Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М.-М. Деза, С. В. Шпекторов, М. И. Штогрин, Нерасши-
ряемые конечные полициклы, *Изв. РАН. Сер. матем.*,
2006, том 70, выпуск 1, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/im577>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:51:45

УДК 514.17+519.17

М. Деза, С. В. Шпекторов, М. И. Штогрин

Нерасширяемые конечные полициклы

Приведено достаточно простое доказательство результата, анонсированного в работе [2]. А именно, среди конечных (r, q) -полициклов имеют всего семь нерасширяемых (r, q) -полициклов: тетраэдр без грани, куб без грани, октаэдр без грани, додекаэдр без грани, икосаэдр без грани, октаэдр с расщепленной вершиной и икосаэдр с расщепленной вершиной.

Библиография: 6 наименований

Введение

Неразделимый¹ плоский граф G с присоединенными к нему внутренними гранями назовем (r, q) -полициклом и обозначим через $P(G)$ (см. [2]–[4]), если выполнены следующие три независимых между собой условия:

- (i) все внутренние грани суть r -угольники, где r фиксировано, $r \geq 3$;
- (ii) степени всех внутренних вершин равны q , где q фиксировано, $q \geq 3$;
- (iii) степени граничных вершин не превышают q (все они не меньше 2).

Все внутренние грани плоского графа G будем называть *гранями* (r, q) -полицикла $P(G)$. Любая достаточно малая окрестность внутренней вершины (r, q) -полицикла $P(G)$ гомеоморфна кругу. Произвольный конечный (r, q) -полицикл $P(G)$, в целом, также гомеоморфен кругу.

В работе [4] было доказано, что вершины, ребра и грани произвольного (r, q) -полицикла $P(G)$ вместе составляют *клеточный комплекс* (см.² [5, § 67]), в котором пересечение любых двух клеток опять есть клетка из этого же комплекса. Именно такому условию удовлетворяют *кубические комплексы*, введенные С. П. Новиковым в 1986 г., как и более общие комплексы, составленные из произвольных выпуклых многогранников (см. [6, с. 47]). С точки зрения попарных пересечений все клетки указанных выше комплексов ведут себя точно так же, как и симплексы в *симплициальных комплексах* (см. [5, с. 60]).

¹Терминология и многочисленные факты, касающиеся теории графов, взяты из книги [1].

²В работе [5, с. 298] мы читаем: “Нульмерная клетка состоит из одной точки, одномерная – из двух отрезков, инцидентных с одной точкой. Граница двумерной клетки представляет окружность, а сама клетка – круг.” Конечно же, тут имелось в виду, что одномерная клетка есть отрезок, а ее граница состоит из двух точек.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00170), программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-2185.2003.1) и государственной программы фундаментальных исследований ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Понятие (r, q) -полицикла является широким обобщением правильных разбиений сферы, евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского, традиционно обозначаемых через (r^q) . Они имеют широкое применение в химии, кристаллографии, теоретической физике.

Правильное разбиение (r^q) в случае сферы $\mathbb{S}^2$ – это разбиение $\mathbb{S}^2$ на конгруэнтные правильные треугольники, квадраты или правильные пятиугольники. Соответствующие ему параметры (r, q) называются *эллиптическими*. Они являются целочисленными $(r, q \in \mathbb{N})$ решениями неравенства $rq < 2(r + q)$ при условиях $r \geq 3$, $q \geq 3$. Все эллиптические параметры (r, q) принимают следующие численные значения: $(r, q) = (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$.

Правильное разбиение (r^q) в случае евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ – это разбиение $\mathbb{R}^2$ на конгруэнтные правильные треугольники, квадраты или правильные шестиугольники. Соответствующие ему параметры (r, q) называются *параболическими*. Они являются целочисленными $(r, q \in \mathbb{N})$ решениями равенства $rq = 2(r + q)$ при условиях $r \geq 3$, $q \geq 3$. Все параболические параметры (r, q) принимают следующие численные значения: $(r, q) = (3, 6), (4, 4), (6, 3)$.

Правильное разбиение (r^q) в случае плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$ – это разбиение $\mathbb{H}^2$ на конгруэнтные правильные r -угольники при любом фиксированном r , где $3 \leq r < \infty$. Соответствующие ему параметры (r, q) называются *гиперболическими*. Они являются целочисленными $(r, q \in \mathbb{N})$ решениями неравенства $rq > 2(r + q)$ при условиях $r \geq 3$, $q \geq 3$. Все гиперболические параметры (r, q) задаются неравенствами $q \geq 7$ при $r = 3$; $q \geq 5$ при $r = 4$; $q \geq 4$ при $r = 5$ или $r = 6$; $q \geq 3$ при $r \geq 7$.

В случае плоскости любое правильное разбиение (r^q) является (r, q) -полициклом (см. [2]), однако оно не является конечным. В случае сферы любое правильное разбиение (r^q) является конечным, однако оно не является (r, q) -полициклом (см. [2]): в этом случае разбиение (r^q) гомеоморфно сфере, а конечный (r, q) -полицикл $P(G)$ гомеоморфен диску (кругу).

Простейшим наглядным примером конечного (r, q) -полицикла может служить поверхность платонова тела, взятая без грани. Число способов удаления грани равно числу граней платонова тела; после удаления из поверхности платонова тела (гомеоморфной сфере) одной грани получается поверхность с краем (гомеоморфная кругу), которая вложима в плоскость. Значит, получается обычный полицикл; комбинаторное устройство данного полицикла не зависит от того, какая именно грань была удалена из поверхности тела: в реберном остове этого полицикла край удаленной грани является единственным циклом минимальной длины, на который не натянута грань. В любом другом (r, q) -полицикле $P(G)$ каждый реберный цикл минимальной длины является краем некоторой грани рассматриваемого полицикла. Это означает, что имеет место следующая теорема единственности: если планарный граф G является реберным остовом некоторого (r, q) -полицикла $P(G)$, то всего лишь одного. Более общо, *любой планарный граф G является реберным остовом не более чем одного (r, q) -полицикла $P(G)$* (см. [2]).

Назовем (r, q) -полицикл $P(G)$ *нерасширяемым*, если он не является *подполициклом* другого, более широкого (r, q) -полицикла, содержащего его в качестве

своей собственной части. Другими словами, данный (r, q) -полицикл $P(G)$ является нерасширяемым, если и только если любой его *надполицикл* с теми же параметрами (r, q) совпадает с ним.

