Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Локальные неравенства и бирациональная сверхжесткость многообразий Фано, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 3, 185–221

DOI: <https://doi.org/10.4213/im580>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:00:22

УДК 512.76

И. А. Чельцов

Локальные неравенства и бирациональная сверхжесткость многообразий Фано

Получены локальные неравенства, связывающие логканонические пороги многомерных подвижных логпар и кратности соответствующих линейных систем. В качестве приложения доказаны бирациональная сверхжесткость и нерациональность следующих многообразий Фано: многообразия, полученного как двойное накрытие неособой гиперповерхности $V \subset \mathbb{P}^n$ степени 3 с ветвлением в эффективном дивизоре $R \subset V$, особенности которого состоят из произвольного числа изолированных обыкновенных двойных точек, где $n \geq 8$, а дивизор R высекается на V гиперповерхностью в $\mathbb{P}^n$ степени $2(n-3)$; многообразия, полученного как циклическое тройное накрытие неособой квадрики $Q \subset \mathbb{P}^{2r+2}$ с ветвлением в эффективном дивизоре $S \subset Q$, который высекается на квадрике Q гиперповерхностью степени $r \geq 3$ в $\mathbb{P}^{2r+2}$, а особенности S состоят из произвольного числа изолированных обыкновенных двойных точек; многообразия, полученного как двойное накрытие неособого полного пересечения двух квадрик $Y \subset \mathbb{P}^n$ с ветвлением в неособом эффективном дивизоре $D \subset Y$, который высекается на многообразии Y гиперповерхностью в $\mathbb{P}^n$ степени $n-4 \geq 6$.

Библиография: 64 наименования.

§ 1. Введение

Пусть X – алгебраическое многообразие¹, O – неособая точка на X , а $\mathcal{M}$ – линейная система на X , не имеющая неподвижных компонент. Предположим, что $\dim(X) \geq 3$, а точка O является центром канонических особенностей логпары $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$. Последнее условие означает существование бирационального морфизма $f: \bar{X} \rightarrow X$ такого, что в окрестности точки O выполнены соотношение

$$K_{\bar{X}} + \frac{1}{n}\bar{\mathcal{M}} \sim_{\mathbb{Q}} f^* \left(K_X + \frac{1}{n}\mathcal{M} \right) + \sum_{i=1}^k a(X, M_X, E_i) E_i$$

и неравенство $a(X, M_X, E_j) \leq 0$ для некоторого индекса j , где $\bar{\mathcal{M}}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии $\bar{X}$, E_i – исключительные дивизоры бирационального морфизма f , а $a(X, M_X, E_i)$ – некоторые рациональные числа.

В работе [59] был доказан следующий результат, который теперь принято называть $4n^2$ -неравенством.

Работа выполнена при поддержке CRDF (грант RUM1-2692MO-05).

¹Все многообразия считаются проективными, нормальными и определенными над полем $\mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 1. *Выполнено неравенство $\text{mult}_O(S_1 \cdot S_2) \geq 4n^2$ для двух достаточно общих дивизоров S_1 и S_2 в линейной системе $\mathcal{M}$.*

Отметим, что важность теоремы 1 обусловлена тем, что из нее и из стандартного неравенства Нётера–Фано–Исковских (см. [16, теорема 64]) несложно выводится бирациональная сверхжесткость² и, в частности, нерациональность неособой трехмерной кватрики (см. [5], [4], [59], [32]). Легко видеть, что в случае $\dim(X) = 3$ неравенство в теореме 1 усилить нельзя (см. [31], [46]). Естественным предположить, что при увеличении размерности многообразия X локальное неравенство в теореме 1 может быть существенно улучшено, однако, по-видимому, это не так.

Для особых точек также существуют локальные неравенства, аналогичные неравенству в теореме 1, которые могут быть применимы к доказательству нерациональности особых многообразий Фано. Наиболее известным среди них является следующий результат, доказанный в работе [32], из которого следует нерациональность факториальной трехмерной кватрики, особенности которой состоят из изолированных обыкновенных двойных точек (см. [6], [32], [57]).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть P – изолированная обыкновенная двойная точка на X , линейная система $\mathcal{M}$ состоит из $\mathbb{Q}$ -картье дивизоров³, а точка P является центром канонических особенностей логпары $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$. Тогда для общего дивизора S в линейной системе $\mathcal{M}$ выполнено неравенство $\text{mult}_P(S) \geq n$, где число $\text{mult}_P(S)$ определяется посредством соотношения $\tilde{S} \sim_{\mathbb{Q}} g^*(S) - \text{mult}_P(S)E$, $g: \tilde{X} \rightarrow X$ – раздутие обыкновенной двойной точки P , E – исключительный дивизор бирационального морфизма g , а $\tilde{S}$ – собственный прообраз дивизора S на $\tilde{X}$, причем выполнено строгое неравенство $\text{mult}_P(S) > n$ при $\dim(X) > 3$.*

Так же, как и в теореме 1, неравенство в теореме 2 заведомо не может быть усилено в случае $\dim(X) = 3$ и, по-видимому, не может быть существенно улучшено при $\dim(X) \geq 4$.

Основная цель настоящей работы – получить два локальных неравенства, связывающих логканонические пороги многомерных подвижных логпар и кратности соответствующих линейных систем, а в качестве применения доказать бирациональную сверхжесткость и нерациональность нескольких серий многомерных многообразий Фано степени⁴ 6 и 8.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть V – многообразие размерности $r \geq 4$, $\mathcal{H}$ – линейная система на многообразии V , не имеющая неподвижных компонент, S_1 и S_2 – общие дивизоры в линейной системе $\mathcal{H}$, а P – неособая точка на V , являющаяся центром канонических особенностей логпары $(V, \frac{1}{n}\mathcal{H})$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что особенности логпары $(V, \frac{1}{n}\mathcal{H})$ канонические вне*

²Многообразие Фано X с $\text{rk Pic}(X) = 1$, имеющее терминальные и $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, называется *бirationально сверхжестким*, если выполнены следующие условия: многообразие X не может быть бирационально перестроено в такое расслоение $\tau: Y \rightarrow Z$, что $\dim(Y) > \dim(Z) \neq 0$, а общий слой расслоения τ имеет размерность Кодаиры, равную $-\infty$; многообразие X не может быть бирационально перестроено в многообразие Фано с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями и группой Пикара ранга 1, отличное от многообразия X ; группы $\text{Bir}(X)$ и $\text{Aut}(X)$ совпадают.

³Дивизор Вейля принято называть *$\mathbb{Q}$ -картье дивизором*, если его некоторая степень является дивизором Картье.

⁴Степенью многообразия Фано V называется число $(-K_V)^n$, где $n = \dim(V)$.

точки P . Пусть $\pi: \hat{V} \rightarrow V$ – раздутие точки P , а Π – исключительный дивизор морфизма π . Тогда существует линейное подпространство $\Lambda \subset \Pi \cong \mathbb{P}^{r-1}$ коразмерности 2 такое, что

$$\text{mult}_P(S_1 \cdot S_2 \cdot \Delta) \geq 8n^2$$

для любого эффективного дивизора Δ на V такого, что:

- 1) дивизор Δ содержит точку P и неособ в ней;
- 2) дивизор $\pi^{-1}(\Delta)$ содержит Λ ;
- 3) дивизор Δ не содержит подмногообразий в V коразмерности 2, принадлежащих базисному множеству линейной системы $\mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть V – многообразие размерности $r \geq 4$, $\mathcal{H}$ – линейная система на многообразии V , не имеющая неподвижных компонент, S_1 и S_2 – достаточно общие дивизоры в линейной системе $\mathcal{H}$, а P – изолированная обыкновенная двойная точка на V , являющаяся центром канонических особенностей логпары $(V, \frac{1}{n}\mathcal{H})$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Предположим также, что логпара $(V, \frac{1}{n}\mathcal{H})$ имеет канонические особенности вне точки P . Пусть $\pi: \hat{V} \rightarrow V$ – раздутие точки P , а E – исключительный дивизор бирационального морфизма π , который можно отождествлять с неособой квадрикой в $\mathbb{P}^r$. Тогда существует линейное подпространство $\Lambda \subset \mathbb{P}^r$ коразмерности 3, которое содержится в квадрике E , такое, что

$$\text{mult}_P(S_1 \cdot S_2 \cdot \Delta) = \text{mult}_P(S_1|_{\Delta} \cdot S_2|_{\Delta}) \geq 6n^2$$

для любого эффективного дивизора Δ на V такого, что:

- 1) дивизор Δ содержит точку P ;
- 2) точка P является обыкновенной двойной точкой на Δ ;
- 3) дивизор $\pi^{-1}(\Delta)$ содержит Λ ;
- 4) дивизор Δ не содержит подмногообразий в V коразмерности 2, принадлежащих базисному множеству линейной системы $\mathcal{H}$.

Можно показать, что оба неравенства в теоремах 3 и 4 строгие для многообразий размерности 5 и выше. Отметим, что теорему 3 можно считать естественным многомерным обобщением и усилением теоремы 1, а теорему 4 – естественным многомерным обобщением теоремы 2. Теоремы 3 и 4 можно неформально называть $8n^2$ -неравенством и $6n^2$ -неравенством соответственно. Также отметим, что все локальные пересечения в теореме 4 корректно определены посредством пересечения соответствующих циклов на раздутии многообразия в обыкновенной двойной точке (см. далее определение 7).

Заметим, что условие существования линейного подпространства в теореме 4 пусто для многообразий размерности 6 и выше по теореме Лефшеца (см. [27], [21]), откуда сразу получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть V – многообразие размерности $r \geq 6$, $\mathcal{H}$ – линейная система на многообразии V , не имеющая неподвижных компонент, S_1 и S_2 – достаточно общие дивизоры в линейной системе $\mathcal{H}$, а P – изолированная обыкновенная двойная точка на V , являющаяся центром канонических особенностей логпары $(V, \frac{1}{n}\mathcal{H})$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Предположим также, что логпара $(V, \frac{1}{n}\mathcal{H})$ имеет канонические особенности вне точки P . Тогда выполнено неравенство $\text{mult}_O(S_1 \cdot S_2) > 6n^2$.

В качестве применения теорем 3 и 4 будет доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. *Следующие многообразия Фано бирационально сверхжестки:*

1) двойное накрытие неособой гиперповерхности $V \subset \mathbb{P}^n$ степени 3 с ветвлением в эффективном дивизоре $R \subset V$, особенности которого состоят из произвольного числа изолированных обыкновенных двойных точек, где $n \geq 9$, а дивизор R высекается на V гиперповерхностью в $\mathbb{P}^n$ степени $2(n-3)$;

2) циклическое тройное накрытие неособой квадрики $Q \subset \mathbb{P}^{2r+2}$ с ветвлением в эффективном дивизоре $S \subset Q$, который высекается на квадрике Q гиперповерхностью степени $3r \geq 12$ в $\mathbb{P}^{2r+2}$, а особенности S состоят из произвольного числа изолированных обыкновенных двойных точек;

3) двойное накрытие неособого полного пересечения двух квадрик $Y \subset \mathbb{P}^n$ с ветвлением в неособом эффективном дивизоре $D \subset Y$, который высекается на многообразии Y гиперповерхностью в $\mathbb{P}^n$ степени $2(n-4) \geq 12$.

Все многообразия в теореме 5 реализуются как полные пересечения во взвешенных проективных пространствах. В частности, теорема 5 может быть эффективно использована для построения явных примеров рационально связанных⁵ нерациональных многомерных многообразий.

ПРИМЕР 1. Пусть Q – квадратика, заданная уравнением

$$\sum_{i=0}^{10} x_i^2 = 0 \subset \mathbb{P}^{10} \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{10}]),$$

а $\psi: X \rightarrow Q$ – циклическое тройное накрытие с ветвлением в дивизоре, высекаемом на неособой квадрике $Q \subset \mathbb{P}^{10}$ гиперповерхностью

$$x_0^6 x_1^6 + x_2^6 x_3^6 + x_4^6 x_5^6 + x_6^6 x_7^6 + x_8^6 x_9^6 = 0 \subset \mathbb{P}^{10} \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{10}]).$$

Тогда X – многообразие Фано, $\dim(X) = 9$, $(-K_X)^9 = 6$, а из несложных вычислений следует, что X неособо. Многообразие X бирационально сверхжестко и нерационально по теореме 5, его можно рассматривать как взвешенное полное пересечение в $\mathbb{P}(1^{11}, 4)$, которое задано уравнениями

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{10} x_i^2 &= z^3 - x_0^6 x_1^6 + x_2^6 x_3^6 + x_4^6 x_5^6 + x_6^6 x_7^6 + x_8^6 x_9^6 = 0 \subset \mathbb{P}(1^{11}, 4) \\ &\cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{10}, z]). \end{aligned}$$

Отметим, что бирациональная сверхжесткость многообразий Фано, удовлетворяющих условиям теоремы 5, обусловлена тем, что их степень и особенности относительно невелики. Интуитивно понятно, что многообразия Фано должны становиться *более рациональными* при увеличении антиканонической степени и при ухудшении особенностей. Например, из классификации неособых трехмерных многообразий Фано следует, что неособое трехмерное многообразие Фано

⁵Многообразие называется *рационально связным*, если через любые две точки на нем проходит рациональная кривая (см. [54]–[56], [50]). Например, унирациональное многообразие рационально связно.

