Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Вик. С. Куликов, О многочленах Александра кривых
Гурвица, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, вы-
пуск 1, 75–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/im574>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 05:19:59

УДК 514.756.4

Вик. С. Куликов

О многочленах Александра кривых Гурвица

Исследованы свойства многочленов Александра кривых Гурвица. Дано полное описание множества многочленов Александра неприводимых кривых Гурвица в терминах их корней.

Библиография: 9 наименований.

Введение

Исследование свойств многочленов Александра кривых Гурвица в $\mathbb{CP}^2$ было начато в работе [1]. Напомним кратко определения кривой Гурвица (относительно линейной проекции $\text{pr}: \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$) и ее многочлена Александра.

Пусть F_1 – относительно минимальная линейчатая поверхность, $\text{pr}: F_1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ – морфизм, задающий линейчатую структуру, R – слой морфизма pr и E_1 – исключительное сечение, $E_1^2 = -1$. отождествим $\text{pr}: F_1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ с линейной проекцией $\text{pr}: \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ из точки $p_\infty \in \mathbb{CP}^2$ (точка p_∞ является образом кривой E_1 при стягивании его в точку).

Согласно определению, данному в работе [5], образ $\bar{H} = f(S) \subset F_1$ гладкого отображения $f: S \rightarrow F_1 \setminus E_1$ ориентированной замкнутой вещественной поверхности S называется *кривой Гурвица* (относительно проекции pr) степени m , если найдется конечное подмножество $Z \subset \bar{H}$ такое, что:

(i) f является вложением поверхности $S \setminus f^{-1}(Z)$ и для каждой точки $s \notin Z$ поверхность $\bar{H}$ и слой $R_{\text{pr}(s)}$ проекции pr пересекаются в s трансверсально с положительным индексом пересечения;

(ii) для каждой точки $s \in Z$ найдется окрестность $U \subset F_1$ этой точки такая, что $\bar{H} \cap U$ является комплексно-аналитической кривой и комплексная ориентация на $\bar{H} \cap U \setminus \{s\}$ совпадает с ориентацией, индуцированной с поверхности S отображением f ;

(iii) ограничение проекции pr на $\bar{H}$ является конечным отображением степени m .

Это определение кривых Гурвица эквивалентно следующему определению. Пусть $\mathbb{C}_i^2$, $i = 1, 2$, – две копии аффинной плоскости $\mathbb{C}^2$ с координатами (u_i, v_i) , $u_2 = 1/u_1$ и $v_2 = v_1/u_1$, которые покрывают $\mathbb{CP}^2 \setminus p_\infty$ (где p_∞ – центр проекции) так, что проекция pr задана формулами $(u_i, v_i) \mapsto u_i$ в картах $\mathbb{C}_i^2$. Множество

Работа частично поддержана РФФИ (грант № 05-01-00455), NWO (грант № 047.011.2004.026/05-02-89000-HBO) и CRDF (грант № RUM1-2692-MO-05).

$\overline{H} \subset \mathbb{CP}^2 \setminus \{p_\infty\}$, замкнутое в $\mathbb{CP}^2$, называется *кривой Гурвица степени m* , если для $i = 1, 2$ множество $\overline{H} \cap \mathbb{C}_i^2$ совпадает с множеством решений уравнения

$$F_i(u_i, v_i) := v_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,i}(u_i) v_i^j = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющего следующим свойствам:

- (i) $F_i(u_i, v_i)$ являются C^∞ -гладкими комплекснозначными функциями в $\mathbb{C}^2$;
- (ii) $F_i(u_i, v_i)$ имеют лишь конечное число критических значений относительно проекции pr , т. е. существует конечное число значений переменной u_i , скажем $u_{i,1}, \dots, u_{i,n_i}$, таких, что полиномиальное уравнение

$$v_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,i}(u_{i,0}) v_i^j = 0 \quad (2)$$

не имеет кратных корней для $u_{i,0} \notin \{u_{i,1}, \dots, u_{i,n_i}\}$;

- (iii) если $v_{i,j}$ является кратным корнем уравнения (2) для $u_{i,j} \in \{u_{i,1}, \dots, u_{i,n_i}\}$, то в окрестности точки $(u_{i,j}, v_{i,j})$, которую мы называем *критической точкой* кривой $\overline{H}$, множество $\overline{H}$ совпадает с множеством решений некоторого комплексно-аналитического уравнения.

Кривая Гурвица $\overline{H}$ называется *неприводимой*, если $\overline{H} \setminus M$ связно для любого конечного множества $M \subset \overline{H}$, и мы будем говорить, что кривая Гурвица $\overline{H}$ состоит из k неприводимых компонент, если

$$k = \max \# \{ \text{связные компоненты кривой } \overline{H} \setminus M \},$$

где максимум взят по всем конечным множествам $M \subset \overline{H}$.

Пусть H – аффинная кривая Гурвица, т. е. $H = \overline{H} \cap (\mathbb{CP}^2 \setminus L_\infty)$, где L_∞ – прямая, являющаяся слоем проекции pr , находящаяся в общем положении по отношению к $\overline{H}$. В этом случае фундаментальная группа $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (\overline{H} \cup L_\infty))$ не зависит от выбора прямой L_∞ и принадлежит классу $\mathcal{C}$ так называемых C -групп.

По определению C -группа – это группа вместе с конечным копредставлением

$$G_W = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i = w_{i,j,k}^{-1} x_j w_{i,j,k}, w_{i,j,k} \in W \rangle, \quad (3)$$

где $W = \{w_{i,j,k} \in \mathbb{F}_m \mid 1 \leq i, j \leq m, 1 \leq k \leq h(i, j)\}$ – некоторый набор, состоящий из элементов свободной группы $\mathbb{F}_m$ (возможно, что $w_{i_1, j_1, k_1} = w_{i_2, j_2, k_2}$ для $(i_1, j_1, k_1) \neq (i_2, j_2, k_2)$), порожденной свободными порождающими $x_1, \dots, x_m$, и $h: \{1, \dots, m\}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ – некоторая функция. Такое копредставление называется C -копредставлением (буква C означает, что все соотношения являются сопряжениями).

Пусть $\varphi_W: \mathbb{F}_m \rightarrow G_W$ – канонический эпиморфизм. Элементы $\varphi_W(x_i) \in G$, $1 \leq i \leq m$, и элементы, сопряженные им, называются C -порождающими элементами C -группы G . Пусть $f: G_1 \rightarrow G_2$ – некоторый гомоморфизм C -групп. Он называется C -гомоморфизмом, если образы всех C -порождающих элемен-

тов группы G_1 при гомоморфизме f являются C -порождающими элементами C -группы G_2 . Мы будем рассматривать C -группы с точностью до C -изоморфизмов.

Любую C -группу G можно реализовать как фундаментальную группу $\pi_1(S^4 \setminus S)$ дополнения к замкнутой ориентированной поверхности S в четырехмерной сфере S^4 (см., например, [3], о других свойствах C -групп см. [2], [4], [6]).

C -копредставление (3) называется *гурвицевским C -копредставлением степени m* , если для каждого $i = 1, \dots, m$ слово $w_{i,i,1}$ совпадает с произведением $x_1 \dots x_m$, и C -группа G называется *гурвицевской C -группой степени m* , если она обладает гурвицевским C -копредставлением степени m . Другими словами, C -группа G является гурвицевской C -группой степени m , если существуют C -порождающие элементы $x_1, \dots, x_m$, порождающие группу G , такие, что произведение $x_1 \dots x_m$ принадлежит центру группы G . Отметим, что степень гурвицевской C -группы G определена неканонически и зависит от ее гурвицевского C -копредставления. Обозначим через $\mathcal{H}$ класс всех гурвицевских C -групп.

Пусть $\bar{H}$ — кривая Гурвица степени m . Копредставление Зариского–ван Кампена группы $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$, где $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$ и слой L_∞ проекции pr находится в общем положении относительно кривой $\bar{H}$, определяет на π_1 структуру гурвицевской C -группы степени m (см. [4]). В работе [4] было доказано, что произвольная гурвицевская C -группа G степени m может быть реализована как фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ для некоторой кривой Гурвица $\bar{H}$ с особыми точками типа $w^m - z^m = 0$, имеющей степень $\deg \bar{H} = 2^m n$, где n зависит от гурвицевского C -копредставления группы G . Поскольку мы рассматриваем C -группы с точностью до C -изоморфизмов, то класс $\mathcal{H}$ совпадает с классом $\{\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)\}$ фундаментальных групп дополнений к аффинным кривым Гурвица.

Легко показать, что¹ G/G' является конечно порожденной свободной абелевой группой для любой C -группы G . C -группа G называется *неприводимой*, если $G/G' \simeq \mathbb{Z}$, и мы будем говорить, что группа G состоит из n *неприводимых компонент*, если $G/G' \simeq \mathbb{Z}^n$. Если гурвицевская C -группа G реализована как фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ дополнения к некоторой аффинной кривой Гурвица H , то число неприводимых компонент группы G совпадает с числом неприводимых компонент кривой H . Аналогично, если C -группа G , состоящая из n неприводимых компонент, реализована как $G = \pi_1(S^4 \setminus S)$, то число связных компонент поверхности S равно n .

Свободная группа $\mathbb{F}_n$ с фиксированными свободными порождающими элементами является C -группой, и для любой C -группы G однозначно определен канонический C -эпиморфизм $\nu: G \rightarrow \mathbb{F}_1$, отображающий все C -порождающие элементы группы G в C -порождающий элемент группы $\mathbb{F}_1$. Обозначим через N его ядро. Отметим, что если C -группа является неприводимой, то N совпадает с G' .