В работе [2] было доказано, что в случае параболических и гиперболических параметров (r, q) никаких конечных нерасширяемых (r, q) -полициклов $P(G)$ не существует. В случае эллиптических параметров (r, q) , т.е. $(r, q) = (3, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$, имеются всего семь конечных нерасширяемых (r, q) -полициклов $P(G)$, а именно: пять *собственных* (r, q) -полициклов – тетраэдр

Рис. 1

без грани, куб без грани, октаэдр без грани, додекаэдр без грани и икосаэдр без грани (рис. 1), и два *несобственных* (r, q) -полицикла – октаэдр с расщепленной вершиной и икосаэдр с расщепленной вершиной (рис. 2).

Рис. 2

Никаких других конечных нерасширяемых (r, q) -полициклов не существует. Доказательство отсутствия других конечных нерасширяемых (r, q) -полициклов для самого сложного случая, соответствующего параметрам $(r, q) = (3, 5)$, в работе [2] не было опубликовано из-за чрезмерной громоздкости. В настоящей работе мы приводим сравнительно простое доказательство полноты вышеуказанного перечня (см. рис. 1 и рис. 2).

Рис. 3

Бесконечных $(3, 3)$ -полициклов не существует. Имеются по одному бесконечному нерасширяемому $(4, 3)$ - и $(3, 4)$ -полициклу (рис. 3). Множество бесконечных нерасширяемых (r, q) -полициклов для каждой пары $(r, q) \neq (3, 3)$, $(3, 4)$ и $(4, 3)$ несчетно (см. [2]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Каждый собственный (r, q) -полицикл $P(G)$ является собственной частью правильного разбиения (r^q) , т. е. $P(G) \subset (r^q)$: заданный (r, q) -полицикл $P(G)$ называется собственным, если G является частичным подграфом реберного остова правильного разбиения (r^q) .

Далее мы будем исследовать (r, q) -полициклы $P(G)$ только при параметрах $(r, q) = (3, 5)$. Среди них имеются два конечных нерасширяемых $(3, 5)$ -полицикла: икосаэдр без грани (см. рис. 1, *e*) и икосаэдр с расщепленной вершиной (см. рис. 2, *b*). Наша цель – доказать, что никаких других конечных нерасширяемых $(3, 5)$ -полициклов не существует.

§ 1. $(3, 5)$ -полицикл как двумерная триангуляция

Конечная двумерная триангуляция, гомеоморфная кругу (диску), является $(3, 5)$ -полициклом, если (см. [2]) и только если (см. [4]) в каждой внутренней вершине триангуляции сходятся 5 треугольников, а в граничной вершине триангуляции сходятся 1, 2, 3 или 4 треугольника. Двумерные клетки триангуляции мы называем *гранями* $(3, 5)$ -полицикла P . Они суть треугольники: $r = 3$. Степень каждой вершины реберного остова триангуляции не превышает числа $q = 5$. Если триангуляция не имеет внутренних вершин, то ее реберный остов является *внешнепланарным* графом. Нерасширяемый $(3, 5)$ -полицикл, реберный остов которого является внешнепланарным графом, всегда является бесконечным. Впредь нас будут интересовать только конечные нерасширяемые $(3, 5)$ -полициклы.

Пусть конечный $(3, 5)$ -полицикл P содержит не менее двух граней (т. е. треугольников). Тогда он имеет два типа ребер: *внутреннее* ребро, принадлежащее двум граням $(3, 5)$ -полицикла P ; *граничное* ребро, принадлежащее лишь одной грани $(3, 5)$ -полицикла P . Все граничные ребра триангуляции составляют *границу* $(3, 5)$ -полицикла P . Граница (край) любого конечного $(3, 5)$ -полицикла P гомеоморфна окружности, а триангуляция $(3, 5)$ -полицикла P , в целом, гомеоморфна кругу.

Перемещаясь вдоль границы триангуляции, выпишем последовательность степеней граничных вершин $(3, 5)$ -полицикла P . (Степенями вершин могут быть только следующие четыре числа: 2, 3, 4, 5.) По этой последовательности степеней легко узнать, является ли $(3, 5)$ -полицикл P расширяемым или не является (см. ниже).

§ 2. Два способа расширения $(3, 5)$ -полициклов

В зависимости от того, как устроена последовательность степеней граничных вершин, имеются следующие два способа расширения $(3, 5)$ -полициклов.

Способ 1. Пусть в последовательности граничных вершин $(3, 5)$ -полицикла P имеются две соседние вершины, степени которых меньше 5. Тогда по граничному ребру, соединяющему эти две вершины, к $(3, 5)$ -полициклу P можно приклеить новый (висячий) треугольник, отождествив граничное ребро с одной стороной треугольника. Две другие стороны треугольника суть граничные ребра расширенного $(3, 5)$ -полицикла. В результате расширения полицикла P прежняя граничная последовательность вершин со степенями $\dots, i, j, \dots$, где

$i < 5$, $j < 5$, перестроится в новую граничную последовательность вершин со степенями $\dots, i+1, 2, j+1, \dots$, где $i+1 \leq 5$, $j+1 \leq 5$.

Способ 2. Пусть в последовательности граничных вершин $(3, 5)$ -полицикла P имеется вершина степени 5 с двумя соседними вершинами, степени которых меньше 5. Тогда два граничных ребра $(3, 5)$ -полицикла P , смежные по вершине степени 5, отождествим с двумя сторонами нового треугольника. Данная вершина степени 5 превратится во внутреннюю вершину нового $(3, 5)$ -полицикла, расширенного за счет приклейки к исходному $(3, 5)$ -полициклу P нового треугольника, пятого в этой вершине. В результате расширения прежняя граничная последовательность вершин со степенями $\dots, i, 5, j, \dots$, где $i < 5$, $j < 5$, перестроится в новую граничную последовательность вершин со степенями $\dots, i+1, j+1, \dots$, где $i+1 \leq 5$, $j+1 \leq 5$.

При любых других условиях, налагаемых на граничную последовательность вершин, конечный $(3, 5)$ -полицикл P является нерасширяемым. А именно, если в граничной последовательности вершин все ближайшие друг к другу вершины степени меньше 5 отделены друг от друга не менее чем двумя вершинами степени 5, то такой $(3, 5)$ -полицикл P является нерасширяемым. По этой причине икосаэдр с расщепленной вершиной (см. рис. 2, *b*) является нерасширяемым. И наконец, если степени всех вершин в граничной последовательности равны 5, то $(3, 5)$ -полицикл P также нерасширяем. По этой причине икосаэдр без грани (см. рис. 1, *e*) является нерасширяемым.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно рассматривать (r, q) -полициклы не только на плоскости, но и на замкнутой поверхности произвольного рода. В таком случае поверхность платонова тела без грани можно расширить до полной поверхности платонова тела. Однако после такого расширения она станет гомеоморфной сфере, а не диску (кругу).

