривые на многообразии U , имеющие тривиальное пересечение с дивизором $\pi^*(-2K_X) - G$, содержатся в подмножестве Λ . Имеем

$$2k^2 = (\pi^*(-2K_X) - G) \cdot \tilde{S}_1 \cdot \tilde{S}_2 \geq \text{mult}_{\Delta}^2(\mathcal{D})(\pi^*(-2K_X) - G) \cdot \Delta = 2k^2,$$

где $\tilde{S}_1$ и $\tilde{S}_2$ – собственные прообразы соответственно поверхностей S_1 и S_2 на многообразии U , откуда следует, что носитель эффективного цикла $\tilde{S}_1 \cdot \tilde{S}_2$ содержится в собственном подмножестве $\Lambda \cup \Delta \subset U$, что невозможно по лемме 2.5, откуда следует, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D}) = \emptyset$.

Из леммы 2.1 следует, что $-K_U^3 = 0$. Тогда $\pi = \eta$ и $-K_U \sim (\psi \circ \pi)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$, значит, линейная система $\mathcal{D}$ лежит в слоях расслоения $\psi \circ \pi$. Из последнего сразу следует существование коммутативной диаграммы (5.1). Предложение доказано.

§ 6. Случай $n = 6$, гиперповерхность степени 8 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 4)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 6$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 4)$ степени 8, выполнено равенство $-K_X^3 = 1$, а особенности гиперповерхности X состоят только из изолированных особых точек P_1 и P_2 , каждая из которых является особенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \pi \swarrow & & \searrow \eta \\ X & \text{---} & \mathbb{P}^2 \\ & \psi & \end{array} \quad (6.1)$$

где ψ – естественная проекция, π – композиция взвешенных раздутий точек P_1 и P_2 с весами $(1, 1, 1)$, а η – расслоение на эллиптические кривые.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит гладких точек многообразия X , а из следствия 3.4 и теоремы 2.2 следует, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит особую точку гиперповерхности X .

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит обе точки P_1 и P_2 . Тогда из теоремы 2.2 следует, что утверждение теоремы 1.10 выполнено для гиперповерхности X .

Можно считать, что $P_1 \in \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \not\ni P_2$.

ЛЕММА 6.3. Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит кривых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит неприводимую кривую C . Из леммы 2.4 следует равенство $-K_X \cdot C = 1/2$.

Пусть $\check{C}$ – собственный прообраз кривой C на многообразии U . Тогда выполнено равенство $-K_U \cdot \check{C} = 0$, откуда следует, что кривая $\check{C}$ является компонентой слоя эллиптического расслоения η . Таким образом, кривая C стягивается отображением $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ в точку, откуда следует, что кривая C неособа и рациональна.

Пусть S – общая поверхность в $|-K_X|$, содержащая C . Тогда поверхность S неособа вне точек P_1 и P_2 , в каждой из которых поверхность S имеет изолированную обыкновенную двойную точку. Пусть F – слой отображения ψ над точкой $\psi(C)$. Тогда кривая F состоит из двух различных компонент, одной из которых является кривая C . Пусть Z – компонента кривой F , отличная от кривой C . Тогда на S выполнено неравенство $Z^2 < 0$. Имеем

$$\mathcal{M}|_S = \text{mult}_C(\mathcal{M})C + \text{mult}_Z(\mathcal{M})Z + \mathcal{L},$$

где $\mathcal{L}$ – линейная система на поверхности S без неподвижных компонент, но выполнено соотношение $(k - \text{mult}_Z(\mathcal{M}))Z \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{L}$, откуда $\text{mult}_Z(\mathcal{M}) = k$. Теперь из теоремы 2.2 следует, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит особую точку P_2 . Противоречие.

Показано, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки P_1 . Пусть $\zeta: Y \rightarrow X$ – взвешенное раздутие точки P_1 с весами $(1, 1, 1)$, а $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Y . Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$ по теореме 2.2, а из леммы 2.1 следует, что $\mathbb{CS}(Y, \frac{1}{k}\mathcal{D}) \neq \emptyset$.

Пусть T – неприводимое подмногообразие многообразия Y , которое принадлежит множеству $\mathbb{CS}(Y, \frac{1}{k}\mathcal{D})$. Тогда $\zeta(T) \in \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$, откуда следует, что $T \subset G$, где G – исключительный дивизор бирационального морфизма ζ . С другой стороны, из леммы 2.3 следует, что подмногообразие T является прямой на $G \cong \mathbb{P}^2$, что невозможно по лемме 2.4. Предложение доказано.

§ 7. Случай $n = 7$, гиперповерхность степени 8 в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 2, 3)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 7$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 2, 3)$ степени 8, выполнено равенство $-K_X^3 = 2/3$, а особенности гиперповерхности X состоят из точек P_1, P_2, P_3, P_4 , являющихся факторособенностями типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, и точки Q , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$.

Пусть $\xi_i: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 2)$ – проекция такая, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & Y_i & \\ \beta_i \swarrow & & \searrow \eta_i \\ U_i & & \mathbb{P}(1, 1, 2) \\ \alpha_i \searrow & & \nearrow \\ X & \xrightarrow{\xi_i} & \end{array}$$

где α_i – взвешенное раздутие точки P_i с весами $(1, 1, 1)$, β_i – взвешенное раздутие собственного прообраза точки Q на многообразии U_i с весами $(1, 1, 2)$, а η_i – эллиптическое расслоение, заданное полной линейной системой $|-2K_{Y_i}|$.

Пусть $\xi_0: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 2)$ – проекция такая, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & Y_0 & \\ \beta_0 \swarrow & & \searrow \eta_0 \\ U_0 & & \mathbb{P}(1, 1, 2) \\ \alpha_0 \searrow & & \nearrow \\ X & \xrightarrow{\xi_0} & \end{array}$$

где α_0 – взвешенное раздутие точки Q с весами $(1, 1, 2)$, β_0 – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_0 , доминирующей точку Q , с весами $(1, 1, 1)$, а η_0 – эллиптическое расслоение, заданное полной линейной системой $|-2K_{Y_0}|$.

Утверждение теоремы 1.10 при $n = 7$ вытекает из следующего результата.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X & \xrightarrow{\rho} & V \\ \xi_i \downarrow & & & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 1, 2) & \xrightarrow{\varphi} & & & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (7.1)$$

для некоторого $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, где σ и φ – бирациональные отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не пусто и не содержит гладких точек гиперповерхности X , а из леммы 3.11 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_1, P_2, P_3, P_4, Q\}$.

ЛЕММА 7.2. *Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит двух точек в $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $P_1, P_2 \in \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$. Пусть $\pi: W \rightarrow X$ – композиция взвешенных раздутий особых точек P_1 и P_2 с весами $(1, 1, 1)$, а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на W . Тогда выполнено соотношение $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2, а базисное множество пучка $|-K_W|$ состоит из неприводимой кривой C такой, что на общей поверхности из пучка $|-K_W|$ выполнено равенство $C^2 = -1/3$, что невозможно по лемме 2.7.

Пусть $\mathcal{D}_i$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U_i .

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Предположим, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит особую точку P_i или особую точку Q . Тогда из леммы 2.1 следует, что в первом случае $\mathbb{CS}(U_i, \frac{1}{k}\mathcal{D}_i)$ не пусто, а в последнем случае $\mathbb{CS}(U_0, \frac{1}{k}\mathcal{D}_0)$ не пусто.

ЛЕММА 7.4. Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не может состоять из единственной точки P_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_i\}$. Тогда из леммы 2.1 следует, что множество $\mathbb{CS}(U_i, \frac{1}{k}\mathcal{D}_i)$ содержит подмногообразие Z многообразия U_i . Пусть E_i – исключительный дивизор раздутья α_i . Тогда $Z \subsetneq E_i$, а из леммы 2.3 следует, что Z – прямая на поверхности $E_i \cong \mathbb{P}^2$, что невозможно по лемме 2.4.

Таким образом, из условия $P_i \in \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_i, Q\}$, откуда вытекает, что собственный прообраз $\mathcal{H}_i$ линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Y_i лежит в слоях расслоения η_i , поскольку в этом случае $\mathcal{H}_i \sim -kK_{Y_i}$ по теореме 2.2, откуда теперь следует существование коммутативной диаграммы (7.1). Следовательно, в дальнейшем мы можем предполагать, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки Q .

Пусть O – особая точка многообразия U_0 , которая содержится в исключительном дивизоре раздутья α_0 . Тогда точка O принадлежит множеству $\mathbb{CS}(U_0, \frac{1}{k}\mathcal{D}_0)$ по лемме 2.3, откуда следует существование требуемой коммутативной диаграммы (7.1) по теореме 2.2. Предложение доказано.

§ 8. Случай $n = 8$, гиперповерхность степени 9 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3, 4)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 8$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3, 4)$ степени 9, выполнено равенство $-K_X^3 = 3/4$, а особенности гиперповерхности X состоят из одной особой точки O , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$. Имеет место следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2 f_1(x, y, z) + f_5(x, y, z, t)w + f_9(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 3, 5) \\ \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = \text{wt}(z) = 1$, $\text{wt}(t) = 3$ и $\text{wt}(w) = 4$, f_i – квазиоднородный многочлен степени i , а O задается уравнениями $x = y = z = t = 0$. Имеет место коммутативная диаграмма

где рациональные отображения ξ , ψ и χ суть естественные проекции, α – взвешенное раздутие особой точки O с весами $(1, 1, 3)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия W , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, с весами $(1, 1, 2)$, морфизм γ – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, с весами $(1, 1, 1)$, морфизм η – расслоение на эллиптические кривые, σ – бирациональный морфизм, стягивающий 15 неособых неприводимых рациональных кривых соответственно в 15 изолированных обыкновенных двойных точек $P_1, \dots, P_{15}$ многообразия Y , морфизм ω – двулистное накрытие, разветвленное в неприводимой поверхности $R \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 3)$, которая задается уравнением

$$f_5(x, y, z, t)^2 - 4f_1(x, y, z)f_9(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 3) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t])$$

и имеет 15 изолированных обыкновенных двойных точек $\omega(P_1), \dots, \omega(P_{15})$, заданных уравнениями $f_5 = f_1 = f_9 = 0$. Пусть G – α -исключительный дивизор, F – β -исключительный дивизор, P – особая точка многообразия W , Q – особая точка многообразия U , $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W , $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U , $\mathcal{P}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Z , $\mathcal{B}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на многообразии Y . Отметим, что поверхности из линейной системы $\mathcal{B}$ могут не быть $\mathbb{Q}$ -картье дивизорами, поскольку Y не $\mathbb{Q}$ -факториально.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Антиканонические дивизоры $-K_W$ и $-K_U$ численно эффективны и объемны, морфизмы ω , $\omega \circ \sigma$ и η задаются соответствующими полными плюриантаканоническими линейными системами, а поверхность $\omega \circ \sigma(G)$ задается уравнением $f_1(x, y, z) = 0$.

Из теоремы 3.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит неособых точек гиперповерхности X , а из следствия 3.4 и теоремы 2.2 следует, что $O \in \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$.

ЛЕММА 8.3. *Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит кривых.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит кривую L . В этом случае из теоремы 3.9 следует существование двух различных поверхностей D и D' в полной линейной системе $|-K_X|$ таких, что неприводимая кривая L является компонентой эффективного одномерного цикла $D \cdot D'$. Легко видеть, что цикл $D \cdot D'$ должен быть приведен, поскольку гиперповерхность X является достаточно общей.

Рассмотрим подпучок $\mathcal{P} \subset |-K_X|$, порожденный D и D' . Можно считать, что D является общей поверхностью пучка $\mathcal{P}$. Применяя лемму 2.7 вместе с аргументами из доказательства леммы 2.4 к линейным системам $\mathcal{M}$ и $\mathcal{P}$, мы сразу получаем противоречие в случае выполнения равенства $-K_X \cdot L = 3/4$. Таким образом, можно считать, что выполнено либо $-K_X \cdot L = 1/4$, либо $-K_X \cdot L = 1/2$. Последний случай проще первого, поэтому мы будем считать, что $-K_X \cdot L = 1/4$.

Пусть S_W – собственный прообраз на многообразии W неприводимой поверхности, которая высекается на гиперповерхности X уравнением $z = 0$, а L_W – собственный прообраз на многообразии W кривой L . Поверхность S_W содержит кривую L_W , поскольку

$$S_W \sim_{\mathbb{Q}} \alpha^*(-K_X) - \frac{5}{4}G,$$

но $G \cdot L_W \geq 1/3$. Таким образом, либо кривая L_W стягивается бирациональным морфизмом σ , либо кривая $\omega(L_Y)$ является образующей конуса $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3)$, которая содержится в поверхности $\omega \circ \sigma(G)$, где $L_Y = \sigma(L_W)$.

Рассмотрим сначала случай, когда кривая L_W не стягивается морфизмом σ . В этом случае кривая $\omega(L_Y)$ не содержится в поверхности R , откуда следует что $\omega(L_Y)$ содержит не более одной особой точки поверхности R , отличной от $\omega \circ \sigma(P)$. Кривая $\omega(L_Y)$ должна содержать особую точку поверхности R , отличную от точки $\omega \circ \sigma(P)$, поскольку в противном случае $-K_X \cdot L = 3/4$. Можно считать, что кривая $\omega(L_Y)$ содержит точку $\omega(P_1)$.

Пусть D_Y и D'_Y – собственные прообразы на многообразии Y неприводимых поверхностей D и D' соответственно. Тогда P_1 – изолированная обыкновенная двойная точка поверхности D_Y , а собственный прообраз кривой L' на многообразии W стягивается в особую точку P_1 бирациональным морфизмом σ . Таким образом, мы имеем

$$D_Y \cdot D'_Y = L_Y + \bar{L}_Y,$$

где $\bar{L}_Y$ – образующая конуса $G \cong \mathbb{P}(1, 1, 3)$. В частности, мы видим, что выполнено равенство $-K_X \cdot L' = 1/4$, но по предположению $-K_X \cdot L = 1/4$. Таким образом, показано, что кривая L_W стягивается бирациональным морфизмом σ .

Пусть L'_W – собственный прообраз кривой L' на многообразии W . Тогда L'_W не стягивается бирациональным морфизмом σ . Положим $L'_Y = \sigma(L'_W)$. Тогда $\omega(L'_Y)$ – образующая конуса $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3)$, содержащаяся в поверхности $\omega \circ \sigma(G)$. Кривая $\omega(L'_Y)$ не содержится в поверхности ветвления R , откуда следует, что $\omega(L'_Y)$ содержит не более одной особой точки поверхности R , которая отлична от точки $\omega \circ \sigma(P)$. На самом деле, кривая $\omega(L'_Y)$ содержит ровно одну особую точку поверхности R , которая отлична от точки $\omega \circ \sigma(P)$, поскольку выполнено равенство $-K_X \cdot L' \neq 3/4$. Можно считать, что $\omega(P_1) \in \omega(L'_Y)$.

Точка P_1 является обыкновенной двойной точкой поверхности D_Y , а кривая L_W стягивается в точку P_1 морфизмом σ . Таким образом, мы имеем

$$D_Y \cdot D'_Y = L'_Y + \bar{L}'_Y,$$

где $\bar{L}'_Y$ – образующая конуса $G \cong \mathbb{P}(1, 1, 3)$. Пересечение $L_W \cap L'_W$ состоит из некоторой точки O' , которая не содержится в поверхности G . Следовательно, пересечение $L \cap L'$ содержит точку $\alpha(O')$, которая отлична от точки O .

Поверхность D нормальна. Более того, поверхность D неособа в точке $\alpha(O')$, но на поверхности D выполнено равенство $(L + L') \cdot L' = 1/2$, откуда следует, что на поверхности D выполнено неравенство $L' \cdot L' < 0$. С другой стороны, мы имеем соотношение

$$\mathcal{M}|_D = m_1 L + m_2 L' + \mathcal{L} \equiv kL + kL',$$

где $\mathcal{L}$ – некоторая линейная система на поверхности D , не имеющая неподвижных компонент, а m_1 и m_2 – натуральные числа такие, что $m_1 \geq k$. В частности, мы видим, что

$$0 \leq (m_1 - k)L' \cdot L + \mathcal{L} \cdot L' = (k - m_2)L' \cdot L',$$

откуда $m_2 = m_1 = k$ и $\mathcal{M}|_D = kL + kL'$. Последнее противоречит лемме 2.7.

Итак, множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из особой точки O , по теореме 2.2 выполнено соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$. Из следствия 2.8 и лемм 2.1 и 2.3 следует, что $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{D}) = \{P\}$.

Из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$, а из лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ содержит точку Q . Из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{P}$ содержится в слоях расслоения η . Значит, утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 8$.

§ 9. Случай $n = 9$, гиперповерхность степени 9 в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 3)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 9$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 3)$ степени 9, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/2$, а особенности гиперповерхности X состоят из особой точки O типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ и точек P_1, P_2 и P_3 , каждая из которых является особенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$.

Пусть $\xi: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 2)$ – проекция. Тогда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & U_{ij} & \xleftarrow{\gamma_{ij}} & Y & \\
 \beta_{ij} \swarrow & & & & \searrow \eta \\
 U_i & & & & \\
 \alpha_i \searrow & & & & \\
 & X & \dashrightarrow_{\xi} & \mathbb{P}(1, 1, 2)
 \end{array}$$

где α_i – взвешенное раздутие точки P_i с весами $(1, 1, 2)$, β_{ij} – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_j на U_i с весами $(1, 1, 2)$ при $i \neq j$, морфизм γ_{ij} – раздутие собственного прообраза точки P_k на U_{ij} при $k \notin \{i, j\}$, а η – эллиптическое расслоение.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. Дивизоры $-K_{U_i}$ и $-K_{U_{ij}}$ численно эффективны и объёмны.

Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & Z & \\
 \pi \swarrow & & \searrow \sigma \\
 X & \dashrightarrow_{\chi} & \mathbb{P}(1, 1, 3)
 \end{array}$$

где χ – проекция, π – раздутие точки Q с весами $(1, 1, 1)$, а σ – эллиптическое расслоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. Существует либо коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 X & \dashrightarrow_{\rho} & V \\
 \downarrow \xi & & \downarrow \nu \\
 \mathbb{P}(1, 1, 2) & \dashrightarrow_{\varphi} & \mathbb{P}^2
 \end{array} \quad (9.1)$$

либо коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\omega} & X & \xrightarrow{\rho} & V \\
 \downarrow \chi & & & & \downarrow \nu \\
 \mathbb{P}(1, 1, 3) & \xrightarrow{v} & & & \mathbb{P}^2
 \end{array} \quad (9.2)$$

где φ , ω и v – бирациональные отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем это предложение, откуда получим утверждение теоремы 1.10 при $n = 9$.

ЛЕММА 9.3. *Предположим, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку Q . Тогда существует коммутативная диаграмма (9.2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз исходной линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Z . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_X$ по теореме 2.2, откуда $S \cdot C = 0$, где S – общая поверхность в линейной системе $\mathcal{B}$, а C – общий слой расслоения σ . Значит, линейная система $\mathcal{B}$ лежит в слоях расслоения σ , откуда следует существование диаграммы (9.2).

Из теоремы 3.3 и леммы 3.11 следует, что можно считать, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_1, P_2, P_3\}$.

ЛЕММА 9.4. *Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_1, P_2, P_3\}$. Тогда существует коммутативная диаграмма (9.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. доказательство леммы 9.3.

Таким образом, для завершения доказательства предложения 9.2 без ограничения общности можно считать, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит точку P_3 , но содержит точку P_1 .

ЛЕММА 9.5. *Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки P_1 . Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U_1 . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_1}$ по теореме 2.2.

Пусть Z – элемент множества $\mathbb{CS}(U_1, \frac{1}{k}\mathcal{B})$, а G – исключительный дивизор бирационального морфизма α_1 . Тогда поверхность G можно отождествить с конусом над рациональной кривой степени 3, а из лемм 2.3 и 2.4 следует, что Z является вершиной конуса G .

Многообразие U_1 имеет особенность типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ в точке Z . Пусть $\delta: W \rightarrow U_1$ – взвешенное раздутие точки Z с весами $(1, 1, 1)$, $\mathcal{D}$ – собственный прообраз исходной линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W , а F – достаточно общая поверхность в полной линейной системе $|-K_W|$. Тогда на поверхности F выполнено неравенство $\Delta^2 = -1/2$, а из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{D}|_F \sim_{\mathbb{Q}} k\Delta$. Последнее невозможно по леммам 2.9 и 2.7. Лемма доказана.

Показано, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точек P_1 и P_2 . Теперь можно применить аргументы, использованные в доказательстве леммы 9.5 для получения противоречия со сделанным предположением. Предложение доказано.

§ 10. Случай $n = 10$, гиперповерхность степени 10 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3, 5)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 10$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3, 5)$ степени 10, особенности гиперповерхности X состоят из особой точки O типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$. Имеет место коммутативная диаграмма

где отображения ξ , ψ и χ суть естественные проекции, морфизм α – взвешенное раздутие особой точки O с весами $(1, 1, 1)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия W с весами $(1, 1, 1)$, а морфизм η – эллиптическое расслоение. Пусть Q – особая точка многообразия W , а $\mathcal{D}$ и $\mathcal{H}$ – собственные прообразы $\mathcal{M}$ на W и Y соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 10$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сформулируем сначала следующую лемму.

ЛЕММА 10.2. Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит кривых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит кривую C . Тогда из леммы 2.4 следует, что выполнено равенство $-K_X \cdot C = 1/3$, откуда следует, что $\psi(C)$ – точка.

Многообразие $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3)$ является конусом с вершиной $\xi(O)$, а кривая $\xi(C)$ является одной из образующих конуса $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3)$. Более того, из общности гиперповерхности X следует, что $\xi(C)$ не содержится в поверхности ветвления морфизма ξ . Значит, существует неприводимая неособая рациональная кривая Z на многообразии X , отличная от кривой C , такая, что имеет место равенство $\xi(Z) = \xi(C)$. Причем по построению кривая Z не может принадлежать множеству $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$, поскольку в этом случае в силу аргументов из доказательства леммы 2.4 следует противоречие с тем, что линейная система $\mathcal{M}$ не составлена из пучка.

Пусть S – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-K_X|$, которая проходит через кривые C и Z . Тогда S неособа вне O , а из элементарных вычислений следует, что на поверхности S выполнено неравенство $Z^2 < 0$, но $\mathcal{M}|_S \sim_{\mathbb{Q}} kC + kZ$, что легко приводит к противоречию согласно леммам 2.9 и 2.7, поскольку $\text{mult}_C(\mathcal{M}) = k$.

Из теоремы 3.3 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки O . Теперь, из лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит точку Q и $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$ по теореме 2.2, откуда следует, что $\mathcal{H}$ содержится в слоях расслоения η . Предложение доказано.

§ 11. Случай $n = 12$, гиперповерхность степени 10 в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 4)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 12$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 4)$ степени 10, выполнено равенство $-K_X^3 = 5/12$, а особенности гиперповерхности X состоят из особых точек P_1 и P_2 , каждая из которых является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, особой точки P_3 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, и точки P_4 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 12$.

Имеет место коммутативная диаграмма

где ψ – естественная проекция, α_3 – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 1, 2)$, морфизм α_4 – взвешенное раздутие точки P_4 с весами $(1, 1, 3)$, β_4 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_4 на многообразии U_3 с весами $(1, 1, 3)$, β_3 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_3 на многообразии U_4 с весами $(1, 1, 2)$, β_5 – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_4 , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α_4 , с весами $(1, 1, 2)$, морфизм γ_3 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_3 на многообразии U_{45} с весами $(1, 1, 2)$, морфизм γ_5 – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_{34} , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма β_4 , с весами $(1, 1, 2)$, а морфизм η – расслоение на эллиптические кривые.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.2. Дивизоры $-K_{U_3}$, $-K_{U_4}$, $-K_{U_{34}}$ и $-K_{U_{45}}$ численно эффективны и объемны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 11.1. Из теоремы 3.3 и леммы 3.11 следует, что

$$\mathbb{CS}\left(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}\right) \subseteq \{P_1, P_2, P_3, P_4\}.$$

ЛЕММА 11.3. Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит точки P_1 и P_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_1 . Покажем, что сделанное предположение противоречиво.

Пусть $\pi: W \rightarrow X$ – взвешенное раздутие особой точки P_1 с весами $(1, 1, 1)$, $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W , S – общая поверхность в линейной системе $|-K_W|$, а Z – базисная кривая линейной

системы $|-K_W|$. Тогда выполнено соотношение $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2, особенности поверхности S дювалевские, причем, поверхность S неособа вне собственных прообразов точек P_2 , P_3 и P_4 на многообразии W , а кривая Z неприводима, приведена, неособа и рациональна.

На поверхности S имеет место равенство $Z^2 = -1/24$, а также выполнены соотношения

$$\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} S|_S \sim_{\mathbb{Q}} kZ,$$

что невозможно по леммам 2.9 и 2.7. Противоречие.

Пусть $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_{34}$ и $\mathcal{D}_{45}$ – собственные прообразы линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразиях U_3 , U_4 , U_{34} и U_{45} соответственно. Тогда из леммы 2.1 следует, что $\mathbb{CS}(U_{\mu}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{\mu}) \neq \emptyset$, если выполнено соотношение $\mathcal{D}_{\mu} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{\mu}}$.

ЛЕММА 11.4. *Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_4 . Пусть $\bar{P}_3$ – собственный прообраз точки P_3 на многообразии U_4 , а $\bar{P}_5$ – особая точка многообразия U_4 такая, что $\alpha_4(\bar{P}_5) = P_4$. Тогда выполнены соотношения $\mathcal{D}_4 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_4}$ и $\mathbb{CS}(U_4, \frac{1}{k}\mathcal{D}_4) \subseteq \{\bar{P}_3, \bar{P}_5\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение $\mathcal{D}_4 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_4}$ следует из теоремы 2.2. Требуется показать, что $\mathbb{CS}(U_4, \frac{1}{k}\mathcal{D}_4) \subseteq \{\bar{P}_3, \bar{P}_5\}$. Предположим, что множество $\mathbb{CS}(U_4, \frac{1}{k}\mathcal{D}_4)$ не содержится в $\{\bar{P}_3, \bar{P}_5\}$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Пусть C – подмногообразие многообразия U_4 , принадлежащее $\mathbb{CS}(U_4, \frac{1}{k}\mathcal{D}_4)$, но отличное от $\bar{P}_3$ и $\bar{P}_5$. Тогда $\alpha_4(C)$ принадлежит множеству $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$, откуда следует, что $\alpha_4(C) = P_4$.

Пусть G – исключительный дивизор раздутия α_4 . Тогда $G \cong \mathbb{P}(1, 1, 3)$ и G можно отождествить с конусом над неособой рациональной кривой в $\mathbb{P}^3$ степени 3. Тогда из леммы 2.3 следует, что C – образующая конуса G . Последнее противоречит следствию 2.8.

ЛЕММА 11.5. *Предположим, что $P_3 \in \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$. Пусть $\bar{P}_4$ – собственный прообраз особой точки P_4 на U_3 . Тогда $\mathcal{D}_3 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_3}$ и $\mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3) = \{\bar{P}_4\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. доказательство леммы 9.5.

Из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{D}_{34} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{34}}$ или $\mathcal{D}_{45} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{45}}$. Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Y .

ЛЕММА 11.6. *Предположим, что $\mathcal{D}_{34} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{34}}$. Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – исключительный дивизор морфизма β_3 , G – исключительный дивизор бирационального морфизма β_4 , $\bar{P}_5$ – особая точка поверхности G , а $\bar{P}_6$ – особая точка поверхности F . Тогда по теореме 2.2 соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$ следует из того, что множество $\mathbb{CS}(U_{34}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{34})$ содержит точку $\bar{P}_5$. Можно считать, что $\bar{P}_5 \notin \mathbb{CS}(U_{34}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{34})$.