¹В настоящей работе используются стандартные обозначения G' для коммутанта группы G и $[g_1, g_2]$ для коммутатора элементов $g_1, g_2 \in G$.

Пусть G – C -группа; C -эпиморфизм ν индуцирует следующую точную последовательность групп:

$$1 \rightarrow N/N' \rightarrow G/N' \xrightarrow{\nu_*} \mathbb{F}_1 \rightarrow 1.$$

C -порождающий элемент группы $\mathbb{F}_1$ действует на N/N' сопряжением $\tilde{x}^{-1}g\tilde{x}$, где $g \in N$ и $\tilde{x}$ – один из C -порождающих элементов группы G . Обозначим это действие через h и через $h_{\mathbb{C}}$ – индуцированное действие на $(N/N')_{\mathbb{C}} = (N/N') \otimes \mathbb{C}$. Характеристический многочлен $\Delta(t) = \det(h_{\mathbb{C}} - t \text{Id})$ называется *многочленом Александра* C -группы G (если векторное пространство $(N/N')_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$ является бесконечномерным, то по определению $\Delta(t) \equiv 0$). Для кривой Гурвица $\bar{H}$ многочлен Александра $\Delta(t)$ группы $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus H)$ называется *многочленом Александра* кривой $\bar{H}$. Отметим, что многочлен Александра $\Delta(t)$ кривой Гурвица $\bar{H}$ не зависит от выбора общей прямой L_{∞} .

Гомоморфизм $\nu: \pi_1 \rightarrow \mathbb{F}_1$ определяет бесконечное циклическое неразветвленное накрытие $f_{\infty}: X_{\infty} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus H$. Имеем $H_1(X_{\infty}, \mathbb{Z}) = N/N'$, и действие h на $H_1(X_{\infty}, \mathbb{Z})$ совпадает с действием порождающего элемента группы накрывающих преобразований накрытия f_{∞} . Из работы [5] следует, что группа $H_1(X_{\infty}, \mathbb{Z})$ является конечно порожденной.

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\text{mod}_n: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mu_n = \mathbb{F}_1/\{h^n\}$ естественный эпиморфизм в циклическую группу μ_n порядка n . Накрытие f_{∞} может быть пропущено через циклическое накрытие $f_n: X_n \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus H$, ассоциированное с эпиморфизмом $\text{mod}_n \circ \nu$, $f_{\infty} = g_n \circ f_n$. Поскольку кривая Гурвица $\bar{H}$ имеет только аналитические особенности, то накрытие f_n может быть продолжено до гладкого отображения $\bar{f}_n: \bar{X}_n \rightarrow \mathbb{CP}^2$, разветвленного вдоль $\bar{H}$ и, возможно, вдоль L_{∞} (если n не является делителем $\deg \bar{H}$, то $\bar{f}_n$ разветвлено вдоль L_{∞}), где $\bar{X}_n$ – некоторое гладкое четырехмерное многообразие. Действие h индуцирует действия $\bar{h}_n$ на $\bar{X}_n$ и $\bar{h}_{n*}$ на $H_1(\bar{X}_n, \mathbb{Z})$.

В работе [1] было показано, что любое такое многообразие $\bar{X}_n$ может быть вложено как симплектическое подмногообразие в рациональное проективное трехмерное комплексное многообразие, симплектическая структура на котором задана некоторой целочисленной кэлэровой формой, а также было доказано, что первое число Бетти $b_1(\bar{X}_n) = \dim_{\mathbb{C}} H_1(\bar{X}_n, \mathbb{C})$ многообразия $\bar{X}_n$ равно $r_{n, \neq 1}$, где $r_{n, \neq 1}$ – число корней многочлена Александра $\Delta(t)$ кривой $\bar{H}$, которые являются не равными единице корнями из единицы степени n . В работе [1] были также исследованы свойства многочленов Александра кривых Гурвица. В частности, было доказано, что если кривая Гурвица $\bar{H}$ степени d состоит из n неприводимых компонент и $\Delta(t)$ – ее многочлен Александра, то:

- (i) $\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$;
- (ii) $\Delta(0) = \pm 1$;
- (iii) корни многочлена $\Delta(t)$ являются корнями степени d из единицы;
- (iv) действие $h_{\mathbb{C}}$ на $(N/N') \otimes \mathbb{C}$ полупросто;
- (v) $\Delta(t)$ является делителем многочлена $(t-1)(t^d-1)^{d-2}$;
- (vi) кратность корня $t=1$ многочлена $\Delta(t)$ равна $n-1$;
- (vii) если $n=1$, то $\Delta(1)=1$ и степень $\deg \Delta(t)$ является четной.

Основными результатами настоящей статьи являются следующие теоремы².

ТЕОРЕМА 1. *Многочлен $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ является многочленом Александра некоторой неприводимой гурвицевской C -группы G тогда и только тогда, когда корни многочлена $P(t)$ являются корнями из единицы и $P(1) = 1$.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть многочлен*

$$P(t) = (-1)^m t^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i t^i \in \mathbb{Z}[t]$$

обладает следующими свойствами:

- (i) *корни многочлена $P(t)$ являются корнями из единицы;*
- (ii) *если ζ – примитивный корень из единицы степени p^k , где p – простое число, то кратность корня $t = \zeta$ многочлена $P(t)$ не превосходит кратности его корня $t = 1$.*

Тогда $P(t)$ является многочленом Александра некоторой гурвицевской C -группы G .

ТЕОРЕМА 3. *Многочлен*

$$P(t) = (-1)^{n+k} (t-1)^n (t+1)^k$$

является многочленом Александра некоторой гурвицевской C -группы G тогда и только тогда, когда $n \geq k$.

Доказательство теоремы 1 приведено в § 1, а в § 2 дано доказательство теоремы 2. Несмотря на то, что в доказательствах этих теорем использованы почти одни и те же идеи, для более ясного изложения эти доказательства приведены независимо друг от друга. Доказательство теоремы 3 приведено в § 3. Эти теоремы позволяют сформулировать следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 1. *Многочлен*

$$P(t) = (-1)^m t^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i t^i \in \mathbb{Z}[t]$$

является многочленом Александра некоторой гурвицевской C -группы G тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим условиям:

- (i) *корни многочлена $P(t)$ являются корнями из единицы;*
- (ii) *если ζ – примитивный корень из единицы степени p^k , где p – простое число, то кратность корня $t = \zeta$ многочлена $P(t)$ не превосходит кратности его корня $t = 1$.*

²Напомним, что класс гурвицевских C -групп совпадает с классом фундаментальных групп дополнений к аффинным кривым Гурвица. Следовательно, говорить о многочленах Александра кривых Гурвица – это то же самое, что говорить о многочленах Александра гурвицевских C -групп. Поэтому полученные результаты формулируются в терминах гурвицевских C -групп, так как их доказательства являются чисто алгебраическими.

В § 4, чтобы сравнить случай гурвицевских C -групп с общим случаем C -групп, приведены пример (см. пример 2) C -группы, состоящей из двух неприводимых компонент, многочлен Александра которой равен $(1-t)(t+1)^2$ (ср. этот пример с теоремой 3), и пример (см. пример 1) C -группы, также состоящей из двух неприводимых компонент, многочлен Александра которой равен $(t-1)^2$ (ср. этот пример с упомянутым выше свойством (vi); см. [1, теорема 5.9]).

§ 1. Многочлены Александра неприводимых гурвицевских C -групп

В настоящем параграфе будет доказана теорема 1.

В работе [1] было доказано, что если многочлен $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ является многочленом некоторой неприводимой гурвицевской C -группы G , то корнями многочлена $P(t)$ являются корни из единицы и имеет место равенство $P(1) = 1$. Следовательно, для доказательства теоремы 1 достаточно доказать обратное утверждение.

Рассмотрим многочлен $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$, корни которого являются корнями из единицы, и такой, что $P(1) = 1$.

Вначале покажем, что для доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что для любого многочлена $\Psi(t)$ такого, что:

- (i) корни многочлена $\Psi(t)$ являются корнями из единицы,
- (ii) $\Psi(t)$ не имеет кратных корней,
- (iii) $\Psi(1) = 1$,

найдется неприводимая гурвицевская C -группа, имеющая своим многочленом Александра многочлен $\Psi(t)$.

Действительно, каждый многочлен $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ можно разложить в произведение: $P(t) = \prod_i \Psi_i(t)$, где каждый множитель $\Psi_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$ не имеет кратных корней. Поскольку корнями многочлена $P(t)$ являются корни из единицы, $P(1) = 1$ и $\Psi_i(1) \in \mathbb{Z}$, то $\Psi_i(1) = 1$ для каждого i . Затем, если $\Delta_1(t)$ и $\Delta_2(t)$ являются многочленами Александра двух неприводимых гурвицевских C -групп G_1 и G_2 , заданных гурвицевскими C -копредставлениями $G_i = \langle x_{1,i}, \dots, x_{m_i,i} \mid \mathcal{R}_i \rangle$ степеней m_i , $i = 1, 2$, то согласно [1, предложение 5.12] многочлен Александра гурвицевского произведения $G = G_1 \diamond G_2$ равен $\Delta_1(t)\Delta_2(t)$, где гурвицевское произведение G неприводимых гурвицевских C -групп G_1 и G_2 – это неприводимая гурвицевская C -группа, заданная C -копредставлением:

$$G = \langle x_{1,i}, \dots, x_{m_i,i}, i = 1, 2 \mid \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2, x_{m_1,1} = x_{m_2,2}, \\ [x_{j,i}, (x_{1,\bar{i}} \dots x_{m_{\bar{i}},\bar{i}})^{m_i}] = 1, j = 1, \dots, m_i - 1, i = 1, 2 \rangle,$$

где $\bar{i} = \{1, 2\} \setminus \{i\}$ (напомним, что из соотношений $\mathcal{R}_{\bar{i}}$ следует, что элементы $x_{1,\bar{i}}, \dots, x_{m_{\bar{i}},\bar{i}}$ коммутируют с произведением $x_{1,\bar{i}} \dots x_{m_{\bar{i}},\bar{i}}$).