§ 3. Элементарные $(3, 5)$ -полициклы

Все вершины, ребра и грани $(3, 5)$ -полицикла P , которые не инцидентны его краю, составляют *ядро* $(3, 5)$ -полицикла P . Назовем $(3, 5)$ -полицикл P *элементарным*, если, во-первых, его ядро является связным и, во-вторых, он не содержит никакого другого подполицикла, отличного от него самого и обладающего тем же самым ядром. Элементарный $(3, 5)$ -полицикл, ядро которого не является пустым, содержит не менее пяти треугольников. Единственный элементарный $(3, 5)$ -полицикл, ядро которого является пустым, состоит из одного треугольника. Мы обозначаем его через d (см. [2]). Перечень всех элементарных $(3, 5)$ -полициклов представлен в [2, табл. 2].

Произвольный конечный $(3, 5)$ -полицикл P , который состоит из не менее чем двух граней, содержит не только граничные ребра, но и внутренние. Внутреннее ребро назовем *сквозным*, если оба его конца лежат на границе $(3, 5)$ -полицикла P . Произвольный конечный $(3, 5)$ -полицикл P содержит лишь конечное число сквозных ребер. Разрезанный по всем сквозным ребрам любой неэлементарный $(3, 5)$ -полицикл P распадается на подполициклы, не имеющие сквозных ребер.

ЛЕММА 1. *Произвольный конечный $(3, 5)$ -полицикл P без сквозных ребер является элементарным полициклом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть степень хотя бы одной вершины $(3, 5)$ -полицикла P равна 2. Тогда оба примыкающих к ней ребра являются граничными для P . Замыкающее третье ребро не может быть сквозным для P . Следовательно, $(3, 5)$ -полицикл P состоит всего лишь из одного треугольника – элементарного полицикла d . Его ядро является пустым.

Пусть, далее, степень хотя бы одной вершины больше 2. Тогда степени всех остальных вершин также больше 2. Значит, к каждой граничной вершине примыкает хотя бы одно внутреннее ребро $(3, 5)$ -полицикла P . Поскольку полицикл P не имеет сквозных ребер, то другой конец рассматриваемого внутреннего ребра принадлежит ядру, поэтому ядро полицикла P не является пустым. Если степень вершины равна 4, то к ней примыкает треугольник из P . Ребро треугольника, противоположное вершине, расположенной на границе P , вместе с двумя концами принадлежит ядру. Если степень граничной вершины равна 5, то в P имеются два таких треугольника. Полицикл P гомеоморфен кругу, а его край гомеоморфен окружности. Все треугольники $(3, 5)$ -полицикла P , инцидентные краю, инцидентны его ядру. Средние линии этих треугольников, параллельные их сторонам, принадлежащим либо краю, либо ядру, составляют окружность, которая не пересекается с ядром и целиком обхватывает его. Ядро является связным (см. ниже примечание). Полицикл P является минимальным среди всех $(3, 5)$ -полициклов с заданным непустым связным ядром. Следовательно, рассматриваемый $(3, 5)$ -полицикл P является элементарным. Лемма доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ. Пусть конечный $(3, 5)$ -полицикл P не имеет сквозных ребер и степени его вершин больше 2. Тогда ядро является *деформационным ретрактом* $(3, 5)$ -полицикла P .

§ 4. Элементарные слагаемые

Произвольный $(3, 5)$ -полицикл P имеет, вообще говоря, много разных элементарных подполициклов. Однако наиболее важными из них являются те, которые мы называем *элементарными слагаемыми* (см. [2]). А именно, треугольник из $(3, 5)$ -полицикла P , который не пересекается с ядром $(3, 5)$ -полицикла P , является *тривиальным элементарным слагаемым* d . (И здесь совсем не важно, является ли ядро $(3, 5)$ -полицикла P пустым или не является.) Все треугольники из $(3, 5)$ -полицикла P , инцидентные одной и той же компоненте связности ядра $(3, 5)$ -полицикла P , составляют *нетривиальное элементарное слагаемое* $(3, 5)$ -полицикла P . Ядро нетривиального элементарного слагаемого является непустым и совпадает с компонентой связности ядра $(3, 5)$ -полицикла P . Каждый треугольник $(3, 5)$ -полицикла P принадлежит одному и только одному элементарному слагаемому. Разложение $(3, 5)$ -полицикла P на элементарные слагаемые единственно (см. [2]).

ЛЕММА 2. *Элементарные полициклы, на которые распадается любой $(3, 5)$ -полицикл P при разрезании по всем имеющимся у него сквозным ребрам, являются элементарными слагаемыми полицикла P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный элементарный полицикл, фигурирующий в лемме. Любое его граничное ребро является либо граничным также и для $(3, 5)$ -полицикла P , либо сквозным ребром. Значит, край этого элементарного полицикла не пересекается с ядром полицикла P . Если в элементарный полицикл входит только один треугольник из P , то его пересечение с ядром полицикла P также является пустым. Следовательно, элементарный полицикл (в данном случае треугольник d) является элементарным слагаемым. Если же в элементарный полицикл входит не один треугольник, а несколько, то пересечение этого элементарного слагаемого с ядром полицикла P не является пустым. Оно совпадает с компонентой связности ядра полицикла P (см. доказательство леммы 1). Следовательно, рассматриваемый элементарный полицикл является нетривиальным элементарным слагаемым. Лемма доказана.

Таким образом, произвольный $(3, 5)$ -полицикл P однозначно раскладывается на элементарные слагаемые, и для выделения элементарных слагаемых в каком-либо $(3, 5)$ -полицикле P достаточно разрезать его по всем имеющимся у него сквозным ребрам.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Все граничные вершины элементарного слагаемого произвольного $(3, 5)$ -полицикла P расположены на границе полицикла P .

Следует отметить, что при расширении $(3, 5)$ -полицикла P способом 1 (см. выше) к нему добавляется новое элементарное слагаемое d . Все прежние элементарные слагаемые при этом остаются элементарными слагаемыми. При расширении $(3, 5)$ -полицикла P способом 2 прибавляемый новый элементарный полицикл d объединяется со смежными с ним старыми элементарными слагаемыми полицикла P в одно укрупненное элементарное слагаемое расширенного $(3, 5)$ -полицикла.