Из лемм 2.1 и 2.3 следует, что $\bar{P}_6 \in \mathbb{CS}(U_{34}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{34})$. Пусть $\pi: W \rightarrow U_{34}$ – взвешенное раздутие точки $\bar{P}_6$ с весами $(1, 1, 1)$, $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W , а S – общая поверхность в пучке $|-K_W|$. Тогда базисное множество пучка $|-K_W|$ состоит из кривой Δ такой, что $\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} k\Delta$, но $\Delta^2 < 0$ на поверхности S , что противоречит утверждениям лемм 2.9 и 2.7.

Из аргументов, использованных в доказательстве леммы 11.6, следует, что соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$ выполнено и в случае, когда $\mathcal{D}_{45} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{45}}$. Однако из соотношения $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$ следует, что линейная система $\mathcal{D}$ содержится в слоях расслоения η . Итак, предложение доказано.

§ 12. Случай $n = 13$, гиперповерхность степени 11 в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 5)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 13$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 5)$ степени 11, выполнено равенство $-K_X^3 = 11/30$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_2 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ на гиперповерхности X , и точки P_3 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$.

Существует коммутативная диаграмма

где ψ – естественная проекция, α_2 – взвешенное раздутие точки P_2 с весами $(1, 1, 2)$, морфизм α_3 – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 2, 3)$, морфизм β_3 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_3 на многообразии U_2 с весами $(1, 2, 3)$, β_2 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_2 на U_3 с весами $(1, 1, 2)$, морфизм β_4 – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_3 , которая содержится в α_3 -исключительном дивизоре и является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, с весами $(1, 1, 2)$, γ_2 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_2 на многообразии U_{34} с весами $(1, 1, 2)$, γ_4 – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_{23} , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма β_3 и является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, с весами $(1, 1, 2)$, а морфизм η – расслоение на эллиптические кривые.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 13$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 сразу следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_2, P_3\}$.

ЛЕММА 12.2. Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит P_3 . Тогда $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки P_2 . Пусть $\mathcal{D}_2$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U_2 . Тогда из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{D}_2 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_2}$, а множество $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ не пусто по лемме 2.1.

Пусть E – исключительный дивизор бирационального морфизма α_2 . Тогда E можно отождествить с конусом над кривой в $\mathbb{P}^3$ степени 3. Пусть Z – подмногообразие многообразия U_2 , принадлежащее множеству $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$. Тогда из лемм 2.3 и 2.4 следует, что многообразие Z является вершиной конуса E .

Точка Z является особенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ на U_2 . Пусть $\pi: W \rightarrow U_2$ – раздутие Z с весами $(1, 1, 1)$, а S – общая поверхность в пучке $|-K_W|$. Тогда S неприводима и имеет дювалевские особенности, а базисное множество пучка $|-K_W|$ состоит из неприводимой кривой Δ , которая содержится в S . На поверхности S выполнено равенство

$$\Delta^2 = -K_W^3 = -\frac{3}{10}$$

и соотношение $\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} k\Delta$, где $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W . Таким образом, имеем $\mathcal{B}|_S = k\Delta$, откуда следует, что

$$\text{Supp}(S) \cap \text{Supp}(D) = \text{Supp}(\Delta),$$

где D – достаточно общая поверхность в линейной системе $\mathcal{B}$, что противоречит утверждению леммы 2.7, поскольку линейная система $\mathcal{B}$ не составлена из пучка.

ЛЕММА 12.3. *Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит P_2 . Тогда множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки P_3 . Пусть $\mathcal{D}_3$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U_3 . Тогда $\mathcal{D}_3 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_3}$ по теореме 2.2, а множество $\mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$ не пусто по лемме 2.1.

Пусть G – α_3 -исключительный дивизор, P_4 – особая точка поверхности G , являющаяся факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ на U_3 , а P_5 – особая точка поверхности G , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ на U_3 . Тогда из леммы 2.3 следует, что либо множество $\mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$ состоит из точки P_4 , либо оно содержит точку P_5 .

Отметим, что $G \cong \mathbb{P}(1, 2, 3)$.

Предположим, что $\mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$ содержит точку P_5 . Пусть $\pi: W \rightarrow U_3$ – взвешенное раздутие точки P_5 с весами $(1, 1, 1)$, $\mathcal{B}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на W , L – кривая на поверхности G , принадлежащая линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2,3)}(1)|$, $\bar{L}$ – собственный прообраз кривой L на многообразии W , а S – общая поверхность в $|-K_W|$. Тогда

$$\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} k\Delta + k\bar{L},$$

выполнено соотношение $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2, а базисное множество линейной системы $|-K_W|$ состоит из кривой $\bar{L}$ и неприводимой кривой Δ такой, что $\alpha \circ \pi(\Delta)$ – базисное множество пучка $|-K_X|$. Более того, на поверхности S выполнены равенства

$$\Delta^2 = -\frac{5}{6}, \quad \bar{L}^2 = -\frac{4}{3}, \quad \Delta \cdot \bar{L} = 1,$$

откуда следует, что форма пересечения кривых Δ и $\bar{L}$ на поверхности S отрицательно определена. По лемме 2.9 носитель цикла $S \cdot D$ содержится в $\Delta \cup \bar{L}$,

где D – достаточно общая поверхность в линейной системе $\mathcal{B}$. Последнее невозможно по лемме 2.7, поскольку линейная системы $\mathcal{B}$ не составлена из пучка. Противоречие.

Итак, показано, что множество $\mathbb{CS}(U_3, \lambda \mathcal{D}_3)$ состоит из точки P_4 . Пусть D_{34} – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U_{34} . Тогда $D_{34} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{34}}$ по теореме 2.2, а множество $\mathbb{CS}(U_{34}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{34})$ не пусто по лемме 2.1.

Пусть E – исключительный дивизор бирационального морфизма β_4 , а P_6 – единственная особая точка поверхности E . Тогда $E \cong \mathbb{P}(1, 1, 3)$, точка P_6 является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ на многообразии U_{34} , а из леммы 2.3 следует, что $P_6 \in \mathbb{CS}(U_{34}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{34})$.

Пусть $\zeta: Z \rightarrow U_{34}$ – взвешенное раздутие точки P_6 с весами $(1, 1, 1)$, $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на Z , а F – общая поверхность в $|-K_Z|$. Тогда после несложных вычислений получим, что базисное множество пучка $|-K_Z|$ состоит из неприводимых и рациональных кривых $\check{L}$ и $\check{\Delta}$ таких, что на поверхности F выполнены равенства

$$\check{\Delta}^2 = -\frac{5}{6}, \quad \check{L}^2 = -\frac{3}{2}, \quad \check{\Delta} \cdot \check{L} = 1,$$

откуда следует, что форма пересечения кривых $\check{\Delta}$ и $\check{L}$ на поверхности F отрицательно определена. С другой стороны, из леммы 2.9 следует, что носитель цикла $F \cdot \mathcal{H}$ содержится в объединении кривых $\check{\Delta}$ и $\check{L}$, где $\mathcal{H}$ – общая поверхность в $\mathcal{H}$, поскольку $\mathcal{H}|_F \sim_{\mathbb{Q}} k\check{\Delta} + k\check{L}$ по теореме 2.2. Последнее невозможно по лемме 2.7.

Показано, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_2, P_3\}$. Пусть $\mathcal{D}_{23}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U_{23} . Тогда $\mathcal{D}_{23} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{23}}$ по теореме 2.2 и $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{23}) \neq \emptyset$ по лемме 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 12.4. Из леммы 2.3 следует, что либо $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{23})$ содержит особую точку многообразия U_{23} , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма β_2 , либо множество $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{23})$ содержит особую точку многообразия U_{23} , которая содержится в исключительном дивизоре бирационального морфизма β_3 и является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ на многообразии U_{23} , либо множество $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{23})$ содержит особую точку многообразия U_{23} , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма β_3 и является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ на многообразии U_{23} . Из аргументов, использованных в доказательстве леммы 12.2, легко следует, что первый случай не реализуется, а из аргументов, использованных в доказательстве леммы 12.3, легко следует, что последний случай не реализуется.

Таким образом, множество $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{23})$ содержит особую точку многообразия U_{23} , которая содержится в исключительном дивизоре бирационального морфизма β_3 и является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ на многообразии U_{23} . Пусть $\mathcal{P}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Y . Тогда $\mathcal{P} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$ по теореме 2.2, откуда следует утверждение предложения.

§ 13. Случай $n = 15$, гиперповерхность степени 12 в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 6)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 15$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 6)$ степени 12, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/3$, а особенности гиперповерхности X состоят из особых точек P_1 и P_2 , каждая из которых является терминальной особенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, и особых точек P_3 и P_4 , каждая из которых является особенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.1. *Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 15$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеется коммутативная диаграмма

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 1, 2)$, морфизм β – взвешенное раздутие точки P_4 с весами $(1, 1, 2)$, γ – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_4 на U с весами $(1, 1, 2)$, морфизм δ – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_3 на W с весами $(1, 1, 2)$, а морфизм η – эллиптическое расслоение.

Из теоремы 3.3, предложения 3.5 и леммы 3.11 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_3, P_4\}$.

Пусть $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Y . Тогда требуемое утверждение следует из того, что $\mathcal{H}$ содержится в слоях расслоения η , что следует из соотношения $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$, а это, в свою очередь, следует из условия $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_3, P_4\}$ по теореме 2.2.

Таким образом, для завершения доказательства без ограничения общности можно считать, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_3 , но не содержит точку P_4 . Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U , а Q – особая точка многообразия U , содержащаяся в исключительном дивизоре бирационального морфизма α . Тогда выполнено соотношение $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2, а точка Q является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ на многообразии U . В частности, из лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит точку Q .

Пусть $\zeta: Z \rightarrow U$ – взвешенное раздутие точки Q с весами $(1, 1, 1)$, $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Z , а S – достаточно общая поверхность в пучке $|-K_Z|$. Тогда выполнено соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$ по теореме 2.2, а базисное множество пучка $|-K_Z|$ состоит из неприводимой кривой Δ . Таким образом, из выполнения неравенства $-K_Z^3 < 0$ следует, что $\Delta^2 < 0$ на поверхности S , но $\mathcal{D}|_S \sim_{\mathbb{Q}} k\Delta$, что противоречит утверждениям лемм 2.9 и 2.7, поскольку $\mathcal{D}$ не составлена из пучка.

§ 14. Случай $n = 16$, гиперповерхность степени 12 в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 4, 5)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 16$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 4, 5)$ степени 12, выполнено равенство $-K_X^3 = 3/10$, а особенности гиперповерхности X состоят из особых точек P_1, P_2 и P_3 , каждая из которых является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ на X , и особой точки P_4 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$ на гиперповерхности X .

Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\beta} & W & \xleftarrow{\gamma} & Y \\ \alpha \downarrow & & & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{\psi} & & & \mathbb{P}(1, 1, 2) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_4 с весами $(1, 1, 4)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α , с весами $(1, 1, 3)$, морфизм γ – взвешенное раздутие особой точки многообразия W , которая содержится в исключительном дивизоре бирационального морфизма β , с весами $(1, 1, 2)$, а морфизм η – эллиптическое расслоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 16$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что дивизоры $-K_U$ и $-K_W$ являются численно эффективными и объемными, а морфизм η совпадает с отображением, которое задано полной линейной системой $|-2K_Y|$.

Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки P_4 . Пусть G – исключительный дивизор раздутия α , $\bar{P}_5$ – особая точка поверхности G , а $\mathcal{D}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U . Тогда поверхность G можно отождествить с конусом над неособой рациональной кривой в $\mathbb{P}^4$ степени 4, точка $\bar{P}_5$ является факторособенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ на U , выполнено соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2, а из леммы 2.1 следует, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не пусто.

ЛЕММА 14.2. Множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ состоит из точки $\bar{P}_5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит некоторое подмногообразие C многообразия U , отличное от точки $\bar{P}_5$. Из леммы 2.3 следует, что C – образующая конуса G , что противоречит следствию 2.8.

Пусть $\mathcal{H}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на W . Тогда из теоремы 2.2 и лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ содержит особую точку многообразия W , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма β . Таким образом, из теоремы 2.2 следует, что собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Y содержится в слоях эллиптического расслоения η . Итак, предложение доказано.

§ 15. Случай $n = 17$, гиперповерхность степени 12 в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 4, 4)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 17$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 4, 4)$ степени 12, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/4$, а особенности гиперповерхности X состоят из особых точек P_1 , P_2 и P_3 , каждая из которых является факторособенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \pi \swarrow & & \searrow \omega \\ X & \dashrightarrow_{\psi} & \mathbb{P}(1, 1, 3) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, морфизм π – композиция взвешенных раздутий особых точек P_1 , P_2 и P_3 с весами $(1, 1, 3)$, а ω – эллиптическое расслоение.

Из конструкции, приведенной в примере 1.4, следует, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & Y_i & \\ \beta_i \swarrow & & \searrow \eta_i \\ U_i & & \\ \alpha_i \searrow & & \\ X & \dashrightarrow_{\xi_i} & \mathbb{P}(1, 1, 4) \end{array}$$

где α_i – взвешенное раздутие точки P_i с весами $(1, 1, 3)$, морфизм β_i – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_i , которая содержится в исключительном дивизоре взвешенного раздутия α_i , с весами $(1, 1, 2)$, а η_i – эллиптическое расслоение.

Утверждение теоремы 1.10 при $n = 17$ вытекает из следующего результата.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.1. *Существует либо коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow_{\rho} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 1, 3) & \dashrightarrow_{\varphi} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (15.1)$$

либо коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} X & \dashrightarrow_{\sigma} & X & \dashrightarrow_{\rho} & V \\ \xi_i \downarrow & & & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 1, 4) & \dashrightarrow_{\upsilon} & & & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (15.2)$$

для некоторого индекса $i \in \{1, 2, 3\}$, где φ , σ и υ – бирациональные отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Особенности логпары $(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ канонические, а из теоремы 3.3 и леммы 3.11 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_1, P_2, P_3\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 15.2. Из теоремы 2.2 следует, что существует коммутативная диаграмма (15.1) в случае, когда множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит все точки P_1, P_2 и P_3 .

Можно считать, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит P_1 , но не содержит P_3 .

ЗАМЕЧАНИЕ 15.3. Дивизор $-K_{U_1}$ численно эффективен и объемен.

Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U_1 , $\bar{P}_2$ – собственный прообраз точки P_2 на U_1 , а $\bar{P}_4$ – особая точка многообразия U_1 , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α . Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_1}$ по теореме 2.2, а из леммы 2.1 следует, что множество $\mathbb{CS}(U_1, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не пусто.

ЗАМЕЧАНИЕ 15.4. Из теоремы 2.2 следует, что существует коммутативная диаграмма (15.2) в случае, когда множество $\mathbb{CS}(U_1, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит точку $\bar{P}_4$.

Можно считать, что множество $\mathbb{CS}(U_1, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не содержит точку $\bar{P}_4$. Из леммы 2.4 следует, что множество $\mathbb{CS}(U_1, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не содержит подмногообразий, которые содержатся в исключительном дивизоре морфизма α . Значит, множество $\mathbb{CS}(U_1, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит точку $\bar{P}_2$.

Пусть $\gamma: W \rightarrow U_1$ – взвешенное раздутие точки $\bar{P}_2$ с весами $(1, 1, 3)$, $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W , S – общая поверхность в линейной системе $|-K_W|$, а C – базисная кривая пучка $|-K_W|$. Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2, поверхность S нормальна, кривая C неприводима, а на поверхности S выполнены неравенство $C^2 = -1/24$ и соотношение $\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} kC$. Таким образом, из леммы 2.9 следует противоречие с утверждением леммы 2.7. Предложение доказано.

§ 16. Случай $n = 19$, гиперповерхность степени 12 в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 3, 4)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 19$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 3, 4)$ степени 12, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/6$, а особенности гиперповерхности X состоят из особых точек O_1, O_2 и O_3 , каждая из которых является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, и точек P_1, P_2, P_3 и P_4 , каждая из которых является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, а гиперповерхность X бирационально сверхжестка.

Для каждого индекса $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & U_i & \\ \pi_i \swarrow & & \searrow \eta_i \\ X & \xrightarrow{\xi_i} & \mathbb{P}(1, 2, 3) \end{array}$$

где ξ_i – рациональное отображение, неопределенное только в точке P_i , морфизм π_i – взвешенное раздутие точки P_i с весами $(1, 1, 2)$, а η_i – расслоение на эллиптические кривые.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16.1. *Существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\rho} & V \\
 \xi_i \downarrow & & \downarrow \nu \\
 \mathbb{P}(1, 2, 3) & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^2
 \end{array} \quad (16.1)$$

для некоторого индекса $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, где σ – бирациональное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, следствия 3.4, теоремы 2.2 и предложения 3.5 следует, что множество $\text{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_i для некоторого индекса $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U_i . Тогда выполнено соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_i}$ по теореме 2.2, откуда следует существование коммутативной диаграммы (16.1).

Из предложения 16.1 следует утверждение теоремы 1.10 при $n = 19$.

§ 17. Случай $n = 20$, гиперповерхность степени 13 в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 4, 5)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 20$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 4, 5)$ степени 13, выполнено равенство $-K_X^3 = 13/60$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, точки P_2 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$, и точки P_3 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$. Имеется коммутативная диаграмма

где ψ – естественная проекция, α_2 – взвешенное раздутие точки P_2 с весами $(1, 1, 3)$, морфизм α_3 – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 1, 4)$, β_3 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_3 на многообразии U_2 с весами $(1, 1, 4)$, β_2 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_2 на многообразии U_3 с весами $(1, 1, 3)$, β_4 – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_3 , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α_3 , с весами $(1, 1, 3)$, морфизм γ_2 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_2 на многообразии U_{34} с весами $(1, 1, 3)$, морфизм γ_4 – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_{23} , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма β_3 , с весами $(1, 1, 3)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из конструкции, приведенной в примере 1.7, следует, что существует коммутативная диаграмма

где ξ – проекция, α_1 – взвешенное раздутие точки P_1 с весами $(1, 1, 2)$, морфизм α_3 – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 1, 4)$, морфизм γ_3 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_3 на U_1 с весами $(1, 1, 4)$, морфизм γ_1 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_1 на U_3 с весами $(1, 1, 2)$, а ω – эллиптическое расслоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17.1. *Существует либо коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X & \xrightarrow{\rho} & V \\ \psi \downarrow & & & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 1, 3) & \xrightarrow{v} & & & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (17.1)$$

либо коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X & \xrightarrow{\rho} & V \\ \xi \downarrow & & & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 1, 4) & \xrightarrow{\zeta} & & & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (17.2)$$

где σ , v и ζ – бирациональные отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 17.2. *Пусть $\{P_1, P_3\} \subseteq \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$. Тогда существует диаграмма (17.2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на Y , а S – достаточно общая поверхность в $\mathcal{B}$. Тогда $S \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$ по теореме 2.2, откуда $S \cdot C = 0$, где C – общий слой эллиптического расслоения ω . Таким образом, линейная система $\mathcal{B}$ лежит в слоях расслоения ω , откуда следует существование коммутативной диаграммы (17.2).

ЛЕММА 17.3. *Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит множество $\{P_1, P_2\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\{P_1, P_3\} \subseteq \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Пусть $\pi: W \rightarrow U_1$ – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_2 на многообразии U_1 с весами $(1, 1, 3)$, а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2.

Линейная система $|-K_W|$ является пучком, базисное множество которого состоит из неприводимой рациональной неособой кривой $\Delta \subset W$ такой, что кривая $\alpha_1 \circ \pi(C)$ высекается на гиперповерхности X уравнениями $z = y = 0$.

Пусть S – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-K_W|$, $\bar{P}_3$ – собственный прообраз особой точки P_3 на многообразии W , а $\bar{P}_5$ и $\bar{P}_6$ – оставшиеся особые точки многообразия W такие, что $\alpha_1 \circ \pi(\bar{P}_5) = P_1$ и $\alpha_1 \circ \pi(\bar{P}_6) = P_2$. Тогда точка $\bar{P}_5$ является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ на многообразии W , точка $\bar{P}_6$ является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ на многообразии W , поверхность S неособа вне точек $\bar{P}_3$, $\bar{P}_5$ и $\bar{P}_6$, а в особых точках $\bar{P}_3$, $\bar{P}_5$ и $\bar{P}_6$ поверхность S имеет особенности типов $\mathbb{A}_4$, $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ соответственно.

На поверхности S выполнено равенство $\Delta^2 = -1/30$. С другой стороны, выполнено соотношение $\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} k\Delta$, откуда следует, что $\mathcal{B}|_S = k\Delta$. Теперь противоречие несложно следует из применения лемм 2.7 и 2.9.

ЛЕММА 17.4. *Множество $\mathcal{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не может состоять только из точки P_i .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathcal{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_i\}$. Покажем, что сделанное предположение противоречиво. Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U_i . Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_i}$ по теореме 2.2, а из леммы 2.1 и доказательства леммы 9.5 следует, что множество $\mathcal{CS}(U_i, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит особую точку многообразия U_i , которая является особой точкой исключительного дивизора бирационального морфизма α_i .

Пусть $\pi: W \rightarrow U_i$ – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_i , которая является особой точкой α_i -исключительного дивизора, с весами $(1, 1, i)$, а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2.

Пусть S – достаточно общая поверхность в пучке $|-K_W|$, а Δ – единственная базисная кривая пучка $|-K_W|$. Тогда S – неприводимая поверхность, имеющая двовалевские особенности, а Δ – неприводимая, рациональная и неособая кривая. Из несложных вычислений следует, что на поверхности S выполнены соотношение $\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} k\Delta$ и равенство

$$\Delta^2 = \begin{cases} -9/20 & \text{при } i = 1, \\ -1/30 & \text{при } i = 2, \\ 0 & \text{при } i = 3, \end{cases}$$

откуда следует (см. доказательство леммы 17.3), что кривая $\alpha_i \circ \pi(\Delta)$ принадлежит множеству $\mathcal{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ при $i \neq 3$. Таким образом, выполнено равенство $i = 3$.

Пусть G – исключительный дивизор бирационального морфизма α_3 , а $\bar{P}_4$ – особая точка многообразия U_3 , которая является особой точкой дивизора G . Тогда поверхность G можно отождествить с конусом над нормальной рациональной кривой в $\mathbb{P}^5$, а точка $\bar{P}_4$ является факторособенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ на многообразии U_3 .

Точка $\bar{P}_4$ принадлежит множеству $\mathcal{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D})$. Теперь из лемм 2.3 и 2.4 следует, что множество $\mathcal{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ состоит в точности из точки $\bar{P}_4$.

В принятых обозначениях многообразие W совпадает с многообразием U_{34} , бирациональный морфизм π совпадает с бирациональным морфизмом β_4 , а дивизор $-K_W$ является численно эффективным и объемным. Таким образом,

из лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит особую точку многообразия W , которая является особой точкой исключительного дивизора бирационального морфизма π .

Пусть $\mu: Z \rightarrow W$ – взвешенное раздутие особой точки многообразия W , являющейся особой точкой π -исключительного дивизора, с весами $(1, 1, 2)$, а $\mathcal{P}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на Z . Тогда $\mathcal{P} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$ по теореме 2.2. Пусть F – общая поверхность в пучке $|-K_Z|$, а Γ – базисная кривая пучка $|-K_Z|$. Тогда F неприводима и имеет двувалевские особенности, а Γ – неприводимая, рациональная и неособая кривая. На поверхности F выполнены равенство $\Gamma^2 = -1/24$ и соотношение $\mathcal{P}|_S \sim_{\mathbb{Q}} k\Gamma$, откуда следует противоречие с утверждением лемм 2.7 и 2.9.

Из теоремы 3.3 и леммы 3.11 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_2, P_3\}$.

Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U_{23} . Тогда из лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит либо особую точку многообразия U_{23} , которая является особой точкой исключительного дивизора бирационального морфизма β_3 , либо особую точку многообразия U_{23} , которая является особой точкой исключительного дивизора морфизма β_2 .

ЛЕММА 17.5. *Множество $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не может содержать особую точку исключительного дивизора бирационального морфизма β_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E – исключительный дивизор морфизма β_2 , а $\bar{P}_6$ – особая точка поверхности E . Тогда точка $\bar{P}_6$ является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ на многообразии U_{23} . Предположим, что $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит точку $\bar{P}_6$.

Пусть $\pi: W \rightarrow U_{23}$ – взвешенное раздутие точки $\bar{P}_6$ с весами $(1, 1, 2)$, $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W , S – достаточно общая поверхность в пучке $|-K_W|$, а Δ – базисная кривая пучка $|-K_W|$. Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2, поверхность S неприводима и имеет двувалевские особенности, а Δ является неприводимой, рациональной и неособой кривой. Более того, на поверхности S выполнены соотношение $\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} k\Delta$ и равенство $\Delta^2 = -1/24$, что противоречит леммам 2.7 и 2.9.

Итак, множество $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит особую точку многообразия U_{23} , которая является особой точкой исключительного дивизора морфизма β_3 . Теперь из теоремы 2.2 сразу следует существование коммутативной диаграммы (17.2). Итак, предложение доказано.

§ 18. Случай $n = 23$, гиперповерхность степени 14 в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 4, 5)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 23$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 4, 5)$ степени 14 и $-K_X^3 = 7/60$. Более того, особенности гиперповерхности X состоят из трех особых точек P_1, P_2 и P_3 , каждая из которых является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_4 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, точки P_5 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$, и особой точки P_6 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18.1. *Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 23$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_5, P_6\}$. Существует коммутативная диаграмма

где ψ – естественная проекция, морфизм α_5 – взвешенное раздутие особой точки P_5 с весами $(1, 1, 3)$, морфизм α_6 – взвешенное раздутие точки P_6 с весами $(1, 2, 3)$, β_5 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_5 на U_6 с весами $(1, 1, 3)$, β_6 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_6 на U_5 с весами $(1, 2, 3)$, η – эллиптическое расслоение.

ЛЕММА 18.2. Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_6 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит P_6 . Тогда $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки P_5 . Пусть $\mathcal{D}_5$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U_5 . Тогда из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{D}_5 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_5}$, а $\mathbb{CS}(U_5, \frac{1}{k}\mathcal{D}_5)$ не пусто по лемме 2.1.

Пусть $\bar{P}_7$ – особая точка многообразия U_5 , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α_5 . Тогда $\bar{P}_7$ является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, а из леммы 2.3 следует, что $\mathbb{CS}(U_5, \frac{1}{k}\mathcal{D}_5)$ содержит точку $\bar{P}_7$. Пусть $\pi: U \rightarrow U_5$ – взвешенное раздутие особой точки $\bar{P}_7$ с весами $(1, 1, 3)$. Тогда полная линейная система $|-2K_U|$ является собственным прообразом пучка $|-2K_X|$, а ее базисное множество состоит из неприводимой кривой $Z \subset U$ такой, что $\alpha_5 \circ \pi(Z)$ – единственная базисная кривая пучка $|-2K_X|$.

Пусть S – достаточно общая поверхность в пучке $|-2K_U|$. Тогда поверхность S неприводима и содержит кривую Z , а из выполнения неравенства $-K_U^3 < 0$ следует, что на поверхности S выполнено неравенство $Z^2 < 0$, но из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} kZ$, где $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W . Таким образом, из леммы 2.9 следует, что

$$\text{Supp}(S) \cap \text{Supp}(D) = \text{Supp}(Z),$$

где D – достаточно общая поверхность в линейной системе $\mathcal{B}$, что противоречит утверждению леммы 2.7, поскольку линейная система $\mathcal{B}$ не составлена из пучка.

Из теоремы 2.2 следует, что утверждение теоремы 1.10 выполнено для гиперповерхности X в случае, когда $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит P_5 и P_6 . Таким образом, для завершения доказательства предложения можно считать, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит точку P_5 . Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Пусть $\mathcal{D}_6$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U_6 . Тогда $\mathcal{D}_6 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_6}$ по теореме 2.2, откуда следует, что множество $\mathbb{CS}(U_6, \frac{1}{k}\mathcal{D}_6)$ не пусто по лемме 2.1.