Зафиксируем один из многочленов $\Psi_i(t) = \Psi(t)$. Обозначим через k такое наименьшее натуральное число, что все корни многочлена $\Psi(t)$ являются корнями степени k из единицы. Поскольку многочлен $\Psi(t)$ не имеет кратных корней, то он является делителем многочлена $t^k - 1$.

Для доказательства существования неприводимой гурвицевской C -группы, многочлен Александера которой совпадает с $\Psi(t)$, рассмотрим факторкольцо $M = M_\Psi = \mathbb{Z}[t]/(\Psi(t))$ кольца $\mathbb{Z}[t]$.

Кольцо M (рассматриваемое как абелева группа относительно операции сложения) является свободной абелевой группой, свободно порожденной элементами $t_0 = t^0, \dots, t_{d-1} = t^{d-1}$, где $d = \deg \Psi(t)$. Пусть $h_0 \in \text{End}_{\mathbb{Z}} M$ действует по правилу $h_0(Q(t)) = tQ(t)$, и пусть вложение $i: \mathbb{F}_1 \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}} M$ определено равенством $i(x_0) = h_0$, где x_0 – порождающий элемент свободной группы $\mathbb{F}_1$. Очевидно, что $h_0 \in \text{Aut } M$. Нетрудно показать (см., например, [7, гл. XV]), что $\det(h_{0,\mathbb{C}} - t \text{Id}) = \Psi(t)$, где $h_{0,\mathbb{C}} \in \text{Aut}(M \otimes \mathbb{C})$ индуцирован автоморфизмом h_0 .

Поскольку $h_0 \in \text{Aut } M$, можно рассмотреть (далее будем использовать мультипликативную запись групповой операции в M) полупрямое произведение

$$G_\Psi = M \rtimes \mathbb{F}_1 \simeq \left\langle t_0, \dots, t_{d-1}, x_0 \mid [t_i, t_j] = 1, 0 \leq i, j \leq d-1, \right. \\ \left. x_0^{-1} t_i x_0 = t_{i+1}, i = 0, \dots, d-2, x_0^{-1} t_{d-1} x_0 = \prod_{i=0}^{d-1} t_i^{-a_i} \right\rangle,$$

где числа a_i являются коэффициентами многочлена $\Psi(t) = t^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i t^i$.

Пусть $\nu: G_\Psi \rightarrow \mathbb{F}_1$ – канонический эпиморфизм, $\ker \nu = M \subset G_\Psi$. Очевидно, что $h_0(g) = x_0^{-1} g x_0$ для $g \in M$.

При $i \geq d$ обозначим $t_i = x_0^{-i} t_0 x_0^i$. Очевидно, элемент x_0^k принадлежит центру группы G_Ψ , так как $\Psi(t)$ является делителем многочлена $t^k - 1$ и, следовательно,

$$t^{k+i} \equiv t^i \pmod{\Psi(t)}$$

для всех $i \geq 0$. Таким образом, мы имеем $t_i = t_{k+i}$ для всех $i \geq 0$.

Для многочлена $P(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i \in \mathbb{Z}[t]$ обозначим

$$x_{P(t)} = x_0 \prod_{i=0}^n t_i^{c_i}.$$

Очевидно, имеет место следующее равенство:

$$x_{P(t)} = x_{Q(t)}, \quad \text{если} \quad P(t) \equiv Q(t) \pmod{\Psi(t)}, \quad (4)$$

а также легко проверить, что

$$x_0^{-1} x_{P(t)} x_0 = x_{tP(t)} \quad (5)$$

и

$$\left(\prod_{i=0}^n t_i^{c_i} \right) x_{Q(t)} \left(\prod_{i=0}^n t_i^{c_i} \right)^{-1} = x_{(t-1)P(t)+Q(t)} \quad (6)$$

для $P(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i$ и любого многочлена $Q(t)$. В частности,

$$x_{t^{i+1}} = x_0^{-1} x_{t^i} x_0 \quad (7)$$

при всех $i \geq 0$.

Поскольку $\Psi(1) = 1$, то найдется такой многочлен $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$, что $\Psi(t) = (t-1)P(t) + 1$. Поэтому из соотношений (4) и (6) следует, что найдется такой элемент $g_{1,0} \in G_\Psi$, что $x_{t^0} = g_{1,0}^{-1}x_0g_{1,0}$. Следовательно, согласно (5) элементы $x_0, x_{t^0}, \dots, x_{t^{d-1}}$ являются сопряженными друг другу, и поэтому для каждого i элемент $x_{t^i}^k$ принадлежит центру группы G_Ψ .

Так как $t_i = x_0^{-1}x_{t^i}$ и элементы $x_0, t_0, \dots, t_{d-1}$ порождают группу G_Ψ , то элементы $x_0, x_{t^0}, \dots, x_{t^{d-1}}$ также порождают группу G_Ψ . Пусть $w_{1,0}(x_0, x_{t^0}, \dots, x_{t^{d-1}})$ является словом, состоящим из букв $x_0, x_{t^0}, \dots, x_{t^{d-1}}$ и обратных к ним, представляющим элемент $g_{1,0}$. Рассмотрим C -группу $\tilde{G}$, заданную C -копредставлением:

$$\begin{aligned} \tilde{G} = \langle x_1, \dots, x_{d+1} \mid & x_{i+1} = x_1^{-1}x_ix_1, \quad 2 \leq i \leq d, \\ & x_1^{-k}x_ix_1^k = x_i, \quad 2 \leq i \leq d+1, \\ & x_2 = w_{1,0}^{-1}(x_1, \dots, x_{d+1})x_1w_{1,0}(x_1, \dots, x_{d+1}) \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Прежде всего заметим, что $\tilde{G}$ является неприводимой C -группой, так как все C -порождающие элементы группы $\tilde{G}$ сопряжены друг другу. Элемент x_1^k принадлежит центру группы $\tilde{G}$. Следовательно, $x_i^k = x_1^k$ для $2 \leq i \leq d+1$, так как элементы x_i^k также сопряжены элементу x_1^k в группе $\tilde{G}$. Поэтому произведение $x_1^k \dots x_{d+1}^k$ также принадлежит центру группы $\tilde{G}$. Следовательно, согласно [1, лемма 5.11] $\tilde{G}$ является гурвицевской C -группой степени $k(d+1)$. (Действительно, можно рассмотреть другое C -копредставление группы $\tilde{G}$ с C -порождающими элементами $\bar{x}_{i,j}$, $1 \leq i \leq d+1$, $1 \leq j \leq k$, удовлетворяющими следующим определяющим соотношениям:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{i,j_1} &= \bar{x}_{i,j_2} && \text{для всех } i, j_1, j_2, \\ x_{1,1}^{-1}x_{i,1}x_{1,1} &= x_{i+1,1} && \text{для } 2 \leq i \leq d, \\ x_{1,1}^{-k}x_{i,1}x_{1,1}^k &= x_{i,1} && \text{для } 2 \leq i \leq d+1, \\ \left[\prod_{i=1}^{d+1} \prod_{j=1}^k \bar{x}_{i,j}, \bar{x}_{i,j} \right] &= 1 && \text{для всех } i \text{ и } j, \end{aligned}$$

$$x_{2,1} = w_{1,0}^{-1}(x_{1,1}, \dots, x_{d+1,1})x_{1,1}w_{1,0}(x_{1,1}, \dots, x_{d+1,1}).$$

Очевидно, что после перенумерации порождающих элементов это копредставление становится гурвицевским C -копредставлением.)

Обозначим через $\tilde{\nu}: \tilde{G} \rightarrow \mathbb{F}_1$ канонический C -эпиморфизм и через $\tilde{h}_1$ действие C -порождающего элемента группы $\mathbb{F}_1$ на группе $\tilde{N} = \ker \tilde{\nu}$, заданное формулой $\tilde{h}_1(g) = x_1^{-1}gx_1$ для $g \in \tilde{N}$.

Легко видеть, что отображение $\tilde{f}$, переводящее множество $\{x_i \mid i = 1, \dots, d+1\}$ порождающих элементов группы $\tilde{G}$ во множество $\{x_0, x_{t^i} \mid i = 0, \dots, d-1\}$ порождающих элементов группы G_Ψ по правилу: $\tilde{f}(x_1) = x_0$ и $\tilde{f}(x_i) = x_{t^{i-2}}$ для $2 \leq i \leq d+1$, может быть продолжено до эпиморфизма $\tilde{f}: \tilde{G} \rightarrow G_\Psi$. Очевидно, что $\tilde{f}(\tilde{N}) = M$ и $h_0(\tilde{f}(g)) = \tilde{f}(\tilde{h}_1(g))$ для всех $g \in \tilde{N}$.