§ 5. Граф смежности элементарных слагаемых

Как диаметр разрезает круг на два полуокруга, точно так же сквозное ребро разрезает $(3, 5)$ -полицикл P на два подполицикла. Каждое сквозное ребро $(3, 5)$ -полицикла P принадлежит двум элементарным слагаемым, смежным по этому ребру. Для произвольного $(3, 5)$ -полицикла P мы построим так называемый *граф смежности* элементарных слагаемых. А именно, каждому элементарному слагаемому $(3, 5)$ -полицикла P поставим в соответствие вершину графа смежности. Две вершины графа смежности соединим ребром, если и только если соответствующие этим вершинам элементарные слагаемые смежны, т. е. имеют общее ребро.

ЛЕММА 3. *Граф смежности элементарных слагаемых произвольного неэлементарного $(3, 5)$ -полицикла P является деревом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Две вершины графа смежности соединены ребром, если и только если соответствующие им два элементарных слагаемых смежны, т. е. имеют общее ребро – сквозное ребро объемлющего $(3, 5)$ -полицикла P . Это сквозное ребро разрезает полицикл P на два подполицикла. Оба подполицикла пересекаются друг с другом лишь по данному сквозному ребру.

По этому ребру смежны только два элементарных слагаемых полицикла P . Никакие другие два элементарных слагаемых, взятых из этих двух подполициклов (здесь имеется в виду, что каждое слагаемое взято из своего подполицикла), не смежны друг с другом. Значит, каждое ребро графа смежности является *мостом* (см. [1, с. 41]), и поэтому граф смежности является *лесом* (см. [1, с. 59]). Поскольку полицикл P является триангуляцией диска, то граф смежности является связным. Значит, лес состоит из одной компоненты связности, а компонента леса есть *дерево* (см. [1, с. 48]). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Любые две вершины дерева соединены единственной простой (реберной) цепью (см. [1, теорема 4.1, (2)]).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В любом нетривиальном дереве имеются по меньшей мере две висячие (концевые) вершины (см. [1, следствие 4.1, (а)]).

§ 6. Дерево склеек элементарных слагаемых

Как сказано выше, для выделения элементарных слагаемых в каком-либо $(3, 5)$ -полицикле достаточно разрезать его по всем имеющимся у него сквозным ребрам. Граф смежности элементарных слагаемых полицикла P является деревом. На практике удобно полагать, что дерево склеено из самих элементарных слагаемых $(3, 5)$ -полицикла P . Рассмотрим это более подробно.

Для произвольных двух элементарных слагаемых $(3, 5)$ -полицикла P выполняется только одна из следующих трех возможностей: либо они вовсе не пересекаются, либо они имеют одну общую вершину, либо они имеют одно общее ребро (смежны друг с другом).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если из произвольного $(3, 5)$ -полицикла P удалить концы всех сквозных ребер, то пересекающимися окажутся лишь те элементарные слагаемые, которые смежны друг с другом.

В неэлементарном $(3, 5)$ -полицикле P перейдем от триангуляции к укрупненному подразделению (см. [5, с. 175]), взяв в качестве укрупненных клеток его элементарные слагаемые. Реберный остов укрупненного подразделения представляет собой некоторый плоский граф H . Ребрами графа H являются только сквозные и граничные ребра $(3, 5)$ -полицикла P . Построим граф, геометрически двойственный (см. [1, с. 138]) графу H , и удалим из него ту вершину (см. [1, с. 25]), которая соответствует внешней грани (см. [1, с. 127]) графа H . Получим новый граф³, представляющий граф смежности элементарных слагаемых. А так как он является деревом, то и само укрупненное подразделение естественно назвать *деревом склеек элементарных слагаемых*. В дереве склеек имеются по меньшей мере два висячих элементарных слагаемых. Одно граничное ребро висячего элементарного слагаемого является сквозным ребром $(3, 5)$ -полицикла P . Все остальные граничные ребра висячего элементарного слагаемого являются граничными ребрами $(3, 5)$ -полицикла P .

Произвольные два элементарных слагаемых $(3, 5)$ -полицикла P можно соединить простой цепочкой⁴ элементарных слагаемых, в которой любые два соседних элементарных слагаемых смежны друг с другом. Пересечение двух

³Этот граф является деформационным ретрактом $(3, 5)$ -полицикла P (см. примечание).

⁴Данная цепочка является единственной в дереве склеек (см. замечание 4).

смежных элементарных слагаемых $(3, 5)$ -полицикла P всегда является сквозным ребром объемлющего полицикла P . Для каждого из обоих элементарных слагаемых это ребро является *открытым* (см. [2]), т.е. степени концов этого ребра меньше 5. Для элементарного полицикла d (с пустым ядром) все три граничных ребра являются открытыми. Если элементарное слагаемое не является треугольником d , то его открытые ребра разделяются на два типа. *Сильно* открытое ребро в элементарном слагаемом имеет оба конца степени 3; по сильно открытому ребру любое элементарное слагаемое может быть смежным с любым другим элементарным слагаемым. *Слабо* открытое ребро в элементарном слагаемом имеет концы со степенями 3 и 4 или 4 и 4; по слабо открытому ребру элементарное слагаемое $(3, 5)$ -полицикла P может быть смежным только с элементарным слагаемым d .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если два открытых ребра элементарного слагаемого произвольного $(3, 5)$ -полицикла P имеют общую вершину степени 4, то они не могут быть сквозными ребрами одновременно.

Для удобства мы будем обозначать ребро $(3, 5)$ -полицикла P записанными подряд двумя цифрами, взятыми из списка $\{2, 3, 4, 5\}$ и обозначающими степени концов этого ребра. Так, например, нерасширяемый $(3, 5)$ -полицикл, представляющий собой икосаэдр с расщепленной вершиной и обозначаемый через $a_3 \cup d$ (см. [2, табл. 4] и рис. 2, b), имеет одно сквозное ребро. Оно разбивает $(3, 5)$ -полицикл $a_3 \cup d$ на два элементарных слагаемых a_3 и d . Это ребро мы обозначаем через 44 в объемлющем полицикле $a_3 \cup d$, через 33 – в элементарном слагаемом a_3 , через 22 – в элементарном слагаемом d .

§ 7. Максимальная цепочка

Рассмотрим конечный неэлементарный $(3, 5)$ -полицикл P . Фиксированное наугад взятое элементарное слагаемое $(3, 5)$ -полицикла P выберем в качестве начала. Обозначим его через x_1 . Любое другое элементарное слагаемое $(3, 5)$ -полицикла P соединим с началом посредством простой цепочки $x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_{n-1} x_n$, в которой соседние элементарные слагаемые x_j и x_{j+1} , $j = 1, \dots, n-1$, смежны друг с другом по общему ребру $x_j \cap x_{j+1}$. Поскольку полицикл P является конечным, то в дереве склеек элементарных слагаемых $(3, 5)$ -полицикла P существует такая цепочка элементарных слагаемых, которая имеет наибольшую длину. Эту цепочку будем называть *максимальной*.