Пусть $\bar{P}_7$ и $\bar{P}_8$ – особые точки многообразия U_6 , которые содержатся в α_6 -исключительном дивизоре и являются факторособенностями типов $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ соответственно.

ЛЕММА 18.3. Множество $\mathbb{CS}(U_6, \frac{1}{k}\mathcal{D}_6)$ не содержит точку $\bar{P}_7$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $\mathbb{CS}(U_6, \frac{1}{k}\mathcal{D}_6)$ содержит точку $\bar{P}_7$. Пусть $\gamma: W \rightarrow U_6$ – взвешенное раздутие особой точки $\bar{P}_7$ с весами $(1, 1, 2)$, а S – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-2K_W|$. Тогда базисное множество пучка $|-2K_W|$ состоит из кривой Δ такой, что выполнены равенство $\Delta^2 = -1/6$ и рациональная эквивалентность $\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} k\Delta$ на поверхности S , где $\mathcal{B}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на W , что противоречит лемме 2.7.

Таким образом, множество $\mathbb{CS}(U_6, \frac{1}{k}\mathcal{D}_6)$ содержит точку $\bar{P}_8$ по лемме 2.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 18.4. Полная линейная система $|-3K_{U_6}|$ не имеет неподвижных компонент и является собственным прообразом линейной системы $|-3K_X|$. Более того, базисное множество линейной системы $|-3K_{U_6}|$ состоит из неприводимой кривой, которая проходит через особую точку $\bar{P}_8$ и стягивается рациональным отображением $\psi \circ \alpha_6$.

Пусть $\pi: U \rightarrow U_6$ – взвешенное раздутие особой точки $\bar{P}_8$ с весами $(1, 1, 1)$, F – исключительный дивизор морфизма π , $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U , а $\mathcal{H}$ – собственный прообраз полной линейной системы $|-3K_{U_6}|$ на многообразии U . Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2. После несложных вычислений получаем, что

$$\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(-3K_{U_6}) - \frac{1}{2}F,$$

базисное множество линейной системы $\mathcal{H}$ состоит из неприводимой кривой Z такой, что кривая $\alpha_6 \circ \pi(Z)$ является базисной кривой полной линейной системы $|-3K_X|$, а для общей поверхности S в линейной системе $\mathcal{H}$ выполнено равенство $S \cdot Z = 1/12$.

Выполнено равенство $S \cdot D_1 \cdot D_2 = -k^2/4$ для общих поверхностей D_1 и D_2 в линейной системе $\mathcal{D}$, что является противоречием. Предложение доказано.

§ 19. Случай $n = 25$, гиперповерхность степени 15 в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 4, 7)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 25$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 4, 7)$ степени 15, выполнено равенство $-K_X^3 = 5/28$, а особенности гиперповерхности X состоят из особой точки P_1 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$, и точки P_2 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 25$.

Существует коммутативная диаграмма

где ψ – естественная проекция, α_1 – взвешенное раздутие точки P_1 с весами $(1, 1, 3)$, морфизм α_2 – взвешенное раздутие точки P_2 с весами $(1, 3, 4)$, β_2 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_2 на U_1 с весами $(1, 3, 4)$, β_1 – взвешенное раздутие собственного прообраза особой точки P_1 на U_2 с весами $(1, 1, 3)$, β_3 – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_2 , которая содержится в α_2 -исключительном дивизоре и является факторособенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ на U_2 , с весами $(1, 1, 3)$, γ_1 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_1 на U_{23} с весами $(1, 1, 3)$, морфизм γ_3 – взвешенное раздутие точки многообразия U_{12} , которая содержится в β_2 -исключительном дивизоре и является особенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ на U_{12} , с весами $(1, 1, 3)$, а η – эллиптическое расслоение.

ЗАМЕЧАНИЕ 19.2. Дивизоры $-K_{U_1}$, $-K_{U_2}$, $-K_{U_{12}}$ и $-K_{U_{23}}$ численно эффективны и объемны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 19.1. Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_1, P_2\}$.

ЛЕММА 19.3. Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит P_2 . Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Пусть $\mathcal{D}_1$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U_1 . Тогда множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки P_1 , выполнено соотношение $\mathcal{D}_1 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_1}$ по теореме 2.2 и $\mathbb{CS}(U_1, \frac{1}{k}\mathcal{D}_1) \neq \emptyset$ по лемме 2.1.

Пусть P_5 – особая точка многообразия U_1 , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α_1 . Тогда точка P_5 является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ на многообразии U_1 . Более того, из леммы 2.3 следует, что $\mathbb{CS}(U_1, \frac{1}{k}\mathcal{D}_1)$ содержит точку P_5 .

Пусть $\pi: W \rightarrow U_1$ – раздутие точки P_5 с весами $(1, 1, 2)$, а S – достаточно общая поверхность в пучке $|-K_W|$. Тогда поверхность S неприводима и имеет дювалевские особенности, а базисное множество пучка $|-K_W|$ состоит из неприводимой кривой Δ , которая содержится в поверхности S . Более того, на поверхности S выполнены равенство $\Delta^2 = -1/14$ и соотношение $\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} k\Delta$, где $\mathcal{B}$ – собственный прообраз исходной линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W . Таким образом, имеем $\mathcal{B}|_S = k\Delta$, откуда следует, что

$$\text{Supp}(S) \cap \text{Supp}(D) = \text{Supp}(\Delta),$$

где D – достаточно общая поверхность в линейной системе $\mathcal{B}$, что противоречит утверждению леммы 2.7, поскольку линейная система $\mathcal{B}$ не составлена из пучка.

Пусть G – исключительный дивизор бирационального раздутия α_2 , $\mathcal{D}_2$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U_2 , $\bar{P}_1$ – собственный прообраз точки P_1 на U_2 , а $\bar{P}_3$ и $\bar{P}_4$ – особые точки многообразия U_2 , которые содержатся в исключительном дивизоре G и являются факторособенностями типов $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ и $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ соответственно. Тогда поверхность G является взвешенным проективным пространством $\mathbb{P}(1, 3, 4)$, точки $\bar{P}_3$ и $\bar{P}_4$ являются особыми точками поверхности G , из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{D}_2 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_2}$, а из леммы 2.1 следует, что множество $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ не пусто. Более того, из аргументов, использованных в доказательстве леммы 19.3, следует, что множество $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ не может состоять только из точки $\bar{P}_1$.

ЛЕММА 19.4. *Множество $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ не может содержать точки $\bar{P}_3$ и $\bar{P}_4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ содержит $\bar{P}_3$ и $\bar{P}_4$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Пусть $\pi: W \rightarrow U_2$ – композиция взвешенных раздутий точек $\bar{P}_3$ и $\bar{P}_4$ с весами $(1, 1, 3)$ и $(1, 1, 2)$ соответственно, а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2.

Пусть S – общая поверхность в пучке $|-K_W|$. Тогда S неприводима и нормальна, а базисное множество пучка $|-K_W|$ состоит из неприводимых кривых C и L таких, что кривая $\alpha_2 \circ \pi(C)$ является базисной кривой пучка $|-K_X|$, а кривая $\pi(L)$ содержится в поверхности G и принадлежит линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,3,4)}(1)|$. Выполнены соотношения

$$\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W|_S \sim_{\mathbb{Q}} kS|_S = kC + kL,$$

но форма пересечения кривых L и C на поверхности S является отрицательно определенной. Теперь из леммы 2.9 следует противоречие с утверждением леммы 2.7.

Из леммы 2.3 следует, что $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2) \subsetneq \{\bar{P}_1, \bar{P}_3, \bar{P}_4\}$.

ЛЕММА 19.5. *Множество $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ содержит либо точку $\bar{P}_1$, либо точку $\bar{P}_4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ состоит из точки $\bar{P}_3$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Линейная система $|-K_{U_2}|$ является собственным прообразом пучка $|-K_X|$ на многообразии U_2 . Более того, базисное множество линейной системы $|-K_{U_2}|$ состоит из неприводимых кривых L и Δ таких, что $\alpha_2(\Delta)$ – единственная базисная кривая пучка $|-K_X|$, а неприводимая кривая L содержится в исключительном дивизоре G , проходит через точки $\bar{P}_3$ и $\bar{P}_4$ и является единственной кривой в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,3,4)}(1)|$. Более того, по построению кривые L и Δ пересекаются в особой точке $\bar{P}_4$.

Пусть $\tilde{P}_6$ – особая точка многообразия U_{23} , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма β_3 , а $\mathcal{D}_{23}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U_{23} . Тогда $\mathcal{D}_{23} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{23}}$ по теореме 2.2, а из лемм 2.1 и 2.3 следует, что $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{23})$ содержит точку $\tilde{P}_6$, являющуюся особенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ на U_{23} .

Пусть $\pi: W \rightarrow U_{23}$ – взвешенное раздутие точки $\tilde{P}_6$ с весами $(1, 1, 2)$, $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W , а $\bar{L}$ и $\bar{\Delta}$ – собственные прообразы кривых L и Δ на многообразии W соответственно. Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2, линейная система $|-K_W|$ является собственным прообразом пучка $|-K_{U_2}|$, а базисное множество пучка $|-K_W|$ состоит из кривых $\bar{L}$ и $\bar{\Delta}$.

Пусть S – общая поверхность в пучке $|-K_W|$. Тогда S неприводима и нормальна, выполнено соотношение $\mathcal{D}|_S \sim_{\mathbb{Q}} k\bar{\Delta} + k\bar{L}$, но на поверхности S выполнены равенства $\bar{\Delta}^2 = -7/12$, $\bar{L}^2 = -5/6$, $\bar{\Delta} \cdot \bar{L} = 2/3$, откуда следует, что форма пересечения кривых $\bar{\Delta}$ и $\bar{L}$ на поверхности S отрицательно определена. Таким образом, из лемм 2.9 и 2.7 следует противоречие с тем, что линейная система $\mathcal{D}$ не составлена из пучка. Противоречие.

Можно считать, что гиперповерхность X задана уравнением

$$w^2y + wt^2 + wtf_4(x, y, z) + wf_8(x, y, z) + tf_{11}(x, y, z) + f_{15}(x, y, z) = 0 \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = 1$, $\text{wt}(z) = 3$, $\text{wt}(t) = 4$ и $\text{wt}(w) = 7$, а $f_i(x, y, t)$ – достаточно общий квазиоднородный многочлен степени i .

ЗАМЕЧАНИЕ 19.6. Из теоремы 2.2 следует, что в случае, когда $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ содержит обе особые точки $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_3$, существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 1, 3) & \xrightarrow[\quad \zeta \quad]{} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где ζ – бирациональное отображение.

Можно считать, что множество $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ не содержит обе точки $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_3$.

ЛЕММА 19.7. *Множество $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ содержит точку $\bar{P}_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ не содержит точку $\bar{P}_1$. Тогда множество $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ состоит из точки $\bar{P}_4$.

Пусть $\pi: W \rightarrow U_2$ – взвешенное раздутие точки $\bar{P}_4$ с весами $(1, 1, 2)$, E – исключительный дивизор морфизма π , а $\bar{G}$ и $\bar{\mathcal{B}}$ – собственные прообразы соответственно дивизора G и линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W . Тогда из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\bar{\mathcal{B}} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$, а из аргументов, использованных в доказательстве леммы 19.5, легко следует, что множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\bar{\mathcal{B}})$ не содержит особую точку многообразия W , которая содержится в исключительном дивизоре раздутия π . Таким образом, из леммы 2.3 следует, что особенности логпары $(W, \frac{1}{k}\bar{\mathcal{B}})$ терминальны.

Пусть S_x, S_y, S_z, S_t и S_w – собственные прообразы на W поверхностей, которые высекаются на X уравнениями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ и $w = 0$

соответственно. Тогда

$$\begin{aligned}
 S_x &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha_2 \circ \pi)^*(-K_X) - \frac{3}{7} E - \frac{1}{7} \bar{G}, \\
 S_y &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha_2 \circ \pi)^*(-K_X) - \frac{10}{7} E - \frac{8}{7} \bar{G}, \\
 S_z &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha_2 \circ \pi)^*(-3K_X) - \frac{2}{7} E - \frac{3}{7} \bar{G}, \\
 S_t &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha_2 \circ \pi)^*(-4K_X) - \frac{5}{7} E - \frac{4}{7} \bar{G}, \\
 S_w &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha_2 \circ \pi)^*(-7K_X).
 \end{aligned} \tag{19.1}$$

Базисное множество пучка $|-K_W|$ состоит из неприводимых кривых C и L таких, что кривая $\alpha_2 \circ \pi(C)$ задается уравнениями $x = y = 0$ на X , а кривая $\pi(L)$ содержится в поверхности G и принадлежит линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,3,4)}(1)|$. Более того, из соотношений (19.1) следует, что рациональные функции y/x , zy/x^4 , ty/x^5 , wy^3/x^{10} принадлежат линейной системе $|aS_x|$ для $a = 1, 4, 5, 10$ соответственно. Из последнего несложно следует, что полная линейная система $|-20K_W|$ задает бирациональное отображение $\chi: W \dashrightarrow X'$ такое, что многообразии X' является гиперповерхностью в $\mathbb{P}(1, 1, 4, 5, 10)$ степени 20, имеющей канонические особенности. В частности, дивизор $-K_W$ объемен.

Из работы [12] следует, что существует бирациональное отображение $\zeta: W \dashrightarrow Z$ такое, что ζ регулярно вне кривых C и L и является изоморфизмом в коразмерности 1, а дивизор $-K_Z$ численно эффективен и объемен, поскольку ζ – изоморфизм в коразмерности один. Пусть $\mathcal{P}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Z . Тогда особенности логпары $(Z, \frac{1}{k}\mathcal{P})$ терминальны, поскольку ζ является логфлопом относительно логпары $(W, \frac{1}{k}\mathcal{B})$, имеющей терминальные особенности. Последнее противоречит лемме 2.1.

Итак, множество $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ состоит из точек $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_4$. Пусть $\pi: W \rightarrow U_2$ – композиция взвешенных раздутий особых точек $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_4$ с весами $(1, 1, 3)$ и $(1, 1, 2)$ соответственно, $\bar{G}$ и $\mathcal{B}$ – собственные прообразы соответственно дивизора G и линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W , а F и E – исключительные дивизоры морфизма π , доминирующие особые точки $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_4$ соответственно. Тогда из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$, а из леммы 2.3 и доказательства леммы 19.5 следует, что особенности подвижной логпары $(W, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ терминальны.

Пусть S_x , S_y , S_z , S_t и S_w – собственные прообразы на многообразии W поверхностей, которые высекаются на гиперповерхности X уравнениями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ и $w = 0$ соответственно. Тогда $S_x \sim_{\mathbb{Q}} -K_W$ и выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
 S_x &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha_2 \circ \pi)^*(-K_X) - \frac{3}{7} E - \frac{1}{7} \bar{G} - \frac{1}{4} F, \\
 S_y &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha_2 \circ \pi)^*(-K_X) - \frac{10}{7} E - \frac{8}{7} \bar{G} - \frac{1}{4} F, \\
 S_z &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha_2 \circ \pi)^*(-3K_X) - \frac{2}{7} E - \frac{3}{7} \bar{G} - \frac{3}{4} F,
 \end{aligned}$$

$$S_t \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha_2 \circ \pi)^*(-4K_X) - \frac{5}{7}E - \frac{4}{7}\bar{G},$$

$$S_w \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha_2 \circ \pi)^*(-7K_X) - \frac{11}{4}F,$$

откуда следует, что рациональные функции y/x , zy/x^4 , twy^4/x^{15} , wy^3/x^{10} принадлежат линейной системе $|aS_x|$ для $a = 1, 4, 15, 10$ соответственно. Таким образом, линейная система $|-60K_W|$ задает бирациональное отображение $\chi: W \dashrightarrow X'$ такое, что X' является гиперповерхностью в $\mathbb{P}(1, 1, 4, 10, 15)$ степени 30. В частности, дивизор $-K_W$ объемен, а из доказательства леммы 19.7 сразу следует противоречие. Предложение доказано.

§ 20. Случай $n = 26$, гиперповерхность степени 15 в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 5, 6)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 26$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 5, 6)$ степени 15, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/6$, а особенности гиперповерхности X состоят из точек P_1 и P_2 , каждая из которых является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ на X , и особой точки P_3 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{6}(1, 1, 5)$. Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\beta} & W & \xleftarrow{\gamma} & Y \\ \alpha \downarrow & & & & \downarrow \eta \\ X & \dashrightarrow & & \dashrightarrow & \mathbb{P}(1, 1, 3) \\ & & \psi & & \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 1, 5)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α , с весами $(1, 1, 4)$, морфизм γ – взвешенное раздутие особой точки многообразия W , которая содержится в исключительном дивизоре бирационального морфизма β , с весами $(1, 1, 3)$, а морфизм η – эллиптическое расслоение.

Из конструкции, приведенной в примере 1.5, следует, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & U_i & \\ \sigma_i \swarrow & & \searrow \omega_i \\ X & \dashrightarrow & \mathbb{P}(1, 1, 6) \\ & \xi_i & \end{array}$$

где ξ_i – проекция, σ_i – раздутие точки P_i с весами $(1, 1, 2)$, а ω_i – эллиптическое расслоение.

Из результатов работы [2] следует, что группа $\text{Bir}(X)$ порождена бирегулярными автоморфизмами и инволюцией $\tau \in \text{Bir}(X)$ такой, что $\psi \circ \tau = \psi$ и $\xi_1 \circ \tau = \xi_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20.1. *Существует либо коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 1, 3) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (20.1)$$

либо коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & V \\ \xi_i \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 1, 6) & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (20.2)$$

для некоторого индекса $i \in \{1, 2\}$, где φ и σ – бирациональные отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3 и леммы 3.11 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_1, P_2, P_3\}$.

ЛЕММА 20.2. *Предположим, что $P_i \in \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$, где $i \in \{1, 2\}$. Тогда существует коммутативная диаграмма (20.2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U_i . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_i}$ по теореме 2.2, значит, линейная система $\mathcal{B}$ содержится в слоях эллиптического расслоения ω_i , откуда следует существование коммутативной диаграммы (20.2).

Таким образом, можно считать, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки P_3 .

Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U , G – исключительный дивизор раздвигания α , а $\bar{P}_4$ – особая точка поверхности G . Тогда выполнено соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2, из леммы 2.1 следует, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не пусто, поверхность G есть конус над неособой рациональной кривой степени 5, а точка $\bar{P}_4$ является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$ на многообразии U .

ЛЕММА 20.3. *Множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ состоит из точки $\bar{P}_4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит некоторое подмногообразие C многообразия U , отличное от точки $\bar{P}_4$. Из леммы 2.3 следует, что C – образующая конуса G , а это противоречит следствию 2.8.

Пусть $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W . Тогда из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$, а из лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ содержит особую точку многообразия W , которая содержится в β -исключительном дивизоре. Таким образом, из теоремы 2.2 следует, что собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на Y содержится в слоях расслоения η , откуда следует существование коммутативной диаграммы (20.1). Итак, предложение доказано.

§ 21. Случай $n = 27$, гиперповерхность степени 15 в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5, 5)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 27$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5, 5)$ степени 15, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/10$, а особенности гиперповерхности X состоят из особой точки O , которая локально изоморфна терминальной факторособенности типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, и особых точек P_1, P_2 и P_3 , каждая из которых локально изоморфна терминальной факторособенности типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$.

Пусть $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 2, 3)$ – естественная проекция. Тогда отображение ψ не определено только в точках P_1, P_2 и P_3 , а общий слой проекции ψ является неособой эллиптической кривой. Более того, существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & U_{ij} & \xleftarrow{\gamma_{ij}} Y \\
 \beta_{ij} \swarrow & & \searrow \eta \\
 U_i & & \\
 \alpha_i \searrow & & \\
 X & \dashrightarrow_{\psi} & \mathbb{P}(1, 2, 3)
 \end{array}$$

где α_i – взвешенное раздутие точки P_i с весами $(1, 2, 3)$, β_{ij} – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_j на U_i с весами $(1, 2, 3)$ при $i \neq j$, γ_{ij} – раздутие собственного прообраза точки P_k на U_{ij} для $k \notin \{i, j\}$ с весами $(1, 2, 3)$, а η – эллиптическое расслоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 27$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_1, P_2, P_3\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 21.2. Легко видеть, что из условия $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_1, P_2, P_3\}$ и утверждения теоремы 2.2 следует утверждение предложения 21.1.

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_1 , но не содержит точку P_3 . Покажем, что сделанное предположение противоречиво.

ЛЕММА 21.3. Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит P_2 . Тогда множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки P_1 . Пусть $\mathcal{D}_1$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U_1 . Тогда $\mathcal{D}_1 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_1}$ по теореме 2.2, а множество $\mathbb{CS}(U_1, \frac{1}{k}\mathcal{D}_1)$ не пусто по лемме 2.1.

Пусть G – α_1 -исключительный дивизор, а O и Q – особые точки поверхности G , которые являются факторособенностями типов $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ соответственно на многообразии U_1 . Тогда из леммы 2.3 следует, что $\mathbb{CS}(U_1, \frac{1}{k}\mathcal{D}_1)$ содержит либо точку O , либо точку Q .

Отметим, что по построению линейная система $|-2K_{U_1}|$ является пучком, базисное множество пучка $|-2K_{U_1}|$ состоит из неприводимой и рациональной кривой C , которая проходит через особую точку O и стягивается рациональным отображением $\psi \circ \alpha_1$ в особую точку поверхности $\mathbb{P}(1, 2, 3)$ индекса 3.

Предположим, что $\mathbb{CS}(U_1, \frac{1}{k}\mathcal{D}_1)$ содержит точку O . Пусть $\pi: W \rightarrow U_1$ – взвешенное раздутие точки O с весами $(1, 1, 2)$, $\mathcal{B}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на W , а $\bar{C}$ – собственный прообраз C на W . Тогда базисное множество пучка $|-2K_W|$ состоит из кривой $\bar{C}$ такой, что выполнены соотношение $\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} k\bar{C}$ и неравенство $\bar{C}^2 < 0$ на общей поверхности S , содержащейся в пучке $|-2K_W|$. Последнее противоречит леммам 2.7 и 2.9.

Итак, множество $\mathbb{CS}(U_1, \frac{1}{k}\mathcal{D}_1)$ содержит точку Q . Пусть $\zeta: U \rightarrow U_1$ – взвешенное раздутие точки Q с весами $(1, 1, 1)$, F – исключительный дивизор морфизма ζ , $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U , а $\mathcal{P}$ – собственный прообраз линейной системы $|-3K_{U_1}|$ на многообразии U . Тогда $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2, но

$$\mathcal{P} \sim_{\mathbb{Q}} \zeta^*(-3K_{U_1}) - \frac{1}{2}F,$$

а базисное множество линейной системы $\mathcal{P}$ состоит из неприводимой кривой Z такой, что кривая $\alpha_1 \circ \zeta(Z)$ является базисной кривой линейной системы $|-3K_X|$. Выполнено равенство

$$\left(\zeta^*(-3K_{U_1}) - \frac{1}{2}F\right) \cdot Z = \frac{1}{10},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} -\frac{3k^2}{10} &= \left(\zeta^*(-3K_{U_1}) - \frac{1}{2}F\right) \cdot \left(\zeta^*(-kK_{U_1}) - \frac{k}{2}F\right)^2 \\ &= \left(\zeta^*(-3K_{U_1}) - \frac{1}{2}F\right) \cdot H_1 \cdot H_2 \geq 0, \end{aligned}$$

где H_1 и H_2 – общие поверхности в линейной системе $\mathcal{H}$. Противоречие.

Итак, мы доказали, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_1, P_2\}$. Теперь мы можем применить аргументы, использованные в доказательстве леммы 21.3, к собственному прообразу линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U_{12} и получить противоречие. Таким образом, предложение доказано.

§ 22. Случай $n = 29$, гиперповерхность степени 16 в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 5, 8)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 29$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 5, 8)$ степени 16 и $-K_X^3 = 1/5$. Особенности многообразия X состоят из точек O_1 и O_2 , являющихся особенностями типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, и точки P , являющейся особенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow[\psi]{-} & \mathbb{P}(1, 1, 2) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, морфизм α – взвешенное раздутие точки P с весами $(1, 2, 3)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ на U , с весами $(1, 1, 2)$, а η – эллиптическое расслоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 29$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гиперповерхность X является бирационально сверхжесткой, а из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P\}$.

Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U . Тогда выполнено соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2, а из леммы 2.1 следует, что множество центров канонических особенностей $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не пусто. Пусть G – исключительный дивизор морфизма α , Q – особая точка поверхности G , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ на многообразии U , а O – особая точка поверхности G , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ на U . Тогда $G \cong \mathbb{P}(1, 2, 3)$, а из леммы 2.3 следует, что либо множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ состоит из точки O , либо оно содержит точку Q .

Предположим, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит точку O . Пусть $\pi: Y \rightarrow U$ – взвешенное раздутие точки O с весами $(1, 1, 1)$, $\mathcal{H}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на Y , L – кривая на поверхности G , принадлежащая линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2,3)}(1)|$, $\bar{L}$ – собственный прообраз кривой L на Y , а S – общая поверхность в $|-K_Y|$. Тогда $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$ по теореме 2.2, а базисное множество пучка $|-K_Y|$ состоит из кривой $\bar{L}$ и неприводимой кривой Δ такой, что $\alpha \circ \pi(\Delta)$ – базисное множество пучка $|-K_X|$. На поверхности S выполнены равенства $\Delta^2 = -1$, $\bar{L}^2 = -4/3$, $\Delta \cdot \bar{L} = 1$, откуда следует, в частности, что форма пересечения кривых Δ и $\bar{L}$ на поверхности S отрицательно определена. Выполнено соотношение $\mathcal{H}|_S \sim_{\mathbb{Q}} k\Delta + k\bar{L}$, откуда следует противоречие с утверждениями лемм 2.7 и 2.9.

Таким образом, множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит точку Q . Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на W . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2, откуда следует, что $\mathcal{B}$ содержится в слоях расслоения η . Таким образом, предложение доказано.

§ 23. Случай $n = 30$, гиперповерхность степени 16 в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 4, 8)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 30$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 4, 8)$ степени 16, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/6$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки O , являющейся особенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ на гиперповерхности X , и точек P_1 и P_2 , являющихся особенностями типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$.

Имеет место коммутативная диаграмма

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_1 с весами $(1, 1, 3)$, морфизм β – взвешенное раздутие точки P_2 с весами $(1, 1, 3)$, γ – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_2 на U с весами $(1, 1, 3)$,

морфизм δ – взвешенное раздутие прообраза точки P_1 на W с весами $(1, 1, 3)$, а морфизм η – эллиптическое расслоение.

Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \zeta \swarrow & & \searrow \omega \\ X & \xrightarrow{\quad \xi \quad} & \mathbb{P}(1, 1, 4) \end{array}$$

где ξ – проекция, ζ – раздутие точки O с весами $(1, 1, 2)$, а ω – эллиптическое расслоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23.1. *Существует либо коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 1, 3) & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (23.1)$$

либо коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\quad \theta \quad} & X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & V \\ \xi \downarrow & & & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 1, 4) & \xrightarrow{\quad \sigma \quad} & & & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (23.2)$$

где φ , θ и σ – бирациональные отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку O . Пусть $\mathcal{P}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Z . Тогда $\mathcal{P} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$ по теореме 2.2, значит, линейная система $\mathcal{P}$ содержится в слоях эллиптического расслоения ω , откуда сразу следует существование коммутативной диаграммы (23.2). Таким образом, можно считать, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_1, P_2\}$ согласно теореме 3.3, предложению 3.5 и лемме 3.11.

Пусть $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Y . Тогда существование коммутативной диаграммы (23.1) следует из того, что $\mathcal{H}$ содержится в слоях расслоения η , что следует из соотношения $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$. Из теоремы 2.2 следует, что можно считать, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_1 , но не содержит P_2 .

Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U , а Q – особая точка многообразия U , содержащаяся в исключительном дивизоре бирационального морфизма α . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$, а из лемм 2.1 и 2.3 следует, что $Q \in \mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$.