рационально, если его степень больше 24 (см. [44]). С этой точки зрения утверждение о нерациональности многообразий Фано в теореме 5 очень естественно. К сожалению, все имеющиеся доказательства бирациональной сверхжесткости существенно используют проективную геометрию многообразия, связанную с антиканоническим отображением. Естественно предположить, что некоторые утверждения о бирациональной сверхжесткости могут быть доказаны и в общем случае без явного использования свойств антиканонического кольца. Например, можно высказать следующее предположение.

ГИПОТЕЗА 1. Пусть X – произвольное неособое многообразие Фано размерности n такое, что $\mathrm{rk}\, \mathrm{Pic}(X) = 1$ и $(-K_X)^n \leq n$. Тогда X бирационально сверхжестко.

Отметим, что гипотеза 1 доказана только в размерности 3 при использовании классификации неособых трехмерных многообразий Фано (см. [44]). С другой стороны, теорема 5 дает много новых примеров многообразий Фано большой размерности, подтверждающих верность гипотезы 1. Из доказательства теоремы 5 следует, что основные трудности в доказательстве гипотезы 1 состоят в определении подходящих локальных неравенств и нахождении такого способа их применения к многообразиям Фано, который явно не использует их проективной геометрии. Возможно, что доказательство гипотезы 1 будет очень трудным, однако есть все основания полагать, что имеющиеся методы позволят в ближайшем будущем доказать следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 2. Пусть X – произвольное неособое многообразие Фано размерности n такое, что $\mathrm{rk}\, \mathrm{Pic}(X) = 1$ и $(-K_X)^n = 1$. Тогда X бирационально сверхжестко.

Геометрический смысл теоремы 5 имеет ту же природу, что и теорема Нётера о порождении группы бирациональных автоморфизмов плоскости проективными автоморфизмами и инволюцией Кремоны (см. [31]). С теоремой Нётера связано много интересных задач, одна из которых – бирациональная классификация эллиптических пучков на плоскости. Этот вопрос был рассмотрен в работе [24], а позднее идеи, использованные в работе [24], были строго обоснованы в [3], где доказано, что любой эллиптический пучок на плоскости может быть бирационально перестроен в эллиптический пучок специального вида, так называемый пучок Альфана. Аналогичная проблема может быть рассмотрена и для многообразий Фано, которые удовлетворяют условиям теоремы 5. Используемые методы позволяют также доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. Бирационально сверхжесткие многообразия Фано из теоремы 5 не могут быть бирационально перестроены в расслоения на эллиптические кривые.

Бирациональные перестройки в эллиптические расслоения были использованы в работах [25], [26], [40] для доказательства потенциальной плотности⁶ рациональных точек на трехмерных многообразиях Фано, где был получен следующий результат.

⁶Рациональные точки многообразия V , определенного над некоторым числовым полем $\mathbb{F}$, потенциально плотны, если существует конечное расширение $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ полей такое, что множество $\mathbb{K}$ -точек многообразия V плотно по Зарискому в нем.

ТЕОРЕМА 7. *Рациональные точки потенциально плотны на всех гладких трехмерных многообразиях Фано, кроме, быть может, двойного накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в гладкой секстике.*

Возможное исключение в теореме 7 возникло вследствие того, что двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в неособой секстике не удалось бирационально перестроить в эллиптическое расслоение. В то же время в работе [29] было показано, что двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в неособой секстике невозможно бирационально перестроить ни в какое эллиптическое расслоение, а из классификации неособых трехмерных многообразий Фано (см. [44]) легко следует, что это единственное неособое многообразие Фано, обладающее таким свойством. Хорошо известна *ослабленная гипотеза Ленга* о том, что рациональные точки на многообразиях общего типа не потенциально плотны, которая в настоящее время доказана только для кривых и подмногообразий абелевых многообразий (см. [35], [36]). Геометрия бирационально жестких многообразий во многом напоминает геометрию многообразий общего типа, таким образом, можно ожидать, что на некоторых бирационально жестких многообразиях множество рациональных точек может не быть потенциально плотным, что дало бы давно ожидаемый пример неунирационального, но рационально связного многообразия (см. [52, гипотеза 4.1.6]).

§ 2. Предварительные сведения

В настоящем параграфе будут рассмотрены элементарные свойства подвижных логпар, которые были формально введены в работе [19], но неявно использовались очень давно, а также многие хорошо известные результаты, связанные с принципом связности В. В. Шокурова (см. [18]). Более подробно о подвижных логпарах можно прочесть в работе [16].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Подвижная логпара (X, M_X) состоит из многообразия X и подвижной границы M_X на нем, где $M_X = \sum_{i=1}^n a_i M_i$ – формальная конечная линейная комбинация линейных систем без неподвижных компонент M_i на X , все числа a_i рациональны и неотрицательны.*

В отличие от обычных логпар, прямой образ подвижной границы при бирациональном отображении естественно и корректно определен ввиду того, что у компонент подвижной границы базисное множество не содержит дивизоров.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для подвижной логпары (X, M_X) самопересечение M_X^2 может быть рассмотрено как эффективный цикл коразмерности два на X , если X имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности. А именно, пусть $M_X = \sum_{i=1}^n a_i M_i$, где M_i – линейная система без неподвижных компонент, для каждого индекса i выберем два достаточно общих дивизора S_i и $\hat{S}_i$ в линейной системе M_i и положим $M_X^2 = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j S_i \cdot \hat{S}_j$.

Такие стандартные понятия, как дискрепантности, терминальность, каноничность, логтерминальность и логканоничность могут быть определены для подвижных логпар аналогично тому, как они определяются для обычных

логпар (см. [48]). Причем особенности подвижной логпары совпадают с особенностями многообразия вне объединения базисных множеств компонент подвижной границы, откуда следует, что каждая подвижная логпара бирационально эквивалентна подвижной логпаре с терминальными особенностями (см. [42]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Собственное неприводимое подмногообразие $Y \subset X$ называется *центром канонических особенностей подвижной логпары* (X, M_X) в том случае, если существуют неособое многообразие W , бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ и исключительный дивизор $E_1 \subset W$ морфизма f такие, что выполнено соотношение

$$K_W + f^{-1}(M_X) \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + M_X) + \sum_{i=1}^k a(X, M_X, E_i)E_i,$$

где $a(X, M_X, E_i)$ – рациональное число, E_i – исключительный дивизор бирационального морфизма $f: W \rightarrow X$, $f(E_1) = Y$ и $a(X, M_X, E_1) \leq 0$. Множество всех центров канонических особенностей логпары (X, M_X) принято обозначать $\mathbb{CS}(X, M_X)$.

Из определения 2 следует, что подвижная логпара (X, M_X) имеет терминальные особенности, если и только если $\mathbb{CS}(X, M_X) = \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если особенности подвижной логпары (X, M_X) терминальны, то для каждого достаточно малого рационального числа $\varepsilon > 1$ особенности подвижной логпары $(X, \varepsilon M_X)$ также терминальны.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Рассмотрим подвижную логпару (X, M_X) и собственное неприводимое подмножество $Z \subset X$ такое, что многообразие X неособо в общей точке подмногообразия Z . Тогда из элементарных свойств раздутий неособых подмногообразий неособых многообразий следует, что

$$Z \in \mathbb{CS}(X, M_X) \Rightarrow \text{mult}_Z(M_X) \geq 1,$$

а также $\text{mult}_Z(M_X) \geq 1 \Rightarrow Z \in \mathbb{CS}(X, M_X)$, если $\text{codim}(Z \subset X) = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть (X, M_X) – подвижная логпара, H – достаточно общее гиперплоское сечение многообразия X , а $Z \subset X$ – собственное неприводимое подмногообразие такое, что $\dim(Z) \geq 1$ и $Z \in \mathbb{CS}(X, M_X)$. Тогда $Z \cap H \in \mathbb{CS}(H, M_X|_H)$.

Практически во всех бирационально геометрических задачах используются подвижные логпары с границей, состоящей из единственной линейной системы без неподвижных компонент, умноженной на некоторое положительное рациональное число (см. [32]). Однако иногда все же возникает необходимость использовать и более сложно устроенные логпары. Проиллюстрируем это на примере простого доказательства следующего результата⁷ [58].

⁷Утверждение теоремы 8 выполнено и для расслоений на поверхности дель Педро степени 1, однако в этом случае доказательство нужно немного изменить (см. [58]). Более того, аргументы доказательства теоремы 8 могут быть применимы в более общей ситуации (см. [17]), а не только к расслоениям на поверхности дель Педро. Например, легко получить результат, аналогичный теореме 8, для расслоений на неособые гиперповерхности степени n в $\mathbb{P}^n$ при $n \geq 4$, используя результаты работ [14], [17]. Однако, как оказалось впоследствии, утверждение теоремы 8 выполнено при намного более слабых и естественных предположениях (см. [1], [2]). По всей видимости, геометрический смысл теоремы 8 не отражен в приведенном доказательстве (см. [8]).

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\psi: X \rightarrow \operatorname{Spec}(\mathcal{O})$ и $\varphi: V \rightarrow \operatorname{Spec}(\mathcal{O})$ – расслоения на поверхности дель Пеццо степени d , где $\mathcal{O}$ – кольцо дискретного нормирования. Предположим существование бирационального отображения $\rho: X \dashrightarrow Y$, индуцирующего бирациональный изоморфизм общих слоев расслоений ψ и φ , так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow^{\rho} & Y \\ \psi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \operatorname{Spec}(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\operatorname{id}} & \operatorname{Spec}(\mathcal{O}) \end{array}$$

коммутативна. Тогда отображение ρ является изоморфизмом, если выполнены неравенства $1 \neq d \leq 4$, а схемно-теоретические слои каждого из расслоений ψ и φ над замкнутой точкой схемы $\operatorname{Spec}(\mathcal{O})$ неособы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Lambda = |-K_X|$, $\Gamma = |-K_V|$, $\bar{\Lambda} = \rho(\Lambda)$, $\bar{\Gamma} = \rho^{-1}(\Gamma)$ и

$$M_X = \frac{1+\varepsilon}{2} \Lambda + \frac{1+\varepsilon}{2} \bar{\Gamma}, \quad M_V = \frac{1+\varepsilon}{2} \bar{\Lambda} + \frac{1+\varepsilon}{2} \Gamma,$$

где ε – достаточно малое положительное рациональное число. В этом случае подвижные логпары (X, M_X) и (V, M_V) бирационально эквивалентны по построению, а дивизоры $K_X + M_X$ и $K_V + M_V$ обильны. Таким образом, из [16, лемма 36] следует, что отображение ρ является изоморфизмом, если логпары (X, M_X) и (V, M_V) имеют канонические особенности.

Без ограничения общности можно считать, что логпара (X, M_X) имеет неканонические особенности. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию, откуда будет следовать утверждение теоремы.

Заметим, что особенности логпары $(X, \frac{1+\varepsilon}{2} \bar{\Gamma})$ также не являются каноническими, поскольку линейная система Λ не имеет базисных точек, так как ψ – расслоения на поверхности дель Пеццо степени $d > 1$.

Пусть $\bar{X}$ – схемно-теоретический слой расслоения ψ над единственной замкнутой точкой схемы $\operatorname{Spec}(\mathcal{O})$. Тогда особенности логпары $(\bar{X}, \frac{1+\varepsilon}{2} \bar{\Gamma}|_{\bar{X}})$ не являются логканоническими по теореме 17.6 работы [53] или по теореме 13 (см. далее). В частности, особенности логпары $(\bar{X}, \frac{1}{2} \bar{\Gamma}|_{\bar{X}})$ не являются логтерминальными, поскольку $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым. С другой стороны, из элементарных свойств неособых поверхностей дель Пеццо степени $d \leq 4$ легко следует, что для каждой кривой S из линейной системы $|-K_{\bar{X}}|$ особенности логпары $(\bar{X}, \frac{1}{2} S)$ всегда являются логтерминальными (см. [58]).