Рассмотрим ограничение $\tilde{f}_{|\tilde{N}}: \tilde{N} \rightarrow M$ эпиморфизма $\tilde{f}$ на $\tilde{N}$. Поскольку M – свободная абелева группа, то эпиморфизм $\tilde{f}_{|\tilde{N}}$ разлагается в композицию: $\tilde{f}_{|\tilde{N}} = \tilde{f}' \circ \tilde{j}$, где $\tilde{j}: \tilde{N} \rightarrow \tilde{N}/\tilde{N}'$ – канонический эпиморфизм и $\tilde{f}': \tilde{N}/\tilde{N}' \rightarrow M$ – эпиморфизм, индуцированный эпиморфизмом $\tilde{f}_{|\tilde{N}}$. Обозначим $\tilde{K} = \ker \tilde{f}'$.

Из работы [5] следует, что абелева группа $\tilde{N}/\tilde{N}'$ является конечно порожденной. Следовательно, группа $\tilde{K}$ также является конечно порожденной абелевой группой. Пусть $\{g_1, \dots, g_n\}$ – множество элементов из $\tilde{N}$ таких, что их образы $\tilde{j}(g_1), \dots, \tilde{j}(g_n)$ в $\tilde{N}/\tilde{N}'$ порождают группу $\tilde{K}$, и пусть слова $w_i(x_1, \dots, x_{d+1})$, $1 \leq i \leq n$, состоящие из букв $x_1^{\pm 1}, \dots, x_{d+1}^{\pm 1}$, представляют элементы g_i . Рассмотрим C -группу G , заданную C -копредставлением:

$$G = \langle x_1, \dots, x_{d+1} \mid \mathcal{R}, \quad x_j = w_i^{-1}(x_1, \dots, x_{d+1})x_j w_i(x_1, \dots, x_{d+1}), \\ 1 \leq j \leq d+1, \quad 1 \leq i \leq n \rangle, \quad (9)$$

где $\mathcal{R}$ – множество определяющих соотношений копредставления (8). Группа G также является гурвицевской C -группой. Более того, из определяющих соотношений для группы G следует, что эпиморфизм $\tilde{f}$ может быть разложен в композицию: $\tilde{f} = f \circ r$, где C -эпиморфизм r отображает порождающие элементы x_i , $1 \leq i \leq d+1$, группы $\tilde{G}$ в порождающие элементы x_i , $1 \leq i \leq d+1$, группы G , а $f: G \rightarrow G_\Psi$ – такой эпиморфизм, что $f(x_1) = x_0$ и $f(x_i) = x_{t^{i-2}}$ при $2 \leq i \leq d+1$. Из (9) следует, что элементы $r(g_i)$, $1 \leq i \leq n$, принадлежат центру группы G .

Обозначим через $\nu: G \rightarrow \mathbb{F}_1$ канонический C -эпиморфизм и через $\tilde{h}$ действие C -порождающего элемента группы $\mathbb{F}_1$ на группе $N = \ker \nu$, заданное формулой $\tilde{h}(g) = x_1^{-1}gx_1$ для всех $g \in N$. Очевидно, что $f(N) = M$ и $h_0(f(g)) = f(\tilde{h}(g))$ для всех $g \in N$.

Ограничение $f_{|N}: N \rightarrow M$ эпиморфизма f на группу N также разлагается в композицию: $f_{|N} = f' \circ j$, где $j: N \rightarrow N/N'$ – канонический эпиморфизм и $f': N/N' \rightarrow M$ – эпиморфизм, индуцированный эпиморфизмом $f_{|N}$. Обозначим $K = \ker f'$. Очевидно, что $r'(\tilde{K}) = K$, где $r': \tilde{N}/\tilde{N}' \rightarrow N/N'$ – эпиморфизм, индуцированный эпиморфизмом r . Пусть $h \in \text{Aut } N/N'$ – автоморфизм, индуцированный автоморфизмом $\tilde{h}$. Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{N} & \xrightarrow{\tilde{j}} & \tilde{N}/\tilde{N}' & & \\ \downarrow r & & \downarrow r' & \searrow \tilde{f}' & \\ & \tilde{K} & & & M \\ & \downarrow r' & & & \\ & K & & \nearrow f' & \\ N & \xrightarrow{j} & N/N' & & \end{array} \quad (10)$$

Элементы $\tilde{j}(g_1), \dots, \tilde{j}(g_n)$ порождают группу $\tilde{K}$. Поскольку гомоморфизмы $\tilde{j}$, j , r и r' в коммутативной диаграмме (10) являются эпиморфизмами, то группа K порождается элементами $j(r(g_1)), \dots, j(r(g_n))$.

По построению группы G элементы $r(g_1), \dots, r(g_n)$ принадлежат центру группы G . Следовательно, $h(j(r(g_i))) = j(r(g_i))$, т.е. $h|_K = \text{Id}$. Однако $t = 1$ не является корнем многочлена Александра $\Delta(t) = \det(h_{\mathbb{C}} - t \text{Id})$ группы G , так как G – неприводимая C -группа. Поэтому группа K принадлежит ядру естественного гомоморфизма $c: N/N' \rightarrow (N/N')_{\mathbb{C}} = (N/N') \otimes \mathbb{C}$, который совпадает с подгруппой $\text{Tors } N/N'$ группы N/N' , состоящей из всех элементов, имеющих конечные порядки. С другой стороны, $\text{Tors } N/N' \subset \ker f'$, так как M является свободной абелевой группой. Поэтому $K = \text{Tors } N/N'$, и так как f' является эпиморфизмом, то $f'_{\mathbb{C}}: (N/N')_{\mathbb{C}} \rightarrow M_{\mathbb{C}}$ является изоморфизмом. Следовательно, $\Delta(t) = \Psi(t)$, так как $h_0(f'(g)) = f'(h(g))$ для всех $g \in N/N'$.

§ 2. Многочлены Александра гурвицевских C -групп, состоящих из нескольких неприводимых компонент

В настоящем параграфе докажем теорему 2.

Рассмотрим многочлен $P(t) = (-1)^{n+\deg P_0}(t-1)^n P_0(t) \in \mathbb{Z}[t]$ такой, что $P_0(1) \neq 0$, все корни многочлена $P_0(t)$ являются корнями из единицы, и если ζ – примитивный корень степени p^k из единицы, где p – простое число, то кратность корня $t = \zeta$ многочлена $P_0(t)$ не превосходит n . Многочлен $P_0(t)$ можно разложить в произведение циклотомических многочленов. Хорошо известно (см., например, [1, лемма 5.3]), что для циклотомического многочлена $\Phi_k(t)$ имеем $\Phi_k(1) \neq 1$ тогда и только тогда, когда $k = p^m$ для некоторого простого числа p . Следовательно, можно найти разложение на множители $P(t) = \prod_{i=1}^{n+1} \Psi_i(t)$, где для каждого $i = 1, \dots, n$ множитель $\Psi_i(t) = (-1)^{\deg \Psi_{i,0}}(1-t)^{\Psi_{i,0}}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ не имеет кратных корней, а $\Psi_{n+1}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ – такой многочлен, что $\Psi_{n+1}(1) = 1$.

Согласно теореме 1 существует гурвицевская C -группа, многочлен Александра которой совпадает с $\Psi_{n+1}(t)$. Кроме того, согласно [1, предложение 5.12] многочлен Александра гурвицевского произведения $G = G_1 \diamond G_2$ двух гурвицевских C -групп равен произведению многочленов Александра этих групп. Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно доказать существование гурвицевской C -группы G , многочлен Александра $\Delta(t)$ которой равен $\Psi(t)$, где многочлен $\Psi(t) = (-1)^{\deg \Psi}(1-t)^{\Psi}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ не имеет кратных корней и все его корни являются корнями из единицы.

Зафиксируем такой многочлен $\Psi(t)$. Пусть $d = \deg \Psi(t)$. Обозначим через k такое наименьшее положительное целое число, что все корни многочлена $\Psi(t)$ являются корнями степени k из единицы. Поскольку $\Psi(t)$ не имеет кратных корней, то $\Psi(t)$ является делителем многочлена $t^k - 1$. Следовательно, $\Psi(0) = \pm 1$ и $\Psi(t) = \pm t^d + \dots$, т.е. его старший коэффициент равен ± 1 .

Как и в доказательстве теоремы 1, для доказательства существования гурвицевской C -группы, многочлен Александра которой совпадает с $\Psi(t)$, рас-

смотрим факторкольцо

$$M = M_\Psi = \mathbb{Z}[t]/(\Psi(t)).$$

Поскольку старший коэффициент многочлена $\Psi(t)$ равен ± 1 , то кольцо M (рассматриваемое как абелева группа относительно операции сложения) является свободной абелевой группой, свободно порожденной элементами $t_0 = t^0, \dots, t_{d-1} = t^{d-1}$. Как и выше, пусть эндоморфизм $h_0 \in \text{End}_{\mathbb{Z}} M$ задан формулой $h_0(Q(t)) = tQ(t)$ и вложение $i: \mathbb{F}_1 \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}} M$ определяется равенством $i(x_0) = h_0$, где x_0 – порождающий элемент свободной группы $\mathbb{F}_1$. Имеем $h_0 \in \text{Aut } M$, так как $\Psi(0) = \pm 1$, и $\det(h_{0,\mathbb{C}} - t \text{Id}) = \Psi(t)$.

Поскольку $h_0 \in \text{Aut } M$, то можно рассмотреть полупрямое произведение

$$G_\Psi = M \rtimes \mathbb{F}_1 \simeq \left\langle t_0, \dots, t_{d-1}, x_0 \mid [t_i, t_j] = 1, 0 \leq i, j \leq d-1, \right. \\ \left. x_0^{-1} t_i x_0 = t_{i+1}, i = 0, \dots, d-2, \right. \\ \left. x_0^{-1} t_{d-1} x_0 = \prod_{i=0}^{d-1} t_i^{-a_i} \right\rangle,$$

где a_i – коэффициенты многочлена $\Psi(t) = t^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i t^i$.