ЛЕММА 4. Пусть цепочка $x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_{n-1} x_n$ является максимальной. Тогда элементарное слагаемое x_n является висячим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Одно граничное ребро элементарного слагаемого x_n является сквозным ребром полицикла P . Все другие граничные ребра элементарного слагаемого x_n являются граничными ребрами полицикла P . Докажем это от противного. Пусть элементарное слагаемое x_n имеет граничное ребро, отличное от $x_{n-1} \cap x_n$, которое не является граничным ребром полицикла P . Тогда в $(3, 5)$ -полицикле P имеется элементарное слагаемое x_{n+1} , смежное с элементарным слагаемым x_n и отличное от элементарного

слагаемого x_{n-1} . Рассмотрим цепочку $x_1x_2 \dots x_{n-2}x_{n-1}x_nx_{n+1}$. Эта цепочка соединяет начало x_1 с концом x_{n+1} . Она является единственной цепочкой с заданными началом и концом, причем более длинной, чем максимальная цепочка $x_1x_2 \dots x_{n-2}x_{n-1}x_n$. Получено противоречие с тем, что цепочка $x_1x_2 \dots x_{n-2}x_{n-1}x_n$ с фиксированным началом x_1 является максимальной в полицикле P . Значит, элементарное слагаемое x_n является висячим. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Если в P имеются элементарные слагаемые $x'_n, x''_n, \dots$, смежные с предпоследним элементарным слагаемым x_{n-1} максимальной цепочки и отличные от x_{n-2} , то они также являются висячими.

Итак, для максимальной цепочки $x_1x_2 \dots x_{n-2}x_{n-1}x_n$ (с фиксированным началом x_1) последнее элементарное слагаемое x_n всегда является висячим. Одно граничное ребро висячего элементарного слагаемого x_n является сквозным ребром полицикла P . Все остальные граничные ребра висячего элементарного слагаемого x_n являются граничными ребрами объемлющего $(3,5)$ -полицикла P .

§ 8. Описание нерасширяемых $(3,5)$ -полициклов

Прежде чем перейти к исследованию влияния того или иного конкретного элементарного слагаемого на расширяемость или нерасширяемость исследуемого $(3,5)$ -полицикла P , займемся предварительной подготовкой списка элементарных слагаемых.

Перечень всех элементарных $(3,5)$ -полициклов представлен в [2, табл. 2] (см. также [3, рис. 6]). Он состоит из конечного списка $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4, d$ и одной бесконечной последовательности $e_1, e_2, e_3, e_4, \dots, e_n, \dots$. Элементарный полицикл a_1 изображен на рис. 1, е; многие другие элементарные полициклы, используемые ниже в качестве элементарных слагаемых, изображены на рис. 4–15. (Элементарный полицикл d следовало бы включить в бесконечную последовательность в качестве начального члена, полагая $e_0 = d$. Последовательность имеет два предела: односторонний предел $e|_N = b_1$ и двусторонний предел $e|_Z = a_6$. Элементарный полицикл a_6 является бесконечным нерасширяемым $(3,5)$ -полициклом.)

В общем списке [2, табл. 2] имеются элементарные слагаемые всех возможных $(3,5)$ -полициклов не только конечных, но и бесконечных. В частности, в [2, табл. 2] имеются два бесконечных элементарных $(3,5)$ -полицикла a_6 и b_1 , которые впредь мы не будем рассматривать, поскольку занимаемся лишь конечными $(3,5)$ -полициклами.

Среди конечных $(3,5)$ -полициклов, обладающих хотя бы одним элементарным слагаемым a_i , где $i = 1, 2, 3, 4, 5$ (см. [2, табл. 2]), имеются всего 8 конечных полициклов, а именно $a_1, a_2, a_3, a_3 \cup d, a_4, a_5, a_5 \cup d, d \cup a_5 \cup d$. Кроме шести расширяемых $(3,5)$ -полициклов, среди них имеются следующие два упомянутых вначале нерасширяемых $(3,5)$ -полицикла: a_1 – *икосаэдр без грани* (см. рис. 1, е) и $a_3 \cup d$ – *икосаэдр с расщепленной вершиной* (см. рис. 2, б).

Для исследования всех остальных конечных $(3,5)$ -полициклов вышеупомянутые элементарные полициклы $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ и b_1 следует исключить из общего списка элементарных слагаемых. Поэтому впредь мы будем исследовать только те конечные $(3,5)$ -полициклы, элементарные слагаемые которых

принадлежат следующему бесконечному ряду:

$$b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4, d, e_1, e_2, e_3, e_4, \dots, e_n, \dots \quad (1)$$

Первые 12 членов этого ряда будут представлены ниже на рис. 4–15.

ЛЕММА 5. *Любой элементарный $(3, 5)$ -полицикл, принадлежащий бесконечному ряду (1), является расширяемым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый элементарный $(3, 5)$ -полицикл из ряда (1) имеет открытое ребро (среди всех элементарных $(3, 5)$ -полициклов из [2, табл. 2] только два нерасширяемых полицикла, a_1 и a_6 , не имеют открытых ребер), и поэтому он расширяем способом 1. Лемма доказана.

Единственный элементарный полицикл d из ряда (1) имеет пустое ядро. Все три ребра полицикла d являются открытыми и попарно смежными. Все отличные от d элементарные полициклы из (1) составляют ряд

$$b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4, e_1, e_2, e_3, e_4, \dots, e_n, \dots \quad (2)$$

Элементарные слагаемые ряда (2) обладают не только непустыми ядрами, но и несмежными открытыми ребрами. Любые два несмежных открытых ребра такого элементарного слагаемого могут быть сквозными ребрами объемлющего $(3, 5)$ -полицикла *одновременно*.

ЛЕММА 6. *Если хотя бы одно висячее элементарное слагаемое $(3, 5)$ -полицикла P принадлежит ряду (2), то P является расширяемым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый элементарный полицикл из ряда (2) вместе с любым открытым ребром имеет другое открытое ребро, не смежное с предыдущим. (В этом легко убедиться при просмотре всех элементарных полициклов ряда (2); см. [2, табл. 2]. Однако проверкой данного обстоятельства не следует заниматься специально. Это можно будет проверить в процессе доказательства леммы 7.) Если одно открытое ребро совпадает со сквозным ребром, то другое заведомо является граничным ребром $(3, 5)$ -полицикла P . По этому ребру к $(3, 5)$ -полициклу P можно приклеить новый треугольник d , т. е. $(3, 5)$ -полицикл P расширяем способом 1. Лемма доказана.