Далее в настоящем параграфе мы не будем налагать какие-либо ограничения на коэффициенты и компоненты границ. В частности, границы могут не быть эффективными или подвижными, если это не оговорено особо, однако все логканонические дивизоры по-прежнему будут считаться $\mathbb{Q}$ -картье дивизорами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для произвольной логпары (X, B_X) и бирационального морфизма $f: V \rightarrow X$ логпара (V, B^V) называется *логподнятием логпары* (X, B_X) , если

$$B^V = f^{-1}(B_X) - \sum_{i=1}^n a(X, B_X, E_i) E_i, \quad K_V + B^V \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X),$$

где $a(X, B_X, E_i) \in \mathbb{Q}$ и дивизор E_i является f -исключительным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для произвольной логпары (X, B_X) собственное неприводимое подмногообразие $Y \subset X$ называется *центром логканонических особенностей логпары* (X, B_X) , если существуют бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ и не обязательно f -исключительный дивизор $E \subset W$ такие, что E содержится в носителе эффективной части дивизора $[B^Y]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Обозначим $\mathbb{LCS}(X, B_X)$ множество всех центров логканонических особенностей логпары (X, B_X) , а $\text{LCS}(X, B_X)$ – объединение центров логканонических особенностей логпары (X, B_X) , рассматриваемое как собственное подмножество в X и называемое *множеством логканонических особенностей*.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть (X, B_X) – логпара, H – достаточно общее гиперплоское сечение многообразия X , а $Z \subset X$ – собственное неприводимое подмногообразие такое, что $\dim(Z) \geq 1$ и $Z \in \mathbb{LCS}(X, B_X)$. Тогда $Z \cap H \in \text{LCS}(H, B_X|_H)$.

Рассмотрим логпару (X, B_X) , где $B_X = \sum_{i=1}^k a_i B_i$, $a_i \in \mathbb{Q}$, а B_i является либо эффективным, неприводимым и приведенным дивизором на многообразии X , либо линейной системой на многообразии X без неподвижных компонент. Будем говорить, что граница B_X *эффективна*, если все числа a_i неотрицательны, также будем говорить, что граница B_X *подвижна*, если B_i – линейная система, не имеющая неподвижных компонент, при всех значениях индекса i .

ПРИМЕР 2. Пусть O – неособая точка на многообразии X , которая является элементом множества $\mathbb{LCS}(X, B_X)$, $f: V \rightarrow X$ – раздутие точки O и E – исключительный дивизор раздутия f . Тогда либо $E \in \text{LCS}(V, B^V)$, либо существует собственное подмногообразие $Z \subset E$, содержащееся в множестве $\mathbb{LCS}(V, B^V)$, причем исключительный дивизор E принадлежит множеству $\mathbb{LCS}(V, B^V)$ в том и только в том случае, когда выполнено неравенство $\text{mult}_O(B_X) \geq \dim(X)$.

Пусть $f: Y \rightarrow X$ – бирациональный морфизм, многообразие Y неособо, а объединение всех дивизоров $f^{-1}(B_i)$ и всех f -исключительных дивизоров образует дивизор с простыми нормальными пересечениями. Бирациональный морфизм f называется *логразрешением логпары* (X, B_X) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Подсхема, ассоциированная с пучком идеалов

$$\mathcal{I}(X, B_X) = f_*([-B^Y]),$$

называется *подсхемой логканонических особенностей логпары* (X, B_X) и обозначается $\mathcal{L}(X, B_X)$.

Отметим, что $\text{Supp}(\mathcal{L}(X, B_X)) = \text{LCS}(X, B_X) \subset X$.

Следующий результат является теоремой В.В. Шокурова об обращении в нуль (см. [18], [20] и [16, теорема 42]).

ТЕОРЕМА 9. *Предположим, что B_X эффективна. Пусть H – произвольный численно эффективный и объемный дивизор на X такой, что дивизор $D = K_X + B_X + H$ является дивизором Картье. Тогда $H^i(X, \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D) = 0$ для всех $i > 0$.*

Рассмотрим два элементарных применения теоремы 9, которые являются частными случаями более общего результата (см. [14], [17], [38]).

ЛЕММА 1. Пусть $V = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а B_V – эффeктивная граница на V бистепени (a, b) , где $a, b \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$. Тогда $\mathbb{LCS}(V, B_V) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_V = \sum_{i=1}^k a_i B_i$ для некоторых положительных рациональных чисел a_i и неприводимых приведенных кривых $B_i \subset V$. Тогда $a_i \leq \max(a, b) < 1$ для всех i , поскольку пересечение границы B_V со слоями двух проекций на $\mathbb{P}^1$ равно a и b соответственно. В частности, множество $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ не содержит кривых.

Допустим, что $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ содержит точку $O \in V$. Рассмотрим произвольный обильный дивизор $H \in \text{Pic}(V) \otimes \mathbb{Q}$ бистепени $(1 - a, 1 - b)$. Тогда на V существует дивизор Картье D такой, что $D \sim_{\mathbb{Q}} K_V + B_V + H$ и $H^0(\mathcal{O}_V(D)) = 0$, однако из теоремы 9 следует сюръективность отображения

$$H^0(\mathcal{O}_V(D)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}(D)) \rightarrow 0,$$

но $H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}(D)) = H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}) \neq 0$. Противоречие.

ЛЕММА 2. Пусть $V \subset \mathbb{P}^n$ – неособая гиперповерхность, а B_V – эффeктивная граница на V такая, что $B_V \equiv rH$ для $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, где $H \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_V$. Тогда особенности логпары (V, B_V) логтерминальны при $\deg(V) < n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $k = \deg(V)$ и допустим, что множество $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ содержит некоторое подмногообразие $Z \subset V$, но $k < n$. Тогда из [7, теорема 2] сразу следует $\dim(Z) = 0$. Значит, множество $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ содержит только замкнутые точки многообразия V , носитель схемы логканонических особенностей $\mathcal{L}(V, B_V)$ нульмерен и $H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}) \neq 0$.

Заметим, что выполнена численная эквивалентность

$$K_V + B_V + (1 - r)H \equiv (k - n)H$$

и $H^0(\mathcal{O}_V((k - n)H)) = 0$, поскольку $k < n$. Однако последовательность

$$H^0(\mathcal{O}_V((k - n)H)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}((k - n)H)) \rightarrow 0$$

точна по теореме 9, но $H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}((k - n)H)) = H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}) \neq 0$. Противоречие.

Идея доказательства лемм 1 и 2 может быть применена для получения намного более общего результата. А именно, для произвольного дивизора Картье D на многообразии X рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{L}(X, B_X)}(D) \rightarrow 0$$

и соответствующую точную последовательность

$$H^0(\mathcal{O}_X(D)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(X, B_X)}(D)) \rightarrow H^1(\mathcal{I}(X, B_X) \otimes D),$$

состоящую из групп когомологий. Теперь из применения теоремы 9 вытекают две следующие теоремы о связности (см. [18]).

ТЕОРЕМА 10. Пусть B_X эффeктивна, а дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффeктивен и объемен. Тогда множество $\mathbb{LCS}(X, B_X) \subset X$ связно.

ТЕОРЕМА 11. Пусть B_X эффективна, дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объем относительно некоторого морфизма $g: X \rightarrow Z$ со связными слоями. Тогда множество $\text{LCS}(X, B_X)$ связано в окрестности каждого слоя морфизма g .

Из доказательства теоремы 9 несложно вывести следующий результат, который является теоремой 17.4 работы [53].

ТЕОРЕМА 12. Предположим, что дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объем относительно некоторого морфизма со связными слоями $g: X \rightarrow Z$ и выполнено неравенство $\text{codim}(g(B_i) \subset Z) \geq 2$ при $b_i < 0$. Тогда $\text{LCS}(Y, B^Y)$ связано в окрестности каждого слоя морфизма $g \circ f: Y \rightarrow Z$.

Ранее были определены центр канонических особенностей и множество центров канонических особенностей подвижной логпары (см. определение 2), тем не менее, оба этих понятия можно корректно использовать и для обыкновенных логпар.

ТЕОРЕМА 13. Пусть граница B_X эффективна, $Z \in \mathbb{CS}(X, B_X)$ и многообразие Z содержится в носителе эффективного и неприводимого дивизора Картье H на многообразии X такого, что H не является компонентой границы B_X и неособ в общей точке Z . Тогда $\text{LCS}(H, B_X|_H) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим логпару $(X, B_X + H)$. Тогда

$$\{Z, H\} \subset \text{LCS}(X, B_X + H).$$

Пусть $f: W \rightarrow X$ – логразрешение логпары $(X, B_X + H)$. Тогда

$$K_W + \hat{H} \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X + H) + \sum_{E \neq \hat{H}} a(X, B_X + H, E)E,$$

где $\hat{H} = f^{-1}(H)$. Применяя теорему 12 для логподнятия логпары $(X, B_X + H)$ на многообразии W , получим, что существует f -исключительный дивизор E на W такой, что $f(E) = Z$, $a(X, B_X, E) \leq -1$ и $\hat{H} \cap E \neq \emptyset$, а из эквивалентности

$$K_{\hat{H}} \sim (K_W + \hat{H})|_{\hat{H}} \sim_{\mathbb{Q}} f|_{\hat{H}}^*(K_H + B_X|_H) + \sum_{E \neq \hat{H}} a(X, B_X + H, E)E|_{\hat{H}}$$

следует необходимое утверждение.

По аналогии с доказательством теоремы 13 можно получить следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть B_X подвижна и эффективна, особенности подвижной логпары (X, B_X) логтерминальны в проколотой окрестности изолированной гиперповерхностной особой точки на X такой, что $O \in \mathbb{CS}(X, M_X)$. Тогда O принадлежит множеству $\text{LCS}(S, B_S)$, где $S = \bigcap_{i=1}^k H_i$ и $B_S = B_X|_S$, а H_i – общее гиперплоское сечение многообразия X , содержащее точку O .

Следующий результат является теоремой 3.1 работы [32], которая дает самое простое доказательство $4n^2$ -неравенства (см. [59]), использующее теорему 13.

ТЕОРЕМА 14. Пусть H – поверхность, O – гладкая точка на H , M_H – эффе́ктивная подвижная граница на H , Δ_1 и Δ_2 – неприводимые и приведенные кривые на поверхности H , которые пересекаются нормально в точке O . Предположим, что

$$O \in \mathbb{LCS}(H, (1 - a_1)\Delta_1 + (1 - a_2)\Delta_2 + M_H)$$

для некоторых неотрицательных рациональных чисел a_1 и a_2 . Тогда

$$\text{mult}_O(M_H^2) \geq \begin{cases} 4a_1a_2, & \text{если } a_1 \leq 1 \text{ или } a_2 \leq 1, \\ 4(a_1 + a_2 - 1), & \text{если } a_1 > 1 \text{ и } a_2 > 1. \end{cases}$$

Отметим, что теорема 14 несложно доказывается индукцией по количеству требуемых раздутий, необходимых для реализации соответствующей дискрепантности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть O – изолированная обыкновенная двойная точка на многообразии X , а B_X – эффе́ктивная граница на X , являющаяся $\mathbb{Q}$ -карте дивизором, такая, что $O \in \mathbb{CS}(X, B_X)$. Необходимо показать, что $\text{mult}_O(B_X) \geq 1$ при выполнении неравенства $\dim(X) \geq 3$, где $\text{mult}_O(B_X)$ – рациональное число такое, что

$$B_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(B_X) - \text{mult}_O(B_X)E,$$

где $f: W \rightarrow X$ – раздутие точки O , $B_W = f^{-1}(B_X)$, а E – исключительный дивизор бирационального морфизма f . Причем ввиду следствия 2 можно считать, что размерность многообразия X равна трем.

Предположим, что выполнено неравенство $\text{mult}_O(B_X) < 1$. Тогда из соотношения

$$K_W + B_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X) + (1 - \text{mult}_O(B_X))E$$

следует, что существует подмногообразие $Z \subset E$, которое является центром канонических особенностей логпары (W, B_W) . Следовательно, по теореме 13 $\mathbb{LCS}(E, B_W|_E) \neq \emptyset$, что противоречит лемме 1, так как $E \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Утверждение теоремы 2 можно несложно обобщить двумя способами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\dim(X) = 3$, B_X – эффе́ктивная граница такая, что множество $\mathbb{CS}(X, B_X)$ содержит изолированную двойную особую точку O многообразия X такую, что многообразие X локально изоморфно гиперповерхности

$$y^3 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \subset \mathbb{C}^4 \cong \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, y])$$

в окрестности точки O . Тогда $\text{mult}_O(B_X) \geq \frac{1}{2}$, где $\text{mult}_O(B_X)$ – рациональное число, определяемое соотношением $B_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(B_X) - \text{mult}_O(B_X)E$, $f: W \rightarrow X$ – раздутие точки O , $B_W = f^{-1}(B_X)$, а E – исключительный дивизор морфизма f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие W неособо, а исключительный дивизор E есть конус в $\mathbb{P}^3$ над неособой коникой. Более того, ограничение $-E|_E$ рационально эквивалентно гиперплоскому сечению конуса $E \subset \mathbb{P}^3$ и выполнено соотношение

$$K_W + B_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X) + (1 - \text{mult}_O(B_X))E.$$

Предположим, что $\text{mult}_O(B_X) < \frac{1}{2}$. Тогда

$$\mathbb{CS}(W, B_W) \subset \mathbb{CS}(W, B_W + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E),$$

поскольку $\text{mult}_O(B_X) - 1 < 0$. С другой стороны, логпара

$$(W, B_W + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E)$$

является логподнятием логпары (X, B_X) и $O \in \mathbb{CS}(X, B_X)$. Значит, существует неприводимое собственное подмногообразие $Z \subset E$ такое, что $Z \in \mathbb{CS}(W, B_W)$, откуда следует, что множество $\mathbb{LCS}(E, B_W|_E)$ не пусто по теореме 13.