Пусть $v: \bar{U} \rightarrow U$ – взвешенное раздутие точки Q с весами $(1, 1, 2)$, $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии $\bar{U}$, а S – достаточно общая поверхность в пучке $|-K_{\bar{U}}|$. Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{\bar{U}}$ по теореме 2.2, поверхность S нормальна, а базисное множество пучка $|-K_{\bar{U}}|$ состоит из неприводимой кривой Δ такой, что $\alpha \circ v(\Delta)$ – базисная кривая пучка $|-K_X|$. На поверхности S выполнено неравенство $\Delta^2 < 0$, но имеет место соотношение $\mathcal{D}|_S \sim_{\mathbb{Q}} k\Delta$. Теперь из лемм 2.9 и 2.7 сразу следует противоречие.

§ 24. Случай $n = 31$, гиперповерхность степени 16 в $\mathbb{P}(1, 1, 4, 5, 6)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 31$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 4, 5, 6)$ степени 16, выполнено равенство $-K_X^3 = 2/15$, а особенности гиперповерхности X состоят из трех точек: точки P_1 , которая является особенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_2 , которая является особенностью типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$, и точки P_3 , которая является особенностью типа $\frac{1}{6}(1, 1, 5)$. Существует коммутативная диаграмма

где ψ – проекция, α_2 – взвешенное раздутие точки P_2 с весами $(1, 1, 4)$, α_3 – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 1, 5)$, β_3 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_3 на U_2 с весами $(1, 1, 5)$, β_2 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_2 на многообразии U_3 с весами $(1, 1, 4)$, β_4 – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_3 , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α_3 , с весами $(1, 1, 4)$, морфизм γ_2 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_2 на многообразии U_{34} с весами $(1, 1, 4)$, морфизм γ_4 – раздутие особой точки многообразия U_{23} , которая содержится в β_3 -исключительном дивизоре, с весами $(1, 1, 4)$, а морфизм η – эллиптическое расслоение. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_2 & \xleftarrow{\beta} & W \\ \alpha_2 \downarrow & & \downarrow \omega \\ X & \xrightarrow[\xi]{\quad\quad\quad} & \mathbb{P}(1, 1, 6) \end{array}$$

где ξ – проекция, β – взвешенное раздутие с весами $(1, 1, 3)$ особой точки многообразия U_2 , которая является особой точкой типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$, а ω – эллиптическое расслоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 24.1. *Существует либо коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\varphi]{\rho} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 1, 4) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (24.1)$$

либо коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\theta} & X & \xrightarrow{\rho} & V \\
 \downarrow \xi & & & & \downarrow \nu \\
 \mathbb{P}(1, 1, 5) & \xrightarrow{\sigma} & & & \mathbb{P}^2
 \end{array} \quad (24.2)$$

где φ , θ и σ – бирациональные отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_2, P_3\}$. Пусть $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_{23}$ и $\mathcal{D}_{34}$ – собственные прообразы линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразиях U_2 , U_3 , U_{23} и U_{34} соответственно. Тогда из леммы 2.1 следует, что множество $\mathbb{CS}(U_\mu, \frac{1}{k}\mathcal{D}_\mu)$ не пусто, если выполнено соотношение $\mathcal{D}_\mu \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_\mu}$.

ЛЕММА 24.2. *Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_3 . Пусть $\bar{P}_2$ – собственный прообраз точки P_2 на U_3 , а $\bar{P}_4$ – особая точка многообразия U_3 , содержащаяся в исключительном дивизоре морфизма α_3 . Тогда $\mathcal{D}_3 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_3}$ и $\mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3) \subseteq \{\bar{P}_2, \bar{P}_4\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение $\mathcal{D}_3 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_3}$ следует из теоремы 2.2. Предположим, что

$$\mathbb{CS}\left(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3\right) \not\subseteq \{\bar{P}_2, \bar{P}_4\}.$$

Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Пусть G – исключительный дивизор морфизма α_3 . Тогда $G \cong \mathbb{P}(1, 1, 5)$, а из леммы 2.3 следует, что существует неособая, неприводимая и рациональная кривая C в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,1,5)}(1)|$, принадлежащая $\mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$, что невозможно по лемме 2.4.

ЛЕММА 24.3. *Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_2 . Пусть $\bar{P}_3$ – собственный прообраз точки P_3 на U_2 . Тогда $\mathcal{D}_2 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_2}$ и либо $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2) = \{\bar{P}_3\}$, либо существует коммутативная диаграмма (24.2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение $\mathcal{D}_2 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_2}$ следует из теоремы 2.2. Предположим, что множество $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ не состоит из точки $\bar{P}_3$.

Пусть $\bar{P}_5$ – особая точка многообразия U_2 , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α_2 . Тогда точка $\bar{P}_5$ является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 3)$ на многообразии U_2 , а из леммы 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ содержит точку $\bar{P}_5$.

Пусть $\pi: W \rightarrow U_2$ – взвешенное раздутие точки $\bar{P}_5$ с весами $(1, 1, 3)$, а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на W . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2, откуда сразу следует, что существует коммутативная диаграмма (24.2).

Из теоремы 2.2 следует, что для доказательства утверждения предложения мы можем предполагать, что $\mathcal{D}_{23} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{23}}$ или $\mathcal{D}_{34} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{34}}$. Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Y .

ЛЕММА 24.4. *Предположим, что $\mathcal{D}_{23} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{23}}$. Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – β_2 -исключительный дивизор, G – β_3 -исключительный дивизор, $\check{P}_4$ – особая точка поверхности G , а $\check{P}_5$ – особая точка поверхности F . Тогда из доказательства леммы 24.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{23})$ не содержит точку $\check{P}_5$, а из леммы 2.1 следует, что множество $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{23})$ не пусто. Из леммы 2.3 вытекает, что множество $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{23})$ содержит $\check{P}_4$. Из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$.

ЛЕММА 24.5. *Предположим, что $\mathcal{D}_{34} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{34}}$. Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – исключительный дивизор морфизма β_4 , $\check{P}_2$ – собственный прообраз точки P_2 на U_{34} , а $\check{P}_6$ – особая точка поверхности G . Тогда точка $\check{P}_6$ является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ на многообразии U_{34} .

Из леммы 2.1 следует, что $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{23}) \neq \emptyset$. В случае, когда $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{23})$ содержит точку $\check{P}_2$, соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$ следует из теоремы 2.2. Таким образом, в силу леммы 2.3 можно считать, что множество $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{23})$ содержит точку $\check{P}_6$.

Пусть $\pi: W \rightarrow U_{34}$ – взвешенное раздутие точки $\check{P}_6$ с весами $(1, 1, 3)$, $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W , а S – достаточно общая поверхность в пучке $|-K_W|$. Тогда базисное множество пучка $|-K_W|$ состоит из такой неприводимой кривой Δ , что $\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} k\Delta$, но на S выполнено неравенство $\Delta^2 < 0$. Из леммы 2.9 следует, что выполнено равенство $\mathcal{B}|_S = k\Delta$. Последнее невозможно по лемме 2.7.

Итак, показано, что выполнено соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$, откуда следует, что линейная система $\mathcal{D}$ содержится в слоях расслоения η . Предложение доказано.

§ 25. Случай $n = 32$, гиперповерхность степени 16 в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 4, 7)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 32$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 4, 6)$ степени 16, выполнено равенство $-K_X^3 = 2/21$, а особенности гиперповерхности X состоят из точек P_1, P_2, P_3 и P_4 , каждая из которых является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_5 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, и точки P_6 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 25.1. *Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 32$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_6\}$.

Несложно видеть, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow[\psi]{- - - -} & \mathbb{P}(1, 2, 3) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_6 с весами $(1, 3, 4)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , содержащейся в α -исключительном дивизоре и являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$, с весами $(1, 1, 3)$, а морфизм η – эллиптическое расслоение.

Пусть E – исключительный дивизор бирационального морфизма α , а $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U . Тогда $E \cong \mathbb{P}(1, 3, 4)$, из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$, а из леммы 2.1 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не пусто.

Пусть P_7 и P_8 – особые точки многообразия U , которые содержатся в E и являются факторособенностями типов $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ соответственно. Из леммы 2.3 следует, что либо множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит точку P_8 , либо оно состоит из точки P_7 .

ЛЕММА 25.2. Пусть $P_8 \in \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$. Тогда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 2, 3) & \xrightarrow{\zeta} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (25.1)$$

где ζ – бирациональное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{H}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на Y . Тогда из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$, откуда элементарно следует, что линейная система $\mathcal{H}$ лежит в слоях эллиптического расслоения η . Из последнего вытекает существование коммутативной диаграммы (25.1).

Таким образом, для завершения доказательства предложения можно считать, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ состоит из точки P_7 . Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию с тем, что линейная система $\mathcal{M}$ не составлена из пучка.

Пусть $\gamma: W \rightarrow U$ – взвешенное раздутие точки P_7 с весами $(1, 1, 2)$, F – исключительный дивизор морфизма γ , $\bar{E}$ – собственный прообраз поверхности E на W , а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на W . Тогда $F \cong \mathbb{P}(1, 1, 2)$, а из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$.

Гиперповерхность X может быть задана квазиоднородным уравнением

$$w^2y + wf_9(x, y, z, t) + f_{16}(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 2, 3, 4, 7) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = 2$, $\text{wt}(z) = 3$, $\text{wt}(t) = 4$ и $\text{wt}(w) = 7$, а f_9 и f_{16} – квазиоднородные многочлены степеней 9 и 16 соответственно. Пусть S – единственная поверхность в линейной системе $|-K_X|$, а D – общая поверхность в пучке $|-2K_X|$. Тогда S высекается на гиперповерхности X уравнением $x = 0$, а D высекается на X уравнением

$$\lambda x^2 + \mu y = 0,$$

где $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1$. В частности, поверхность D неприводима и нормальна, а базисное множество линейной системы $|-2K_X|$ состоит из неприводимой кривой C , которая высекается на гиперповерхности X уравнениями $x = y = 0$, откуда следует, что $C = D \cdot S$.

В окрестности точки P_6 мономы x , z и t можно рассмотреть в качестве взвешенных локальных координат на X таких, что $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(z) = 3$ и $\text{wt}(t) = 4$.

Тогда в окрестности особой точки P_6 поверхность D может быть задана уравнением

$$\lambda x^2 + \mu(\varepsilon_1 x^9 + \varepsilon_2 z x^6 + \varepsilon_3 z^2 x^3 + \varepsilon_4 z^3 + \varepsilon_5 t^2 x + \varepsilon_6 t x^5 + \varepsilon_7 t z x^2 + \dots) = 0,$$

где $\varepsilon_i \in \mathbb{C}$. В окрестности точки P_7 отображение α задается уравнениями

$$x = \tilde{x} \tilde{z}^{\frac{1}{7}}, \quad z = \tilde{z}^{\frac{3}{7}}, \quad t = \tilde{t} \tilde{z}^{\frac{4}{7}},$$

где $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и $\tilde{z}$ – взвешенные локальные координаты на многообразии U в окрестности особой точки P_7 такие, что $\text{wt}(\tilde{x}) = 1$, $\text{wt}(\tilde{z}) = 2$ и $\text{wt}(\tilde{t}) = 1$. Пусть $\tilde{D}$, $\tilde{S}$ и $\tilde{C}$ – собственные прообразы на U поверхности D , поверхности S и кривой C соответственно, а E – исключительный дивизор морфизма α . Тогда в окрестности особой точки P_7 поверхность E задается уравнением $\tilde{z} = 0$, поверхность $\tilde{D}$ задается обращением в нуль аналитической функции

$$\lambda \tilde{x}^2 + \mu(\varepsilon_1 \tilde{x}^9 \tilde{z} + \varepsilon_2 \tilde{z} \tilde{x}^6 + \varepsilon_3 \tilde{z} \tilde{x}^3 + \varepsilon_4 \tilde{z} + \varepsilon_5 \tilde{t}^2 \tilde{x} \tilde{z} + \varepsilon_6 \tilde{t} \tilde{x}^5 \tilde{z} + \varepsilon_7 \tilde{t} \tilde{z} \tilde{x}^2 + \dots),$$

а поверхность S задается уравнением $\tilde{x} = 0$.

В окрестности особой точки поверхности F отображение β задается уравнениями

$$\tilde{x} = \bar{x} \bar{z}^{\frac{1}{3}}, \quad \tilde{z} = \bar{z}^{\frac{2}{3}}, \quad \tilde{t} = \bar{t} \bar{z}^{\frac{1}{3}},$$

где $\bar{x}$, $\bar{z}$ и $\bar{t}$ – взвешенные локальные координаты на W в окрестности особой точки поверхности F такие, что $\text{wt}(\bar{x}) = \text{wt}(\bar{z}) = \text{wt}(\bar{t}) = 1$. Поверхность F задается уравнением $\bar{z} = 0$, собственный прообраз поверхности D на многообразии W задается уравнением

$$\lambda \bar{x}^2 + \mu(\varepsilon_1 \bar{x}^9 \bar{z}^3 + \varepsilon_2 \bar{z}^2 \bar{x}^6 + \varepsilon_3 \bar{z} \bar{x}^3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 \bar{t}^2 \bar{x} \bar{z} + \varepsilon_6 \bar{t} \bar{x}^5 \bar{z}^2 + \varepsilon_7 \bar{t} \bar{z} \bar{x}^2 + \dots) = 0,$$

собственный прообраз поверхности S на многообразии W – уравнением $\bar{x} = 0$, а собственный прообраз поверхности E на многообразии W – уравнением $\bar{z} = 0$.

Пусть $\mathcal{P}$, $\bar{D}$, $\bar{S}$ и $\bar{C}$ – собственные прообразы на многообразии W пучка $|-2K_X|$, поверхности D , поверхности S и кривой C соответственно, а $\bar{H}$ – собственный прообраз на многообразии W поверхности, которая высекается на X уравнением $y = 0$. Тогда $\bar{D}$ является общей поверхностью пучка $\mathcal{P}$, а на многообразии W выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \bar{E} &\sim_{\mathbb{Q}} \gamma^*(E) - \frac{2}{3} F, \\ \bar{D} &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \gamma)^*(-2K_X) - \frac{2}{7} \gamma^*(E) - \frac{2}{3} F \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \gamma)^*(-2K_X) - \frac{2}{7} \bar{E} - \frac{6}{7} F, \\ \bar{S} &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \gamma)^*(-K_X) - \frac{1}{7} \gamma^*(E) - \frac{1}{3} F \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \gamma)^*(-K_X) - \frac{1}{7} \bar{E} - \frac{3}{7} F, \\ \bar{H} &\sim_{\mathbb{Q}} \gamma^* \left(\alpha^*(-2K_X) - \frac{9}{7} E \right) \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \gamma)^*(-2K_X) - \frac{9}{7} \bar{E} - \frac{6}{7} F \sim_{\mathbb{Q}} 2\bar{S} - \bar{E}. \end{aligned} \tag{25.2}$$

Кривая $\bar{C}$ содержится в базисном множестве пучка $\mathcal{P}$, однако кривой $\bar{C}$ не исчерпывается базисное множество пучка $\mathcal{P}$. А именно, пусть L – кривая на поверхности E , которая принадлежит линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,3,4)}(1)|$, т. е. кривая $\tilde{x} = \tilde{z} = 0$, а $\bar{L}$ – собственный прообраз кривой L на многообразии W . Тогда $\bar{L}$ также содержится в базисном множестве пучка $\mathcal{P}$, а из приведенных

локальных вычислений следует, что пучок $\mathcal{P}$ не имеет базисных точек вне объединения кривых $\bar{C}$ и $\bar{L}$. Кривая $\bar{C}$ является пересечением дивизоров $\bar{S}$ и $\bar{H}$, а $\bar{L}$ является пересечением дивизоров $\bar{S}$ и $\bar{E}$. Более того, из локальных уравнений поверхностей $\bar{D}$ и $\bar{D}$ следует, что $2\bar{C} = \bar{D} \cdot \bar{H}$, $\bar{C} + \bar{L} = \bar{S} \cdot \bar{D}$ и $2\bar{L} = \bar{D} \cdot \bar{E}$.

Неприводимые кривые $\bar{C}$ и $\bar{L}$ можно рассмотреть так же, как дивизоры на нормальной поверхности $\bar{D}$. Из соотношений (25.2) следует, что

$$\begin{aligned}\bar{L} \cdot \bar{L} &= \frac{\bar{E} \cdot \bar{E} \cdot \bar{D}}{4} = -\frac{5}{8}, \\ \bar{C} \cdot \bar{C} &= \frac{\bar{H} \cdot \bar{H} \cdot \bar{D}}{4} = \bar{S} \cdot \bar{S} \cdot \bar{D} - \bar{S} \cdot \bar{E} \cdot \bar{D} - \frac{3}{2} \bar{E} \cdot \bar{E} \cdot \bar{D} = -\frac{7}{24}, \\ \bar{C} \cdot \bar{L} &= \frac{\bar{H} \cdot \bar{E} \cdot \bar{D}}{4} = \frac{\bar{S} \cdot \bar{E} \cdot \bar{D}}{2} - \frac{\bar{E} \cdot \bar{E} \cdot \bar{D}}{4} = \frac{3}{8},\end{aligned}\quad (25.3)$$

откуда вытекает, что форма пересечения кривых $\bar{C}$ и $\bar{L}$ на поверхности $\bar{D}$ является отрицательно определенной. С другой стороны, выполнено соотношение $\mathcal{B}|_{\bar{D}} \sim_{\mathbb{Q}} k\bar{C} + k\bar{L}$, откуда следует противоречие с утверждениями лемм 2.9 и 2.7. Предположение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 25.3. Пусть $\overline{\text{NE}}(W)$ – замыкание в $\mathbb{R}^3$ конуса, порожденного эффективными одномерными циклами многообразия W . Тогда из отрицательной определенности формы пересечения кривых $\bar{C}$ и $\bar{L}$ на поверхности $\bar{D}$ следует, что кривые $\bar{C}$ и $\bar{L}$ порождают двумерную экстремальную грань конуса $\overline{\text{NE}}(W)$, которая не содержит неприводимых кривых на многообразии W , кроме $\bar{C}$ и $\bar{L}$. Более того, последнее можно легко доказать, исходя из соотношений (25.2), не используя геометрию кривых $\bar{C}$ и $\bar{L}$ на поверхности $\bar{D}$.

§ 26. Случай $n = 36$, гиперповерхность степени 18 в $\mathbb{P}(1, 1, 4, 6, 7)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 36$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 4, 6, 7)$ степени 18, выполнено равенство $-K_X^3 = 3/28$, а особенности гиперповерхности X состоят из особой точки P_1 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ на многообразии X , точки P_2 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$, и точки P_3 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{7}(1, 1, 6)$.

Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U_3 & \xleftarrow{\beta_4} & U_{34} & \xleftarrow{\gamma_5} & Y \\ \alpha_3 \downarrow & & & & \downarrow \eta \\ X & \text{-----} & & \text{-----} & \mathbb{P}(1, 1, 4) \\ & & \psi & & \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, α_3 – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 1, 7)$, морфизм β_4 – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_3 , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α_3 , с весами $(1, 1, 6)$, морфизм γ_5 – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_{34} , которая содержится в исключительном дивизоре бирационального морфизма β_4 , с весами $(1, 1, 4)$, а морфизм η – эллиптическое расслоение.

ЗАМЕЧАНИЕ 26.1. Дивизоры $-K_{U_3}$ и $-K_{U_{34}}$ численно эффективны и объемны.

Из примера 1.8 следует, что существует коммутативная диаграмма

где ξ – проекция, α_2 – взвешенное раздутие особой точки P_2 с весами $(1, 1, 3)$, α_3 – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 1, 6)$, β_2 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_2 на многообразии U_3 с весами $(1, 1, 3)$, морфизм β_3 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_3 на U_2 с весами $(1, 1, 6)$, а ω – эллиптическое расслоение.

ЗАМЕЧАНИЕ 26.2. Дивизор $-K_{U_2}$ численно эффективен и объемен.

Имеет место следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 26.3. Существует либо коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{\quad \zeta \quad} & X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & V \\
 \psi \downarrow & & & & \downarrow \nu \\
 \mathbb{P}(1, 1, 4) & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & & & \mathbb{P}^2
 \end{array} \quad (26.1)$$

либо коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & V \\
 \xi \downarrow & & \downarrow \nu \\
 \mathbb{P}(1, 1, 6) & \xrightarrow{\quad \sigma \quad} & \mathbb{P}^2
 \end{array} \quad (26.2)$$

где ζ , φ и σ – бирациональные отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, предложения 3.5 и леммы 3.11 следует, что $\emptyset \neq \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_2, P_3\}$. Более того, несложно видеть, что существует коммутативная диаграмма (26.2) в случае, когда $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит обе точки P_2 и P_3 .

ЛЕММА 26.4. Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_3 \notin \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$. Тогда $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_2\}$. Пусть $\mathcal{D}_2$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U_2 , а P_6 – особая точка многообразия U_2 , содержащаяся в исключительном дивизоре морфизма α_2 . Тогда $\mathcal{D}_2 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_2}$ по теореме 2.2, точка P_6 является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ на U_2 , а из лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ содержит особую точку P_6 .

Пусть $\pi: Z \rightarrow U_2$ – взвешенное раздутие точки P_6 с весами $(1, 1, 3)$, а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Z , а S – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-K_Z|$. Тогда поверхность S неприводима и нормальна, а базисное множество линейной системы $|-K_Z|$ состоит из неприводимой кривой Δ такой, что выполнено соотношение $\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} k\Delta$, но на поверхности S выполнено равенство $\Delta^2 = 1/7$, а из леммы 2.9 следует, что $\mathcal{B}|_S = k\Delta$. Последнее противоречит лемме 2.7.

Таким образом, для завершения доказательства предложения можно считать, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки P_3 . Пусть $\mathcal{D}_3$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U_3 , а P_4 – особая точка многообразия U_3 , содержащаяся в исключительном дивизоре морфизма α_3 . Тогда $\mathcal{D}_3 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_3}$ по теореме 2.2, точка P_4 является факторособенностью типа $\frac{1}{6}(1, 1, 5)$ на U_3 , а из лемм 2.1 и 2.3 следует, что $P_4 \in \mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$.

ЛЕММА 26.5. *Множество $\mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$ состоит из точки P_4 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $\mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$ содержит некоторое подмногообразие C многообразия U_3 , отличное от P_4 . Пусть G – исключительный дивизор бирационального морфизма β_4 . Тогда $G \cong \mathbb{P}(1, 1, 6)$ и поверхность G можно отождествить с конусом над рациональной кривой в $\mathbb{P}^6$ степени 6, а из леммы 2.3 следует, что C является образующей конуса G . Последнее невозможно по лемме 2.4.

Итак, показано, что множество $\mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$ состоит из точки P_4 . Пусть $\mathcal{D}_{34}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U_{34} , а P_5 – особая точка многообразия U_{34} , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма β_4 . Тогда $\mathcal{D}_{34} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{34}}$ по теореме 2.2, а из лемм 2.1 и 2.3 следует, что $\mathbb{CS}(U_{34}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{34})$ содержит точку P_5 . Из теоремы 2.2 следует, что собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Y содержится в слоях эллиптического расслоения η . Значит, существует диаграмма (26.1). Предложение доказано.

§ 27. Случай $n = 38$, гиперповерхность степени 18 в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5, 8)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 38$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5, 8)$ степени 18, выполнено равенство $-K_X^3 = 3/40$, а особенности X состоят из особых точек P_1 и P_2 , каждая из которых является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_3 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, и особой точки P_4 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{8}(1, 3, 5)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 27.1. *Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 38$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Особенности логпары $(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ канонические (см. замечание 3.2). Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_3, P_4\}$, а из доказательства предложения 21.1 следует, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_4 .

Имеет место коммутативная диаграмма

где ψ – естественная проекция, α_3 – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 2, 3)$, морфизм α_4 – взвешенное раздутие точки P_4 с весами $(1, 3, 5)$, β_4 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_4 на многообразии U_3 с весами $(1, 3, 5)$, β_3 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_3 на U_4 с весами $(1, 2, 3)$, β_5 – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_4 , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α_4 и является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, с весами $(1, 2, 3)$, γ_3 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_3 на U_{45} с весами $(1, 2, 3)$, γ_5 – взвешенное раздутие точки многообразия U_{34} , которая содержится в β_4 -исключительном дивизоре и является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, с весами $(1, 2, 3)$, а η – эллиптическое расслоение.

Пусть $\mathcal{D}_4$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U_4 , $\bar{P}_3$ – собственный прообраз точки P_3 на U_4 , а P_5 и P_6 – особые точки многообразия U_4 , которые содержатся в исключительном дивизоре морфизма α_4 и являются факторособенностями типов $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$ и $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ соответственно. Тогда из доказательства предложения 25.1 следует, что множество $\mathbb{CS}(U_4, \frac{1}{k}\mathcal{D}_4)$ содержит либо точку $\bar{P}_3$, либо точку P_5 .

Предположим, что множество $\mathbb{CS}(U_4, \frac{1}{k}\mathcal{D}_5)$ содержит точку $\bar{P}_3$. Из доказательств предложений 21.1 и 25.1 следует, что $P_5 \in \mathbb{CS}(U_4, \frac{1}{k}\mathcal{D}_5)$, а теорема 2.2 влечет требуемое утверждение. Таким образом, можно считать, что множество $\mathbb{CS}(U_4, \frac{1}{k}\mathcal{D}_5)$ содержит точку P_5 .

Пусть $\mathcal{D}_{45}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U_{45} , а P_7 и P_8 – особые точки многообразия U_{45} , которые содержатся в исключительном дивизоре морфизма β_5 и являются факторособенностями типов $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ и $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ соответственно. Тогда $\mathbb{CS}(U_{45}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{45}) \neq \emptyset$ по лемме 2.1, но из теоремы 2.2 сразу следует требуемое утверждение в том случае, когда множество $\mathbb{CS}(U_{45}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{45})$ содержит собственный прообраз точки P_3 на многообразии U_{45} .

Можно считать, что $\mathbb{CS}(U_{45}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{45}) \cap \{P_7, P_8\} \neq \emptyset$ по лемме 2.3.

Предположим, что множество $\mathbb{CS}(U_{45}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{45})$ содержит точку P_7 . В этом случае, рассматривая собственный прообраз полной линейной системы $|-3K_X|$ на взвешенном раздутии точки P_7 с весами $(1, 1, 1)$, мы получаем противоречие, как в доказательстве леммы 21.3.

Значит, множество $\mathbb{CS}(U_{45}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{45})$ содержит точку P_8 . Пусть $\pi: W \rightarrow U_{45}$ – раздутие точки P_8 с весами $(1, 1, 2)$, D – общая поверхность в $|-2K_W|$, а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на W . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2, а базисное множество линейной системы $|-2K_W|$ состоит из кривых C

и L таких, что $\alpha_4 \circ \beta_5 \circ \pi(C)$ – базисная кривая пучка $|-2K_X|$, а кривая $\beta_5 \circ \pi(L)$ содержится в α_4 -исключительном дивизоре.

На поверхности D выполнено соотношение $\mathcal{B}|_D \sim_{\mathbb{Q}} kC + kL$, а форма пересечения неприводимых кривых C и L является отрицательно определенной. Теперь из леммы 2.9 следует противоречие с утверждением леммы 2.7. Предложение доказано.

§ 28. Случай $n = 40$, гиперповерхность степени 19 в $\mathbb{P}(1, 3, 4, 5, 7)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 40$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 3, 4, 5, 7)$ степени 19, выполнено равенство $-K_X^3 = 19/420$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, точки P_2 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$, точки P_3 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, и точки P_4 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$. Имеет место коммутативная диаграмма

где ψ – естественная проекция, морфизм α_3 – взвешенное раздутие особой точки P_3 с весами $(1, 2, 3)$, морфизм α_4 – взвешенное раздутие точки P_4 с весами $(1, 3, 4)$, β_3 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_3 на U_4 с весами $(1, 2, 3)$, β_4 – раздутие собственного прообраза точки P_4 на U_3 с весами $(1, 3, 4)$, а η – эллиптическое расслоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 28.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 40$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\text{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_3, P_4\}$, а особенности подвижной логпары $(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ канонические. Пусть $\mathcal{D}_3$ и $\mathcal{D}_4$ – собственные прообразы линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразиях U_3 и U_4 соответственно.