Результат всех дальнейших исследований конечных (не)расширяемых $(3, 5)$ -полициклов сформулирован в следующей основной лемме.

ЛЕММА 7. *Произвольный конечный $(3, 5)$ -полицикл P , элементарные слагаемые которого принадлежат ряду (1), является расширяемым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный конечный $(3, 5)$ -полицикл P , состоящий из элементарных слагаемых, принадлежащих ряду (1). Если полицикл P является элементарным, то по лемме 5 он расширяем. Если полицикл P не является элементарным, но каждое висячее элементарное слагаемое принадлежит последовательности (2), то по лемме 6 он расширяем. Осталось рассмотреть только те случаи, когда полицикл P не является элементарным и все висячие элементарные слагаемые суть треугольники d . Во всяком таком случае один из треугольников d выберем в качестве начала: $x_1 = d$. В конечном полицикле P имеется элементарное слагаемое, которое находится

от начала на максимальном расстоянии. Если таких элементарных слагаемых несколько, возьмем одно из них. Обозначим его через x_n , полагая, что цепочка $x_1x_2 \dots x_{n-2}x_{n-1}x_n$ является максимальной. Последнее элементарное слагаемое x_n максимальной цепочки всегда является висячим. Значит, $x_n = d$. Однако так как цепочка $x_1x_2 \dots x_{n-2}x_{n-1}x_n$ разомкнута, то $x_n \neq x_1$ (при $n \neq 1$).

Далее рассмотрим случаи, в которых предпоследнее элементарное слагаемое x_{n-1} максимальной цепочки

$$x_1x_2 \dots x_{n-2}x_{n-1}x_n$$

является соответственно тем или иным членом ряда (1), т. е. либо x_{n-1} является членом ряда (2), либо $x_{n-1} = d$.

Рис. 4

Случай $x_{n-1} = b_2$ (рис. 4). Элементарное слагаемое $x_{n-1} = b_2$ имеет два открытых ребра 33. Они несмежны и являются сквозными ребрами полицикла P , а именно $x_{n-2} \cap x_{n-1}$ и $x_{n-1} \cap x_n$. Все остальные граничные ребра элементарного слагаемого $x_{n-1} = b_2$ являются граничными ребрами полицикла P . Висячее элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 42. Поэтому полицикл P расширяем способом 1.

На рис. 4, а изображено отдельное элементарное слагаемое $x_{n-1} = b_2$. На рис. 4, б изображен подполицикл $x_{n-1} \cup x_n = b_2 \cup d$ полицикла P с граничным ребром 42, который разрезан по сквозному ребру $x_{n-1} \cap x_n$ на два элементарных слагаемых $x_{n-1} = b_2$ и $x_n = d$. На рис. 4, в изображен подполицикл $x_{n-1} \cup x_n \cup x_{n+1} = b_2 \cup d \cup d$ расширенного (3, 5)-полицикла $P \cup x_{n+1}$. Полицикл $x_{n-1} \cup x_n \cup x_{n+1}$ отрезан от полицикла $P \cup x_{n+1}$ по сквозному ребру $x_{n-2} \cap x_{n-1}$. Полицикл $x_{n-1} \cup x_n \cup x_{n+1}$ разрезан на три элементарных слагаемых: $x_{n-1} = b_2$, $x_n = d$, $x_{n+1} = d$.

Все это полностью пояснено на рис. 4, б, и поэтому только этот рисунок можно использовать при иллюстрации всего сказанного выше. Впредь так и будем поступать.

Рис. 5

Случай $x_{n-1} = b_3$ (рис. 5). Элементарное слагаемое $x_{n-1} = b_3$ имеет три открытых ребра: 43, 34 и 33. По меньшей мере два из них являются сквозными ребрами полицикла P . Остальные граничные ребра элементарного слагаемого

$x_{n-1} = b_3$ являются граничными ребрами полицикла P . Если открытое ребро 33 элементарного слагаемого $x_{n-1} = b_3$ является граничным ребром полицикла P , то P расширяем способом 1. Если открытое ребро 33 элементарного слагаемого $x_{n-1} = b_3$ является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$ полицикла P , то висячее элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 42, и поэтому P расширяем способом 1 (см. рис. 5, *a*). Пусть теперь открытое ребро 33 элементарного слагаемого $x_{n-1} = b_3$ является сквозным ребром $x_{n-2} \cap x_{n-1}$ полицикла P . Тогда возможны следующие два варианта. Если одно открытое ребро 43 является граничным, а другое открытое ребро 34 является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$ полицикла P , то P расширяем способом 1, так как висячее элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 42 (см. рис. 5, *b*). Если оба открытых ребра 43 и 34 являются соответственно сквозными ребрами $x_{n-1} \cap x_n$ и $x_{n-1} \cap x'_n$ полицикла P , то P расширяем способом 2, так как граничная вершина $x_n \cap x'_n$ полицикла P имеет степень 5, а соседние граничные вершины имеют степени 2 (см. рис. 5, *c*).

Рис. 6

Случай $x_{n-1} = b_4$ (рис. 6). Элементарное слагаемое $x_{n-1} = b_4$ содержит три открытых ребра. Только два из них являются сквозными ребрами полицикла P . Если открытое ребро 33 элементарного слагаемого $x_{n-1} = b_4$ является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$ полицикла P , то висячее элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 42 и P расширяем способом 1 (см. рис. 6, *a*). Если открытое ребро 43 элементарного слагаемого $x_{n-1} = b_4$ является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$ полицикла P , то висячее элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 25. С ним смежно другое граничное ребро 53, и поэтому P расширяем способом 2 (см. рис. 6, *b*).

Рис. 7

Случай $x_{n-1} = c_1$ (рис. 7). Элементарное слагаемое $x_{n-1} = c_1$ имеет два открытых ребра. Оба они являются сквозными ребрами полицикла P . Среди них имеется сквозное ребро $x_{n-1} \cap x_n$. Висячее элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 42, и поэтому P расширяем способом 1 (см. рис. 7).

Рис. 8

Случай $x_{n-1} = c_2$ (рис. 8). Элементарное слагаемое $x_{n-1} = c_2$ имеет четыре открытых ребра. Однако только два открытых ребра могут быть сквозными ребрами полицикла P . Если открытое ребро 34 элементарного слагаемого $x_{n-1} = c_2$ является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$ полицикла P , то висячее элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 42 и P расширяем способом 1 (см. рис. 8, а). Если открытое ребро 44 элементарного слагаемого $x_{n-1} = c_2$ является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$ полицикла P , то висячее элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 25. С ним смежно граничное ребро 53, и поэтому P расширяем способом 2 (см. рис. 8, б).