Пусть $B_E = B_W|_E$. Тогда множество $\mathbb{LCS}(E, B_E)$ не может содержать кривых на квадратичном конусе E , поскольку в противном случае пересечение границы B_E с образующей конуса E будет больше $\frac{1}{2}$, что невозможно, поскольку по предположению выполнено неравенство $\text{mult}_O(B_X) < \frac{1}{2}$. Значит, $\dim(\text{Supp}(\mathcal{L}(E, B_E))) = 0$.

Пусть H – гиперплоское сечение конуса $E \subset \mathbb{P}^3$. Тогда

$$K_E + B_E + (1 - \text{mult}_O(B_X))H \sim_{\mathbb{Q}} -H$$

и $H^0(\mathcal{O}_E(-H)) = 0$, но последовательность групп когомологий

$$H^0(\mathcal{O}_E(-H)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(E, B_E)}) \rightarrow H^1(E, \mathcal{I}(E, B_E) \otimes \mathcal{O}_E(-H))$$

точна и $H^1(E, \mathcal{I}(E, B_E) \otimes \mathcal{O}_E(-H)) = 0$ по теореме 9, откуда $H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(E, B_E)}) = 0$, что невозможно, поскольку $\mathbb{LCS}(E, B_E) \neq \emptyset$.

Из следствия 2 и теоремы 2 получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть B_X – эффективная граница на X , являющаяся $\mathbb{Q}$ -картью дивизором, $\dim(X) \geq 4$, O – изолированная двойная точка на X такая, что многообразие X может быть задано в окрестности точки O локальным уравнением

$$y^3 = \sum_{i=1}^{\dim(X)} x_i^2 \subset \mathbb{C}^{\dim(X)+1} \cong \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{\dim(X)}, y])$$

и $O \in \mathbb{CS}(X, B_X)$. Тогда $\text{mult}_O(B_X) > 1$, где $\text{mult}_O(B_X)$ – рациональное число, определяемое соотношением $B_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(B_X) - \text{mult}_O(B_X)E$, $f: W \rightarrow X$ – раздутие точки O , $B_W = f^{-1}(B_X)$, а E – исключительный дивизор морфизма f .

Следующее обобщение теоремы 2 работы [7] есть лемма 3.18 работы [15].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть V – неособое полное пересечение $\bigcap_{i=1}^k G_i \subset \mathbb{P}^m$, G_i – гиперповерхность, D – эффективный дивизор на многообразии V , а $S \subset V$ – неприводимое подмногообразие такие, что $m - k > 2$, $\dim(S) \geq k$ и $\text{codim}(S \subset V) \geq 2$. Тогда выполнено неравенство $\text{mult}_S(D) \leq n$ для такого $n \in \mathbb{N}$, что $D \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(n)|_V$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть (V, B_V) – логпара с эффективной границей B_V такая, что многообразие V – неособое полное пересечение $\bigcap_{i=1}^k G_i \subset \mathbb{P}^m$, где G_i – гиперповерхность и $m - k > 2$, $B_V \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)|_V$. Тогда множество $\mathbb{CS}(V, B_V)$ не содержит подмногообразий многообразия V , размерность которых больше либо равна k .

§ 3. $8n^2$ -неравенство

Основной целью в настоящем параграфе является доказательство теоремы 3. Пусть X – многообразие размерности $\dim(X) \geq 3$, а $B_X = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{B}_i$ – подвижная граница на многообразии X такая, что $\mathcal{B}_i$ – линейная система на X , не имеющая неподвижных компонент, и a_i – неотрицательное рациональное число. Следующий результат является следствием 3.5 в работе [32].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\dim(X) = 3$, а O – неособая точка на многообразии X такая, что $O \in \mathbb{CS}(X, B_X)$, но $\text{mult}_O(B_X) < 2$. Пусть $f: V \rightarrow X$ – обыкновенное раздутие точки O , E – f -исключительный дивизор и $B_V = f^{-1}(B_X)$. Тогда существует такая прямая $L \subset E \cong \mathbb{P}^2$, что $L \in \mathbb{LCS}(V, B_V + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимое утверждение локально по X , поэтому без ограничения общности можно считать, что $X \cong \mathbb{C}^3$, а точка O – начало координат в $\mathbb{C}^3$.

Рассмотрим достаточно общее гиперплоское сечение H многообразия X , которое проходит через точку O . Положим $T = f^{-1}(H)$. Тогда выполнено соотношение

$$K_V + B_V + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E + T \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X + H)$$

и $\text{mult}_O(B_X) \geq 1$ (см. замечание 3).

Из общности выбора гиперплоского сечения H и теоремы 13 немедленно следует, что $O \in \mathbb{LCS}(H, B_X|_H)$ и, даже более того,

$$\mathbb{LCS}(T, B_V|_T + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E|_T) \neq \emptyset,$$

поскольку $\text{mult}_O(B_X) < 2$ по предположению (см. пример 2). Теперь из применения теоремы 11 к морфизму f сразу следует, что множество

$$\mathbb{LCS}(T, B_V|_T + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E|_T)$$

состоит из некоторой единственной точки $P \in E \cap T$, но, с другой стороны, из общности выбора H следует, что P является пересечением T с некоторым элементом множества $\mathbb{LCS}(V, B_V + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E)$. Значит, множество

$$\mathbb{LCS}(T, B_V + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E)$$

содержит кривую $L \subset E$, пересечение которой с T состоит только из точки P , следовательно, кривая L – прямая в $E \cong \mathbb{P}^2$. Предложение доказано.

Пусть $\dim(X) = 4$ и существует неособая точка $O \in X$ такая, что $O \in \mathbb{CS}(X, B_X)$, но выполнено неравенство $\text{mult}_O(B_X) < 3$. Предположим, что логпара (X, B_X) имеет канонические особенности вне O . Пусть $f: V \rightarrow X$ – раздутие точки O , E – исключительный дивизор раздутия f и $B_V = f^{-1}(B_X)$. Следующий результат является непосредственным обобщением предложения 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Имеет место одно из следующих двух утверждений:

1) существует поверхность $S \subset E$ такая, что

$$S \in \mathbb{LCS}(V, B_V + (\text{mult}_O(B_X) - 2)E);$$

2) существует прямая $L \subset E \cong \mathbb{P}^3$ такая, что

$$L \in \mathbb{LCS}(V, B_V + (\text{mult}_O(B_X) - 2)E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение следует из теоремы 11 и приведенного ранее доказательства предложения 4.

Предположим, что множество $\mathbb{LCS}(V, B_V + (\text{mult}_O(B_X) - 2)E)$ не содержит поверхностей, принадлежащих дивизору E , но содержит некоторую прямую $L \subset E \cong \mathbb{P}^3$, и пусть $g: W \rightarrow V$ – раздутие этой прямой L . Положим

$$F = g^{-1}(L), \quad \bar{E} = g^{-1}(E), \quad B_W = g^{-1}(B_V).$$

Тогда из определения 3 следует, что

$$B^W = B_W + (\text{mult}_O(B_X) - 3)\bar{E} + (\text{mult}_O(B_X) + \text{mult}_L(B_V) - 5)F.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Имеет место одно из следующих двух утверждений:

- 1) дивизор F принадлежит множеству $\mathbb{LCS}(W, B^W + \bar{E} + 2F)$;
- 2) существует поверхность $Z \subset F$ такая, что $g(Z) = L$ и

$$F \in \mathbb{LCS}(W, B^W + \bar{E} + 2F).$$

Прежде чем доказывать предложение 6, покажем что теорема 3 в размерности 4 несложно выводится из предложения 6.

ТЕОРЕМА 15. Пусть Y – четырехмерное многообразие, $\mathcal{M}$ – линейная система на многообразии Y , не имеющая неподвижных компонент, S_1 и S_2 – общие дивизоры в линейной системе $\mathcal{M}$, а P – неособая точка на Y такая, что $P \in \mathbb{CS}(Y, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, а логпара $(Y, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ имеет канонические особенности вне точки P . Пусть $\pi: \hat{Y} \rightarrow Y$ – раздутие точки P , а Π – исключительный дивизор морфизма π . Тогда существует прямая $C \subset \Pi \cong \mathbb{P}^3$ такая, что

$$\text{mult}_P(S_1 \cdot S_2 \cdot \Delta) \geq 8n^2$$

для любого эффективного дивизора Δ на Y такого, что:

- 1) дивизор Δ содержит точку P и неособ в ней;
- 2) прямая $C \subset \Pi \cong \mathbb{P}^3$ содержится в дивизоре $\pi^{-1}(\Delta)$;
- 3) дивизор Δ не содержит подмногообразий в Y размерности 2, принадлежащих базисному множеству линейной системы $\mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим любой эффективный дивизор Δ на многообразии Y такой, что $P \in \Delta$, дивизор Δ неособ в точке P и дивизор Δ не содержит ни одной поверхности, которая принадлежит базисному множеству $\mathcal{M}$. В этом случае линейная система $\mathcal{M}|_\Delta$ не имеет неподвижных компонент, а $S_1 \cdot S_2 \cdot \Delta$ является эффективным 1-циклом.

Положим $\bar{S}_1 = S_1|_\Delta$ и $\bar{S}_2 = S_2|_\Delta$. Требуется доказать неравенство

$$\text{mult}_P(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2) \geq 8n^2, \tag{1}$$

возможно, при наложении дополнительных условий на дивизор Δ .

Положим $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}|_\Delta$. Тогда $P \in \mathbb{LCS}(\Delta, \frac{1}{n}\bar{\mathcal{M}})$ по теореме 13.

Пусть $\bar{\pi}: \hat{\Delta} \rightarrow \Delta$ – раздутие точки P и $\bar{\Pi} = \bar{\pi}^{-1}(P)$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \hat{\Delta} & \xrightarrow{\quad} \hat{Y} \\ \bar{\pi} \swarrow & & \searrow \pi \\ \Delta & \xrightarrow{\quad} & Y \end{array} \quad (2)$$

коммутативна, а $\hat{\Delta}$ можно отождествлять с дивизором $\pi^{-1}(\Delta) \subset \hat{Y}$, в частности, выполнено равенство $\bar{\Pi} = \Pi \cap \hat{\Delta}$.

В случае выполнения неравенства $\text{mult}_P(\overline{\mathcal{M}}) \geq 3n$ доказательство неравенства (1) тривиально. Значит, можно считать, что $\text{mult}_P(\overline{\mathcal{M}}) < 3n$.

Пусть $\widehat{\mathcal{M}} = \bar{\pi}^{-1}(\overline{\mathcal{M}})$. Тогда

$$\bar{\Pi} \notin \text{LCS}\left(\hat{\Delta}, \frac{1}{n} \widehat{\mathcal{M}} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_P(\overline{\mathcal{M}}) - 2\right) \bar{\Pi}\right),$$

откуда следует существование собственного подмногообразия $\Xi \subset \bar{\Pi} \cong \mathbb{P}^2$ такого, что

$$\Xi \in \text{LCS}\left(\hat{\Delta}, \frac{1}{n} \widehat{\mathcal{M}} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_P(\overline{\mathcal{M}}) - 2\right) \bar{\Pi}\right)$$

(см. пример 2).

Предположим, что Ξ – кривая. Положим $\hat{S}_i = \bar{\pi}^{-1}(S_i)$. Из элементарных свойств поведения кратностей при раздутиях (см. [59, лемма 6.5]) следует выполнение неравенства

$$\text{mult}_P(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2) \geq \text{mult}_P(\overline{\mathcal{M}})^2 + \text{mult}_{\Xi}(\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2),$$

а из теоремы 14, примененной к логпаре $(\hat{\Delta}, \frac{1}{n} \widehat{\mathcal{M}} + (\frac{1}{n} \text{mult}_P(\overline{\mathcal{M}}) - 2) \bar{\Pi})$ в общей точке кривой Ξ , следует выполнение неравенства

$$\text{mult}_{\Xi}(\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2) \geq 4(3n^2 - n \text{mult}_P(\overline{\mathcal{M}})),$$

откуда следует, что

$$\text{mult}_P(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2) \geq \text{mult}_P(\overline{\mathcal{M}})^2 + 4(3n^2 - n \text{mult}_P(\overline{\mathcal{M}})) \geq 8n^2,$$

что, собственно, и требовалось доказать.

Предположим теперь, что Ξ – точка. В этом случае из предложения 5 сразу следует существование прямой $C \subset \Pi \cong \mathbb{P}^3$ такой, что $\Xi = C \cap \hat{\Delta}$ и

$$C \in \text{LCS}\left(\hat{Y}, \frac{1}{n} \pi^{-1}(\mathcal{M}) + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_P(\mathcal{M}) - 2\right) \Pi\right).$$

Заметим, что прямая C не зависит от выбора дивизора Δ . Как следует из предложения 5, прямая $C \subset \Pi$ зависит только от свойств логпары $(Y, \frac{1}{n} \mathcal{M})$.