ЛЕММА 28.2. Предположим, что $\text{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точки P_3 и P_4 . Тогда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\rho} & V \\
 \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\
 \mathbb{P}(1, 3, 4) & \xrightarrow{\zeta} & \mathbb{P}^2
 \end{array} \quad (28.1)$$

где ζ – бирациональное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{H}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на Y . Тогда из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$, откуда вытекает, что $\mathcal{H}$ лежит в слоях эллиптического расслоения η . Отсюда следует существование коммутативной диаграммы (28.1).

Пусть P_5 и P_6 – особые точки многообразия U_3 , которые содержатся в исключительном дивизоре морфизма α_3 и являются факторособенностями типов $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ и $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ соответственно, а P_7 и P_8 – особые точки многообразия U_4 , которые содержатся в исключительном дивизоре морфизма α_4 и являются факторособенностями типов $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ соответственно. Тогда из теоремы 2.2, леммы 2.1, леммы 2.3, численной эффективности и объемности дивизоров $-K_{U_3}$ и $-K_{U_4}$ вытекает следующее:

- множество $\mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$ содержит P_5 или P_6 , если $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит P_4 ;
- множество $\mathbb{CS}(U_4, \frac{1}{k}\mathcal{D}_4)$ содержит P_7 или P_8 , если $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит P_3 .

ЛЕММА 28.3. *Предположим, что $P_4 \notin \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$. Тогда $P_5 \notin \mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $\mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$ содержит точку P_5 . Пусть $\gamma: W \rightarrow U_3$ – раздутие особой точки P_5 с весами $(1, 1, 1)$, F – γ -исключительный дивизор, $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W , $\mathcal{H}$ – собственный прообраз пучка $|-3K_X|$ на многообразии W , $\bar{D}$ – общая поверхность в $\mathcal{D}$, а $\bar{H}$ – общая поверхность в $\mathcal{H}$. Тогда

$$\bar{H} \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha_3 \circ \gamma)^*(-3K_X) - \frac{3}{5}\gamma^*(E) - \frac{1}{2}F,$$

где E – исключительный дивизор морфизма α_3 . Базисное множество пучка $\mathcal{H}$ состоит из кривой $\bar{C}$ такой, что $\alpha_3 \circ \gamma(C)$ является базисной кривой пучка $|-3K_X|$, но из теоремы 2.2 следует, что $\bar{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$. На поверхности $\bar{H}$ выполнены соотношения $\bar{D}|_{\bar{H}} \sim_{\mathbb{Q}} k\bar{C}$ и неравенство $\bar{C}^2 < 0$, откуда следует противоречие с утверждениями лемм 2.7 и 2.9.

ЛЕММА 28.4. *Предположим, что $P_4 \notin \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$. Тогда $P_6 \notin \mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $P_6 \in \mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Пусть $\gamma: W \rightarrow U_3$ – взвешенное раздутие точки P_6 с весами $(1, 1, 2)$, F и G – исключительные дивизоры морфизмов α_3 и γ соответственно, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ – собственные прообразы соответственно линейных систем $\mathcal{M}$ и $|-7K_X|$ на многообразии W , а D – достаточно общая поверхность в линейной системе $\mathcal{D}$. Тогда из теоремы 2.2 следует, что

$$\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha_3 \circ \gamma)^*(-kK_X) - \frac{k}{5}\gamma^*(F) - \frac{k}{3}G,$$

базисное множество линейной системы $\mathcal{D}$ не содержит кривых и выполнено соотношение

$$D \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha_3 \circ \gamma)^*(-7K_X) - \frac{2}{5}\gamma^*(F) - \frac{2}{3}G,$$

откуда следует, что $D \cdot B_1 \cdot B_2 = -k^2/12$, где B_1 и B_2 – общие поверхности в линейной системе $\mathcal{B}$. Противоречие.

ЛЕММА 28.5. *Предположим, что $P_3 \notin \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$. Тогда $P_7 \notin \mathbb{CS}(U_4, \frac{1}{k}\mathcal{D}_4)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(U_4, \frac{1}{k}\mathcal{D}_4)$ содержит точку P_7 . Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Пусть $\gamma: W \rightarrow U_4$ – взвешенное раздутие точки P_7 с весами $(1, 1, 2)$, F – исключительный дивизор морфизма γ , $\mathcal{D}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на W , $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $|-4K_X|$ на многообразии W , $\bar{D}$ – общая поверхность в $\mathcal{D}$, а $\bar{H}$ – общая поверхность в $\mathcal{H}$. Тогда выполнено соотношение

$$\bar{H} \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha_3 \circ \gamma)^*(-4K_X) - \frac{4}{7} \gamma^*(E) - \frac{1}{3} F,$$

а базисное множество линейной системы $\mathcal{H}$ состоит из неприводимой кривой $\bar{C}$ на многообразии W такой, что кривая $\alpha_3 \circ \gamma(C)$ является единственной базисной кривой линейной системы $|-4K_X|$. Из теоремы 2.2 следует, что $\bar{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$, а на поверхности $\bar{H}$ имеет место равенство $\bar{C}^2 = -1/30$, откуда следует, что носитель эффективного цикла $\bar{H} \cdot \bar{D}$ состоит из кривой $\bar{C}$, поскольку выполнено соотношение $\bar{D}|_{\bar{H}} \sim_{\mathbb{Q}} k\bar{C}$. Последнее противоречит утверждению леммы 2.7, поскольку линейная система $\mathcal{D}$ не составлена из пучка.

ЛЕММА 28.6. *Предположим, что $P_3 \notin \text{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$. Тогда $P_8 \notin \text{CS}(U_4, \frac{1}{k}\mathcal{D}_4)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\text{CS}(U_4, \frac{1}{k}\mathcal{D}_4)$ содержит точку P_8 . Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Пусть $\gamma: W \rightarrow U_4$ – взвешенное раздутие точки P_8 с весами $(1, 1, 3)$, $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W , $\bar{H}$ – достаточно общая поверхность в пучке $|-3K_W|$, а $\bar{D}$ – общая поверхность в линейной системе $\mathcal{D}$. Тогда $\bar{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$, но базисное множество пучка $|-3K_W|$ состоит из неприводимой кривой $\bar{C}$ такой, что кривая $\alpha_4 \circ \gamma(C)$ является единственной базисной кривой пучка $|-3K_X|$. На поверхности $\bar{H}$ имеет место равенство $\bar{C}^2 = -1/20$, но выполнено соотношение $\bar{D}|_{\bar{H}} \sim_{\mathbb{Q}} k\bar{C}$, откуда следует, что носитель цикла $\bar{H} \cdot \bar{D}$ состоит из неприводимой кривой $\bar{C}$. Последнее противоречит утверждению леммы 2.7.

Итак, предложение доказано.

§ 29. Случай $n = 43$, гиперповерхность степени 20 в $\mathbb{P}(1, 2, 4, 5, 9)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 43$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 4, 5, 9)$ степени 20, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/18$, а особенности X состоят из точек P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 , каждая из которых является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, и точки P_6 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{9}(1, 4, 5)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 29.1. *Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 43$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\text{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_6\}$. С другой стороны, существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \dashrightarrow_{\psi} & \mathbb{P}(1, 2, 4) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_6 с весами $(1, 4, 5)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α и является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$ на многообразии U , с весами $(1, 1, 4)$, а η – эллиптическое расслоение.

Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на многообразии U , а P_7 и P_8 – особые точки многообразия U , содержащиеся в исключительном дивизоре морфизма α и являющиеся факторособенностями типов $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ и $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$ соответственно. Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2, а для завершения доказательства предложения требуется показать, что собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Y содержится в слоях эллиптического расслоения η . Последнее следует из теоремы 2.2 в случае $P_8 \in \mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$.

Для завершения доказательства утверждения предложения можно предполагать, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не содержит точку P_8 . Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

ЗАМЕЧАНИЕ 29.2. Множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит особую точку P_7 по лемме 2.3, поскольку дивизор $-K_U$ является численно эффективным и объемным.

Пусть $\gamma: W \rightarrow U$ – взвешенное раздутие особой точки P_7 с весами $(1, 1, 3)$, $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на W , а P_9 – особая точка многообразия W , которая содержится в исключительном дивизоре взвешенного раздутия γ и является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$. Тогда выполнено соотношение $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2.

ЛЕММА 29.3. *Множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ не содержит точку P_9 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит точку P_9 . Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Пусть $\pi: Z \rightarrow W$ – взвешенное раздутие особой точки P_9 с весами $(1, 1, 2)$, $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Z , а $\mathcal{P}$ – собственный прообраз полной линейной системы $|-5K_X|$ на многообразии Z . Тогда $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$ по теореме 2.2, а базисное множество линейной системы $\mathcal{P}$ состоит из неприводимой кривой Γ такой, что кривая $\alpha \circ \gamma \circ \pi(\Gamma)$ является базисной кривой линейной системы $|-5K_X|$.

Пусть H_1 и H_2 – общие поверхности в линейной системе $\mathcal{H}$, а D – общая поверхность в линейной системе $\mathcal{P}$. Тогда $D \cdot \Gamma = 1$ и $D^3 = 6$. Таким образом, дивизор D является численно эффективным и объемным. С другой стороны, из непосредственных вычислений следует, что $D \cdot H_1 \cdot H_2 = 0$. Последнее невозможно по следствию 2.6. Противоречие.

Таким образом, из леммы 2.3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 29.4. *Особенности логпары $(W, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ терминальны.*

Гиперповерхность X может быть задана квазиоднородным уравнением степени 20

$$w^2y + wf_{11}(x, y, z, t) + f_{20}(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 2, 4, 5, 9) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = 2$, $\text{wt}(z) = 4$, $\text{wt}(t) = 5$ и $\text{wt}(w) = 9$, а $f_i(x, y, z, t)$ – квазиоднородный многочлен степени i . Пусть D – общая поверхность в пучке $|-2K_X|$, а S – поверхность, которая высекается на гиперповерхности X уравнением $x = 0$. Тогда D высекается на гиперповерхности X квазиоднородным

уравнением $\lambda x^2 + \mu y = 0$, где $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1$, а базисное множество пучка $|-2K_X|$ состоит из неприводимой кривой C , которая задается на гиперповерхности X уравнениями $x = y = 0$.

В окрестности точки P_6 мономы x , z и t можно рассмотреть в качестве взвешенных локальных координат на X таких, что $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(z) = 4$ и $\text{wt}(t) = 5$. Тогда в окрестности особой точки P_7 взвешенное раздутие α задается уравнениями

$$x = \tilde{x}\tilde{z}^{\frac{1}{9}}, \quad z = \tilde{z}^{\frac{4}{9}}, \quad t = \tilde{t}\tilde{z}^{\frac{5}{9}},$$

где $\tilde{x}$, $\tilde{z}$ и $\tilde{t}$ – взвешенные локальные координаты на многообразии U в окрестности особой точки P_7 такие, что $\text{wt}(\tilde{x}) = 1$, $\text{wt}(\tilde{z}) = 3$ и $\text{wt}(\tilde{t}) = 1$.

Пусть E – исключительный дивизор взвешенного раздутия α , а $\tilde{D}$, $\tilde{S}$ и $\tilde{C}$ – собственные прообразы на U поверхности D , поверхности S и кривой C соответственно. Тогда поверхность E задается уравнением $\tilde{z} = 0$, поверхность $\tilde{S}$ – уравнением $\tilde{x} = 0$, а из локального уравнения поверхности $\tilde{D}$ следует, что $\tilde{D} \cdot \tilde{S} = \tilde{C} + 2\tilde{L}_1$, где $\tilde{L}_1$ – кривая, которая задается уравнениями $\tilde{z} = \tilde{x} = 0$. Более того, поверхность $\tilde{D}$ не нормальна в общей точке кривой $\tilde{L}_1$, и выполнено соотношение $\tilde{D} \sim_{\mathbb{Q}} 2\tilde{S}$.

В окрестности точки P_9 взвешенное раздутие γ задается уравнениями

$$\tilde{x} = \bar{x}\bar{z}^{\frac{1}{4}}, \quad \tilde{z} = \bar{z}^{\frac{3}{4}}, \quad \tilde{t} = \bar{t}\bar{z}^{\frac{1}{4}},$$

где $\bar{x}$, $\bar{z}$ и $\bar{t}$ – взвешенные локальные координаты на многообразии W в окрестности особой точки P_9 такие, что $\text{wt}(\bar{x}) = 1$, $\text{wt}(\bar{z}) = 2$ и $\text{wt}(\bar{t}) = 1$. В частности, в выбранных локальных координатах исключительный дивизор раздутия γ задается уравнением $\bar{z} = 0$, а собственный прообраз поверхности S на многообразии W задается уравнением $\bar{x} = 0$.

Пусть F – исключительный дивизор морфизма γ , а $\bar{D}$, $\bar{S}$, $\bar{E}$, $\bar{C}$ и $\bar{L}_1$ – собственные прообразы на многообразии W поверхностей D , S , E , кривой C и кривой $\tilde{L}_1$ соответственно. Тогда выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \bar{S} &\sim_{\mathbb{Q}} -K_W \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \gamma)^*(-K_X) - \frac{1}{9} \gamma^*(E) - \frac{1}{4} F, \\ \bar{D} &\sim_{\mathbb{Q}} -2K_W \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \gamma)^*(-2K_X) - \frac{2}{9} \gamma^*(E) - \frac{1}{2} F, \\ \bar{E} &\sim_{\mathbb{Q}} \gamma^*(E) - \frac{3}{4} F. \end{aligned} \quad (29.1)$$

Пусть $\bar{L}_2$ – кривая на многообразии W , которая задается уравнениями $\bar{z} = \bar{x} = 0$. Тогда

$$\bar{D} \cdot \bar{S} = \bar{C} + 2\bar{L}_1 + \bar{L}_2, \quad \bar{D} \cdot \bar{E} = 2\bar{L}_1, \quad \bar{D} \cdot F = 2\bar{L}_2,$$

базисное множество линейной системы $|-2K_W|$ состоит из кривых $\bar{C}$, $\bar{L}_1$ и $\bar{L}_2$, а из соотношений (29.1) следует, что выполнены равенства

$$\bar{D} \cdot \bar{C} = 0, \quad \bar{D} \cdot \bar{L}_1 = -\frac{2}{5}, \quad \bar{D} \cdot \bar{L}_2 = \frac{2}{3}.$$

Пусть $\bar{H}$ и $\bar{T}$ – собственный прообраз на многообразии W поверхностей, высекаемых на гиперповерхности X уравнениями $y = 0$ и $t = 0$ соответственно.

Тогда

$$\begin{aligned}\bar{T} &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \gamma)^*(-5K_X) - \frac{5}{9} \gamma^*(E) - \frac{1}{4} F \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \gamma)^*(-5K_X) - \frac{5}{9} \bar{E} - \frac{2}{3} F, \\ \bar{H} &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \gamma)^*(-2K_X) - \frac{11}{9} \gamma^*(E) - \frac{3}{2} F \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \gamma)^*(-2K_X) - \frac{11}{9} \bar{E} - \frac{5}{3} F,\end{aligned}\quad (29.2)$$

откуда следует, что $-14K_W \sim_{\mathbb{Q}} 14\bar{D} \sim_{\mathbb{Q}} 2\bar{T} + 2\bar{H} + 2\bar{E}$, а носитель эффективного одномерного цикла $\bar{T} \cdot \bar{H}$ не содержит кривых $\bar{L}_2$ и $\bar{C}$. Таким образом, показано, что базисное множество линейной системы $|-14K_W|$ не содержит кривых, кроме $\bar{L}_1$. Более того, особенности подвижной логпары $(W, \lambda|-14K_W|)$ логтерминальны для некоторого рационального числа $\lambda > 1/14$, поскольку гиперповерхность X бирационально жестка, но, с другой стороны, логканонический дивизор $K_W + \lambda|-14K_W|$ имеет неотрицательное пересечение со всеми кривыми на многообразии W , за исключением кривой $\bar{L}_1$. Из работы [12] следует, что существует логфлип $\zeta: W \dashrightarrow Z$ для логпары $(W, \lambda|-14K_W|)$ в кривой $\bar{L}_1$.

Пусть $\mathcal{P}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Z . Тогда особенности логпары $(Z, \frac{1}{k}\mathcal{P})$ терминальны, поскольку мы показали, что особенности подвижной логпары $(W, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ терминальны, но рациональное отображение ζ является логфлопом относительно логпары $(W, \frac{1}{k}\mathcal{B})$. С другой стороны, по построению дивизор $-K_Z$ численно эффективен, поскольку базисное множество линейной системы $|-14K_W|$ не содержит кривых, кроме кривой $\bar{L}_1$, но выполнено строгое неравенство $-K_W \cdot \bar{L}_1 < 0$. В оставшейся части параграфа мы покажем, что дивизор $-K_Z$ является также и объемным, откуда сразу будет следовать противоречие с утверждением леммы 2.1.

По построению рациональные функции y/x^2 и ty/x^7 принадлежат полным линейным системам $|2S|$ и $|7S|$ соответственно, а из соотношений (29.2) следует, что y/x^2 и ty/x^7 принадлежат линейным системам $|2\bar{S}|$ и $|7\bar{S}|$ соответственно. Пусть $\bar{Z}$ – собственный прообраз на многообразии W поверхности, которая высекается на X уравнением $z = 0$. Тогда

$$\bar{Z} \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \gamma)^*(-4K_X) - \frac{4}{9} \gamma^*(E) \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \gamma)^*(-4K_X) - \frac{4}{9} \bar{E} - \frac{1}{3} F,$$

откуда следует, что $-6K_W \sim_{\mathbb{Q}} \bar{Z} + \bar{H} + \bar{E}$. Значит, рациональная функция zy/x^6 принадлежит полной линейной системе $|6\bar{S}|$. В частности, рациональное отображение, заданное полной линейной системой $|-42K_W|$, доминантно отображает многообразие W на трехмерное многообразие, откуда следует, что дивизор $-K_Z$ является численно эффективным и объемным. Итак, предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 29.5. Функция wy^3/x^{15} принадлежит линейной системе $|15\bar{S}|$, откуда следует, что линейная система $|-210K_W|$ задает бирациональное отображение $W \dashrightarrow X'$ такое, что многообразие X' является гиперповерхностью в $\mathbb{P}(1, 2, 6, 7, 15)$ степени 30.

§ 30. Случай $n = 44$, гиперповерхность степени 20 в $\mathbb{P}(1, 2, 5, 6, 7)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 44$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 5, 6, 7)$ степени 20, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/21$, а особенности X состоят из точек P_1, P_2 и P_3 , каждая из ко-

торых является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_4 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{6}(1, 1, 5)$, и особой точки P_5 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{7}(1, 2, 5)$.

Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & Y & & & \\
 \beta_5 \swarrow & & \searrow \beta_4 & \eta \searrow & \\
 U_4 & & U_5 & & \mathbb{P}(1, 2, 5) \\
 \alpha_4 \searrow & & \swarrow \alpha_5 & \psi \dashrightarrow & \\
 & X & & &
 \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, морфизм α_4 – взвешенное раздутие особой точки P_4 с весами $(1, 1, 5)$, морфизм α_5 – взвешенное раздутие точки P_5 с весами $(1, 2, 5)$, β_4 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_4 на U_5 с весами $(1, 1, 5)$, β_5 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_5 на U_4 с весами $(1, 2, 5)$, η – эллиптическое расслоение.

Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 U_5 & \xleftarrow{\beta_6} & W \\
 \alpha_5 \downarrow & & \downarrow \omega \\
 X & \dashrightarrow_{\xi} & \mathbb{P}(1, 1, 3)
 \end{array}$$

где ξ – проекция, β_6 – раздутие особой точки α_5 -исключительного дивизора, которая является особенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, с весами $(1, 2, 3)$, а ω – эллиптическое расслоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 30.1. *Существует либо коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \dashrightarrow^{\rho} & V \\
 \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\
 \mathbb{P}(1, 2, 5) & \dashrightarrow_{\varphi} & \mathbb{P}^2
 \end{array} \quad (30.1)$$

либо коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \dashrightarrow^{\zeta} & X & \dashrightarrow^{\rho} & V \\
 \xi \downarrow & & & & \downarrow \nu \\
 \mathbb{P}(1, 1, 3) & \dashrightarrow_{\sigma} & & & \mathbb{P}^2
 \end{array} \quad (30.2)$$

где φ , ζ и σ – бирациональные отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_4, P_5\}$, из доказательства леммы 18.2 следует, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_5 , а из условия $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_4, P_5\}$

и теоремы 2.2 легко следует существование коммутативной диаграммы (30.1). Таким образом, можно считать, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_5\}$.

Пусть $\mathcal{D}_5$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U_5 . Тогда $\mathcal{D}_5 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_5}$ по теореме 2.2, откуда следует, что множество $\mathbb{CS}(U_5, \frac{1}{k}\mathcal{D}_5)$ не пусто по лемме 2.1. Пусть G – α_5 -исключительный дивизор, а $\bar{P}_6$ и $\bar{P}_7$ – особые точки поверхности G , которые являются факторособенностями соответственно типов $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$ и $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ на многообразии U_5 . Тогда из леммы 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U_5, \frac{1}{k}\mathcal{D}_5)$ содержит одну из точек $\bar{P}_6$ и $\bar{P}_7$, причем в случае, когда множество $\mathbb{CS}(U_5, \frac{1}{k}\mathcal{D}_5)$ содержит точку $\bar{P}_6$, существование коммутативной диаграммы (30.2) следует из теоремы 2.2. Таким образом, можно считать, что $\bar{P}_7 \in \mathbb{CS}(U_5, \frac{1}{k}\mathcal{D}_5)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 30.2. Линейная система $|-5K_{U_5}|$ является собственным прообразом линейной системы $|-5K_X|$, а ее базисное множество состоит из неприводимой кривой, которая проходит через точку $\bar{P}_7$ и стягивается отображением $\psi \circ \alpha_5$ в особую точку поверхности $\mathbb{P}(1, 2, 5)$.

Пусть $\pi: U \rightarrow U_5$ – взвешенное раздутие особой точки $\bar{P}_7$ с весами $(1, 1, 1)$, F – исключительный дивизор морфизма π , $\mathcal{D}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U , а $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $|-5K_{U_5}|$ на U . Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2, но

$$\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(-5K_{U_5}) - \frac{1}{2}F,$$

а базисное множество линейной системы $\mathcal{H}$ состоит из неприводимой кривой Z такой, что кривая $\alpha_5 \circ \pi(Z)$ является базисной кривой полной линейной системы $|-5K_X|$.

Пусть S – общая поверхность в $\mathcal{H}$. Тогда выполнено равенство $S \cdot Z = 1/3$, откуда следует, что дивизор $\pi^*(-10K_{U_5}) - F$ является численно эффективным. Значит, для общих поверхностей D_1 и D_2 в линейной системе $\mathcal{D}$ имеем

$$-\frac{2k^2}{3} = (\pi^*(-10K_{U_5}) - F) \cdot \left(\pi^*(-kK_{U_5}) - \frac{k}{2}F \right)^2 = (\pi^*(-10K_{U_5}) - F) \cdot D_1 \cdot D_2 \geq 0,$$

что является противоречием. Итак, предложение доказано.

§ 31. Случай $n = 47$, гиперповерхность степени 21 в $\mathbb{P}(1, 1, 5, 7, 8)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 47$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 5, 7, 8)$ степени 21, особенности которой состоят из точки P_1 , являющейся особенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, и точки P_2 , являющейся особенностью типа $\frac{1}{8}(1, 1, 7)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 31.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 47$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_1, P_2\}$.

Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2z + \sum_{i=0}^2 wz^i g_{13-5i}(x, y, t) + \sum_{i=0}^3 z^i g_{21-5i}(x, y, t) = 0 \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = 1$, $\text{wt}(z) = 5$, $\text{wt}(t) = 7$ и $\text{wt}(w) = 8$, а $g_i(x, y, t)$ – достаточно общий квазиоднородный многочлен степени i . Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\beta} & W & \xleftarrow{\gamma} & Y \\ \alpha \downarrow & & & & \downarrow \eta \\ X & \text{-----} & \psi & \text{-----} & \mathbb{P}(1, 1, 5) \end{array}$$

где α – взвешенное раздутие точки P_2 с весами $(1, 1, 7)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{7}(1, 1, 6)$, с весами $(1, 1, 6)$, морфизм γ – взвешенное раздутие точки многообразия W , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{6}(1, 1, 5)$, с весами $(1, 1, 5)$, а η – эллиптическое расслоение.

ЛЕММА 31.2. Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит P_2 . Тогда $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки P_1 . Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Пусть $\pi: Z \rightarrow X$ – взвешенное раздутие точки P_1 с весами $(1, 2, 3)$, E – исключительный дивизор морфизма π , а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на Z . Тогда E является взвешенным проективным пространством $\mathbb{P}(1, 2, 35)$, а из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$.

Пусть $\bar{P}_3$ и $\bar{P}_4$ – особые точки многообразия Z , которые содержатся в E и являются факторособенностями типов $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ и $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ соответственно. Тогда из аргументов, использованных в доказательстве предложения 22.1, следует, что $\mathbb{CS}(Z, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ не содержит точку $\bar{P}_3$ и не содержит точку $\bar{P}_4$, а из леммы 2.3 следует, что особенности логпары $(Z, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ терминальны.

Базисное множество пучка $|-K_Z|$ состоит из неприводимых кривых C и L таких, что кривая $\pi(C)$ задается уравнениями $x = y = 0$ на гиперповерхности X , а кривая L содержится в дивизоре E и принадлежит линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2,3)}(1)|$. Более того, выполнены строгие неравенства $-K_Z \cdot C < 0$ и $-K_Z \cdot L > 0$. Таким образом, кривая C является единственной кривой на многообразии Z , имеющей отрицательное пересечение с дивизором $-K_Z$, а из работы [12] следует существование антифлипа $\zeta: Z \dashrightarrow \bar{Z}$ в кривой C , откуда вытекает, что дивизор $-K_{\bar{Z}}$ численно эффективен.

Пусть $\mathcal{P}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии $\bar{Z}$. Тогда особенности логпары $(\bar{Z}, \frac{1}{k}\mathcal{P})$ терминальны, поскольку особенности логпары $(Z, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ терминальны, а ζ является логфлопом относительно логпары $(Z, \frac{1}{k}\mathcal{B})$. Более того, рациональные функции y/x , zy/x^6 , ty/x^8 , uw/x^9 содержатся в $|-aK_Z|$, где $a = 1, 6, 8, 9$ соответственно, откуда сразу следует, что полная линейная система $|-72K_Z|$ задает бирациональное отображение $Z \dashrightarrow \bar{X}$, где $\bar{X}$ – гиперповерхность степени 24 в $\mathbb{P}(1, 1, 6, 8, 9)$. Итак, антиканонический дивизор $-K_{\bar{Z}}$ объемён, что противоречит лемме 2.1.

Пусть G – исключительный дивизор бирационального морфизма α , $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U , $\bar{P}_1$ – собственный

прообраз особой точки P_1 на многообразии U , а $\bar{P}_5$ – особая точка многообразия U , которая содержится в дивизоре G . Тогда выполнено соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2.

ЛЕММА 31.3. Множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит точку $\bar{P}_5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не содержит $\bar{P}_5$. Тогда из лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ состоит из точки $\bar{P}_1$.

Пусть $\pi: Z \rightarrow U$ – взвешенное раздутие точки $\bar{P}_1$ с весами $(1, 2, 3)$, E – исключительный дивизор морфизма π , а $\bar{G}$ и $\mathcal{B}$ – собственные прообразы соответственно исключительного дивизора G и линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Z . Тогда из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$, а из доказательства леммы 31.2 следует, что особенности логпары $(Z, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ терминальны.