Пусть $\nu_0: G_\Psi \rightarrow \mathbb{F}_1$ – канонический эпиморфизм, $\ker \nu_0 = M \subset G_\Psi$. Имеем $h(g) = x_0^{-1} g x_0$ для всех $g \in M$.

Для $i \geq d$ обозначим $t_i = x_0^{-i} t_0 x_0^i$. Очевидно, что x_0^k принадлежит центру группы G_Ψ , так как $\Psi(t)$ является делителем многочлена $t^k - 1$, и поэтому

$$t^{k+i} \equiv t^i \pmod{\Psi(t)}$$

для всех $i \geq 0$. Таким образом, имеем равенства $t_i = t_{k+i}$ для всех $i \geq 0$.

Обозначим $x_{t^i} = x_0 t_i$. Имеем

$$x_0^{-1} x_{t^i} x_0 = x_{t^{i+1}}. \quad (11)$$

Поскольку каждый элемент t_i принадлежит нормальной абелевой подгруппе M группы G_Ψ , то имеет место равенство $x_0^{-1} g x_0 = x_{t^i}^{-1} g x_{t^i}$ для всех $g \in M$. Следовательно, все элементы $x_{t^i}^k$ так же, как и x_0^k , принадлежат центру группы G_Ψ .

Имеем $t_i = x_0^{-1} x_{t^i}$, и элементы $x_0, t_0, \dots, t_{d-1}$ порождают группу G_Φ , поэтому элементы $x_0, x_{t^0}, \dots, x_{t^{d-1}}$ также порождают G_Ψ .

Рассмотрим C -группу $\tilde{G}$, заданную C -копредставлением

$$\tilde{G} = \langle x_1, \dots, x_{k+1} \mid x_{i+1} = x_1^{-1} x_i x_1, 2 \leq i \leq k, x_1^{-1} x_{k+1} x_1 = x_2, \\ [x_i^k, x_j] = 1, 2 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k+1 \rangle. \quad (12)$$

Прежде всего заметим, что $\tilde{G}$ является C -группой, состоящей из двух неприводимых компонент. Все элементы x_i^k , $i = 1, \dots, k+1$, принадлежат центру группы $\tilde{G}$. Следовательно, произведение $x_1^k \dots x_{k+1}^k$ также принадлежит центру группы $\tilde{G}$. Поэтому, как и в доказательстве теоремы 1, можно показать, что $\tilde{G}$ является гурвицевской C -группой степени $k(k+1)$.

Обозначим, как и выше, через $\tilde{\nu}: \tilde{G} \rightarrow \mathbb{F}_1$ канонический C -эпиморфизм и через $\tilde{h}_1$ действие C -порождающего элемента группы $\mathbb{F}_1$ на группе $\tilde{N} = \ker \tilde{\nu}$, заданное формулой $\tilde{h}_1(g) = x_1^{-1} g x_1$ для всех $g \in \tilde{N}$. Как и выше, легко видеть, что отображение $\tilde{f}$, переводящее множество $\{x_i \mid i = 1, \dots, k+1\}$ порождающих элементов группы $\tilde{G}$ в множество $\{x_0, x_{t^i} \mid i = 0, \dots, k-1\}$ порождающих элементов группы G_Ψ по правилу: $\tilde{f}(x_1) = x_0$ и $\tilde{f}(x_i) = x_{t^{i-2}}$ для $2 \leq i \leq k+1$, может быть продолжено до эпиморфизма $\tilde{f}: \tilde{G} \rightarrow G_\Psi$. Также очевидно, что имеют место равенства $\tilde{f}(\tilde{N}) = M$ и $h_0(\tilde{f}(g)) = \tilde{f}(\tilde{h}_1(g))$ для всех $g \in \tilde{N}$.

Как и в доказательстве теоремы 1, ограничение $\tilde{f}|_{\tilde{N}}: \tilde{N} \rightarrow M$ эпиморфизма $\tilde{f}$ на группу $\tilde{N}$ можно разложить в композицию: $\tilde{f}|_{\tilde{N}} = \tilde{f}' \circ \tilde{j}$, где $\tilde{j}: \tilde{N} \rightarrow \tilde{N}/\tilde{N}'$ – канонический эпиморфизм и $\tilde{f}': \tilde{N}/\tilde{N}' \rightarrow M$ – эпиморфизм, индуцированный эпиморфизмом $\tilde{f}|_{\tilde{N}}$. Обозначим $\tilde{K} = \ker \tilde{f}'$.

Группы $\tilde{N}/\tilde{N}'$ и $\tilde{K}$ являются конечно порожденными абелевыми группами. Пусть $g_1, \dots, g_n \in \tilde{N}$ – такие элементы, что их образы $\tilde{j}(g_1), \dots, \tilde{j}(g_n)$ в $\tilde{N}/\tilde{N}'$ порождают группу $\tilde{K}$, и пусть слова $w_i(x_1, \dots, x_{k+1})$, $1 \leq i \leq n$, состоящие из букв $x_1^{\pm 1}, \dots, x_{k+1}^{\pm 1}$, представляют элементы g_i . Рассмотрим C -группу G , заданную C -копредставлением:

$$G = \langle x_1, \dots, x_{k+1} \mid \mathcal{R}, x_j = w_i^{-1}(x_1, \dots, x_{k+1}) x_j w_i(x_1, \dots, x_{k+1}), \\ 1 \leq j \leq k+1, 1 \leq i \leq n \rangle, \quad (13)$$

где $\mathcal{R}$ – множество определяющих соотношений копредставления (12). Группа G также является гурвицевской C -группой, состоящей из двух неприводимых компонент. Более того, по построению группы G эпиморфизм $\tilde{f}$ можно разложить в композицию: $\tilde{f} = f \circ r$, где C -эпиморфизм r отображает порождающие элементы x_i , $1 \leq i \leq d+1$, группы $\tilde{G}$ в порождающие элементы x_i , $1 \leq i \leq k+1$, группы G и $f: G \rightarrow G_\Psi$ – такой эпиморфизм, что $f(x_1) = x_0$ и $f(x_i) = x_{t^{i-2}}$ для $2 \leq i \leq k+1$. Из (13) следует, что элементы $r(g_i)$, $1 \leq i \leq n$, принадлежат центру группы G .

Пусть $\nu: G \rightarrow \mathbb{F}_1$ – канонический C -эпиморфизм и $\tilde{h}$ – действие C -порождающего элемента группы $\mathbb{F}_1$ на группе $N = \ker \nu$, заданное формулой $\tilde{h}(g) = x_1^{-1} g x_1$ для всех $g \in N$. Очевидно, имеют место равенства $f(N) = M$ и $h_0(f(g)) = f(\tilde{h}(g))$ для всех $g \in N$.

Ограничение $f|_N: N \rightarrow M$ эпиморфизма f на N можно также разложить в композицию: $f|_N = f' \circ j$, где $j: N \rightarrow N/N'$ – канонический эпиморфизм и $f': N/N' \rightarrow M$ – эпиморфизм, индуцированный эпиморфизмом $f|_N$. Обозначим $K = \ker f'$. Очевидно, что $r'(K) = K$, где $r': \tilde{N}/\tilde{N}' \rightarrow N/N'$ – эпиморфизм, индуцированный эпиморфизмом r . Пусть $h \in \text{Aut } N/N'$ – автоморфизм, индуцированный автоморфизмом $\tilde{h}$.

Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{N} & \xrightarrow{j} & \tilde{N}/\tilde{N}' & \xrightarrow{c} & (\tilde{N}/\tilde{N}')_{\mathbb{C}} \\
 \downarrow r & & \nearrow \tilde{K} & \searrow \tilde{f}' & \downarrow \tilde{f}'_{\mathbb{C}} \\
 & & \tilde{K} & & \\
 & & \downarrow r' & & \\
 & & K & & \\
 & & \searrow & \nearrow f' & \\
 N & \xrightarrow{j} & N/N' & \xrightarrow{c} & (N/N')_{\mathbb{C}} \\
 & & & & \uparrow f'_{\mathbb{C}} \\
 & & & & M_{\mathbb{C}} \\
 & & & & \uparrow c \\
 & & & & M
 \end{array}
 \quad (14)$$

Согласно [1, теорема 5.9] значение $t = 1$ является корнем кратности один многочлена Александра $\Delta(t) = \det(h_{\mathbb{C}} - t \text{Id})$ группы G , так как гурвицевская $\mathbb{C}$ -группа G состоит из двух неприводимых компонент. Кроме того, кратность корня $t = 1$ характеристического многочлена $\det(h_{0,\mathbb{C}} - t \text{Id}) = (-1)^d \Psi(t)$ также равна единице. Следовательно, собственные подпространства $((N/N')_{\mathbb{C}})_1 \subset (N/N')_{\mathbb{C}}$ и $(M_{\mathbb{C}})_1 \subset M_{\mathbb{C}}$, соответствующие собственному значению 1, являются одномерными. Затем, $f_{\mathbb{C}}$ является эпиморфизмом таким, что $f'_{\mathbb{C}}(h_{\mathbb{C}}(v)) = h_{0,\mathbb{C}}(f'_{\mathbb{C}}(v))$ для всех $v \in (N/N')_{\mathbb{C}}$. Поэтому $((N/N')_{\mathbb{C}})_1 \not\subset \ker f'_{\mathbb{C}}$.

Элементы $\tilde{j}(g_1), \dots, \tilde{j}(g_n)$ порождают группу $\tilde{K}$. Поскольку гомоморфизмы $\tilde{f}, f, r$ и r' в коммутативной диаграмме (14) являются эпиморфизмами, то группа K порождается элементами $j(r(g_1)), \dots, j(r(g_n))$.