Допустим, что дивизор Δ был выбран таким образом, что $C \subset \pi^{-1}(\Delta)$ при сохранении остальных условий. В этом случае мы вправе дословно повторить все предыдущие шаги доказательства в новых условиях. Сделанные предположения позволяют раскрыть геометрический смысл предложения 6, который

состоит в следующем естественном утверждении: из условия $C \subset \hat{\Delta} = \pi^{-1}(\Delta)$ следует, что

$$C \in \text{LCS}\left(\hat{\Delta}, \frac{1}{n} \widehat{\mathcal{M}} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_P(\overline{\mathcal{M}}) - 2\right) \overline{\Pi}\right)$$

в случае, когда множество $\text{LCS}\left(\hat{\Delta}, \frac{1}{n} \widehat{\mathcal{M}} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_P(\overline{\mathcal{M}}) - 2\right) \overline{\Pi}\right)$ не содержит других кривых, принадлежащих дивизору $\overline{\Pi}$. Последнее утверждение очень легко получить, раздувая дивизор $\hat{\Delta}$ в кривой C в коммутативной диаграмме (2), используя при этом замечание 5. Таким образом, мы можем дословно повторить предыдущие аргументы в применении к дивизору Δ такому, что $C \subset \hat{\Delta}$, и получить неравенство (1).

Теперь докажем предложение 6, которое локально по X , поэтому мы будем считать, что $X \cong \mathbb{C}^4$. Рассмотрим общее гиперплоское сечение H многообразия X , содержащее точку O , такое, что $L \subset f^{-1}(H)$. Пусть $T = f^{-1}(H)$, $S = g^{-1}(T)$. Тогда

$$\begin{aligned} K_W + B^W + \overline{E} + 2F + S &\sim_{\mathbb{Q}} (f \circ g)^*(K_X + B_X + H), \\ B^W + \overline{E} + 2F &= B_W + (\text{mult}_O(B_X) - 2)\overline{E} + (\text{mult}_O(B_X) + \text{mult}_L(B_V) - 3)F, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$F \in \text{LCS}(W, B^W + \overline{E} + 2F) \iff \text{mult}_O(B_X) + \text{mult}_L(B_V) \geq 4$$

по определению 4. В частности, можно считать, что выполнено неравенство $\text{mult}_O(B_X) + \text{mult}_L(B_V) < 4$. Таким образом, необходимо доказать существование такой поверхности $Z \subset F$, что $g(Z) = L$ и

$$F \in \text{LCS}(W, B^W + \overline{E} + 2F).$$

Пусть $\overline{H}$ – общее гиперплоское сечение многообразия X , содержащее точку O , такое, что $L \not\subset f^{-1}(\overline{H})$. Положим $\overline{T} = f^{-1}(\overline{H})$, $\overline{S} = g^{-1}(\overline{T})$. Тогда

$$O \in \text{LCS}(\overline{H}, B_X|_{\overline{H}})$$

по теореме 13, но при этом

$$K_W + B^W + \overline{E} + F + \overline{S} \sim_{\mathbb{Q}} (f \circ g)^*(K_X + B_X + H),$$

откуда следует, что $\text{LCS}(\overline{S}, (B^W + \overline{E} + F)|_{\overline{S}}) \neq \emptyset$.

Применяя теорему 12 к морфизму $f \circ g: \overline{S} \rightarrow \overline{H}$, получаем, что выполнено одно из следующих двух утверждений:

- 1) множество $\text{LCS}(\overline{S}, (B^W + \overline{E} + F)|_{\overline{S}})$ состоит из одной точки, содержащейся в слое морфизма $g: F \rightarrow L$ над точкой $\overline{T} \cap L$;
- 2) множество $\text{LCS}(\overline{S}, (B^W + \overline{E} + F)|_{\overline{S}})$ содержит кривую, принадлежащую слою морфизма $g: F \rightarrow L$ над точкой $\overline{T} \cap L$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из общности построения дивизора $\overline{H}$ следует, что каждый элемент множества $\text{LCS}(\overline{S}, (B^W + \overline{E} + F)|_{\overline{S}})$, который содержится в слое $\mathbb{P}^2$ -расслоения g над точкой $\overline{T} \cap L$, является пересечением $\overline{S}$ с некоторым элементом в $\text{LCS}(W, B^W + \overline{E} + F)$.

Из общности выбора дивизора $\bar{H}$ следует, что либо $\mathbb{LCS}(W, B^W + \bar{E} + F)$ содержит некоторую поверхность, принадлежащую F и доминирующую кривую L , либо единственным центром логканонических особенностей логпары $(W, B^W + \bar{E} + F)$, содержащимся в исключительном дивизоре F и доминирующую кривую L , является некоторое сечение $\mathbb{P}^2$ -расслоения $g: F \rightarrow L$. С другой стороны, очевидно, что

$$\mathbb{LCS}(W, B^W + \bar{E} + F) \subseteq \mathbb{LCS}(W, B^W + \bar{E} + 2F),$$

откуда немедленно следует, что для завершения доказательства предложения 6 мы можем считать, что g -исключительный дивизор F содержит кривую C , обладающую следующими свойствами:

- 1) кривая C является сечением $\mathbb{P}^2$ -расслоения $g: F \rightarrow L$;
- 2) кривая C – единственный элемент в $\mathbb{LCS}(W, B^W + \bar{E} + 2F)$, который содержится в F и доминирует кривую L ;
- 3) кривая C – единственный элемент в $\mathbb{LCS}(W, B^W + \bar{E} + F)$, который содержится в F и доминирует кривую L .

Теперь вернемся к достаточно общему гиперплоскому сечению H многообразия X , проходящему через точку O , так что $L \subset T$, где $T = f^{-1}(H)$.

Точка O есть центр логканонических особенностей логпары $(H, M_X|_H)$ по теореме 13, а из сделанных предположений следует, что

$$\mathbb{LCS}(S, (B^W + \bar{E} + 2F)|_S) \neq \emptyset,$$

где $S = g^{-1}(T)$. Из применения теоремы 12 к логпаре

$$(S, (B^W + \bar{E} + 2F)|_S)$$

и морфизму $f \circ g: S \rightarrow H$ следует, что выполнено одно из следующих утверждений:

- 1) множество $\mathbb{LCS}(S, (B^W + \bar{E} + 2F)|_S)$ состоит из одной точки;
- 2) множество $\mathbb{LCS}(S, (B^W + \bar{E} + 2F)|_S)$ содержит кривую C .

СЛЕДСТВИЕ 4. *Либо $C \subset S$, либо $S \cap C$ состоит из одной точки.*

По построению имеем $L \cong C \cong \mathbb{P}^1$ и

$$F \cong \text{Proj}(\mathcal{O}_L(-1) \oplus \mathcal{O}_L(1) \oplus \mathcal{O}_L(1)),$$

а также выполнено соотношение $S|_F \sim B + D$, где B – тавтологическое линейное расслоение на многообразии F , D – слой проекции $g|_F: F \rightarrow L \cong \mathbb{P}^1$.

ЛЕММА 3. *Группа когомологий $H^1(\mathcal{O}_W(S - F))$ обращается в нуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пересечение дивизора $-g^*(E) - F$ с каждой кривой, содержащейся в дивизоре $\bar{E}$, неотрицательно. С другой стороны, очевидно, что

$$(-g^*(E) - F)|_F \sim B + D,$$

откуда следует, что дивизор $-4g^*(E) - 4F$ является численно эффективным и объемным относительно морфизма $h = f \circ g$, но $X \cong \mathbb{C}^4$ и

$$K_W - 4g^*(E) - 4F = S - F,$$

откуда $H^1(\mathcal{O}_W(S - F)) = 0$ по теореме об обращении в нуль (см. [48]).

Таким образом, естественное отображение ограничения

$$H^0(\mathcal{O}_W(S)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_F(S|_F))$$

сюръективно, но линейная система $|S|_F|$ свободна (см. [61, п. 2.8]).

СЛЕДСТВИЕ 5. *Кривая C не содержится в S .*

Пусть $\tau = g|_F$, а $\mathcal{I}_C$ – пучок идеалов кривой C на рационально линейчатом многообразии F . Тогда $R^1 \tau_*(B \otimes \mathcal{I}_C) = 0$ и отображение

$$\pi: \mathcal{O}_L(-1) \oplus \mathcal{O}_L(1) \oplus \mathcal{O}_L(1) \rightarrow \mathcal{O}_L(k)$$

сюръективно, где $k = B \cdot C$. Заметим, что π задается элементом группы

$$H^0(\mathcal{O}_L(k+1)) \oplus H^0(\mathcal{O}_L(k-1)) \oplus H^0(\mathcal{O}_L(k-1)),$$

откуда следует, в частности, что $k \geq -1$.

ЛЕММА 4. *Равенство $k = 0$ невозможно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $k = 0$. Тогда отображение π задается матрицей

$$(ax + by, 0, 0),$$

где a и b – комплексные числа, а $(x : y)$ – однородные координаты на $L \cong \mathbb{P}^1$, откуда следует, что отображение π не сюръективно над точкой кривой L , где линейная форма $ax + by$ обращается в нуль.

Таким образом, дивизор B не может иметь тривиального пересечения с C , и, следовательно, пересечение дивизора S с кривой C либо тривиально, либо состоит из более чем одной точки, но мы уже доказали ранее, что $S \cap C$ состоит ровно из одной точки. Полученное противоречие доказывает предложение 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Приведем доказательство только в случае $\dim(Y) = 5$, поскольку в случае $\dim(Y) > 5$ доказательство аналогично.

Пусть H_1, H_2, H_3 – достаточно общие гиперплоские сечения многообразия Y , проходящие через точку P . Положим $\bar{Y} = \bigcap_{i=1}^3 H_i$ и $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}|_{\bar{Y}}$. Тогда $\bar{Y}$ является неособой в точке $P \in \bar{Y}$ поверхностью. Более того, $P \in \text{LCS}(\bar{Y}, \frac{1}{n} \bar{\mathcal{M}})$ по теореме 13.

Пусть $\pi: \widehat{Y} \rightarrow Y$ – раздутие точки P , Π – исключительный дивизор морфизма π и $\widehat{\mathcal{M}} = \pi^{-1}(\mathcal{M})$. Из условия $P \in \text{LCS}(\bar{Y}, \frac{1}{n} \bar{\mathcal{M}})$ следует, что

$$\text{LCS}\left(\widehat{Y}, \frac{1}{n} \widehat{\mathcal{M}} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_P(\mathcal{M}) - 2\right) \Pi\right)$$

содержит подмногообразие $Z \subset \Pi$ такое, что $\dim(Z) \geq 2$.

Заметим, что из неравенства $\dim(Y) \geq 5$ следует, что

$$Z \in \text{LCS}\left(\widehat{Y}, \frac{\varepsilon}{n} \widehat{\mathcal{M}} + \left(\frac{\varepsilon}{n} \text{mult}_P(\mathcal{M}) - 2\right) \Pi\right)$$

для некоторого положительного рационального числа $\varepsilon < 1$, что является стандартным фактом в подобного рода задачах. Действительно, мы использовали теорему 13 по крайней мере три раза, а не два, как в доказательстве теоремы 15,

поэтому при первом итерационном использовании теоремы 13 точка P будет центром логканонических особенностей логпары $(H_1, \frac{1}{n} \mathcal{M}|_{H_1})$ и точка P будет центром канонических особенностей логпары $(H_1, \frac{\varepsilon}{n} \mathcal{M}|_{H_1})$ для некоторого положительного рационального $\varepsilon < 1$. Следовательно, после второго итерационного применения теоремы 13 мы получим, что

$$P \in \text{LCS}\left(H_1 \cap H_2, \frac{\varepsilon}{n} \mathcal{M}\Big|_{H_1 \cap H_2}\right),$$

откуда следует, что $Z \in \text{LCS}(\widehat{Y}, \frac{\varepsilon}{n} \widehat{\mathcal{M}} + (\frac{\varepsilon}{n} \text{mult}_P(\mathcal{M}) - 2)\Pi)$.

В случае $\dim(Z) = 4$ доказательство теоремы тривиально, поскольку в этом случае $Z = \Pi$ и $\text{mult}_P(\mathcal{M}) \geq 3n$.

В случае $\dim(Z) = 3$ мы можем повторить все аргументы, приведенные в начале доказательства теоремы 15, и получить выполнение неравенства $\text{mult}_P(S_1 \cdot S_2 \cdot \Delta) > 8n^2$ для любого эффективного дивизора Картье Δ на многообразии Y такого, что дивизор Δ содержит точку P , дивизор Δ неособ в точке P , но Δ не содержит подмногообразий многообразия Y коразмерности 2, принадлежащих базисному множеству $\mathcal{M}$.