Рис. 9

Случай $x_{n-1} = c_3$ (рис. 9). Элементарное слагаемое $x_{n-1} = c_3$ имеет шесть открытых ребер. Однако не более четырех из них могут быть сквозными ребрами полицикла P . Это следует из того, что смежные ребра 44 и 43 не могут быть сквозными одновременно.

Пусть открытое ребро 44 элементарного слагаемого $x_{n-1} = c_3$ является сквозным ребром $x_{n-2} \cap x_{n-1}$ полицикла P . Тогда возможны следующие два варианта.

Если противоположное открытое ребро 44 элементарного слагаемого $x_{n-1} = c_3$ является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$ полицикла P , то висячее элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 25. С ним смежно другое граничное ребро 53, и полицикл P расширяем способом 2 (см. рис. 9, а).

Если открытое ребро 43 элементарного слагаемого $x_{n-1} = c_3$, не смежное с $x_{n-2} \cap x_{n-1}$, является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$ полицикла P , то висячее элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 24, и поэтому P расширяем способом 1 (см. рис. 9, б).

Пусть теперь открытое ребро 43 элементарного слагаемого $x_{n-1} = c_3$ является сквозным ребром $x_{n-2} \cap x_{n-1}$ полицикла P . Тогда возможны следующие три варианта.

Если оба открытых ребра 43 и 34 элементарного слагаемого $x_{n-1} = c_3$, не смежные с $x_{n-2} \cap x_{n-1}$, являются граничными ребрами полицикла P , то по меньшей мере одно из них, ближайшее к $x_{n-2} \cap x_{n-1}$, имеет в P степени вершин 4 и 3, и поэтому P расширяем способом 1.

Если только одно открытое ребро 43 элементарного слагаемого $x_{n-1} = c_3$, не смежное с $x_{n-2} \cap x_{n-1}$, является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$ полицикла P , то висячее элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 42, и полицикл P расширяем способом 1 (см. рис. 9, б и в).

Если оба открытых ребра 43 и 34 элементарного слагаемого $x_{n-1} = c_3$, не смежные с $x_{n-2} \cap x_{n-1}$, являются сквозными ребрами $x_{n-1} \cap x_n$ и $x_{n-1} \cap x'_n$ полицикла P , то висячие элементарные слагаемые $x_n = d$ и $x'_n = d$ полицикла P пересекаются в граничной вершине степени 5, с которой смежны две граничные вершины степени 2, и поэтому P расширяем способом 2 (см. рис. 9, д).

Рис. 10

Случай $x_{n-1} = c_4$ (рис. 10). Элементарное слагаемое $x_{n-1} = c_4$ имеет шесть открытых ребер. Однако не более трех из них могут быть сквозными ребрами полицикла P . Это следует из того, что граничные ребра, сходящиеся в вершине степени 4, не могут быть сквозными одновременно.

Пусть открытое ребро 34 (вертикальное левое) является сквозным ребром $x_{n-2} \cap x_{n-1}$ полицикла P . Тогда рассмотрим противоположное ему открытое ребро (вертикальное правое) и смежное с ним по вершине степени 4 (нижнее правое) ребро. Возможны следующие три варианта. Если оба открытых ребра являются граничными ребрами полицикла P , то P расширяем способом 1, так как по нижнему правому ребру 34 (рис. 10, а) к старому (3, 5)-полициклу P можно приклеить новое элементарное слагаемое d , как это изображено на рис. 10, б. Если нижнее правое открытое ребро элементарного слагаемого $x_{n-1} = c_4$ является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$ полицикла P , то элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 42, и тогда P расширяем

способом 1 (см. рис. 10, *b*). Если вертикальное справа открытое ребро является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$ полицикла P , то элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 52. С ним смежно другое граничное ребро 53, и тогда P расширяем способом 2 (см. рис. 10, *c*).

Рис. 11

Случай $x_{n-1} = e_1$ (рис. 11). Элементарное слагаемое $x_{n-1} = e_1$ имеет пять открытых ребер. Все вместе они могут быть сквозными ребрами полицикла P . Одно из открытых ребер 33 элементарного слагаемого $x_{n-1} = e_1$ является сквозным ребром $x_{n-2} \cap x_{n-1}$ полицикла P (на рис. 11 оно снизу). В противоположной этому ребру вершине (ее степень равна 3, см. рис. 11, *a*) элементарного слагаемого $x_{n-1} = e_1$ сходятся два его открытых ребра. Для них возможны следующие три варианта. Если оба они являются граничными ребрами полицикла P , то по меньшей мере одно из них, которое смежно со сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$, имеет степени вершин 3 и 4, и поэтому P расширяем способом 1. Если одно из них остается граничным, а другое является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$, то висячее элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 42, и поэтому P расширяем способом 1 (см. рис. 11, *b*). Если оба они являются сквозными ребрами $x_{n-1} \cap x_n$ и $x_{n-1} \cap x'_n$, то P расширяем способом 2 (см. рис. 11, *c*).

Случай $x_{n-1} = e_2$ (рис. 12). Элементарное слагаемое $x_{n-1} = e_2$ имеет шесть открытых ребер: два сильно открытых ребра 33 и четыре слабо открытых ребра 34. Не более четырех из них являются сквозными. Пусть одно из двух смежных открытых ребер 33 или 34 является сквозным ребром $x_{n-2} \cap x_{n-1}$ полицикла P . Рассмотрим два других смежных ребра 33 и 34 элементарного слагаемого $x_{n-1} = e_2$ (не смежных с двумя предыдущими, см. рис. 12, *a* справа). Если оба они являются граничными ребрами полицикла P , то одно из них – ребро 33 в элементарном слагаемом $x_{n-1} = e_2$ – является в P граничным ребром 33 или 34 (если верхнее горизонтальное открытое ребро является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$), и поэтому P расширяем способом 1. Если одно является граничным ребром, а другое является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$, то висячее элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 24, и поэтому P расширяем способом 1 (см. рис. 12, *b* и *c*). Если оба они являются

сквозными ребрами $x_{n-1} \cap x_n$ и $x_{n-1} \cap x'_n$, то P расширяем способом 2 (см. рис. 12, *d*).