Пусть S_x, S_y, S_z, S_t и S_w – собственные прообразы на Z поверхностей, которые высекаются на X уравнениями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ и $w = 0$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} S_x &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \pi)^*(-K_X) - \frac{1}{5}E - \frac{1}{8}\bar{G}, \\ S_y &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \pi)^*(-K_X) - \frac{6}{5}E - \frac{1}{8}\bar{G}, \\ S_z &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \pi)^*(-5K_X) - \frac{1}{5}E - \frac{13}{8}\bar{G}, \\ S_t &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \pi)^*(-7K_X) - \frac{2}{5}E - \frac{7}{8}\bar{G}, \\ S_w &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \pi)^*(-8K_X) - \frac{3}{5}E. \end{aligned} \quad (31.1)$$

Базисное множество пучка $|-K_Z|$ состоит из неприводимых кривых C и L таких, что кривая $\alpha \circ \pi(C)$ задается уравнениями $x = y = 0$ на X , а кривая L содержится в E и является единственной кривой в $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2,3)}(1)|$. Более того, из работы [12] следует, что существует такой антифлип $\zeta: Z \dashrightarrow \bar{Z}$ в кривой C , что дивизор $-K_{\bar{Z}}$ численно эффективен.

Пусть $\mathcal{P}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии $\bar{Z}$. Тогда особенности подвижной логпары $(\bar{Z}, \frac{1}{k}\mathcal{P})$ терминальны, а из соотношений (31.1) сразу следует, что рациональные функции y/x , zy/x^6 , ty/x^8 и wzy^2/x^{15} принадлежат полной линейной системе $|aS_x|$, где $a = 1, 6, 8$ и 15 соответственно. Значит, линейная система $|-120K_Z|$ задает бирациональное отображение $\chi: Z \dashrightarrow \bar{X}$, где $\bar{X}$ – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 6, 8, 15)$ степени 30. Итак, дивизор $-K_{\bar{Z}}$ объемён, что противоречит утверждению леммы 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 31.4. Из леммы 2.4 следует, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D}) = \{\bar{P}_5\}$.

Пусть $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W , F – исключительный дивизор морфизма β , $\tilde{P}_1$ – собственный прообраз особой точки P_1 на многообразии W , а $\tilde{P}_6$ – особая точка многообразия W , которая содержится в исключительном дивизоре F . Тогда $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2, но $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H}) \neq \emptyset$ по лемме 2.1.

ЛЕММА 31.5. Пусть $\tilde{P}_6 \in \mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H})$. Тогда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 1, 5) & \xrightarrow{\quad \zeta \quad} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (31.2)$$

где ζ – бирациональное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на Y . Тогда из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$, откуда вытекает, что $\mathcal{B}$ лежит в слоях эллиптического расслоения η . Из последнего следует существование диаграммы (31.2).

Можно считать, что множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ не содержит точку $\tilde{P}_6$.

Из леммы 2.3 следует, что $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H}) = \{\tilde{P}_1\}$. Пусть $\pi: Z \rightarrow W$ – взвешенное раздутие точки $\tilde{P}_1$ с весами $(1, 2, 3)$, E – исключительный дивизор морфизма π , $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Z , а $\tilde{G}$ и $\tilde{F}$ – собственные прообразы соответственно поверхностей G и F на многообразии Z . Тогда из доказательства леммы 31.2 следует, что особенности логпары $(Z, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ терминальны, но $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$ по теореме 2.2.

Пусть S_x, S_y, S_z, S_t и S_w – собственные прообразы на Z поверхностей, которые высекаются на X уравнениями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ и $w = 0$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} S_x &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \beta \circ \pi)^*(-K_X) - \frac{1}{5}E - \frac{1}{8}\tilde{G} - \frac{1}{4}\tilde{F}, \\ S_y &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \beta \circ \pi)^*(-K_X) - \frac{6}{5}E - \frac{1}{8}\tilde{G} - \frac{1}{4}\tilde{F}, \\ S_z &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \beta \circ \pi)^*(-5K_X) - \frac{1}{5}E - \frac{13}{8}\tilde{G} - \frac{9}{4}\tilde{F}, \\ S_t &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \beta \circ \pi)^*(-7K_X) - \frac{2}{5}E - \frac{7}{8}\tilde{G} - \frac{3}{4}\tilde{F}, \\ S_w &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \beta \circ \pi)^*(-8K_X) - \frac{3}{5}E. \end{aligned} \quad (31.3)$$

Из соотношений (31.3) следует, что функции y/x , zy/x^6 , $tz y^2/x^{14}$ и $wz^2 y^3/x^{21}$ принадлежат полным линейным системам $|S_x|$, $|6S_x|$, $|14S_x|$ и $|21S_x|$ соответственно, а линейная система $|-42K_Z|$ задает бирациональное отображение $\chi: Z \dashrightarrow \bar{X}$ такое, что $\bar{X}$ – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 6, 14, 21)$ степени 42. С другой стороны, базисное множество линейной системы $|-42K_Z|$ состоит из неприводимой кривой C такой, что кривая $\alpha \circ \beta \circ \pi(C)$ задается уравнениями $x = y = 0$ на гиперповерхности X . Таким образом, из работы [12] следует, что существует антифлип $\zeta: Z \dashrightarrow \bar{Z}$ в кривой C , дивизор $-K_{\bar{Z}}$ численно эффективен и объемен, а особенности логпары $(\bar{Z}, \frac{1}{k}\mathcal{P})$ терминальны, где $\mathcal{P}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Z , поскольку отображение ζ является логфлопом относительно логпары $(Z, \frac{1}{k}\mathcal{B})$. Последнее противоречит лемме 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 31.6. Были построены бирациональные перестройки многообразия X в гиперповерхности в $\mathbb{P}(1, 1, 6, 8, 9)$, $\mathbb{P}(1, 1, 6, 8, 15)$ и $\mathbb{P}(1, 1, 6, 14, 21)$ степени 24, 30 и 42 соответственно, которые имеют канонические особенности. Антиканонические модели многообразий U и W являются гиперповерхностями в $\mathbb{P}(1, 1, 5, 7, 13)$ и $\mathbb{P}(1, 1, 5, 12, 18)$ степени 26 и 36 соответственно, а из доказательств предложения 31.1 следует, что построенными гиперповерхностями и гиперповерхностью X исчерпываются все многообразия Фано, имеющие канонические особенности, которые бирационально эквивалентны гиперповерхности X .

§ 32. Случай $n = 48$, гиперповерхность степени 21 в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 7, 9)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 48$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 7, 9)$ степени 21, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/18$, а особенности гиперповерхности X состоят из особой точки P_1 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ на гиперповерхности X , особых точек P_2 и P_3 , каждая из которых является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, и особой точки P_4 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{9}(1, 2, 7)$. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\beta} & W & \xleftarrow{\gamma} & Y \\ \alpha \downarrow & & & & \downarrow \eta \\ X & \text{-----} & \psi & \text{-----} & \mathbb{P}(1, 2, 3) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_4 с весами $(1, 2, 7)$, морфизм β – взвешенное раздутие точки многообразия U , содержащейся в α -исключительном дивизоре и являющейся особенностью типа $\frac{1}{7}(1, 2, 5)$, с весами $(1, 2, 5)$, морфизм γ – раздутие точки многообразия W , содержащейся в β -исключительном дивизоре и являющейся особенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, с весами $(1, 2, 3)$, а η – эллиптическое расслоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 32.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 48$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_4\}$. Пусть E – исключительный дивизор морфизма α , $\mathcal{D}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U , а P_5 и P_6 – особые точки многообразия U , которые содержатся в E и являются особенностями типов $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ и $\frac{1}{7}(1, 2, 5)$ соответственно. Тогда $E \cong \mathbb{P}(1, 2, 7)$, а из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$.

ЛЕММА 32.2. Множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не содержит точку P_5 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $P_5 \in \mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$. Пусть $\pi: Z \rightarrow U$ – взвешенное раздутие точки P_5 с весами $(1, 1, 1)$, G – π -исключительный дивизор, а $\mathcal{B}$ и $\mathcal{P}$ – собственные прообразы соответственно линейных систем $\mathcal{M}$ и $|-7K_X|$ на многообразии Z . Тогда из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$,

но базисное множество линейной системы $\mathcal{P}$ не содержит кривых. Общий дивизор H в $\mathcal{P}$ численно эффективен, однако

$$H \cdot B_1 \cdot B_2 = \left((\alpha \circ \pi)^*(-kK_X) - \frac{k}{9} \pi^*(E) - \frac{k}{2} G \right)^2 \\ \times \left((\alpha \circ \pi)^*(-7K_X) - \frac{7}{9} \pi^*(E) - \frac{1}{2} G \right) = -\frac{1}{6} k^2,$$

где B_1 и B_2 – достаточно общие поверхности в линейной системе $\mathcal{B}$. Противоречие.

Из лемм 2.1 и 2.3 следует, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D}) = \{P_6\}$. Пусть F – исключительный дивизор морфизма β , $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на W , а P_7 и P_8 – особые точки поверхности F , которые являются особенностями типов $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ и $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$ соответственно. Тогда $F \cong \mathbb{P}(1, 2, 5)$, а из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$.

ЛЕММА 32.3. Пусть $P_8 \in \mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H})$. Тогда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 2, 3) & \xrightarrow{\quad \zeta \quad} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (32.1)$$

где ζ – бирациональное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – собственный прообраз на многообразии Y достаточно общей поверхности из линейной системы $\mathcal{M}$, а Γ – достаточно общий слой эллиптического расслоения η . Тогда из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $S \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$, откуда вытекает, что $S \cdot \Gamma = 0$. Следовательно, поверхность S лежит в слоях расслоения η , откуда получаем существование коммутативной диаграммы (32.1).

Можно считать, что $P_7 \in \mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ согласно леммам 2.1 и 2.3.

Пусть $\pi: Z \rightarrow W$ – раздутие точки P_7 с весами $(1, 1, 1)$, G – π -исключительный дивизор, а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на Z . Из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$.

Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2 z + w f_{12}(x, y, z, t) + f_{21}(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 2, 3, 7, 9) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = 2$, $\text{wt}(z) = 3$, $\text{wt}(t) = 7$ и $\text{wt}(w) = 9$, а $f_i(x, y, z, t)$ – достаточно общий квазиоднородный многочлен степени i . Пусть $\mathcal{P}$ – собственный прообраз на Z пучка поверхностей, высекаемых на X уравнениями $\lambda x^3 + \mu z = 0$, где $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1$. Тогда базисное множество пучка $\mathcal{P}$ состоит из неприводимых кривых C , L_1 и L_2 таких, что неприводимая кривая $\alpha \circ \beta \circ \pi(C)$ задается уравнениями $x = z = 0$ на гиперповерхности X , неприводимая кривая $\beta \circ \pi(L_1)$ содержится в исключительном дивизоре E и является единственной кривой в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2,7)}(1)|$, а неприводимая кривая $\pi(L_2)$ содержится в исключительном дивизоре F и является единственной кривой в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2,5)}(1)|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 33.1. *Существует либо коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 3, 5) & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (33.1)$$

либо коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & V \\ \xi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 3, 6) & \xrightarrow{\quad \sigma \quad} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (33.2)$$

где φ и σ – бирациональные отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, предложения 3.5 и леммы 3.11 следует, что множество центров канонических особенностей $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержится в $\{P_4, P_5\}$.

Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_4 . Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U . Тогда выполнено соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2. Пересекая общую поверхность в линейной системе $\mathcal{D}$ с общим слоем расслоения ω , мы получаем, что линейная система $\mathcal{D}$ содержится в слоях расслоения ω , откуда следует существование коммутативной диаграммы (33.2). Аналогичным образом мы получаем существование коммутативной диаграммы (33.1) в случае, когда множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_5 .

§ 34. Случай $n = 51$, гиперповерхность степени 22 в $\mathbb{P}(1, 1, 4, 6, 11)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 51$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 4, 6, 11)$ степени 22, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/12$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_2 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 4)$, и особой точки P_3 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{6}(1, 1, 5)$.

Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\quad \beta \quad} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow[\quad \psi \quad]{} & \mathbb{P}(1, 1, 4) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 1, 5)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α , с весами $(1, 1, 4)$, а η – эллиптическое расслоение.

Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ \gamma \swarrow & & \searrow \omega \\ X & \xrightarrow{\xi} & \mathbb{P}(1, 1, 6) \end{array}$$

где ξ – проекция, γ – раздутие точки P_2 с весами $(1, 1, 3)$, а ω – эллиптическое расслоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 34.1. *Существует либо коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 1, 4) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (34.1)$$

либо коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & V \\ \xi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 1, 6) & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (34.2)$$

где φ и σ – бирациональные отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гиперповерхность X бирационально сверхжестка, откуда следует, что особенности подвижной логпары $(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ канонические, а из теоремы 3.3, предложения 3.5 и леммы 3.11 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_2, P_3\}$.

Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_2 . Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W . Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2, откуда следует, что линейная система $\mathcal{D}$ содержится в слоях эллиптического расслоения ω . Отсюда получаем существование коммутативной диаграммы (34.2). Таким образом, в дальнейшем можно считать, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_3\}$.

Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2, а из лемм 2.1 и 2.3 следует, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит особую точку многообразия U , которая является особой точкой исключительной поверхности взвешенного раздутия α , поскольку дивизор $-K_U$ численно эффективен и объемен.

Пусть $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Y . Тогда выполнено соотношение $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$ по теореме 2.2. Пересекая общую поверхность в линейной системе $\mathcal{H}$ с общим слоем расслоения η , мы получаем, что линейная система $\mathcal{H}$ содержится в слоях расслоения η , откуда следует существование коммутативной диаграммы (34.1).

§ 35. Случай $n = 56$, гиперповерхность степени 24 в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 8, 11)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 56$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 8, 11)$ степени 24, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/22$, а особенности гиперповерхности X состоят из точек P_1 , P_2 и P_3 ,

которые являются особенностями типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, и точки P_4 , которая является особенностью типа $\frac{1}{11}(1, 3, 8)$.

Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\beta} & W & \xleftarrow{\gamma} & Y \\ \alpha \downarrow & & & & \downarrow \eta \\ X & \text{-----} & & \text{-----} & \mathbb{P}(1, 2, 3) \\ & & \psi & & \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_4 с весами $(1, 3, 8)$, морфизм β – взвешенное раздутие точки многообразия U , содержащейся в α -исключительном дивизоре и являющейся особенностью типа $\frac{1}{8}(1, 3, 5)$, с весами $(1, 3, 5)$, γ – взвешенное раздутие точки многообразия W , содержащейся в β -исключительном дивизоре и являющейся особенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, с весами $(1, 2, 3)$, а η – эллиптическое расслоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 35.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 56$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_4\}$.

Пусть E – исключительный дивизор морфизма α , $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U , а P_5 и P_6 – особые точки многообразия U , которые содержатся в дивизоре E и являются факторособенностями типов $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{8}(1, 3, 5)$ соответственно. Тогда E – взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(1, 3, 8)$, выполнено соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2, дивизор $-K_U$ является численно эффективным и объемным, а из лемм 2.1 и 2.3 следует, что выполнено одно из следующего:

- i) множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит точку P_5 ;
- ii) множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ состоит из точки P_6 .

ЛЕММА 35.2. Множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не содержит точку P_5 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит точку P_5 . Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Пусть $\pi: Z \rightarrow U$ – взвешенное раздутие точки P_5 с весами $(1, 1, 2)$, G – π -исключительный дивизор, а $\mathcal{B}$ и $\mathcal{P}$ – собственные прообразы соответственно линейных систем $\mathcal{M}$ и $|-8K_X|$ на многообразии Z . Тогда из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$, но базисное множество линейной системы $\mathcal{P}$ не содержит кривых. В частности, достаточно общая поверхность H в линейной системе $\mathcal{P}$ является численно эффективным дивизором, но

$$\begin{aligned} H \cdot B_1 \cdot B_2 &= \left((\alpha \circ \pi)^*(-kK_X) - \frac{k}{11} \pi^*(E) - \frac{k}{3} G \right)^2 \\ &\quad \times \left((\alpha \circ \pi)^*(-8K_X) - \frac{8}{11} \pi^*(E) - \frac{2}{3} G \right) = 0, \end{aligned}$$

где B_1 и B_2 – достаточно общие поверхности в линейной системе $\mathcal{B}$. Таким образом, получено противоречие с утверждением следствия 2.6, поскольку $H^3 > 0$.

Итак показано, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ состоит из точки P_6 . Пусть F – исключительный дивизор морфизма β , $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной

системы $\mathcal{M}$ на многообразии W , а P_7 и P_8 – особые точки многообразия W , которые содержатся в F и являются факторособенностями типов $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$ соответственно. Тогда F является взвешенным проективным пространством $\mathbb{P}(1, 3, 5)$, из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$, а из лемм 2.1 и 2.3 следует, что либо $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H}) = \{P_7\}$, либо $P_8 \in \mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H})$.

Из доказательства леммы 32.3 следует существование коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 2, 3) & \xrightarrow{\quad \zeta \quad} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

для некоторого бирационального отображения ζ в случае, когда множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ содержит точку P_8 . Можно считать, что $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H}) = \{P_7\}$.

Пусть $\pi: Z \rightarrow W$ – взвешенное раздутие точки P_7 с весами $(1, 1, 2)$, G – π -исключительный дивизор, а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на Z . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$ по теореме 2.2.

ЛЕММА 35.3. *Особенности логпары $(Z, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ терминальны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $\mathbb{CS}(Z, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ не пусто. Пусть P_9 – особая точка поверхности G . Тогда точка P_9 является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ на многообразии Z , множество $\mathbb{CS}(Z, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит P_9 по лемме 2.3 и $G \cong \mathbb{P}(1, 1, 2)$.

Пусть $\bar{\pi}: \bar{Z} \rightarrow Z$ – взвешенное раздутие точки P_9 с весами $(1, 1, 1)$, а $\bar{G}$ – исключительный дивизор морфизма $\bar{\pi}$. Рассмотрим дивизор D на многообразии $\bar{Z}$ такой, что

$$D \sim_{\mathbb{Q}} -2K_{\bar{Z}} - (\beta \circ \pi \circ \bar{\pi})^*(16K_U) - (\pi \circ \bar{\pi})^*(18K_W).$$

Из свойств базисного множества пучка $|-2K_{\bar{Z}}|$ следует, что дивизор D является численно эффективным, но $D^3 > 0$. Таким образом, дивизор D является численно эффективным и объемным, но выполнено равенство $D \cdot \bar{H}_1 \cdot \bar{H}_2 = 0$, где $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$ – собственные прообразы общих поверхностей из линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии $\bar{Z}$, что невозможно по следствию 2.6. Противоречие.

Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2y + wf_{13}(x, y, z, t) + f_{24}(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 2, 3, 8, 11) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = 2$, $\text{wt}(z) = 3$, $\text{wt}(t) = 8$ и $\text{wt}(w) = 11$, а $f_i(x, y, z, t)$ – достаточно общий квазиоднородный многочлен степени i . Пусть $\bar{E}$ и $\bar{F}$ – собственные прообразы на многообразии Z дивизоров E и F соответственно, а S_1 , S_2 , S_3 и S_8 – собственные прообразы на Z поверхностей, которые пересекаются на X уравнениями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $t = 0$ соответственно. Тогда

из локальных вычислений следует, что выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
 \bar{F} &\sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(F) - \frac{1}{3} G, \\
 \bar{E} &\sim_{\mathbb{Q}} (\beta \circ \pi)^*(E) - \frac{5}{8} \pi^*(F) - \frac{2}{3} G, \\
 S_1 &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \beta \circ \pi)^*(-K_X) - \frac{1}{11} (\beta \circ \pi)^*(E) - \frac{1}{8} \pi^*(F) - \frac{1}{3} G, \\
 S_2 &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \beta \circ \pi)^*(-2K_X) - \frac{13}{11} (\beta \circ \pi)^*(E) - \frac{5}{8} \pi^*(F) - \frac{2}{3} G, \\
 S_3 &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \beta \circ \pi)^*(-3K_X) - \frac{3}{11} (\beta \circ \pi)^*(E) - \frac{3}{8} \pi^*(F) - \frac{1}{3} G, \\
 S_8 &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \beta \circ \pi)^*(-8K_X) - \frac{8}{11} (\beta \circ \pi)^*(E).
 \end{aligned} \tag{35.1}$$

Несложно видеть, что базисное множество линейной системы $|-2K_Z|$ состоит из неприводимых кривых C , L_1 , L_2 и L_3 таких, что неприводимая кривая $\alpha \circ \beta \circ \pi(C)$ задается уравнениями $x = y = 0$ на гиперповерхности X , неприводимая кривая $\beta \circ \pi(L_1)$ содержится в дивизоре E и является единственной кривой в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,3,8)}(1)|$, неприводимая кривая $\pi(L_2)$ содержится в F и является единственной кривой в $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,3,5)}(1)|$, а L_3 содержится в дивизоре G и принадлежит линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,1,2)}(1)|$. Тогда

$$S_1 \cdot D = C + 2L_1 + 2L_2 + L_3, \quad \bar{E} \cdot D = 2L_1, \quad \bar{F} \cdot D = 2L_2, \quad G \cdot D = 2L_3,$$

где D – общая поверхность в пучке $|-2K_Z|$. Из соотношений (35.1) следует, что

$$-K_Z \cdot C = \frac{1}{10}, \quad -K_Z \cdot L_1 = -\frac{1}{3}, \quad -K_Z \cdot L_2 = -\frac{1}{10}, \quad -K_Z \cdot L_3 = \frac{1}{2}.$$

Особенности подвижной логпары $(Z, \lambda |-2K_Z|)$ логтерминальны для некоторого рационального числа $\lambda > 1/2$, поскольку гиперповерхность X является бирационально жесткой, но дивизор $K_Z + \lambda |-2K_Z|$ имеет неотрицательное пересечение со всеми кривыми на многообразии Z , за исключением кривых L_1 и L_2 . Из работы [12] следует, что существует бирациональное отображение $\zeta: Z \dashrightarrow \bar{Z}$ такое, что ζ является изоморфизмом в коразмерности 1, а дивизор $-K_{\bar{Z}}$ численно эффективен.

Пусть $\mathcal{P}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии $\bar{Z}$. Тогда особенности логпары $(\bar{Z}, \frac{1}{k}\mathcal{P})$ терминальны, поскольку особенности логпары $(Z, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ терминальны, а ζ является логфлопом для $(Z, \frac{1}{k}\mathcal{B})$. Из соотношений (35.1) следует, что

$$\begin{aligned}
 S_1 &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \beta \circ \pi)^*(-K_X) - \frac{1}{11} \bar{E} - \frac{2}{11} \bar{F} - \frac{5}{11} G, \\
 S_2 &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \beta \circ \pi)^*(-2K_X) - \frac{13}{11} \bar{E} - \frac{15}{11} \bar{F} - \frac{21}{11} G, \\
 S_3 &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \beta \circ \pi)^*(-3K_X) - \frac{3}{11} \bar{E} - \frac{6}{11} \bar{F} - \frac{4}{11} G, \\
 S_8 &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \beta \circ \pi)^*(-8K_X) - \frac{8}{11} \bar{E} - \frac{5}{11} \bar{F} - \frac{7}{11} G.
 \end{aligned} \tag{35.2}$$

Из соотношений (35.2) следует, что рациональные функции y/x^2 , zy/x^5 и ty^3/x^{14} принадлежат линейным системам $|2S_1|$, $|5S_1|$ и $|14S_1|$ соответственно. В частности, полная линейная система $|-70K_Z|$ задает доминантное рациональное отображение $Z \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 2, 5, 14)$, откуда следует, что дивизор $-K_{\bar{Z}}$ численно эффективен и объемен.

Итак, особенности логпары $(\bar{Z}, \frac{1}{k}\mathcal{P})$ терминальны, а дивизор $-K_{\bar{Z}}$ является численно эффективным и объемным, что противоречит лемме 2.1. Предложение доказано.

§ 36. Случай $n = 58$, гиперповерхность степени 24 в $\mathbb{P}(1, 3, 4, 7, 10)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 58$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 3, 4, 7, 10)$ степени 24, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/35$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_2 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$, и точки P_3 , которая является особенностью типа $\frac{1}{10}(1, 3, 7)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 36.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 58$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_2, P_3\}$.

Имеет место коммутативная диаграмма

где ψ – естественная проекция, α_2 – взвешенное раздутие точки P_2 с весами $(1, 3, 4)$, морфизм α_3 – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 3, 7)$, β_3 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_3 на многообразии U_2 с весами $(1, 3, 7)$, β_2 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_2 на U_2 с весами $(1, 3, 4)$, β_4 – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_3 , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α_3 и является факторособенностью типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$, с весами $(1, 3, 4)$, γ_2 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_2 на U_{34} с весами $(1, 3, 4)$, γ_4 – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_{23} , которая содержится в β_3 -исключительном дивизоре и является особенностью типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$, с весами $(1, 3, 4)$, а η – эллиптическое расслоение.

ЛЕММА 36.2. Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит точку P_3 . Пусть $\mathcal{D}_2$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U_2 . Тогда выполнено соотношение

$\mathcal{D}_2 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_2}$ по теореме 2.2, а множество $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ не пусто по лемме 2.1, поскольку дивизор $-K_{U_2}$ является численно эффективным и объемным.

Пусть O и Q – особые точки многообразия U_2 , которые содержатся в исключительном дивизоре морфизма α_2 и являются факторособенностями типов $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ соответственно. Тогда из леммы 2.3 следует, что $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ содержит либо O , либо Q .

Предположим, что $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ содержит точку O . Пусть $\pi: W \rightarrow U_2$ – взвешенное раздутие точки O с весами $(1, 1, 2)$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{P}$ – собственные прообразы соответственно $\mathcal{M}$ и $|-4K_X|$ на многообразии W , а S – общая поверхность в $\mathcal{P}$. Тогда базисное множество линейной системы $\mathcal{P}$ состоит из неприводимой кривой C такой, что $\alpha_2(C)$ – базисная кривая линейной системы $|-4K_X|$. Более того, выполнено соотношение $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2, поверхность S нормальна, выполнено соотношение $\mathcal{B}|_S \sim_{\mathbb{Q}} kC$, а на S выполнено неравенство $C^2 < 0$. Таким образом, из леммы 2.9 следует, что

$$\text{Supp}(S) \cap \text{Supp}(B) = \text{Supp}(C),$$

где B – достаточно общая поверхность в линейной системе $\mathcal{B}$. Последнее невозможно по лемме 2.7, поскольку линейная система $\mathcal{B}$ не составлена из пучка. Противоречие.

Итак, множество $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ содержит точку Q . Пусть $\zeta: U \rightarrow U_2$ – взвешенное раздутие особой точки Q с весами $(1, 1, 3)$, $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U , H – достаточно общая поверхность в линейной системе $\mathcal{H}$, а D – общая поверхность в $|-3K_U|$. Тогда D нормальна, а базисное множество пучка $|-3K_U|$ состоит из неприводимой кривой Z такой, что $\alpha_2(Z)$ – базисная кривая пучка $|-3K_X|$, выполнено соотношение $\mathcal{H}|_D \sim_{\mathbb{Q}} kZ$ по теореме 2.2, а на D выполнено неравенство $Z^2 < 0$. Таким образом, из леммы 2.9 следует, что носитель цикла $D \cdot H$ состоит из кривой Z , что противоречит утверждению леммы 2.7, поскольку линейная системы $\mathcal{H}$ не составлена из пучка.

Пусть $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_{23}$ – собственные прообразы $\mathcal{M}$ на U_2 и U_{23} соответственно. Тогда из доказательства леммы 36.2 вытекают следствия.