Заметим, что в случае, когда $\dim(Z) \geq 3$, нам не нужно находить линейное подпространство $\Lambda \subset \Pi$ коразмерности 2 такое, что $\Lambda \subset \pi^{-1}(\Delta)$, поскольку это условие пусто в случае выполнения неравенства $\dim(Z) \geq 3$.

Предположим, что $\dim(Z) = 2$. В этом случае из теоремы 12 следует, что поверхность Z является линейным подпространством в $\Pi \cong \mathbb{P}^4$ коразмерности 2. Более того, поверхность Z зависит только от внутренних свойств логпары $(Y, \frac{1}{n} \mathcal{M})$ и не зависит от выбора дивизоров H_1, H_2, H_3 .

Пусть $\Lambda = Z$, H – общее гиперплоское сечение многообразия Y , проходящее через P , а Δ – эффективный дивизор на Y такой, что $P \in \Delta$, дивизор Δ неособ в точке P , дивизор $\pi^{-1}(\Delta)$ содержит Λ , дивизор Δ не содержит подмногообразий в Y коразмерности 2, принадлежащих базисному множеству линейной системы $\mathcal{M}$. Тогда

$$\text{mult}_P(S_1 \cdot S_2 \cdot \Delta) > 8n^2 \iff \text{mult}_P(S_1|_H \cdot S_2|_H \cdot \Delta|_H) > 8n^2$$

в силу общности выбора дивизора H , но теорема 15 и неравенство $\varepsilon < 1$ влекут неравенство $\text{mult}_P(S_1|_H \cdot S_2|_H \cdot \Delta|_H) > 8n^2$.

§ 4. $6n^2$ -неравенство

Основной целью в данном параграфе является доказательство теоремы 4. Пусть X – произвольное многообразие, O – обыкновенная двойная точка на X , а B_X – эффективная подвижная граница на X , являющаяся $\mathbb{Q}$ -картье дивизором. Для наглядности изложения будем считать также, что $B_X = \frac{1}{n} \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ – линейная система на X , не имеющая неподвижных компонент, и $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\pi: V \rightarrow X$ – раздутие точки O , E – исключительный дивизор бирационального морфизма π и $B_V = f^{-1}(B_X)$. Тогда

$$B_V \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(B_X) - \text{mult}_O(B_X)$$

для некоторого положительного рационального числа $\text{mult}_O(B_X)$, которое естественно воспринимать как кратность подвижной границы B_X в обыкновенной двойной точке O . Дивизор E можно отождествлять с неособой квадрикой в $\mathbb{P}^{\dim(X)}$.

Пусть H_i – общее гиперплоское сечение многообразия X , которое проходит через точку O , где $i = 1, \dots, \dim(X) - 2$, а S_1 и S_2 – достаточно общие дивизоры в линейной системе $\mathcal{M}$. Тогда числа $\text{mult}_O(H_i)$ и $\text{mult}_O(S_i)$ могут быть естественно определены аналогично $\text{mult}_O(B_X)$, причем имеют место равенства

$$\text{mult}_O(H_i) = 1, \quad \text{mult}_O(S_1) = \text{mult}_O(S_2) = n \text{mult}_O(B_X).$$

Положим $\widehat{H}_i = \pi^{-1}(H_i)$ и $\widehat{S}_i = \pi^{-1}(S_i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Кратность цикла $S_1 \cdot S_2$ в точке O есть рациональное число

$$\text{mult}_O(S_1 \cdot S_2) = 2 \text{mult}_O^2(S_1) + \sum_{P \in E} \text{mult}_P(\widehat{S}_1 \cdot \widehat{S}_2) \prod_{i=1}^{\dim(X)-2} \text{mult}_P(\widehat{H}_i),$$

где суммирование ведется по конечному числу точек пересечения

$$E \cap \widehat{S}_1 \cap \widehat{S}_2 \bigcap_{i=1}^{\dim(X)-2} \widehat{H}_i,$$

а $\widehat{S}_1 \cdot \widehat{S}_2$ – схемно-теоретическое пересечение. Положим

$$\text{mult}_O(B_X^2) = \frac{1}{n^2} \text{mult}_O(S_1 \cdot S_2).$$

Очевидно, что $\text{mult}_O(B_X^2) \geq 2 \text{mult}_O^2(B_X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Для каждого подмногообразия $Z \subset E$, имеющего коразмерность 2 на многообразии V , выполнено неравенство

$$\text{mult}_O(B_X^2) \geq 2 \text{mult}_O^2(B_X) + \text{mult}_Z(B_V^2),$$

которое можно понимать как неравенство

$$\text{mult}_O(S_1 \cdot S_2) \geq 2 \text{mult}_O^2(S_1) + \text{mult}_Z(\widehat{S}_1 \cdot \widehat{S}_2),$$

деленное на n^2 , где пересечение $\widehat{S}_1 \cdot \widehat{S}_2$ схемно-теоретическое.

Кратность $\text{mult}_O(B_X^2)$ обладает хорошими геометрическими свойствами.

ПРИМЕР 3. Пусть $X \subset \mathbb{P}^6$ – гиперповерхность степени 6, особенности которой состоят из произвольного числа изолированных обыкновенных двойных точек, одной из них является точка O . Заметим, что в сделанных предположениях группа $\text{Cl}(X)$ порождена классом гиперплоского сечения H гиперповерхности X (см. далее лемму 5) и, в частности, выполнено соотношение $S_i \sim kH$, где $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что $n = k$. Тогда

$$n^2 \text{mult}_O(B_X^2) = \text{mult}_O(S_1 \cdot S_2) \leq 6n^2.$$

Предположим, что $\dim(X) \geq 4$ и $O \in \mathbb{CS}(X, B_X)$, а особенности подвижной логпары (X, B_X) канонические вне точки O . Основной результат настоящего параграфа состоит в доказательстве теоремы 4, а именно, мы должны показать, что существует некоторое линейное подпространство $\Lambda \subset E$ коразмерности 3

в $\mathbb{P}^r$, где $r = \dim(X)$, а дивизор E отождествляется с неособой квадрикой в $\mathbb{P}^r$, такое, что выполнено соотношение

$$\text{mult}_O(S_1 \cdot S_2 \cdot \Delta) = \text{mult}_O(S_1|_\Delta \cdot S_2|_\Delta) \geq 6n^2 \quad (3)$$

для любого эффективного дивизора Δ на X такого, что:

- 1) дивизор Δ содержит точку O ;
- 2) точка O является обыкновенной двойной точкой на Δ ;
- 3) дивизор $\pi^{-1}(\Delta)$ содержит Δ ;
- 4) дивизор Δ не содержит подмногообразий в X коразмерности 2, принадлежащих базисному множеству линейной системы $\mathcal{M}$.

Неравенство в (3) строгое при $\dim(X) \geq 5$. В частности, выполнено неравенство

$$\text{mult}_O(S_1 \cdot S_2) > 6n^2$$

при $\dim(X) \geq 6$, поскольку в этом случае E не может содержать линейного подпространства Λ по теореме Лефшеца (см. [27], [21]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Неравенство $\text{mult}_O(S_1 \cdot S_2) > 6n^2$ будет доказано только в случае $\dim(X) = 6$, так как доказательство в общем случае аналогично.

Итак, пусть $\dim(X) = 6$. Тогда выполнено соотношение

$$K_V + B_V \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(K_X + B_X) + (4 - \text{mult}_O(B_X))E.$$

Пусть H_1, H_2, H_3 – общие гиперплоские сечения многообразия X , проходящие через точку O . Положим $\check{X} = \bigcap_{i=1}^3 H_i$. Тогда $\check{X}$ – трехмерное многообразие, а O – обыкновенная двойная точка на нем.

Пусть $\check{\mathcal{M}} = \mathcal{M}|_{\check{X}}$. Тогда O является центром логканонических особенностей логпары $(\check{X}, \frac{1}{n}\check{\mathcal{M}})$ по следствию 2. Более того, несложно видеть, что точка O является центром логканонических особенностей логпары $(\check{X}, \frac{\varepsilon}{n}\check{\mathcal{M}})$ для некоторого рационального числа $\varepsilon < 1$, поскольку следствие 2 мы использовали, на самом деле, не один раз, а три раза при редукции от многообразия X к многообразию $\check{X}$, и уже при первом итерационном применении следствия 2 канонические особенности переходят в логканонические (см. доказательство теоремы 3).

Пусть $\tilde{\pi}: \check{V} \rightarrow \check{X}$ – раздутие точки O и $\check{E} = \tilde{\pi}^{-1}(O)$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \check{V} & \xrightarrow{\quad} & V \\ \tilde{\pi} \swarrow & & \searrow \pi \\ \check{X} & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

коммутативна, а трехмерное многообразие $\check{V}$ можно отождествлять с подмногообразием $\pi^{-1}(\check{X}) \subset V$. В частности, $\check{E} = E \cap \check{V}$.

В силу общности выбора дивизоров H_1, H_2, H_3 выполнено равенство

$$\text{mult}_O(\check{\mathcal{M}}) = \text{mult}_O(\mathcal{M}),$$

причем можно считать, что $\text{mult}_O(\mathcal{M}) < 2n$, поскольку в противном случае неравенство $\text{mult}_O(S_1 \cdot S_2) > 6n^2$ очевидно (см. замечание 7).

Пусть $\mathcal{B} = \pi^{-1}(\mathcal{M})$ и $\check{\mathcal{B}} = \check{\pi}^{-1}(\check{\mathcal{M}})$. Тогда $\check{\mathcal{B}} = \mathcal{B}|_{\check{V}}$.

Имеем соотношение

$$K_V + \frac{1}{n} \mathcal{B} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 1 \right) E + \tilde{H}_1 + \tilde{H}_2 + \tilde{H}_3 \sim_{\mathbb{Q}} \pi^* \left(K_X + \frac{1}{n} \mathcal{M} + H_1 + H_2 + H_3 \right),$$

где $\tilde{H}_i = \pi^{-1}(H_i)$, и соотношение

$$K_{\check{V}} + \frac{1}{n} \check{\mathcal{B}} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 1 \right) \check{E} \sim_{\mathbb{Q}} \check{\pi}^* \left(K_{\check{X}} + \frac{1}{n} \check{\mathcal{M}} \right),$$

а из неравенства $\text{mult}_O(\mathcal{M}) < 2n$ следует, что

$$\begin{aligned} E &\notin \text{LCS} \left(V, \frac{1}{n} \mathcal{B} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 1 \right) E \right), \\ \check{E} &\notin \text{LCS} \left(\check{V}, \frac{1}{n} \check{\mathcal{B}} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 1 \right) \check{E} \right), \end{aligned}$$

откуда, ввиду общности дивизоров H_1, H_2, H_3 , следует существование собственных неприводимых подмногообразий $\Omega \subsetneq E$ и $\check{\Omega} \subsetneq \check{E}$ таких, что

$$\begin{aligned} \Omega &\in \text{LCS} \left(V, \frac{1}{n} \mathcal{B} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 1 \right) E \right), \\ \check{\Omega} &\in \text{LCS} \left(\check{V}, \frac{1}{n} \check{\mathcal{B}} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 1 \right) \check{E} \right) \end{aligned}$$

и $\check{\Omega} \subseteq \Omega \cap \check{V}$.

Заметим, что $\check{\Omega} = \Omega \cap \check{V}$ при $\dim(\check{\Omega}) > 0$.

Можно считать, что многообразия Ω и $\check{\Omega}$ имеют наибольшую размерность из всех подмногообразий с аналогичными свойствами. Тогда из применения общего принципа связности множества логканонических особенностей (см. теорему 12) к логпаре $(\check{V}, \frac{1}{n} \check{\mathcal{B}} + (\frac{1}{n} \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 1) \check{E})$ и морфизму $\check{\pi}$ мы сразу получаем, что в случае, когда выполнено равенство $\dim(\check{\Omega}) = 0$, точка $\check{\Omega}$ является единственным центром логканонических особенностей логпары

$$\left(\check{V}, \frac{1}{n} \check{\mathcal{B}} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 1 \right) \check{E} \right),$$

который содержится в дивизоре $\check{E}$. В частности, во всех возможных случаях выполнено теоретико-множественное тождество

$$\check{\Omega} = \Omega \cap \check{V}.$$

Пусть $\dim(\check{\Omega}) = 0$. Тогда из тождества $\check{\Omega} = \Omega \cap \check{V}$ следует, что Ω является линейным подпространством в $\mathbb{P}^6$ размерности 3, которое содержится в неособой пятимерной квадрике $E \subset \mathbb{P}^6$, что невозможно по теореме Лефшеца. Значит, $\dim(\check{\Omega}) \geq 1$, откуда следует, что $\dim(\Omega) = 4$.