Рис. 12

Случай $x_{n-1} = e_3$ (рис. 13). Элементарное слагаемое $x_{n-1} = e_3$ имеет пять открытых ребер. Не более четырех из них являются сквозными. Пусть вертикальное левое открытое ребро 33 или смежное с ним верхнее ребро 34 элементарного слагаемого $x_{n-1} = e_3$ является сквозным ребром $x_{n-2} \cap x_{n-1}$. Тогда рассмотрим два противоположных им ребра 33 и 34. Если оба они в P являются граничными, то вертикальное правое ребро (см. рис. 13, *a*) имеет в P степени 3

Рис. 13

и 3, и поэтому P расширяем способом 1. Если одно из них является граничным, а другое является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$, то всяческое элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 42, и поэтому P расширяем способом 1 (см. рис. 13, *b* и *c*). Если оба они являются сквозными ребрами $x_{n-1} \cap x_n$ и $x_{n-1} \cap x'_n$, то P расширяем способом 2 (см. рис. 13, *d*).

Пусть теперь открытое ребро 44 элементарного слагаемого $x_{n-1} = e_3$ является сквозным ребром $x_{n-2} \cap x_{n-1}$ полицикла P . Тогда хотя бы одно открытое ребро 33 элементарного слагаемого $x_{n-1} = e_3$ является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$. Висячее элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 42, и поэтому P расширяем способом 1 (рис. 13, b).

Рис. 14

Случай $x_{n-1} = e_4$ (рис. 14). Элементарное слагаемое $x_{n-1} = e_4$ имеет четыре открытых ребра. Все они могут быть сквозными. Пусть вертикальное левое открытое ребро 33 или смежное с ним ребро 34 элементарного слагаемого $x_{n-1} = e_3$ является сквозным ребром $x_{n-2} \cap x_{n-1}$. Тогда рассмотрим два противоположных им ребра 33 и 34. Если оба они в P являются граничными, то степени концов обоих сохраняются в P теми же (см. рис. 14, a), и поэтому P расширяем способом 1. Если одно из них является граничным, а другое является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$, то висячее элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 42, и поэтому P расширяем способом 1 (см. рис. 14, b и c). Если оба они являются сквозными ребрами $x_{n-1} \cap x_n$ и $x_{n-1} \cap x'_n$, то P расширяем способом 2 (см. рис. 14, d).

Все сказанное в случае $x_{n-1} = e_4$ можно дословно повторить и в любом другом следующем за ним случае $x_{n-1} = e_{k+4}$ при произвольном $k \in \mathbb{N}$.

Мы рассмотрели все случаи, в которых элементарное слагаемое x_{n-1} совпадает с тем или иным членом ряда (2). Остался только один случай, в котором элементарное слагаемое x_{n-1} совпадает с членом d ряда (1).

Рис. 15

Случай $x_{n-1} = d$ (рис. 15). Элементарное слагаемое $x_{n-1} = d$ имеет три открытых ребра 22 (см. рис. 15, a). При любом $n \geq 3$ одно ребро треугольника d

является сквозным ребром $x_{n-2} \cap x_{n-1}$, другое – сквозным ребром $x_{n-1} \cap x_n$. Если третье ребро треугольника d является граничным ребром полицикла P , то всяческое элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 23, и поэтому P расширяем способом 1 (см. рис. 15, *b*). Если третье ребро треугольника d является сквозным ребром $x_{n-1} \cap x'_n$ полицикла P , то всяческое элементарное слагаемое $x_n = d$ имеет в P граничное ребро 24 (висячие элементарные слагаемые $x_n = d$ и $x'_n = d$ пересекаются в вершине $x_n \cap x'_n$ степени 4), и поэтому P расширяем способом 1 (см. рис. 15, *c*).

Для элементарного слагаемого $x_{n-1} = d$ необходимо рассмотреть еще следующие два частных случая, которые не встречались при совпадении элементарного слагаемого x_{n-1} с другими членами ряда (1), отличными от d . А именно, при $n = 2$ полицикл P является подполициклом полицикла, состоящего из четырех треугольников, в котором три треугольника смежны с четвертым по трем его сторонам. Степени всех его вершин не превышают 4, и поэтому он расширяем способом 1. При $n = 1$ (лишь в этом случае выполнено равенство $x_n = x_1$) полицикл P расширяем по лемме 5. Лемма доказана.

В итоге нами получена следующая основная теорема.

ТЕОРЕМА. *Существуют только два конечных нерасширяемых (3, 5)-полицикла: икосаэдр без грани и икосаэдр с расщепленной вершиной.*

СЛЕДСТВИЕ. *В силу данной теоремы и работы [2] существуют всего лишь семь конечных нерасширяемых (r, q) -полициклов, а именно: пять собственных – тетраэдр без грани, куб без грани, октаэдр без грани, додекаэдр без грани и икосаэдр без грани (см. рис. 1), и два несобственных – октаэдр с расщепленной вершиной и икосаэдр с расщепленной вершиной (см. рис. 2).*

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Только два конечных нерасширяемых (r, q) -полицикла обладают висячими элементарными слагаемыми: для икосаэдра с расщепленной вершиной висячими являются d и a_3 , для октаэдра с расщепленной вершиной висячими являются два треугольника.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Висячими элементарными слагаемыми конечного или бесконечного внешнепланарного (3, 5)-полицикла P могут быть только d : здесь все элементарные слагаемые суть d .

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Произвольный нерасширяемый внешнепланарный (3, 5)-полицикл P является бесконечным.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Висячими элементарными слагаемыми любого⁵ бесконечного нерасширяемого (3, 5)-полицикла P могут быть только d и b_1 .

Список литературы

1. Харари Ф., *Теория графов*, Мир, М., 1973.
2. Деца М., Штогрин М. И., “Экстремальные и нерасширяемые полициклы”, *Тр. МИАН*, **239** (2002), 127–145.

⁵Множество бесконечных нерасширяемых (3, 5)-полициклов $P(G)$ с t_1 висячими элементарными слагаемыми d и t_2 висячими элементарными слагаемыми b_1 при любых $0 \leq t_i \leq \infty$, $i = 1, 2$, является несчетным.

3. Deza M., Shtogrin M., “Clusters of cycles”, *J. of Geometry and Physics*, **40** (2002), 302–319.
4. Де́за М., Што́грин М.И., “Метрика постоянной кривизны на полициклах”, *Матем. заметки*, **78:2** (2005), 223–233.
5. Зейферт Г., Трельфалль В., *Топология*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевск, 2001.
6. Новиков С.П., *Топология*, ИКИ, Москва–Ижевск, 2002.

М. ДЕЗА (M. DEZA)

E-mail: Michel.Deza@ens.fr

Поступило в редакцию

02.08.2005

С. В. ШПЕКТОРОВ (S. V. SHPECTOROV)

E-mail: sergey@bgnet.bgsu.edu

М. И. ШТОГРИН (M. I. SHTOGRIN)

E-mail: stogrin@mi.ras.ru