По построению группы G элементы $r(g_1), \dots, r(g_n)$ принадлежат центру группы G . Поэтому $h(j(r(g_i))) = j(r(g_i))$, т. е. $h|_K = \text{Id}$, и, следовательно, $c(K) = \ker f'_{\mathbb{C}} \cap ((N/N')_{\mathbb{C}})_1 = 0$. Имеем $K \subset \ker c = \text{Tors } N/N'$. С другой стороны, $\text{Tors } N/N' \subset K$, так как M является свободной абелевой группой. Поэтому $K = \text{Tors } N/N'$ и $f'_{\mathbb{C}}$ является эквивариантным изоморфизмом. Следовательно, $\Delta(t) = \Psi(t)$. Теорема 2 доказана.

§ 3. Гурвицевские $\mathbb{C}$ -группы с многочленами Александра $\Delta(t) = (-1)^{n+k}(t-1)^n(t+1)^k$

В настоящем параграфе доказана теорема 3.

Рассмотрим пары $A = (M, h)$, состоящие из конечно порожденных свободных абелевых групп M и автоморфизмов $h \in \text{Aut } M$. В частности, положим $A_{\pm} = (\mathbb{Z}, \pm \text{Id})$ и $A_{+-} = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, h_{\pm})$, где автоморфизм $h_{\pm}$ в некотором базисе e_1, e_2 группы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ действует по правилу: $h_{\pm}(e_1) = e_2$ и $h_{\pm}(e_2) = e_1$. Для двух пар $A = (M, h)$ и $A' = (M', h')$ равенство $A = A'$ будет означать, что пары A и A' являются изоморфными, т. е. существует изоморфизм $g: M \rightarrow M'$ такой, что $h = g^{-1} \circ h' \circ g$. Для A и A' положим $A \oplus A' = (M \oplus M', h \oplus h')$ и обозначим через nA прямую сумму n копий пары A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $A = (M, h)$ – такая пара, что $h^2 = \text{Id}$. Тогда существуют целые числа n_1, n_2 и n_3 такие, что $A = n_1 A_{+} \oplus n_2 A_{-} \oplus n_3 A_{+-}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $M_{+} = \{a \in M \mid h(a) = a\}$ и $M_{-} = \{a \in M \mid h(a) = -a\}$. Рассмотрим подгруппу M' в M , порожденную элементами $a \in M_{+} \cup M_{-}$. Очевидно, что $M' = M_{+} \oplus M_{-}$. Обозначим через $p_{+}: M' \rightarrow M_{+}$

и $p_-: M' \rightarrow M_-$ проекции на слагаемые. Поскольку M является свободным $\mathbb{Z}$ -модулем, то его подмодули M_+ и M_- также являются свободными $\mathbb{Z}$ -модулями. Пусть M_+ и M_- свободно порождаются над $\mathbb{Z}$ элементами $e_1, \dots, e_{k_1}$ и $e_{k_1+1}, \dots, e_{k_1+k_2}$ соответственно.

Покажем, что для любого $a \in M$ элемент $2a$ принадлежит модулю M' . Действительно, для каждого $a \in M$ имеем $a + h(a) \in M_+$, $a - h(a) \in M_-$ и $2a = (a + h(a)) + (a - h(a))$. Следовательно, все элементы абелевой группы M/M' являются элементами второго порядка. Заметим также, что согласно определению подгрупп $M_{\pm}$ если для элемента $a \in M$ имеет место включение $2a \in M_+$ (соответственно, $2a \in M_-$), то $a \in M_+$ (соответственно, $a \in M_-$).

Имеем $M/M' \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n_3}$ для некоторого целого числа $n_3 \geq 0$. Выберем элементы $a_1, \dots, a_{n_3} \in M$, образы которых порождают группу M/M' , и пусть $2a_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,k_1+k_2})$, $i = 1, \dots, n_3$, – координаты элементов $2a_i$ в базисе $e_1, \dots, e_{k_1+k_2}$. Не ограничивая общности, прибавляя или вычитая элементы, принадлежащие M' , можем предполагать, что при каждом $i = 1, \dots, n_3$ каждая координата $\alpha_{i,j}$ равна 0 или 1 и найдется j , для которого $\alpha_{i,j} = 1$.

Покажем, что элементы $2a_1, \dots, 2a_{n_3}$ являются линейно независимыми над $\mathbb{Z}$. Действительно, предположим, что для некоторых $m_1, \dots, m_{n_3} \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство $\sum m_i(2a_i) = 0$ в M' . Так как M' – свободная абелева группа, то можно предполагать, что по крайней мере одно из чисел m_i , скажем m_{n_3} , является нечетным числом. В этом случае образ элемента a_{n_3} в M/M' является линейной комбинацией образов элементов $a_1, \dots, a_{n_3-1}$. Противоречие.

Покажем, что элементы $p_+(2a_1), \dots, p_+(2a_{n_3})$ (соответственно, элементы $p_-(2a_1), \dots, p_-(2a_{n_3})$) являются линейно независимыми над $\mathbb{Z}$. Действительно, предположим, что для некоторых $m_1, \dots, m_{n_3} \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство $\sum m_i p_+(2a_i) = 0$ в M_+ . Поскольку M_+ – свободная абелева группа, то можем предполагать, что по крайней мере одно из чисел m_i , скажем m_{n_3} , является нечетным числом. Тогда $2a = 2 \sum m_i a_i \in M_-$ и, следовательно, $a = \sum m_i a_i \in M_-$. Но это невозможно, так как образы элементов $a_1, \dots, a_{n_3-1}$ не могут порождать $M/M' \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n_3}$. В качестве следствия получаем, что $n_3 \leq \min(k_1, k_2)$.

Покажем, что можно так выбрать элементы $a_1, \dots, a_{n_3}$, образы которых порождают M/M' , что система элементов $p_-(2a_1), \dots, p_-(2a_{n_3})$ может быть расширена до свободного базиса свободного $\mathbb{Z}$ -модуля M_- . Действительно, не ограничивая общности (если необходимо, перенумеруем элементы $e_{k_1+1}, \dots, e_{k_1+k_2}$), предположим, что $\alpha_{1,k_1+k_2} = 1$. Для $i = 2, \dots, n_3$, заменяя a_i на

$$a'_i = a_i - \alpha_{i,k_1+k_2} \left(a_1 - \sum_{j=1}^{k_1+k_2-1} \alpha_{1,j} (1 - \alpha_{i,j}) e_j \right),$$

получим новую систему элементов $a_1, a'_2, \dots, a'_{n_3}$ такую, что:

(i) образы элементов $a_1, a'_2, \dots, a'_{n_3}$ порождают M/M' ;

(ii) координаты элементов $2a_1, 2a'_2, \dots, 2a'_{n_3}$ в базисе $e_1, \dots, e_{k_1+k_2}$ равны 0 или 1;

(iii) для каждого $i = 2, \dots, n_3$ последняя координата элемента $2a'_i$ в базисе $e_1, \dots, e_{k_1+k_2}$ равна нулю.

Теперь ясно, что, повторяя подобные замены n_3 раза, можем найти новые элементы $a_1, a_2, \dots, a_{n_3}$ и новый базис $e_{k_1+1}, \dots, e_{k_1+k_2}$ модуля M_- такие, что:

(i) образы элементов $a_1, a_2, \dots, a_{n_3}$ порождают M/M' ;

(ii) для каждого $i = 1, \dots, n_3$ координаты $\alpha_{i,j}$ элемента $2a_i$ в новом базисе $e_1, \dots, e_{k_1+k_2}$ равны 0 или 1;

(iii) для каждого $i = 1, \dots, n_3$ координата $\alpha_{i,j}$ элемента $2a_i$ в новом базисе $e_1, \dots, e_{k_1+k_2}$ равна нулю при $j > k_1 + k_2 - i + 1$ и $\alpha_{i,k_1+k_2-i+1} = 1$.

В результате получаем разложение группы M_- в прямую сумму: $M_- = \widetilde{M}_- \oplus \widetilde{M}_-$, где группа $\widetilde{M}_-$ порождена элементами $e_{k_1+1}, \dots, e_{k_1+k_2-n_3}$, а $\widetilde{M}_-$ порождена элементами $\widetilde{p}_-(2a_1), \dots, \widetilde{p}_-(2a_{n_3})$.

Обозначим через $\widetilde{M}$ подгруппу в M , порожденную элементами $a_1, \dots, a_{n_3}$ вместе с элементами $e_1, \dots, e_{k_1} \in M_+$. Легко видеть, что $M = \widetilde{M} \oplus \widetilde{M}_-$, группа $\widetilde{M}$ инвариантна относительно действия h , $M_+ = \{a \in \widetilde{M} \mid h(a) = a\}$ и $\widetilde{M}_- = \{a \in \widetilde{M} \mid h(a) = -a\}$. Пусть $\widetilde{M}' = M_+ \oplus \widetilde{M}_- \subset \widetilde{M}$, и обозначим через $\widetilde{p}_+ : \widetilde{M}' \rightarrow M_+$ и $\widetilde{p}_- : \widetilde{M}' \rightarrow \widetilde{M}_-$ проекции на прямые слагаемые.