Имеется логпара $(V, \frac{1}{n} \mathcal{B} + (\frac{1}{n} \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 1) E)$ и ее центр логканонических особенностей $\Omega \subset E$ размерности 4. В частности, мы можем применить теорему 14 к логпаре $(V, \frac{1}{n} \mathcal{B} + (\frac{1}{n} \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 1) E)$ в общей точке подмногообразия Ω и получить неравенство

$$\text{mult}_{\Omega}(\tilde{S}_1 \cdot \tilde{S}_2) \geq 4(2n^2 - n \text{mult}_O(\mathcal{M})),$$

где $\tilde{S}_i = \pi^1(S_i)$. Следовательно, выполнены неравенства

$$\text{mult}_O(S_1 \cdot S_2) \geq 2 \text{mult}_O(\mathcal{M})^2 + \text{mult}_\Omega(\tilde{S}_1 \cdot \tilde{S}_2) \geq 4(2n^2 - n \text{mult}_O(\mathcal{M})) \geq 6n^2.$$

Как уже отмечалось ранее, точка O является центром логканонических особенностей подвижной логпары $(\check{X}, \frac{\varepsilon}{n} \check{\mathcal{M}})$ для некоторого положительного рационального числа $\varepsilon < 1$. Таким образом, подмногообразие $\Omega \subset E$ на самом деле является центром логканонических особенностей логпары

$$\left(V, \frac{\varepsilon}{n} \mathcal{B} + \left(\frac{\varepsilon}{n} \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 1 \right) E \right),$$

откуда следует

$$\text{mult}_O(S_1 \cdot S_2) \geq 2 \text{mult}_O(\mathcal{M})^2 + \text{mult}_\Omega(\tilde{S}_1 \cdot \tilde{S}_2) > 4(2n^2 - n \text{mult}_O(\mathcal{M})) \geq 6n^2,$$

что, собственно, и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Можно считать, что $\dim(X) \leq 5$, поскольку мы доказали следствие 1. Докажем теорему только в случае $\dim(X) = 4$, поскольку доказательство в случае $\dim(X) = 5$ проводится аналогично.

Пусть $\dim(X) = 4$. В этом случае выполнено соотношение

$$K_V + B_V \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(K_X + B_X) + (2 - \text{mult}_O(B_X))E,$$

где $\text{mult}_O(B_X) > 1$ по теореме 2.

Рассмотрим любой эффе́ктивный дивизор Δ на многообразии X такой, что $O \in \Delta$, точка O является обыкновенной двойной точкой на Δ , и дивизор Δ не содержит поверхностей, принадлежащих базисному множеству $\mathcal{M}$. Тогда $\mathcal{M}|_\Delta$ не имеет неподвижных компонент, а $S_1 \cdot S_2 \cdot \Delta$ является эффе́ктивным 1-циклом.

Положим $\bar{S}_1 = S_1|_\Delta$, $\bar{S}_2 = S_2|_\Delta$ и $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}|_\Delta$. Тогда точка O является центром логканонических особенностей логпары $(\Delta, \frac{1}{n} \bar{\mathcal{M}})$ по следствию 2.

Необходимо показать, что выполнено неравенство

$$\text{mult}_O(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2) \geq 6n^2,$$

возможно, при дополнительном условии на дивизор Δ .

Пусть $\bar{\pi}: \hat{\Delta} \rightarrow \Delta$ – раздутие точки O и $\bar{E} = \bar{\pi}^{-1}(O)$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \hat{\Delta} & \xrightarrow{\quad} V \\ \bar{\pi} \swarrow & & \searrow \pi \\ \Delta & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

коммутативна, а $\hat{\Delta}$ можно отождествлять с дивизором $\pi^{-1}(\Delta) \subset V$ и, в частности, выполнено равенство $\bar{E} = E \cap \hat{\Delta}$.

В случае $\text{mult}_O(\bar{\mathcal{M}}) \geq 2n$ выполнено неравенство (см. замечание 7)

$$\text{mult}_O(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2) \geq 8n^2,$$

которое завершает доказательство. Можно считать, что $\text{mult}_O(\bar{\mathcal{M}}) < 2n$.

Пусть $\widehat{\mathcal{M}} = \bar{\pi}^{-1}(\overline{\mathcal{M}})$. Тогда из неравенства $\text{mult}_O(\overline{\mathcal{M}}) < 2n$ следует, что

$$\bar{E} \notin \text{LCS}\left(\hat{\Delta}, \frac{1}{n} \widehat{\mathcal{M}} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_O(\overline{\mathcal{M}}) - 1\right) \bar{E}\right),$$

откуда следует существование подмногообразия $\Xi \subsetneq \bar{E}$ такого, что

$$\Xi \in \text{LCS}\left(\hat{\Delta}, \frac{1}{n} \widehat{\mathcal{M}} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_O(\overline{\mathcal{M}}) - 1\right) \bar{E}\right).$$

Заметим, что дивизор $\bar{E}$ можно отождествлять с неособой квадрикой в $\mathbb{P}^3$.

Предположим, что Ξ – кривая. Положим $\hat{S}_i = \bar{\pi}^{-1}(S_i)$. В этом случае выполнено неравенство (см. замечание 7)

$$\text{mult}_O(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2) \geq 2 \text{mult}_O(\overline{\mathcal{M}})^2 + \text{mult}_{\Xi}(\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2),$$

а из теоремы 14, примененной к логпаре $(\hat{\Delta}, \frac{1}{n} \widehat{\mathcal{M}} + (\frac{1}{n} \text{mult}_P(\overline{\mathcal{M}}) - 1) \bar{E})$ в общей точке кривой Ξ , следует выполнение неравенства

$$\text{mult}_{\Xi}(\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2) \geq 4(2n^2 - n \text{mult}_O(\overline{\mathcal{M}})),$$

откуда имеем

$$\text{mult}_O(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2) \geq 2 \text{mult}_O(\overline{\mathcal{M}})^2 + 4(2n^2 - n \text{mult}_O(\overline{\mathcal{M}})) \geq 6n^2,$$

что, собственно, и требовалось доказать.

Пусть Ξ – точка. Тогда существует прямая $\Lambda \subset E \subset \mathbb{P}^4$ такая, что

$$\Lambda \in \text{LCS}\left(V, \frac{1}{n} \mathcal{B} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 1\right) E\right),$$

и $\Xi = \Lambda \cap \hat{\Delta}$. Действительно, считая временно дивизор Δ общим и применяя теорему 12 к логпаре $(\hat{\Delta}, \frac{1}{n} \widehat{\mathcal{M}} + (\frac{1}{n} \text{mult}_O(\overline{\mathcal{M}}) - 1) \bar{E})$ и бирациональному морфизму $\hat{\pi}$, мы видим (см. доказательство предложения 4), что множество

$$\text{LCS}\left(V, \frac{1}{n} \mathcal{B} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 1\right) E\right)$$

содержит либо поверхность, которая принадлежит дивизору E , либо некоторую прямую $\Lambda \subset E \subset \mathbb{P}^4$ такую, что $\Xi = \Lambda \cap \hat{\Delta}$. Однако в первом случае при исходном выборе дивизора Δ множество

$$\text{LCS}\left(\hat{\Delta}, \frac{1}{n} \widehat{\mathcal{M}} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_O(\overline{\mathcal{M}}) - 1\right) \bar{E}\right)$$

обязательно содержит кривую, которая принадлежит $\bar{E}$, что, как мы видели, сразу влечет требуемое неравенство. Значит, для завершения доказательства теоремы 4 можно считать, что многообразие Ξ – точка и существует прямая $\Lambda \subset E \subset \mathbb{P}^4$ такая, что $\Xi = \Lambda \cap \hat{\Delta}$ и $\Lambda \in \text{LCS}(V, \frac{1}{n} \mathcal{B} + (\frac{1}{n} \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 1) E)$.

Из предыдущих аргументов следует, что прямая Λ не зависит от выбора дивизора Δ , а зависит от свойств логпары (X, B_X) . Поэтому мы вправе потребовать, чтобы первоначально дивизор Δ был выбран таким образом, что $\Lambda \subset \pi^{-1}(\Delta)$, при сохранении всех остальных принятых нами условий.

Теперь все предыдущие шаги доказательства можно дословно повторить в новых условиях. Более того, из условия $\Lambda \subset \hat{\Delta} = \pi^{-1}(\Delta)$ следует

$$\Lambda \in \text{LCS}\left(\hat{\Delta}, \frac{1}{n} \widehat{\mathcal{M}} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_O(\overline{\mathcal{M}}) - 1\right) \overline{E}\right),$$

поскольку граница $\frac{1}{n} \mathcal{B} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 1\right) E$ эффективна ввиду выполнения неравенства $\text{mult}_O(\mathcal{M}) > n$ (см. теорему 2), и мы можем воспользоваться теоремой 13 или теоремой 12 в общей точке прямой Λ на многообразии V .

Как мы уже видели ранее, наличие кривой в множестве

$$\text{LCS}\left(\hat{\Delta}, \frac{1}{n} \widehat{\mathcal{M}} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_O(\overline{\mathcal{M}}) - 1\right) \overline{E}\right),$$

содержащейся в дивизоре $\overline{E}$, и теорема 14 влекут неравенства

$$\text{mult}_O(\overline{S}_1 \cdot \overline{S}_2) \geq 2 \text{mult}_O(\overline{\mathcal{M}})^2 + 4(2n^2 - n \text{mult}_O(\overline{\mathcal{M}})) \geq 6n^2,$$

что завершает доказательство теоремы 4.

Заметим, что доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 15, которое состоит в комбинации доказательства теоремы 14 и обобщения метода доказательства теоремы 2, однако эффективность границы

$$\frac{1}{n} \mathcal{B} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_O(\mathcal{M}) - 1\right) E$$

делает последний шаг доказательства теоремы 4 намного проще, чем соответствующий ему шаг доказательства теоремы 15, где рассматриваемая граница может и не быть эффективной, поэтому просто воспользоваться принципом присоединения было невозможно и потребовалось использование теоремы 12 вместе с очень несложными, но важными локальными вычислениями (см. леммы 3 и 4).

Несложно видеть, что используемые в доказательстве теоремы 4 аргументы вместе с предложением 2 доказывают следующий результат.

ТЕОРЕМА 16. Пусть Y – многообразие размерности $r \geq 4$, P – изолированная двойная точка на Y такая, что многообразие Y локально изоморфно гиперповерхности

$$y^3 = \sum_{i=1}^r x_i^2 \subset \mathbb{C}^{r+1} \cong \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_r, y])$$

в окрестности точки P , $\mathcal{R}$ – линейная система на X , не имеющая неподвижных компонент, и $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $\dim(X) \geq 4$ и $P \in \text{CS}(Y, \frac{1}{n} \mathcal{R})$, а особенности логпары $(X, \frac{1}{n} \mathcal{R})$ канонические вне P . Возьмем два общих дивизора M_1 и M_2 в линейной системе $\mathcal{R}$ и определим число $\text{mult}_P(M_1 \cdot M_2)$ по аналогии с определением 7. Пусть $\zeta: U \rightarrow Y$ – раздутие точки P , обозначим буквой G исключительный дивизор морфизма ζ и отождествим его с квадратичным конусом в $\mathbb{P}^r$. Тогда существует такое линейное подпространство $\Upsilon \subset G$ коразмерности 3 в $\mathbb{P}^r$, что

$$\text{mult}_P(M_1 \cdot M_2 \cdot \Theta) = \text{mult}_P(M_1|_{\Theta} \cdot M_2|_{\Theta}) \geq 6n^2 \quad (4)$$

для любого эффективного дивизора Θ на Y такого, что:

- 1) дивизор Θ содержит точку P ;
- 2) либо точка P является обыкновенной двойной точкой на Θ , либо многообразие Θ локально изоморфно гиперповерхности

$$y^3 = \sum_{i=1}^{r-1} x_i^2 \subset \mathbb{C}^r \cong \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{r-1}, y])$$

в окрестности точки P ;

- 3) дивизор $\zeta^{-1}(\Theta)$ содержит Υ ;
- 4) дивизор Θ не содержит подмногообразий в Y коразмерности 2, принадлежащих базисному множеству линейной системы $\mathcal{R}$.

Неравенство в (4) является строгим при $r \geq 5$.

СЛЕДСТВИЕ 6. В обозначениях и условиях теоремы 16 пусть $r \geq 7$. Тогда

$$\operatorname{mult}_P(M_1 \cdot M_2) > 6n^2.$$

§ 5. Двойные кубики

Пусть $\psi: X \rightarrow V \subset \mathbb{P}^n$ – двойное накрытие, разветвленное над неприводимым и приведенным дивизором $R \subset V$, где V – неособая кубическая гиперповерхность, и $n \geq 4$. Тогда $\operatorname{rk} \operatorname{Pic}(V) = 1$ по теореме Лефшеца и

$$-K_X \sim \psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r-2-n)|_V),$$

где $r \in \mathbb{N}$ такое, что $R \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2r)|_V$.

Предположим, что особенности дивизора ветвления R состоят из произвольного числа изолированных обыкновенных двойных точек. Тогда многообразие X неунилинейчато в случае $r \geq n-2$. С другой стороны, многообразие X рационально связно при выполнении неравенства $r \leq n-3$, поскольку в этом случае X является многообразием Фано с терминальными особенностями (см. [50], [64]). Более того, во всех случаях выполнены равенства

$$\operatorname{rk} \operatorname{Pic}(X) = \operatorname{rk} \operatorname{Cl}(X) = 1$$

(см. [34] и следующую лемму 5).