СЛЕДСТВИЕ 36.3. *Предположим, что $\mathcal{D}_2 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_2}$. Тогда $\mathbb{CS}(U_2, \frac{1}{k}\mathcal{D}_2)$ не содержит подмногообразий многообразия U_2 , которые содержатся в исключительном дивизоре бирационального морфизма α_2 .*

СЛЕДСТВИЕ 36.4. *Предположим, что $\mathcal{D}_{23} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{23}}$. Тогда $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{23})$ не содержит подмногообразий многообразия U_{23} , которые содержатся в исключительном дивизоре бирационального морфизма β_2 .*

Пусть $\mathcal{D}_3$ и $\mathcal{D}_{23}$ – собственные прообразы $\mathcal{M}$ на U_3 и U_{34} соответственно. Тогда выполнено соотношение $\mathcal{D}_3 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_3}$ по теореме 2.2.

ЛЕММА 36.5. *Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит точку P_2 . Тогда выполнено соотношение $\mathcal{D}_3 \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_2}$ по теореме 2.2, а множество $\mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$ не пусто по лемме 2.1.

Пусть P_4 и P_5 – особые точки многообразия U_3 , которые содержатся в исключительном дивизоре морфизма α_3 и являются факторособенностями типов

$\frac{1}{7}(1, 3, 4)$ и $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ соответственно. Тогда из леммы 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$ содержит либо особую точку P_4 , либо особую точку P_5 . Более того, из доказательства леммы 36.2 легко следует, что множество $\mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$ не может содержать точку P_5 .

Итак, множество $\mathbb{CS}(U_3, \frac{1}{k}\mathcal{D}_3)$ содержит точку P_4 , из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{D}_{34} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{34}}$, а из леммы 2.1 следует, что множество $\mathbb{CS}(U_{34}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{34})$ не пусто, поскольку дивизор $-K_{U_{34}}$ является численно эффективным и объемным.

Пусть P_6 и P_7 – особые точки многообразия U_{34} , которые содержатся в исключительном дивизоре морфизма β_4 и являются факторособенностями типов $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ соответственно. Из леммы 2.3 следует, что $\mathbb{CS}(U_{34}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{34})$ содержит либо P_6 , либо P_7 .

Предположим, что $\mathbb{CS}(U_{34}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{34})$ содержит P_7 . Пусть $\zeta: U \rightarrow U_{34}$ – взвешенное раздутие точки P_7 с весами $(1, 1, 3)$, $\mathcal{H}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U , H – общая поверхность в линейной системе $\mathcal{H}$, а D – общая поверхность в $|-3K_U|$. Тогда поверхность D нормальна, а базисное множество пучка $|-3K_U|$ состоит из кривой Z такой, что $\alpha_3 \circ \beta_4(Z)$ – базисная кривая пучка $|-3K_X|$. Более того, выполнено соотношение $\mathcal{H}|_D \sim_{\mathbb{Q}} kZ$ по теореме 2.2, а на поверхности D выполнено неравенство $Z^2 < 0$. Из леммы 2.9 следует, что носитель эффективного цикла $D \cdot H$ состоит из кривой Z , что противоречит утверждению леммы 2.7.

Таким образом, мы показали, что множество $\mathbb{CS}(U_{34}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{34})$ содержит точку P_6 .

Гиперповерхность X может быть задана квазиоднородным уравнением

$$w^2z + wf_{14}(x, y, z, t) + f_{24}(x, y, z, t) = 0 \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = 3$, $\text{wt}(z) = 4$, $\text{wt}(t) = 7$ и $\text{wt}(w) = 10$, а $f_i(x, y, z, w)$ – квазиоднородный многочлен степени i . Пусть $\mathcal{P}$ – пучок, состоящий из поверхностей, высекаемых на гиперповерхности X уравнениями $\lambda x^4 + \mu z = 0$, где $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1$. Тогда базисное множество пучка $\mathcal{P}$ состоит из неприводимой кривой, которая задается уравнениями $x = z = 0$.

Пусть $\pi: W \rightarrow U_{34}$ – взвешенное раздутие особой точки P_6 с весами $(1, 1, 2)$, $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на W , $\mathcal{H}$ – собственный прообраз пучка $\mathcal{P}$ на многообразии W , H – достаточно общая поверхность в пучке $\mathcal{H}$, а E , F и G – исключительные дивизоры морфизмов α_3 , β_4 и π соответственно. Поверхность H нормальна и

$$H \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha_3 \circ \beta_4 \circ \pi)^*(-4K_X) - \frac{1}{5}(\beta_4 \circ \pi)^*(E) - \frac{4}{7}(\pi)^*(F) - \frac{1}{3}G,$$

а базисное множество пучка $\mathcal{H}$ состоит из кривых C и L таких, что $\alpha_3 \circ \beta_4 \circ \pi(C)$ – базисная кривая пучка $\mathcal{P}$, а $\beta_4 \circ \pi(L)$ – кривая на поверхности $E \cong \mathbb{P}(1, 3, 7)$, которая содержится в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, 3, 7)}(1)|$.

Пусть S – поверхность в линейной системе $|-K_W|$, а $\bar{E}$ – собственный прообраз поверхности E на многообразии W . Тогда $S \cdot H = C + L$ и $\bar{E} \cdot H = 4L$, но

$$\bar{E} \sim_{\mathbb{Q}} (\beta_4 \circ \pi)^*(E) - \frac{4}{7}(\pi)^*(F) - \frac{1}{3}G,$$

откуда следует, что форма пересечения кривых L и C на поверхности H отрицательно определена. С другой стороны, выполнена рациональная эквивалентность $\mathcal{B}|_H \sim_{\mathbb{Q}} kC + kL$, что невозможно по леммам 2.9 и 2.7.

Показано, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_2, P_3\}$. Таким образом, из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{D}_{23} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{23}}$. Более того, из лемм 2.1 и 2.3, доказательств леммы 36.5 и следствия 36.4 следует, что множество $\mathbb{CS}(U_{23}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{23})$ содержит особую точку многообразия U_{23} , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма β_3 и является факторособенностью типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$. Из теоремы 2.2 следует, что собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ лежит в слоях расслоения η , что завершает доказательство предложения.

§ 37. Случай $n = 64$, гиперповерхность степени 26 в $\mathbb{P}(1, 2, 5, 6, 13)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из §3. Пусть $n = 64$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 5, 6, 13)$ степени 26, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/30$, а особенности гиперповерхности X состоят из точек P_1, P_2, P_3 и P_4 , являющихся факторособенностями типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_5 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, и особой точки P_6 , являющейся особенностью типа $\frac{1}{6}(1, 1, 5)$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \eta \\ X & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}(1, 2, 5) \end{array}$$

где ψ – проекция, α – взвешенное раздутие точки P_6 с весами $(1, 1, 5)$, а η – эллиптическое расслоение. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \beta \swarrow & & \searrow \omega \\ X & \overset{\varepsilon}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}(1, 1, 3) \end{array}$$

где ξ – проекция, β – раздутие точки P_5 с весами $(1, 2, 3)$, а ω – эллиптическое расслоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 37.1. Существует либо коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 2, 5) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (37.1)$$

либо коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & V \\ \xi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 1, 3) & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (37.2)$$

где φ и σ – бирациональные отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. доказательство предложения 33.1.

§ 38. Случай $n = 65$, гиперповерхность степени 27 в $\mathbb{P}(1, 2, 5, 9, 11)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 65$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 5, 9, 11)$ степени 27, выполнено равенство $-K_X^3 = 3/110$, а особенности X состоят из точки P_1 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, особой точки P_2 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$, и точки P_3 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{11}(1, 2, 9)$. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\beta} & W & \xleftarrow{\gamma} & Y \\ \alpha \downarrow & & & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{\psi} & & & \mathbb{P}(1, 2, 5) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 2, 9)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , содержащейся в α -исключительном дивизоре и являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{9}(1, 2, 7)$, с весами $(1, 2, 7)$, морфизм γ – взвешенное раздутие особой точки многообразия W , содержащейся в β -исключительном дивизоре и являющейся особенностью $\frac{1}{7}(1, 2, 5)$, с весами $(1, 2, 5)$, а η – эллиптическое расслоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 38.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 65$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_3\}$.

Пусть E – исключительный дивизор морфизма α , $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U , а P_4 и P_5 – особые точки многообразия U , которые содержатся в дивизоре E и являются факторособенностями типов $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ и $\frac{1}{9}(1, 2, 7)$ соответственно. Тогда из теоремы 2.2, лемм 2.1 и 2.3 и доказательства леммы 32.2 следует, что множество центров канонических особенностей $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ состоит из точки P_5 .

Пусть F – исключительный дивизор морфизма β , $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на W , а P_6 и P_7 – особые точки многообразия W , которые содержатся в поверхности F и являются особенностями типов $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ и $\frac{1}{7}(1, 2, 5)$ соответственно. Тогда из теоремы 2.2 следует, что выполнено соотношение $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$, а из лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит либо точку P_6 , либо точку P_7 .

ЗАМЕЧАНИЕ 38.2. Если множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ содержит точку P_7 , то из теоремы 2.2 следует существование коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 2, 5) & \xrightarrow{\zeta} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где ζ – бирациональное отображение.

Можно считать, что множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ содержит точку P_6 .

Пусть $\pi: Z \rightarrow W$ – взвешенное раздутие точки P_6 с весами $(1, 1, 1)$, G – исключительный дивизор морфизма π , а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на Z . Тогда $G \cong \mathbb{P}^2$, а из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$. Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2z + wf_{16}(x, y, z, t) + f_{27}(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 2, 5, 9, 11) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = 2$, $\text{wt}(z) = 5$, $\text{wt}(t) = 9$ и $\text{wt}(w) = 11$, а $f_i(x, y, z, t)$ – достаточно общий квазиоднородный многочлен степени i . Пусть $\bar{E}$ и $\bar{F}$ – собственные прообразы соответственно исключительных дивизоров E и F на многообразии Z , а $\mathcal{P}$ – собственный прообраз на многообразии Z пучка, высекаемого на X пучком $\lambda x^5 + \mu z = 0$, где $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1$.

Базисное множество пучка $\mathcal{P}$ состоит из неприводимых кривых C , L_1 , L_2 , Δ_1 , Δ_2 и Δ таких, что неприводимая кривая $\alpha \circ \beta \circ \pi(C)$ задается уравнениями $x = z = 0$ на гиперповерхности X , неприводимая кривая $\beta \circ \pi(L_1)$ содержится в дивизоре E и является единственной кривой в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2,9)}(1)|$, неприводимая кривая $\pi(L_1)$ содержится в исключительном дивизоре F и является единственной кривой в $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2,7)}(1)|$, кривые Δ_1 и Δ_2 являются прямыми на поверхности G , которые высекаются поверхностями $\bar{E}$ и $\bar{F}$ соответственно, а кривая Δ является прямой на поверхности G , отличной от прямых Δ_1 и Δ_2 .

Пусть D – общая поверхность в пучке $\mathcal{P}$, а S – собственный прообраз на Z поверхности, которая задается уравнением $x = 0$ на X . Тогда

$$S \cdot D = C + L_1 + L_2, \quad \bar{E} \cdot D = 5L_1 + \Delta_1, \quad \bar{F} \cdot D = 5L_2 + \Delta_2,$$

поверхность D нормальна. На поверхности D выполнены равенства

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \Delta_1 \cdot L_2 = \Delta_2 \cdot L_1 = 1, \quad \Delta_1 \cdot C = \Delta_2 \cdot C = 0, \quad \Delta_1^2 = \Delta_2^2 = -4, \quad (38.1)$$

но на многообразии Z выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \bar{F} &\sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(F) - \frac{1}{2}G, \\ \bar{E} &\sim_{\mathbb{Q}} (\beta \circ \pi)^*(E) - \frac{7}{9}\pi^*(F) - \frac{1}{2}G, \\ D &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \beta \circ \pi)^*(-5K_X) - \frac{5}{11}(\beta \circ \pi)^*(E) - \frac{5}{9}\pi^*(F) - \frac{3}{2}G, \\ S &\sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \beta \circ \pi)^*(-K_X) - \frac{1}{11}(\beta \circ \pi)^*(E) - \frac{1}{9}\pi^*(F) - \frac{1}{2}G. \end{aligned} \quad (38.2)$$

Из равенств (38.1) и соотношений (38.2) следует, что на поверхности D выполнены равенства

$$C \cdot C = L_1 \cdot L_1 = -\frac{1}{2}, \quad L_2 \cdot L_2 = -\frac{3}{7}, \quad C \cdot L_1 = C \cdot L_2 = L_1 \cdot L_2 = 0,$$

откуда следует, что форма пересечения кривых C , L_1 и L_2 на поверхности D отрицательно определена, но $\mathcal{B}|_D \sim_{\mathbb{Q}} kC + kL_1 + kL_2$, что противоречит утверждениям лемм 2.9 и 2.7.

§ 39. Случай $n = 68$, гиперповерхность степени 28 в $\mathbb{P}(1, 3, 4, 7, 14)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 68$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 3, 4, 7, 14)$ степени 28. Выполнено равенство $-K_X^3 = 1/42$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , являющейся особенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_2 , являющейся особенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, и точек P_3 и P_4 , являющихся особенностями типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$. Существует коммутативная диаграмма

где ψ – проекция, α – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 3, 4)$, β – взвешенное раздутие точки P_4 с весами $(1, 3, 4)$, γ – взвешенное раздутие собственного прообраза особой точки P_4 на многообразии U с весами $(1, 3, 4)$, δ – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_3 на W с весами $(1, 3, 4)$, а морфизм η – эллиптическое расслоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 39.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 68$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_3, P_4\}$, откуда вытекает, что требуемое утверждение следует из теоремы 2.2, если $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит P_3 и P_4 .

Без ограничения общности можно считать, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_3 и не содержит точку P_4 . Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U , а P_5 и P_6 – особые точки многообразия U , которые содержатся в исключительном дивизоре морфизма α и являются факторособенностями типов $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ соответственно. Тогда из леммы 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит либо точку P_5 , либо точку P_6 .

Предположим, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит точку P_6 . Пусть $\pi: W \rightarrow U$ – взвешенное раздутие точки P_6 с весами $(1, 1, 3)$, а $\mathcal{B}$ и $\mathcal{P}$ – собственные прообразы соответственно линейной системы $\mathcal{M}$ и пучка $|-3K_X|$ на W . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2, а базисное множество линейной системы $\mathcal{P}$ состоит из неприводимой кривой Z такой, что кривая $\alpha \circ \pi(Z)$ является базисной кривой пучка $|-3K_X|$.

Пусть S – общая поверхность в пучке $\mathcal{P}$. Тогда S нормальна, на поверхности S выполнено неравенство $Z^2 < 0$, но имеет место соотношение $B|_S \sim_{\mathbb{Q}} kZ$. Таким образом, из леммы 2.9 следует, что для достаточно общей поверхности B в линейной системе $\mathcal{B}$ носитель эффективного цикла $B \cdot S$ содержится в кривой Z , что невозможно по лемме 2.7.

Итак, множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит точку P_5 . Пусть $\zeta: Z \rightarrow U$ – взвешенное раздутие точки P_5 с весами $(1, 1, 2)$, а $\mathcal{D}$ и $\mathcal{H}$ – собственные прообразы соответственно $\mathcal{M}$ и $|-4K_X|$ на Z . Тогда выполнено соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$

по теореме 2.2, а базисное множество линейной системы $\mathcal{H}$ состоит из неприводимой кривой C такой, что кривая $\alpha \circ \zeta(C)$ является базисной кривой линейной системы $|-4K_X|$.

Пусть H – общая поверхность в $\mathcal{H}$. Тогда $H \cdot C = 0$ и $H^3 > 0$. Значит, дивизор H численно эффективен и объемен. С другой стороны, имеет место равенство $H \cdot D_1 \cdot D_2 = 0$ для общих поверхностей D_1 и D_2 в $\mathcal{D}$, что невозможно по следствию 2.6.

§ 40. Случай $n = 74$, гиперповерхность степени 30 в $\mathbb{P}(1, 3, 4, 10, 13)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 74$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 3, 4, 10, 13)$ степени 30, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/52$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_2 , которая является особенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$, и точки P_3 , которая является особенностью типа $\frac{1}{13}(1, 3, 10)$. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\beta} & W & \xleftarrow{\gamma} & Y \\ \alpha \downarrow & & & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{\psi} & & & \mathbb{P}(1, 3, 4) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 3, 10)$, морфизм β – взвешенное раздутие точки многообразия U , содержащейся в α -исключительном дивизоре и являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{10}(1, 3, 7)$, с весами $(1, 3, 7)$, γ – раздутие точки многообразия W , содержащейся в β -исключительном дивизоре и являющейся особенностью типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$, с весами $(1, 3, 4)$, а морфизм η – эллиптическое расслоение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 40.1. *Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 74$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_3\}$.

Пусть E – исключительный дивизор морфизма α , $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U , а P_4 и P_5 – особые точки многообразия U , которые содержатся в дивизоре E и являются факторособенностями типов $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{10}(1, 3, 7)$ соответственно. Тогда выполнено соотношение $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2.

ЛЕММА 40.2. *Множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не содержит точку P_4 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $P_4 \in \mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$. Пусть $\pi: Z \rightarrow U$ – взвешенное раздутие точки P_4 с весами $(1, 1, 2)$, G – π -исключительный дивизор, а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на Z . Тогда из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$.

Пусть D – дивизор на Z такой, что $D \sim_{\mathbb{Q}} -4K_Z - \pi^*(36K_U)$. Тогда из свойств базисного множества пучка $|-4K_Z|$ следует, что дивизор D численно эффективен и объемен, но

$$D \cdot B_1 \cdot B_2 = \left((\alpha \circ \pi)^*(-kK_X) - \frac{k}{13} \pi^*(E) - \frac{k}{3} G \right)^2 (-4K_Z - \pi^*(36K_U)) = 0,$$

где B_1 и B_2 – общие поверхности в $\mathcal{B}$. Последнее противоречит следствию 2.6.

СЛЕДСТВИЕ 40.3. Множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}D)$ состоит из точки P_5 по леммам 2.1 и 2.3.

Пусть F – исключительный дивизор морфизма β , $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на W , а P_6 и P_7 – особые точки многообразия W , которые содержатся в F и являются факторособенностями типов $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$ соответственно. Тогда выполнено соотношение $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2.

Предположим, что множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ содержит точку P_7 . Тогда из доказательства леммы 32.3 следует, что утверждение теоремы 1.10 выполнено для X . Таким образом, можно считать, что $P_7 \notin \mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H})$. Из лемм 2.1 и 2.3 следует, что $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H}) = \{P_6\}$.

Пусть $\pi: Z \rightarrow W$ – взвешенное раздутие точки P_6 с весами $(1, 1, 2)$, G – исключительный дивизор морфизма π , а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на Z . Тогда из теоремы 2.2 следует, что выполнены соотношения $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$.

Пусть D – дивизор на Z такой, что $D \sim_{\mathbb{Q}} -4K_Z - (\beta \circ \pi)^*(20K_U) - \pi^*(24K_W)$. Тогда

$$D \cdot B_1 \cdot B_2 = 0,$$

где B_1 и B_2 – общие поверхности в $\mathcal{B}$. С другой стороны, дивизор D численно эффективен и объемен. Последнее является противоречием следствию 2.6. Предложение доказано.

§ 41. Случай $n = 79$, гиперповерхность степени 33 в $\mathbb{P}(1, 3, 5, 11, 14)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 79$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 3, 5, 11, 14)$ степени 33, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/70$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$, и точки P_2 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{14}(1, 3, 11)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 41.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 79$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\beta} & W & \xleftarrow{\gamma} & Y \\ \alpha \downarrow & & & & \downarrow \eta \\ X & \text{-----} & \psi & \text{-----} > & \mathbb{P}(1, 3, 5) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_2 с весами $(1, 3, 11)$, морфизм β – взвешенное раздутие точки многообразия U , содержащейся в α -исключительном дивизоре и являющейся особенностью типа $\frac{1}{11}(1, 3, 8)$, с весами $(1, 3, 8)$, γ – взвешенное раздутие точки многообразия W , содержащейся в β -исключительном дивизоре и являющейся особенностью типа $\frac{1}{8}(1, 3, 5)$, с весами $(1, 3, 5)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки P_2 .

Пусть E – исключительный дивизор морфизма α , $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U , а P_3 и P_4 – особые точки многообразия U , которые содержатся в дивизоре E и являются факторособенностями

типов $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{11}(1, 3, 8)$ соответственно. Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2, а из лемм 2.1 и 2.3 и доказательства леммы 40.2 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ состоит из точки P_4 .

Пусть F – исключительный дивизор морфизма β , $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на W , а P_5 и P_6 – точки многообразия W , которые содержатся в F и являются особенностями типов $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{8}(1, 3, 4)$ соответственно. Тогда $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2.

В случае, когда множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ содержит точку P_6 , требуемое утверждение легко следует из теоремы 2.2. Таким образом, из лемм 2.1 и 2.3 следует, что для завершения доказательства можно считать, что $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{H}) = \{P_5\}$.

Пусть $\pi: Z \rightarrow W$ – взвешенное раздутие точки P_5 с весами $(1, 1, 2)$, G – исключительный дивизор морфизма π , а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на Z . Тогда из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$. Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2z + wf_{19}(x, y, z, t) + f_{33}(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 2, 3, 8, 11) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = 3$, $\text{wt}(z) = 5$, $\text{wt}(t) = 11$ и $\text{wt}(w) = 14$, а $f_i(x, y, z, t)$ – достаточно общий квазиоднородный многочлен степени i . Пусть $\mathcal{P}$ – линейная система на гиперповерхности X , порожденная мономами x^{30} , y^{10} , z^6 , t^2x^8 , $t^2y^2x^2$, ty^6x и wtz . Тогда базисное множество линейной системы $\mathcal{P}$ не содержит кривых. Пусть $\mathcal{R}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{P}$ на Z , а R – общая поверхность в $\mathcal{R}$. Тогда из локальных вычислений следует, что базисное множество линейной системы $\mathcal{R}$ не содержит кривых и

$$R \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \beta \circ \pi)^*(-30K_X) - \frac{30}{11}(\beta \circ \pi)^*(E) - \frac{8}{11}\pi^*(F) - \frac{2}{3}G,$$

откуда следует, что выполнено равенство $R \cdot B_1 \cdot B_2 = 0$, где B_1 и B_2 – общие поверхности в линейной системе $\mathcal{B}$. Последнее противоречит следствию 2.6.

§ 42. Случай $n = 80$, гиперповерхность степени 34 в $\mathbb{P}(1, 3, 4, 10, 17)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 80$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 3, 4, 10, 17)$ степени 34, особенности которой состоят из четырех особых точек: точки P_1 , которая является особенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_2 , которая является особенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, точки P_3 , которая является особенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$, и точки P_4 , которая является особенностью типа $\frac{1}{10}(1, 3, 7)$. Имеем $-K_X^3 = 1/60$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 42.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 80$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно видеть, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \dashrightarrow_{\psi} & \mathbb{P}(1, 3, 4) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_4 с весами $(1, 3, 7)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α и является факторособенностью типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$ на многообразии U , с весами $(1, 3, 4)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки P_4 .

Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на многообразии U , а P_5 и P_6 – особые точки многообразия U , содержащиеся в исключительном дивизоре морфизма α и являющиеся особенностями типов $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ соответственно. Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2, из лемм 2.1 и 2.3 следует, что либо $P_5 \in \mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$, либо $P_6 \in \mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$, но в последнем случае требуемое утверждение следует из теоремы 2.2.

Можно считать, что $P_5 \in \mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$. Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$t^3z + t^2f_{14}(x, y, z, w) + tf_{24}(x, y, z, w) + f_{34}(x, y, z, w) = 0 \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = 3$, $\text{wt}(z) = 4$, $\text{wt}(t) = 10$ и $\text{wt}(w) = 17$, а $f_i(x, y, z, w)$ – квазиоднородный многочлен степени i . Пусть $\mathcal{P}$ – пучок, состоящий из поверхностей, высекаемых на гиперповерхности X уравнениями $\lambda x^4 + \mu z = 0$, где $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1$. Тогда базисное множество пучка $\mathcal{P}$ состоит из неприводимой кривой, которая задается уравнениями $x = z = 0$.

Пусть $\gamma: W \rightarrow U$ – взвешенное раздутие особой точки P_5 с весами $(1, 1, 2)$, $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на W , $\mathcal{H}$ – собственный прообраз пучка $\mathcal{P}$ на многообразии W , D – достаточно общая поверхность в пучке $\mathcal{H}$, а E и F – исключительные дивизоры морфизмов α и γ соответственно. Тогда D нормальна, выполнены соотношения

$$D \sim_{\mathbb{Q}} -4K_W \sim_{\mathbb{Q}} (\alpha \circ \gamma)^*(-4K_X) - \frac{2}{5}\gamma^*(E) - \frac{4}{3}F,$$

а базисное множество пучка $\mathcal{H}$ состоит из кривых C и L таких, что $\alpha \circ \gamma(C)$ – базисная кривая пучка $\mathcal{P}$, а $\gamma(L)$ – кривая на $E \cong \mathbb{P}(1, 3, 7)$, которая содержится в $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,3,7)}(1)|$.

Пусть S – поверхность в линейной системе $|-K_W|$, а $\bar{E}$ – собственный прообраз поверхности E на многообразии W . Тогда $S \cdot D = C + L$ и $\bar{E} \cdot D = 4L$, но $\bar{E} \sim_{\mathbb{Q}} \gamma^*(E) - \frac{2}{3}F$, откуда следует, что на поверхности D выполнены равенства

$$C \cdot C = -\frac{1}{3}, \quad C \cdot L = 0, \quad L \cdot L = -\frac{2}{7},$$

откуда следует, что форма пересечения кривых C и L на поверхности D отрицательно определена, но $\mathcal{B}|_D \sim_{\mathbb{Q}} kC + kL$. Последнее противоречит леммам 2.9 и 2.7.

§ 43. Случай $n = 82$, гиперповерхность степени 36 в $\mathbb{P}(1, 1, 5, 12, 18)$

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. Пусть $n = 82$. Тогда X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 5, 12, 18)$ степени 36, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/30$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , кото-

рая является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, и точки P_2 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{6}(1, 1, 5)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 43.1. Утверждение теоремы 1.10 выполнено при $n = 82$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_2 \in \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$. Тогда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \eta \\ X & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}(1, 1, 5) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_2 с весами $(1, 1, 6)$, а морфизм η – расслоение на эллиптические кривые. Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U . Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2, откуда сразу следует существование коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, 1, 5) & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где σ – бирациональное отображение. Таким образом, из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что можно считать, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_1\}$.

Пусть $\pi: W \rightarrow X$ – взвешенное раздутие точки P_1 с весами $(1, 2, 3)$, а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на W . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$ по теореме 2.2, а особенности π -исключительного дивизора состоят из точек Q и O таких, что точка Q является особенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, а точка O является особенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 2)$.

Предположим, что множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ не пусто. Тогда множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит либо точку O , либо точку Q . С другой стороны, из аргументов, использованных в доказательстве предложения 22.1, следует, что множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ не может содержать точку O и не может содержать точку Q , поскольку линейная система $\mathcal{B}$ не составлена из пучка.

Особенности логпары $(W, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ терминальны, но из доказательства предложения 29.1 следует, что существует антифлип $\gamma: W \dashrightarrow Y$ такой, что дивизор $-K_Y$ численно эффективен и объемен. Более того, полная линейная система $|-rK_Y|$ задает бирациональное отображение $Y \dashrightarrow X'$ для $r \gg 0$, где X' — гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 6, 14, 21)$ степени 42 с каноническими особенностями (см. [2, доказательство теоремы 5.5.1]).

Пусть $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Y . Тогда выполнено соотношение $\mathcal{H} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$, поскольку отображение γ является изоморфизмом в коразмерности один. С другой стороны, бирациональное отображение γ является логфлипом по отношению к логпаре $(W, \lambda\mathcal{B})$, имеющей терминальные особенности, где λ – некоторое рациональное число такое, что $\lambda > 1/k$. Таким образом, логпара $(Y, \frac{1}{k}\mathcal{H})$ также имеет терминальные особенности. Последнее утверждение противоречит лемме 2.1.