Покажем, что с помощью линейного треугольного преобразования можно заменить выбранную выше систему элементов $a_1, \dots, a_{n_3}$ на систему элементов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n_3}$ так, что образы элементов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n_3}$ порождают $\widetilde{M}/\widetilde{M}'$, элементы $\widetilde{p}_-(2\bar{a}_1), \dots, \widetilde{p}_-(2\bar{a}_{n_3})$ порождают $\widetilde{M}_-$ и система элементов $\widetilde{p}_+(2\bar{a}_1), \dots, \widetilde{p}_+(2\bar{a}_{n_3})$ может быть расширена до свободного базиса свободного $\mathbb{Z}$ -модуля M_+ . Действительно, как и выше, не ограничивая общности (если это необходимо, то перенумеруем элементы $e_1, \dots, e_{k_1}$), можем предполагать, что $\alpha_{1,k_1} = 1$. Тогда для $i = 2, \dots, n_3$, заменяя a_i на

$$a'_i = a_i - \alpha_{i,k_1} \left(a_1 - \sum_{j=1}^{k_1-1} \alpha_{1,j} (1 - \alpha_{i,j}) e_j \right),$$

получаем новую систему элементов $a_1, a'_2, \dots, a'_{n_3}$ такую, что:

(i) образы элементов $a_1, a'_2, \dots, a'_{n_3}$ порождают $\widetilde{M}/\widetilde{M}'$;

(ii) элементы $\widetilde{p}_-(2a_1), \widetilde{p}_-(2a'_2), \dots, \widetilde{p}_-(2a'_{n_3})$ порождают $\widetilde{M}_-$;

(iii) координаты элементов $2a_1, 2a'_2, \dots, 2a'_{n_3}$ в базисе $e_1, \dots, e_{k_1}$, $\widetilde{p}_-(2a_1), \widetilde{p}_-(2a'_2), \dots, \widetilde{p}_-(2a'_{n_3})$ равны 0 или 1;

(iv) для $i = 2, \dots, n_3$ координаты α_{i,k_1} элементов $2a'_i$ в базисе $e_1, \dots, e_{k_1}$, $\widetilde{p}_-(2a_1), \widetilde{p}_-(2a'_2), \dots, \widetilde{p}_-(2a'_{n_3})$ равны нулю.

Очевидно, что, повторяя подобные замены n_3 раза, можно найти новые элементы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n_3}$ и новый базис $e_1, \dots, e_{k_1}$ свободного $\mathbb{Z}$ -модуля M_+ такие, что:

(i) образы элементов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n_3}$ порождают $\widetilde{M}/\widetilde{M}'$;

(ii) элементы $\widetilde{p}_-(2\bar{a}_1), \widetilde{p}_-(2\bar{a}_2), \dots, \widetilde{p}_-(2\bar{a}_{n_3})$ порождают $\widetilde{M}_-$;

(iii) для каждого $i = 1, \dots, n_3$ координаты $\alpha_{i,j}$ элемента $2\bar{a}_i$ в новом базисе $e_1, \dots, e_{k_1}$, $\widetilde{p}_-(2\bar{a}_1), \widetilde{p}_-(2\bar{a}_2), \dots, \widetilde{p}_-(2\bar{a}_{n_3})$ равны 0 или 1;

(iv) для каждого $i = 1, \dots, n_3$ координаты $\alpha_{i,j}$, $j \leq k_1$, элемента $2\bar{a}_i$ в новом базисе $e_1, \dots, e_{k_1}$, $\widetilde{p}_-(2\bar{a}_1), \widetilde{p}_-(2\bar{a}_2), \dots, \widetilde{p}_-(2\bar{a}_{n_3})$ равны нулю при $j > k_1 - i + 1$ и $\alpha_{i,k_1-i+1} = 1$.

В результате группа M_+ разлагается в прямую сумму: $M_+ = \widetilde{M}_+ \oplus \overline{M}_+$, где $\overline{M}_+$ порождена элементами $e_1, \dots, e_{k_1-n_3}$, а $\widetilde{M}_+$ порождена элементами $\tilde{p}_+(2\bar{a}_1), \dots, \tilde{p}_+(2\bar{a}_{n_3})$. Обозначим через $\overline{M}_{+-}$ подгруппу группы M , порожденную элементами $\bar{a}_1, h(\bar{a}_1), \dots, \bar{a}_{n_3}, h(\bar{a}_{n_3})$. Легко видеть, что группа $\overline{M}_{+-}$ инвариантна относительно действия h и, кроме того, $\widetilde{M}_+ \oplus \widetilde{M}_- \subset \overline{M}_{+-}$. Поэтому $\text{rk } \overline{M}_{+-} = 2n_3$ и по построению имеем $(\overline{M}_{+-}, h) \simeq n_3 A_{+-}$. Более того,

$$(M, h) = (\overline{M}_+ \oplus \overline{M}_- \oplus \overline{M}_{+-}, h) \simeq n_1 A_+ \oplus n_2 A_- \oplus n_3 A_{+-},$$

где $n_1 = k_1 - n_3$ и $n_2 = k_2 - n_3$. Предложение доказано.

ЛЕММА 1. Пусть $(M, h) = n_1 A_+ \oplus n_2 A_- \oplus n_3 A_{+-}$. Рассмотрим полупрямое произведение $G = M \rtimes \langle h \rangle$. Тогда:

- (i) $G/G' \simeq \mathbb{Z}^{n_1+n_3+1} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n_2}$;
- (ii) $\det(t \text{Id} - h_{\mathbb{C}}) = (t-1)^{n_1+n_3} (t+1)^{n_2+n_3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа G задается копредставлением:

$$\begin{aligned} G \simeq \langle e_1, \dots, e_{n_1+n_2+2n_3}, h \mid [e_i, e_j] = 1, 1 \leq i, j \leq n_1 + n_2 + 2n_3, \\ h^{-\varepsilon} e_i h^{\varepsilon} = e_{n_3+i}, 1 \leq i \leq n_3, \varepsilon = \pm 1, \\ h^{-1} e_{2n_3+i} h = e_{2n_3+i}, 1 \leq i \leq n_1, \\ h^{-1} e_{2n_3+n_1+i} h = e_{2n_3+n_1+i}^{-1}, 1 \leq i \leq n_2 \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, группа G/G' может быть задана копредставлением:

$$\begin{aligned} G/G' \simeq \langle e_1, \dots, e_{n_1+n_2+2n_3+1} \mid [e_i, e_j] = 1, 1 \leq i, j \leq n_1 + n_2 + 2n_3 + 1, \\ e_i = e_{n_3+i}, 1 \leq i \leq n_3, \\ e_{2n_3+n_1+i} = e_{2n_3+n_1+i}^{-1}, 1 \leq i \leq n_2 \rangle, \end{aligned}$$

т. е. $G/G' \simeq \mathbb{Z}^{n_1+n_3+1} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n_2}$.

Утверждение (ii) леммы тривиально.

Вернемся к доказательству теоремы 3. Пусть многочлен $\Delta(t) = (-1)^{n+k} \times (t-1)^n (t+1)^k$ является многочленом Александера гурвицевской C -группы G . Тогда согласно [1, теорема 5.9] группа G состоит из $n+1$ неприводимых компонент, т. е. $G/G' \simeq \mathbb{Z}^{n+1}$.

Рассмотрим канонический C -эпиморфизм $\nu: G \rightarrow \mathbb{F}_1$, $N = \ker \nu$. В работе [5] доказано, что группа N является конечно представленной. Поэтому N/N' — конечно порожденная абелева группа. Пусть $T = \text{Tors}(N/N')$ — подгруппа группы N/N' , состоящая из элементов конечных порядков. Тогда группа T инвариантна при действии h . Следовательно, h индуцирует действие (обозначим его той же самой буквой) h на свободной абелевой группе $M = (N/N')/T$. Так как действие $h_{\mathbb{C}}$ на $(N/N') \otimes \mathbb{C} \simeq M \otimes \mathbb{C}$ является полупростым и все корни характеристического многочлена $\det(h_{\mathbb{C}} - t \text{Id}) = \Delta(t)$ равны ± 1 , то $h_{\mathbb{C}}^2 = \text{Id}$. Следовательно, $h^2 = \text{Id}$ на M . Из предложения 1 следует, что $(M, h) \simeq n_1 A_+ \oplus n_2 A_- \oplus n_3 A_{+-}$ для некоторых неотрицательных целых чисел n_1, n_2, n_3 .

Легко видеть, что T является нормальной подгруппой в G/N' . Поэтому точная последовательность

$$1 \rightarrow N/N' \rightarrow G/N' \xrightarrow{\nu} \mathbb{F}_1 \rightarrow 1$$

влечет точную последовательность

$$1 \rightarrow M \rightarrow \overline{G} \xrightarrow{\nu} \mathbb{F}_1 \rightarrow 1, \quad (15)$$

где $\overline{G} = (G/N')/T$. Обозначим через $f: G \rightarrow \overline{G}$ и $g: N \rightarrow M$ канонические эпиморфизмы и через $\nu_1: \overline{G} \rightarrow \mathbb{F}_1$ эпиморфизм, индуцированный эпиморфизмом ν . Точная последовательность (15) может быть включена в следующую коммутативную диаграмму точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\nu} & \mathbb{F}_1 \longrightarrow 1 \\ & & g \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow \simeq \\ 1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \overline{G} & \xrightarrow{\nu_1} & \mathbb{F}_1 \longrightarrow 1 \end{array}$$

Легко видеть, что $\overline{G} \simeq M \ltimes \langle h \rangle$. Поэтому согласно лемме 1 имеем

$$n = n_1 + n_3 \quad \text{и} \quad k = n_2 + n_3. \quad (16)$$

Эпиморфизм f индуцирует эпиморфизм $f_*: G/G' \simeq Z^{n+1} \rightarrow \overline{G}/\overline{G}'$. Применяя лемму 1 еще раз, имеем $\overline{G}/\overline{G}' \simeq \mathbb{Z}^{n_1+n_3+1} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n_2}$. Следовательно,

$$n_1 + n_2 + n_3 + 1 \leq n + 1. \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что $n_2 = 0$ и $k \leq n$.

В работе [1] было показано, что многочлен Александера гурвицевской C -группы

$$G(2) = \langle x_1, \dots, x_4 \mid x_2^2 x_1 x_2^{-2} = x_4, x_3 = x_2, x_4^2 x_2 x_4^{-2} = x_2, \\ [x_i, x_1 \dots x_4] = 1, i = 1, \dots, 4 \rangle$$

равен $t^2 - 1$. Кроме того, многочлен Александера абелевой C -группы $\mathbb{Z}^n$ равен $(-1)^{n-1}(t-1)^{n-1}$. Следовательно, при $k \leq n$ для доказательства существования гурвицевской C -группы G , имеющей многочлен Александера $\Delta(t) = (-1)^{n+k}(t-1)^n(t+1)^k$, достаточно рассмотреть гурвицевское произведение $G = G(2)^{\circ k} \diamond \mathbb{Z}^{n+1-k}$. Теорема 3 доказана.

§ 4. Два примера C -групп

В настоящем параграфе покажем, что в общем случае C -групп утверждения, аналогичные теореме 5.9 из [1] и теореме 3, не имеют места.

ПРИМЕР 1. Существует C -группа, состоящая из двух неприводимых компонент, многочленом Александра которой является $\Delta(t) = (t - 1)^2$.

Рассмотрим C -группу G , заданную C -копредставлением:

$$G = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_3 = x_1^{-1}x_2x_1, \quad x_3 = x_1^{-1}x_3x_2x_3^{-1}x_1 \rangle.$$

Легко видеть, что C -группа G состоит из двух неприводимых компонент. Обозначим через N ядро канонического C -эпиморфизма $\nu: G \rightarrow \mathbb{F}_1$. Не ограничивая общности, можем считать, что $\tilde{h}(g) = x_1gx_1^{-1}$ для $g \in N$.

Для нахождения конечного копредставления группы N используем метод Рейдемейстера–Шрайера. Напомним кратко этот метод (см., например, [8, § 2.3]). Вначале выбирается так называемая шрайерова система представителей, т. е. выбирается по представителю s_i в каждом правом классе смежности группы $G = \langle x \in X \mid r = 1, r \in \mathcal{R} \rangle$ по подгруппе N таким образом, что если слово s_i является представителем, то все его начальные подслова также являются представителями некоторых смежных классов (в нашем случае в качестве шрайеровых представителей смежных классов группы G по подгруппе N выберем элементы x_1^k , $k \in \mathbb{Z}$). В этом случае группа N порождается элементами $a_{i,j} = s_i \cdot x_j \cdot \overline{s_i x_j}^{-1}$, где $\overline{s_i x_j}$ – шрайеров представитель смежного класса, содержащего элемент $s_i x_j$, а системой определяющих соотношений для N является множество

$$\{s_i r s_i^{-1} = 1 \mid r \in \mathcal{R}\},$$

где соотношения $s_i r s_i^{-1}$ записаны в виде слов, состоящих из букв $a_{i,j}$ и $a_{i,j}^{-1}$.

В нашем случае группа N порождается элементами

$$a_{k,j} = x_1^k x_j x_1^{-(k+1)}, \quad (18)$$

где $j = 2, 3$ и $k \in \mathbb{Z}$. Легко видеть, что действие $\tilde{h}$ задается формулой $\tilde{h}(a_{k,j}) = a_{k+1,j}$.

Соотношение $x_3 = x_1^{-1}x_2x_1$ дает соотношения

$$a_{k,3} = a_{k-1,2} \quad (19)$$

для $k \in \mathbb{Z}$, а соотношение $x_3 = x_1^{-1}x_3x_2x_3^{-1}x_1$ приводит к соотношениям

$$a_{k,3} = a_{k-1,3}a_{k,2}a_{k,3}^{-1} \quad (20)$$

для $k \in \mathbb{Z}$. Согласно методу Рейдемейстера–Шрайера множество, состоящее из соотношений (19) и (20), является множеством определяющих соотношений для N .

Обозначим через $\bar{a}_{k,j}$ образ в N/N' элемента $a_{k,j}$. Из (19) и (20) следует, что абелева группа N/N' порождается элементами $\bar{a}_{k,j}$, $j = 2, 3$ и $k \in \mathbb{Z}$, которые связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{k,3} &= \bar{a}_{k-1,2}, \\ 2\bar{a}_{k,3} &= \bar{a}_{k-1,3} + \bar{a}_{k,2} \end{aligned} \quad (21)$$

для $k \in \mathbb{Z}$. Действие h на N/N' , индуцированное действием $\tilde{h}$, задается формулой $h(\bar{a}_{k,j}) = \bar{a}_{k+1,j}$ для $j = 2, 3$ и $k \in \mathbb{Z}$.

Из (21) следует, что группа N/N' порождается элементами $\bar{a}_{0,3}$ и $\bar{a}_{1,3}$ и имеет место равенство $\bar{a}_{2,3} = -\bar{a}_{0,3} + 2\bar{a}_{1,3}$. Следовательно, в базисе $\bar{a}_{0,3}, \bar{a}_{1,3}$ автоморфизм h задается матрицей:

$$h = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $\det(h - t \text{Id}) = (t - 1)^2$.

ПРИМЕР 2. Существует C -группа, состоящая из двух неприводимых компонент, многочленом Александра которой является $\Delta(t) = (1 - t)(t + 1)^2$.

Рассмотрим C -группу G , заданную C -копредставлением:

$$G = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_3 = x_1^{-1}x_2x_1, [x_1, (x_3^2x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_3)] = 1 \rangle.$$

Очевидно, G является C -группой, состоящей из двух неприводимых компонент. Обозначим через N ядро канонического C -эпиморфизма $\nu: G \rightarrow \mathbb{F}_1$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\tilde{h}(g) = x_1gx_1^{-1}$ для $g \in N$. Применяя метод Рейдемейстера–Шрайера, покажем, что группа N порождается элементами

$$a_{k,j} = x_1^k x_j x_1^{-(k+1)}, \quad (22)$$

где $j = 2, 3$ и $k \in \mathbb{Z}$. Действие $\tilde{h}$ на N задается формулой $\tilde{h}(a_{k,j}) = a_{k+1,j}$.

Как и в примере 1, соотношение $x_3 = x_1^{-1}x_2x_1$ приводит к соотношениям

$$a_{k,3} = a_{k-1,2} \quad (23)$$

для $k \in \mathbb{Z}$, а соотношение $[x_1, (x_3^2x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_3)] = 1$ дает соотношения

$$a_{k,3}a_{k+1,3}a_{k+1,2}a_{k+1,3}a_{k+2,3}^{-1}a_{k+2,2}^{-1}a_{k+2,3}^{-1}a_{k+1,3}^{-1} = 1 \quad (24)$$

для $k \in \mathbb{Z}$. Согласно методу Рейдемейстера–Шрайера множество соотношений (23) и (24) является множеством определяющих соотношений для N .

Обозначим через $\bar{a}_{k,j}$ образ элемента $a_{k,j}$ в группе N/N' . Из (23) и (24) следует, что абелева группа N/N' порождена элементами $\bar{a}_{k,j}$, $j = 2, 3$ и $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned} \bar{a}_{k,3} &= \bar{a}_{k-1,2}, \\ \bar{a}_{k,3} + \bar{a}_{k+1,3} + \bar{a}_{k+1,2} - 2\bar{a}_{k+2,3} - \bar{a}_{k+2,3} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

для $k \in \mathbb{Z}$. Действие h на N/N' , индуцированное автоморфизмом $\tilde{h}$, задается формулой $h(\bar{a}_{k,j}) = \bar{a}_{k+1,j}$ для $j = 2, 3$ и $k \in \mathbb{Z}$.

Из (25) следует, что группа N/N' порождается элементами $\bar{a}_{0,3}$, $\bar{a}_{1,3}$, $\bar{a}_{2,3}$ и имеет место равенство $\bar{a}_{3,3} = \bar{a}_{0,3} + \bar{a}_{1,3} - \bar{a}_{2,3}$. Следовательно, в базисе $\bar{a}_{0,3}, \bar{a}_{1,3}, \bar{a}_{2,3}$ автоморфизм h задается матрицей:

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Можно легко проверить, что

$$\det(h - t \operatorname{Id}) = (1 - t)(t + 1)^2.$$

Список литературы

1. Гроель Г.-М., Куликов Вик. С., “О симплектических накрытиях проективной плоскости”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:4 (2005), 19–58.
2. Куликов Вик. С., “Многочлены Александера плоских алгебраических кривых”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:1 (1993), 76–101.
3. Куликов Вик. С., “Геометрическая реализация C -групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:4 (1994), 194–203.
4. Куликов Вик. С., “Формула разложения на множители полного поворота с удвоенным числом нитей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:1 (2004), 123–158.
5. Куликов Вик. С., Харламов И. М., “О брэйд-монодромных разложениях на множители”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 79–118.
6. Куликова О. В., “О фундаментальных группах дополнений к кривым Гурвица”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 125–132.
7. Кузьмин Ю. В., “Об одном способе построения C -групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:4 (1995), 105–124.
8. Ленг С., *Алгебра*, Мир, М., 1968.
9. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., *Комбинаторная теория групп: Представления групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, М., 1974.

Вик. С. Куликов (Vik. S. Kulikov)

Математический институт

им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kulikov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию

21.12.2004