§ 44. Завершение доказательства теоремы 1.10

Воспользуемся условиями и обозначениями из § 3. В настоящем параграфе мы завершим доказательство теоремы 1.10.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 44.1. Пусть $n \in \{21, 24, 33, 35, 41, 42, 46, 50, 54, 55, 61, 62, 63, 67, 69, 71, 76, 77, 83, 85, 91\}$. Тогда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{P}(1, a_1, a_2) & \xrightarrow{\quad \sigma \quad} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (44.1)$$

где ψ – естественная проекция, а σ – некоторое бирациональное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.3, леммы 3.11 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из особых точек гиперповерхности X . Мы докажем существование коммутативной диаграммы (44.1), разбирая каждый из возможных случаев.

Случай $n = 21$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 4, 7)$ степени 14, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/4$, а особенности гиперповерхности X состоят из точек O_1 и O_2 , каждая из которых является особенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, и особой точки P , которая является особенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P\}$. Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U . Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$, а из лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит особую точку многообразия U , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α . Теперь из теоремы 2.2 следует существование коммутативной диаграммы (44.1), поскольку существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\quad \beta \quad} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{\quad \psi \quad} & \mathbb{P}(1, 1, 2) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, морфизм α – взвешенное раздутие точки P с весами $(1, 1, 3)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая является особенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ на многообразии U , с весами $(1, 1, 2)$, а η – эллиптическое расслоение.

Случай $n = 24$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 5, 7)$ степени 15. Выполнено равенство $-K_X^3 = 3/14$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, и точки P_2 , которая является особенностью типа $\frac{1}{7}(1, 2, 5)$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\quad \beta \quad} & W & \xleftarrow{\quad \gamma \quad} & Y \\ \alpha \downarrow & & & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{\quad \psi \quad} & & & \mathbb{P}(1, 1, 2) \end{array}$$

где α – взвешенное раздутие точки P с весами $(1, 2, 5)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, с весами $(1, 2, 3)$, γ – взвешенное раздутие особой точки многообразия W , которая является особенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, с весами $(1, 1, 2)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_2\}$.

Из доказательства предложения 22.1 следует, что $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$, где $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W , а множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не содержит подмногообразий многообразия W , которые не содержатся в исключительном дивизоре бирационального морфизма β . С другой стороны, множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не пусто, поскольку дивизор $-K_W$ является численно эффективным и объемным. Таким образом, мы можем применить аргументы доказательства предложения 22.1 к логпаре $(W, \frac{1}{k}\mathcal{D})$, откуда следует, что $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит особую точку многообразия W , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$. Теперь из теоремы 2.2 следует требуемое утверждение.

Случай $n = 33$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5, 7)$ степени 17. Выполнено равенство $-K_X^3 = 17/210$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_2 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, точки P_3 , которая является особенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, и особой точки P_4 , которая является особенностью типа $\frac{1}{7}(1, 2, 5)$. Существует коммутативная диаграмма

где ψ – естественная проекция, α_3 – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 2, 3)$, морфизм α_4 – взвешенное раздутие точки P_4 с весами $(1, 2, 5)$, β_4 – взвешенное раздутие собственного прообраза особой точки P_4 на U_3 с весами $(1, 2, 5)$, β_3 – взвешенное раздутие собственного прообраза особой точки P_3 на U_4 с весами $(1, 2, 3)$, β_5 – взвешенное раздутие особой точки многообразия U_4 , которая содержится в α_4 -исключительном дивизоре и является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$ на U_4 , с весами $(1, 2, 3)$, γ_3 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_3 на U_{45} с весами $(1, 2, 3)$, морфизм γ_5 – раздутие особой точки многообразия U_{34} , которая содержится в β_4 -исключительном дивизоре и является особенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, с весами $(1, 2, 3)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из доказательства предложения 18.1 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_3, P_4\}$.

Пусть $\mathcal{D}_{34}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U_{34} , а $\bar{P}_5$ и $\bar{P}_6$ – особые точки многообразия U_{34} , которые содержатся в исключительном дивизоре морфизма β_4 и являются факторособенностями типов $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$

и $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ соответственно. Тогда из теоремы 2.2 следует выполнение соотношения $\mathcal{D}_{34} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_{U_{34}}$, а из леммы 2.3 и доказательства предложения 18.1 следует, что множество $\mathbb{CS}(U_{34}, \frac{1}{k}\mathcal{D}_{34})$ содержит точку $\bar{P}_5$. Теперь из теоремы 2.2 следует существование требуемой коммутативной диаграммы (44.1).

Случай $n = 35$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 5, 9)$ степени 18, выполнено равенство $-K_X^3 = 2/15$, а особенности гиперповерхности X состоят из точек P_1 и P_2 , каждая из которых является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, и точки P_3 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow[\psi]{-} & \mathbb{P}(1, 1, 3) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 1, 4)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ на U , с весами $(1, 1, 3)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из теоремы 3.3, леммы 3.11 и предложения 3.5 следует, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ состоит из точки P_3 .

Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U . Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$ по теореме 2.2. Из леммы 2.1 следует, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не пусто. Из леммы 2.3 следует, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит особую точку многообразия U , которая содержится в α -исключительном дивизоре, а из теоремы 2.2 следует существование коммутативной диаграммы (44.1).

Случай $n = 41$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 4, 5, 10)$ степени 20. Выполнено равенство $-K_X^3 = 1/10$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки O , которая является особенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, и точек P_1 и P_2 , являющихся особенностями типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$.

Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & Y & & & \\ \gamma \swarrow & & \searrow \delta & \eta \searrow & \\ U & & W & & \mathbb{P}(1, 1, 4) \\ \alpha \searrow & & \swarrow \beta & \psi \searrow & \\ & X & & & \end{array}$$

где α – взвешенное раздутие точки P_1 с весами $(1, 1, 4)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки P_2 с весами $(1, 1, 4)$, γ – взвешенное раздутие собственного прообраза особой точки P_2 на многообразии U с весами $(1, 1, 4)$, δ – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_1 на многообразии W с весами $(1, 1, 4)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_1, P_2\}$. Теперь из доказательства предложения 13.1 следует существование коммутативной диаграммы (44.1).

Случай $n = 42$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5, 10)$ степени 20. Выполнено равенство $-K_X^3 = 1/15$, а особенности X состоят из точек P_1 , P_2 и P_3 , каждая из которых является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_4 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, и точек P_5 и P_6 , являющихся факторособенностями типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$.

Существует коммутативная диаграмма

где ψ – проекция, α – взвешенное раздутие точки P_5 с весами $(1, 2, 3)$, β – взвешенное раздутие точки P_6 с весами $(1, 2, 3)$, γ – взвешенное раздутие собственного прообраза особой точки P_6 на многообразии U с весами $(1, 2, 3)$, δ – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_5 на многообразии W с весами $(1, 2, 3)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_5, P_6\}$, но существование коммутативной диаграммы (44.1) вытекает из теоремы 2.2, если $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_5, P_6\}$. Таким образом, можно считать, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P_5 и не содержит точку P_6 .

Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U , а O и Q – особые точки многообразия U , которые содержатся в исключительном дивизоре морфизма α и являются факторособенностями типов $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ соответственно. Тогда из леммы 2.3 и доказательства леммы 21.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ состоит из точки Q .

Пусть $\zeta: Z \rightarrow U$ – взвешенное раздутие точки Q с весами $(1, 1, 1)$, $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Z , а $\mathcal{H}$ – собственный прообраз линейной системы $|-3K_X|$ на многообразии Z . Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Z$ по теореме 2.2, а базисное множество линейной системы $\mathcal{H}$ состоит из неприводимой кривой C такой, что $\alpha \circ \zeta(C)$ является базисной кривой линейной системы $|-3K_X|$.

Пусть S – общая поверхность в $\mathcal{H}$. Тогда поверхность S нормальна, на S выполнено неравенство $C^2 < 0$, но $\mathcal{D}|_S \sim_{\mathbb{Q}} kC$. Таким образом, из леммы 2.9 следует, что для достаточно общей поверхности D в линейной системе $\mathcal{D}$ носитель одномерного эффективного цикла $D \cdot S$ содержится в кривой C , что невозможно по лемме 2.7.

Случай $n = 45$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 3, 4, 5, 8)$ степени 20. Выполнено равенство $-K_X^3 = 1/24$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , которая является особенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, точек P_2 и P_3 , которые являются особенностями типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$, и точки P_4 , которая является особенностью типа $\frac{1}{8}(1, 3, 5)$.

Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow[\psi]{- - - -} & \mathbb{P}(1, 3, 4) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_4 с весами $(1, 3, 5)$, а морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α и является фактор-особенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, с весами $(1, 2, 3)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_4\}$.

Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U , $\bar{P}_5$ – точка многообразия U , которая содержится в α -исключительном дивизоре и является особенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, а $\bar{P}_6$ – точка многообразия U , которая содержится в α -исключительном дивизоре и является особенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$. Тогда из леммы 2.3 следует, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B}) \cap \{\bar{P}_5, \bar{P}_6\} \neq \emptyset$.

Из аргументов, использованных в доказательстве предложения 30.1, следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит точку $\bar{P}_5$, а из теоремы 2.2 следует существование коммутативной диаграммы (44.1).

Случай $n = 46$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 7, 10)$ степени 21. Выполнено равенство $-K_X^3 = 1/10$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P , которая является особенностью типа $\frac{1}{10}(1, 3, 7)$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\beta} & W & \xleftarrow{\gamma} & Y \\ \alpha \downarrow & & & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow[\psi]{- - - - -} & & & \mathbb{P}(1, 1, 3) \end{array}$$

где α – раздутие точки P с весами $(1, 3, 7)$, β – раздутие особой точки, которая является особенностью типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$, с весами $(1, 3, 4)$, γ – раздутие особой точки, которая является особенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$, с весами $(1, 1, 3)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P\}$.

Из доказательства предложения 22.1 следует, что $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_W$, где $\mathcal{D}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии W , а множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не содержит подмногообразий многообразия W , которые не содержатся в исключительном дивизоре бирационального морфизма β . С другой стороны, множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ не пусто, поскольку дивизор $-K_W$ является численно эффективным и объемным. Таким образом, мы можем применить аргументы доказательства предложения 22.1 к логпаре $(W, \frac{1}{k}\mathcal{D})$, откуда следует, что множество $\mathbb{CS}(W, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит особую точку многообразия W , которая является особенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$. Из теоремы 2.2 следует существование диаграммы (44.1).

Случай $n = 50$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 7, 11)$ степени 22. Выполнено равенство $-K_X^3 = 2/21$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, и точки P_2 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow[\psi]{- - - -} & \mathbb{P}(1, 1, 3) \end{array}$$

где α – раздутие точки P_2 с весами $(1, 3, 7)$, морфизм β – раздутие особой точки, которая является особенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$, с весами $(1, 1, 3)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_2\}$. Теперь из доказательства предложения 22.1 следует существование требуемой коммутативной диаграммы (44.1).

Случай $n = 54$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 6, 8, 9)$ степени 24. Выполнено равенство $-K_X^3 = 1/18$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, особой точки P_2 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, и точки P_3 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{9}(1, 1, 8)$.

Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\beta} & W & \xleftarrow{\gamma} & Y \\ \alpha \downarrow & & & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow[\psi]{- - - - -} & & & \mathbb{P}(1, 1, 6) \end{array}$$

где α – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 1, 8)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{8}(1, 1, 7)$, с весами $(1, 1, 7)$, морфизм γ – взвешенное раздутие особой точки многообразия W , которая является особенностью типа $\frac{1}{7}(1, 1, 6)$, с весами $(1, 1, 3)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_3\}$. Теперь из доказательства предложения 14.1 следует существование требуемой коммутативной диаграммы (44.1).

Случай $n = 55$. В этом случае X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 7, 12)$ степени 24, особенности которой состоят из точек P_1 и P_2 , являющихся особенностями типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точек P_3 и P_4 , являющихся особенностями типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, и точки P_5 , являющейся особенностью типа $\frac{1}{7}(1, 2, 5)$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow[\psi]{- - -} & \mathbb{P}(1, 2, 3) \end{array}$$

где α – взвешенное раздутие точки P_5 с весами $(1, 2, 5)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, с весами $(1, 2, 3)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_5\}$.

Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U , а P_6 и P_7 – особые точки многообразия U , которые содержатся в исключительном дивизоре раздутия α и являются особенностями типов $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ и $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$ соответственно. Тогда из лемм 2.1 и 2.3 следует, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит либо P_6 , либо P_7 . В последнем случае из теоремы 2.2 следует существование коммутативной диаграммы (44.1).

Можно считать, что $P_6 \in \mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$. Гиперповерхность X задается уравнением

$$t^3z + t^2f_{10}(x, y, z, w) + tf_{17}(x, y, z, w) + f_{24}(x, y, z, w) = 0 \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = 2$, $\text{wt}(z) = 3$, $\text{wt}(t) = 7$ и $\text{wt}(w) = 12$, а $f_i(x, y, z, w)$ – достаточно общий квазиоднородный многочлен степени i . Пусть $\gamma: W \rightarrow U$ – взвешенное раздутие особой точки P_6 с весами $(1, 1, 1)$, $\mathcal{H}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на W , $\mathcal{P}$ – собственный прообраз на многообразии W пучка, состоящего из поверхностей, которые высекаются на гиперповерхности X уравнениями $\lambda x^3 + \mu z = 0$, где $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1$, а D – достаточно общая поверхность в пучке $\mathcal{P}$. Тогда базисное множество пучка $\mathcal{P}$ состоит из объединения неприводимых кривых C , L и Δ таких, что кривая $\alpha \circ \gamma(C)$ является базисной кривой полной линейной системы $|-3K_X|$, кривая $\gamma(L)$ содержится в исключительном дивизоре взвешенного раздутия α , а кривая Δ содержится в исключительном дивизоре морфизма γ .

На поверхности D форма пересечения кривых L и C на поверхности D отрицательно определена. С другой стороны, имеет место соотношение $\mathcal{H}|_D \sim_{\mathbb{Q}} kC + kL$. Последнее невозможно по леммам 2.9 и 2.7, поскольку $\mathcal{H}$ не составлена из пучка.

Случай $n = 61$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 4, 5, 7, 9)$ степени 25, выполнено равенство $-K_X^3 = 5/252$, а особенности X состоят из точки P_1 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$, точки P_2 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{7}(1, 2, 5)$, и точки P_3 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{9}(1, 4, 5)$. Существует коммутативная диаграмма

где ψ – проекция, α_2 – взвешенное раздутие особой точки P_2 с весами $(1, 2, 5)$, α_3 – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 4, 5)$, β_2 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_2 на U_3 с весами $(1, 2, 5)$, β_3 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_3 на U_2 с весами $(1, 4, 5)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_2, P_3\}$, из доказательства леммы 36.2 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_2, P_3\}$, а требуемое утверждение следует из теоремы 2.2.

Случай $n = 62$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 5, 7, 13)$ степени 26. Выполнено равенство $-K_X^3 = 2/35$, а особенности X состоят из точки P_1 , которая является особенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, и точки P_2 , которая является особенностью типа $\frac{1}{7}(1, 1, 6)$.

Несложно видеть, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow[\psi]{} & \mathbb{P}(1, 1, 5) \end{array}$$

где α – раздутие точки P_2 с весами $(1, 1, 6)$, β – раздутие точки, которая является особенностью типа $\frac{1}{6}(1, 1, 5)$, с весами $(1, 1, 5)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) \subseteq \{P_1, P_2\}$, а из доказательства предложения 31.1 следует существование требуемой коммутативной диаграммы (44.1).

Случай $n = 63$. В этом случае X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 8, 13)$ степени 26, особенности которой состоят из точек P_1 , P_2 и P_3 , являющихся особенностями типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_4 , являющейся особенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, и еще одной точки P_5 , являющейся особенностью типа $\frac{1}{8}(1, 3, 5)$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow[\psi]{} & \mathbb{P}(1, 2, 3) \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, α – взвешенное раздутие точки P_5 с весами $(1, 3, 5)$, а морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая содержится в исключительном дивизоре морфизма α и является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, с весами $(1, 2, 3)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_5\}$.

Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U , а P_6 и P_7 – особые точки многообразия U , которые содержатся в α -исключительном дивизоре и являются факторособенностями типов $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$ и $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ соответственно. Тогда из леммы 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит либо точку P_6 , либо точку P_7 .

Предположим, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит точку P_7 . Пусть $\gamma: W \rightarrow U$ – взвешенное раздутие точки P_7 с весами $(1, 1, 1)$, а $\mathcal{H}$ и $\mathcal{P}$ – собственные прообразы соответственно линейной системы $\mathcal{M}$ и пучка $|-2K_X|$ на многообразии W . Тогда базисное множество пучка $\mathcal{P}$ состоит из неприводимых кривых C и L таких, что $\alpha \circ \gamma(C)$ является базисной кривой пучка $|-2K_X|$, а кривая $\gamma(L)$ содержится в исключительном дивизоре бирационального морфизма α . Форма пересечения

кривых L и C на поверхности D отрицательно определена, но $\mathcal{H}|_D \sim_{\mathbb{Q}} kC + kL$, что невозможно по леммам 2.9 и 2.7.

Таким образом, множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит точку P_6 . Теперь из теоремы 2.2 следует существование требуемой коммутативной диаграммы (44.1).

Случай $n = 67$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 4, 9, 14)$ степени 28. Выполнено равенство $-K_X^3 = 1/18$, а особенности X состоят из точки P_1 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, и точки P_2 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{9}(1, 4, 5)$. Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_2\}$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \dashrightarrow_{\psi} & \mathbb{P}(1, 1, 4) \end{array}$$

где α – взвешенное раздутие точки P_2 с весами $(1, 4, 5)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$, с весами $(1, 1, 4)$, а η – эллиптическое расслоение. Из доказательства предложения 22.1 следует существование требуемой коммутативной диаграммы (44.1).

Случай $n = 69$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 4, 6, 7, 11)$ степени 28, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/66$, а особенности X состоят из точек P_1 и P_2 , являющихся факторособенностями типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, и особых точек P_3 и P_4 , которые являются факторособенностями типов $\frac{1}{6}(1, 1, 5)$ и $\frac{1}{11}(1, 4, 7)$ соответственно. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \dashrightarrow_{\psi} & \mathbb{P}(1, 3, 4) \end{array}$$

где α – взвешенное раздутие точки P_4 с весами $(1, 4, 7)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$, с весами $(1, 3, 4)$, а η – морфизм. Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_4\}$.

Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U , а P_5 и P_6 – особые точки многообразия U , которые содержатся в исключительном дивизоре раздутия α и являются факторособенностями типов $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$ и $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ соответственно. Тогда из лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит либо P_5 , либо P_6 , но из доказательства леммы 28.5 следует, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ не содержит P_6 . Множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит P_5 , откуда следует существование коммутативной диаграммы (44.1) по теореме 2.2.

Случай $n = 71$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 6, 8, 15)$ степени 30. Выполнено равенство $-K_X^3 = 1/24$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , которая является особенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_2 , которая является особенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, и точки P_3 , которая является особенностью типа $\frac{1}{8}(1, 1, 7)$.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_3\}$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow[\psi]{- - -} & \mathbb{P}(1, 1, 6) \end{array}$$

где α – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 1, 7)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая содержится в исключительном дивизоре бирационального морфизма α , с весами $(1, 1, 6)$, а η – эллиптическое расслоение.

Пусть $\mathcal{D}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на U . Тогда $\mathcal{D} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_U$, а из лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{D})$ содержит особую точку многообразия U , содержащуюся в α -исключительном дивизоре. Теперь из теоремы 2.2 следует требуемое утверждение.

Случай $n = 76$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 5, 6, 8, 11)$ степени 30, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/88$, а особенности X состоят из точки P_1 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_2 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{8}(1, 3, 5)$, и точки P_3 , являющейся факторособенностью типа $\frac{1}{11}(1, 5, 6)$. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & Y & & & \\ \beta_3 \swarrow & & \searrow \beta_2 & \eta \nearrow & \\ U_2 & & U_3 & & \mathbb{P}(1, 5, 6) \\ \alpha_2 \searrow & & \swarrow \alpha_3 & \nearrow \psi & \\ & X & & & \end{array}$$

где ψ – естественная проекция, морфизм α_2 – взвешенное раздутие особой точки P_2 с весами $(1, 3, 5)$, морфизм α_3 – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 5, 6)$, β_2 – взвешенное раздутие собственного прообраза точки P_2 на U_3 с весами $(1, 3, 5)$, β_3 – взвешенное раздутие собственного прообраза P_3 на U_2 с весами $(1, 5, 6)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из доказательства лемм 29.3 и 36.2 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_2, P_3\}$, а существование коммутативной диаграммы (44.1) вытекает из теоремы 2.2.

Случай $n = 77$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 5, 9, 16)$ степени 32, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/45$, а особенности гиперповерхности X состоят из точек P_1 и P_2 , которые являются особенностями типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_3 , которая является особенностью типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$, и точки P_4 , являющейся особенностью типа $\frac{1}{9}(1, 2, 7)$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow[\psi]{- - -} & \mathbb{P}(1, 2, 5) \end{array}$$

где α – взвешенное раздутие точки P_4 с весами $(1, 2, 7)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{7}(1, 2, 5)$, с весами $(1, 2, 5)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_4\}$.

Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U , а P_5 и P_6 – особые точки многообразия U , которые содержатся в исключительном дивизоре раздутия α и являются факторособенностями типов $\frac{1}{7}(1, 2, 5)$ и $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ соответственно. Тогда из лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит либо точку P_5 , либо точку P_6 .

Предположим, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит точку P_6 . Пусть $\gamma: W \rightarrow U$ – взвешенное раздутие особой точки P_5 с весами $(1, 1, 1)$, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{D}$ – собственные прообразы соответственно линейных систем $\mathcal{M}$ и $|-16K_X|$ на многообразии W , D – общая поверхность из линейной системы $\mathcal{D}$, а H_1 и H_2 – общие поверхности в $\mathcal{H}$. Тогда дивизор D является численно эффективным, что противоречит строгому неравенству $D \cdot H_1 \cdot H_1 < 0$.

Показано, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит точку P_5 . Теперь из теоремы 2.2 следует существование требуемой коммутативной диаграммы (44.1).

Случай $n = 83$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 3, 4, 11, 18)$ степени 36, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/66$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точек P_2 и P_3 , каждая из которых является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, и особой точки P_4 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{11}(1, 4, 7)$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \dashrightarrow & \mathbb{P}(1, 3, 4) \\ & \psi & \end{array}$$

где α – взвешенное раздутие точки P_4 с весами $(1, 4, 7)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$, с весами $(1, 3, 4)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_4\}$.

Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U , а P_5 и P_6 – особые точки многообразия U , которые содержатся в исключительном дивизоре раздутия α и являются факторособенностями типов $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$ и $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ соответственно. Тогда из лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит либо точку P_5 , либо точку P_6 .

Из доказательства предложения 25.1 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ не может содержать точку P_6 . Значит, множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит точку P_5 . Теперь из теоремы 2.2 следует существование требуемой коммутативной диаграммы (44.1).

Случай $n = 85$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 3, 5, 11, 19)$ степени 38, выполнено равенство $-K_X^3 = 2/165$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, точки P_2 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$, и точки P_3 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{11}(1, 3, 8)$.

Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \dashrightarrow_{\psi} & \mathbb{P}(1, 3, 5) \end{array}$$

где α – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 3, 8)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{8}(1, 3, 5)$, с весами $(1, 3, 5)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_3\}$.

Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U , а P_4 и P_5 – особые точки многообразия U , которые содержатся в исключительном дивизоре раздутия α и являются факторособенностями типов $\frac{1}{8}(1, 3, 5)$ и $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ соответственно. Тогда из лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит либо точку P_4 , либо точку P_5 .

Предположим, что $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит точку P_5 . Пусть $\gamma: W \rightarrow U$ – взвешенное раздутие особой точки P_5 с весами $(1, 1, 2)$, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{D}$ – собственные прообразы соответственно линейных систем $\mathcal{M}$ и $|-19K_X|$ на многообразии W , D – общая поверхность из линейной системы $\mathcal{D}$, а H_1 и H_2 – общие поверхности в $\mathcal{H}$. Тогда базисное множество линейной системы $\mathcal{D}$ не содержит кривых. Таким образом, дивизор D является численно эффективным, что противоречит равенству $D \cdot H_1 \cdot H_2 = -2k^2/15$.

Итак, множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит точку P_4 . Теперь из теоремы 2.2 следует существование требуемой коммутативной диаграммы (44.1).

Случай $n = 91$. В этом случае X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 4, 5, 13, 22)$ степени 44, выполнено равенство $-K_X^3 = 1/130$, а особенности гиперповерхности X состоят из точки P_1 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, точки P_2 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$, и точки P_3 , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{13}(1, 4, 9)$.

Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \dashrightarrow_{\psi} & \mathbb{P}(1, 4, 5) \end{array}$$

где α – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 4, 9)$, морфизм β – взвешенное раздутие особой точки многообразия U , которая является факторособенностью типа $\frac{1}{9}(1, 4, 5)$, с весами $(1, 4, 5)$, а η – эллиптическое расслоение.

Из предложения 3.5 следует, что $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M}) = \{P_3\}$.

Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на U , а P_4 и P_5 – особые точки многообразия U , которые содержатся в исключительном дивизоре раздутия α и являются факторособенностями типов $\frac{1}{9}(1, 4, 5)$ и $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ соответственно. Тогда из лемм 2.1 и 2.3 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит либо точку P_4 , либо точку P_5 .

Из доказательства предложения 25.1 следует, что множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ не может содержать точку P_5 . Значит, множество $\mathbb{CS}(U, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ содержит точку P_4 . Теперь из теоремы 2.2 следует существование требуемой коммутативной диаграммы (44.1).

Итак, утверждение теоремы 1.10 доказано полностью.

Список литературы

1. A. R. Iano-Fletcher, “Working with weighted complete intersections”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 101–173.
2. A. Corti, A. Pukhlikov, M. Reid, “Fano 3-fold hypersurfaces”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 175–258.
3. И. А. Чельцов, “Бирационально жесткие многообразия Фано”, *УМН*, **60**:5 (2005), 71–160; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Birationally rigid Fano varieties”, *Russian Math. Surveys*, **60**:5 (2005), 875–965.
4. I. Cheltsov, J. Park, “Weighted Fano threefold hypersurfaces”, *J. Reine Angew. Math.*, **600** (2006), 81–116.
5. I. Cheltsov, “Log models of birationally rigid varieties”, *J. Math. Sci. (New York)*, **102**:2 (2000), 3843–3875.
6. И. А. Чельцов, “Антиканонические модели трехмерных многообразий Фано степени четыре”, *Матем. сб.*, **194**:4 (2003), 147–172; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Anticanonical models of three-dimensional Fano varieties of degree 4”, *Sb. Math.*, **194**:4 (2003), 617–640.
7. A. Corti, “Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 259–312.
8. Y. Kawamata, “Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities”, *Higher-dimensional complex varieties* (Trento, Italy, 1994), de Gruyter, Berlin, 1996, 241–246.
9. Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, “Introduction to the minimal model problem”, *Algebraic geometry* (Sendai, 1985), Adv. Stud. Pure Math., **10**, North-Holland, Amsterdam, 1987, 283–360.
10. D. Ryder, *The curve exclusion theorem for elliptic and K3 fibrations birational to Fano 3-fold hypersurfaces*, [arxiv:math.AG/0606177](https://arxiv.org/abs/math/0606177); *Proc. Edinb. Math. Soc.* (в печати).
11. J. Kollár, “Singularities of pairs”, *Algebraic geometry* (Santa Cruz, CA, USA, 1995), Proc. Sympos. Pure Math., **62**, № 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 221–287.
12. В. В. Шокуров, “Трехмерные логперестройки”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:1 (1992), 105–203; англ. пер.: V. V. Shokurov, “3-fold log flips”, *Izv. Math.*, **40**:1 (1993), 95–202.

И. А. Чельцов (I. A. CHELTSOV)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
The University of Edinburgh
E-mail: cheltsov@yahoo.com

Поступило в редакцию
17.08.2005