В настоящем параграфе будет доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 17. Пусть $n = r + 3 \geq 9$. Тогда X бирационально сверхжестко.

В частности, X нерационально при $n = r + 3 \geq 9$.

Бирациональная сверхжесткость многообразия X доказана в [9] в предположении, что многообразие X является достаточно общим и $n = r + 3 \geq 5$. В случае $n = r + 3 = 4$ многообразие X является полным пересечением квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$, оно не бирационально сверхжестко, но бирационально жестко⁸ (см. [45]).

⁸Многообразие Фано X при $\operatorname{rk} \operatorname{Pic}(X) = 1$, имеющее терминальные и $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, называется *бирационально сверхжестким*, если выполнены следующие условия: многообразие X не может быть бирационально перестроено в такое расслоение $\tau: Y \rightarrow Z$, что $\dim(Y) > \dim(Z) \neq 0$, а общий слой расслоения τ имеет размерность Кодайры, равную $-\infty$; многообразие X не может быть бирационально перестроено в многообразие Фано с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями и группой Пикара ранга 1, отличное от многообразия X .

В случае $n > r + 3$ единственный известный способ доказать нерациональность многообразия X – метод работы [49], из которого легко получаем следующий результат (оставим его без доказательства).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $r \geq \frac{n+5}{2} > 4$, а X является очень общим. Тогда многообразие X нелинейчато и, в частности, нерационально.

Тот факт, что X является $\mathbb{Q}$ -факториальным, вытекает из следующего более сильного результата, хотя, конечно, $\mathbb{Q}$ -факториальность многообразия X должна следовать также и из теоремы Лефшеца (см. [27], [21], [39]).

ЛЕММА 5. Группы $\mathrm{Cl}(X)$ и $\mathrm{Pic}(X)$ порождаются дивизором $\psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим дивизор Вейля D на X . Для доказательства леммы достаточно показать, что $D \sim \psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r))$ для некоторого $r \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим общий дивизор H в $|\psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k))|$ для $k \gg 0$. Тогда H – гладкое взвешенное полное пересечение (см. [43]) и $\dim(X) \geq 3$.

Группа $\mathrm{Pic}(H)$ порождена дивизором $\psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))|_H$ в силу [39, гл. XI, теорема 3.13] (см. также [34, лемма 3.2.2], [33, лемма 3.5] или [28]), следовательно, существует $r \in \mathbb{Z}$ такое, что $D|_H \sim \psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r))|_H$.

Пусть $\Delta = D - \psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r))$. Последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(\Delta) \otimes \mathcal{O}_X(-H) \rightarrow \mathcal{O}_X(\Delta) \rightarrow \mathcal{O}_H \rightarrow 0$$

точна, поскольку пучок $\mathcal{O}_X(\Delta)$ локально свободен в окрестности H . Таким образом, последовательность групп когомологий

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(\Delta)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_H) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(\Delta) \otimes \mathcal{O}_X(-H))$$

точна. С другой стороны, пучок $\mathcal{O}_X(\Delta)$ рефлексивен (см. [41]). Следовательно, существует точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(\Delta) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{E}$ – локально свободный пучок, а пучок $\mathcal{F}$ свободен от кручения. Значит, последовательность групп когомологий

$$H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-H)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(\Delta - H)) \rightarrow H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-H))$$

точна. Однако группа $H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-H))$ тривиальна, поскольку пучок $\mathcal{F}$ свободен от кручения, а группа $H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-H))$ тривиальна по лемме Энриквеса–Севери–Зариского (см. [63]), так как X нормально. Значит,

$$H^1(\mathcal{O}_X(\Delta) \otimes \mathcal{O}_X(-H)) = 0, \quad H^0(\mathcal{O}_X(\Delta)) = \mathbb{C}.$$

Аналогично получаем $H^0(\mathcal{O}_X(-\Delta)) = \mathbb{C}$. Таким образом, доказано, что дивизор Δ рационально эквивалентен нулю, т. е. $D \sim \psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 17. Предположим, что X не является бирационально сверхжестким, но $n = r + 3 \geq 9$. Покажем, что сделанные предположения приводят к противоречию.

Из теоремы 64 в [16] следует существование линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , не имеющей неподвижных компонент, такой, что особенности логпары $(X, \frac{1}{m}\mathcal{M})$ не являются каноническими, где m – такое натуральное число, что $\mathcal{M} \sim -mK_X$.

В частности, множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{m}\mathcal{M})$ содержит неприводимое приведенное подмногообразие $Z \subset X$ такое, что $Z \in \mathbb{CS}(X, \frac{\mu}{m}\mathcal{M})$ для некоторого положительного рационального числа $\mu < 1$. Без ограничения общности можно считать, что Z является подмногообразием наибольшей размерности, которое обладает таким свойством.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $S \in \mathcal{M}$. Тогда $\text{mult}_Z(S) > m$.

По построению $\dim(Z) \leq \dim(X) - 2 = n - 3$.

ЛЕММА 6. Выполнено неравенство $\dim(Z) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z – точка. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Предположим, что Z неособа на многообразии X . Пусть S_1 и S_2 – общие дивизоры в линейной системе $\mathcal{M}$, $f: U \rightarrow X$ – раздутие точки Z , а E – исключительный дивизор морфизма f . Тогда из теоремы 3 следует существование такого линейного подпространства $\Pi \subset E \cong \mathbb{P}^{n-2}$ размерности $n - 4$, что

$$\text{mult}_Z(S_1 \cdot S_2 \cdot D) > 8m^2$$

для любого дивизора $D \in |-K_X|$ такого, что:

- 1) дивизор D содержит точку Z и неособ в ней;
- 2) дивизор $f^{-1}(D)$ содержит подмногообразие $\Pi \subset U$;
- 3) дивизор D не содержит подмногообразий в X коразмерности 2, принадлежащих базисному множеству линейной системы $\mathcal{M}$.

Рассмотрим линейную подсистему $\mathcal{H} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_V|$ такую, что

$$H \in \mathcal{H} \iff \Pi \subset (\psi \circ f)^{-1}(H).$$

Тогда существует линейное подпространство $\Sigma \subset \mathbb{P}^n$ размерности $n - 3$ такое, что все дивизоры в линейной системе $\mathcal{H}$ высекаются на гиперповерхности V гиперплоскостями в $\mathbb{P}^n$, содержащими Σ . В частности, базисное множество линейной системы $\mathcal{H}$ состоит из пересечения $\Sigma \cap V$, однако по теореме Лефшеца $\Sigma \not\subset V$ и, следовательно, выполнено равенство $\dim(\Sigma \cap V) = n - 4$.

Пусть H – общий дивизор в $\mathcal{H}$ и $D = \psi^{-1}(H) \in |-K_X|$. Тогда:

- 1) дивизор D содержит точку Z и неособ в ней;
- 2) дивизор $f^{-1}(D)$ содержит подмногообразие $\Pi \subset U$.

Предположим, что дивизор D содержит подмногообразие $\Gamma \subset X$ коразмерности 2, принадлежащее базисному множеству $\mathcal{M}$. Тогда

$$\dim(\psi(\Gamma)) = n - 3,$$

но $\psi(\Gamma) \subset \Sigma \cap V$ и $\dim(\Sigma \cap V) = n - 4$. Противоречие.

Итак, доказано, что D не содержит подмногообразий многообразия X коразмерности 2, которые содержатся в базисном множестве линейной системы $\mathcal{M}$.

Пусть $H_1, H_2, \dots, H_k$ – общие дивизоры в линейной системе $|-K_X|$, проходящие через точку Z , где $k = \dim(X) - 3$. Тогда

$$6m^2 = H_1 \cdot \dots \cdot H_k \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot D \geq \text{mult}_Z(S_1 \cdot S_2 \cdot D) > 8m^2,$$

что является противоречием.

Таким образом, точка Z является изолированной обыкновенной двойной точкой на многообразии X . В этом случае из предыдущих аргументов и следствия 1 сразу получаем противоречие.

ЛЕММА 7. *Выполнено неравенство $\dim(Z) \geq \dim(X) - 4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim(Z) \leq \dim(X) - 5$, а $H_1, H_2, \dots, H_k$ – общие гиперплоские сечения гиперповерхности V , где $k = \dim(Z) > 0$. Положим

$$\bar{V} = \bigcap_{i=1}^k H_i, \quad \bar{X} = \psi^{-1}(\bar{V}), \quad \bar{\psi} = \psi|_{\bar{X}}: \bar{X} \rightarrow \bar{V}$$

и $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}|_{\bar{X}}$. Тогда $\bar{V} \subset \mathbb{P}^{n-k}$ – неособая кубическая гиперповерхность, индуцированный морфизм $\bar{\psi}$ является двойным накрытием, разветвленным над неособым дивизором $R \cap \bar{V}$, а линейная система $\mathcal{M}$ не имеет базисных компонент.

Заметим, что гиперповерхность $\bar{V}$ не содержит линейных подпространств в $\mathbb{P}^{n-k}$ размерности $n - k - 3$ по теореме Лефшеца, поскольку $n - k \geq 6$.

Пусть P – любая точка пересечения $Z \cap \bar{X}$. Тогда $P \in \mathbb{CS}(\bar{X}, \frac{1}{m}\bar{\mathcal{M}})$ и из доказательства леммы 6 следует противоречие.

ЛЕММА 8. *Выполнено неравенство $\dim(Z) \neq \dim(X) - 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim(Z) = \dim(X) - 2$, S_1 и S_2 – общие дивизоры в линейной системе $\mathcal{M}$, а $H_1, H_2, \dots, H_{n-3}$ – общие дивизоры в линейной системе $|-K_X|$. Тогда

$$6m^2 = H_1 \cdot \dots \cdot H_{n-3} \cdot S_1 \cdot S_2 > m^2(-K_X)^{n-3} \cdot Z,$$

потому что $\text{mult}_Z(\mathcal{M}) > m$. Таким образом, $(-K_X)^{n-3} \cdot Z < 6$.

Заметим, что выполнено равенство

$$(-K_X)^{n-3} \cdot Z = \begin{cases} \deg(\psi(Z) \subset \mathbb{P}^n), & \text{если } \psi|_Z \text{ бирационален,} \\ 2 \deg(\psi(Z) \subset \mathbb{P}^n), & \text{если } \psi|_Z \text{ небирационален.} \end{cases}$$

Из теоремы Лефшеца следует, что число $\deg(\psi(Z))$ делится на 3, значит, морфизм $\psi|_Z$ бирационален, и $\deg(\psi(Z)) = 3$, откуда следует, что либо схемное пересечение $\psi(Z) \cap R$ особо в каждой точке, либо $\psi(Z) \subset R$. Теперь из применения теоремы Лефшеца к гиперплоскому сечению полного пересечения $R \subset \mathbb{P}^n$ сразу следует противоречие.

ЛЕММА 9. *Выполнено неравенство $\dim(Z) \leq \dim(X) - 5$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim(Z) \geq \dim(X) - 4 \geq 4$, S – достаточно общий дивизор в линейной системе $\mathcal{M}$, $\hat{S} = \psi(S \cap R)$ и $\hat{Z} = \psi(Z \cap R)$. Тогда $\hat{S}$ является дивизором на неособом полном пересечении $R \subset \mathbb{P}^n$ таким, что

$$\text{mult}_{\hat{Z}}(\hat{S}) > m, \quad \hat{S} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)|_R.$$

Противоречие с предложением 3, поскольку $\dim(\hat{Z}) \geq 3$.

Итак, теорема 17 доказана. Теперь докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 18. Пусть $n = r + 3 \geq 9$. Тогда многообразие X не может быть бирационально перестроено в расслоение на эллиптические кривые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что X может быть бирационально перестроено в расслоение на эллиптические кривые. Тогда из [16, теорема 66] следует существование линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , не имеющей неподвижных компонент и не составленной из пучка, такой, что множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{m}\mathcal{M})$ не пусто, где m – такое натуральное число, что $\mathcal{M} \sim -mK_X$.

Пусть Z – неприводимое приведенное подмногообразие $Z \subset X$ наибольшей размерности такое, что $Z \in \mathbb{CS}(X, \frac{1}{m}\mathcal{M})$. Тогда из доказательства теоремы 17 сразу следует, что выполнены неравенство $\dim(Z) \neq \dim(X) - 2$ и равенство $(-K_X)^{n-3} \cdot Z = 6$, а также что в теоретико-множественном смысле

$$S_1 \cap S_2 = Z,$$

где S_1 и S_2 – общие дивизоры в линейной системе $\mathcal{M}$.

Рассмотрим общую точку $P \in X \setminus Z$ и линейную систему $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$, состоящую из поверхностей, проходящих через точку P . Тогда $\mathcal{D}$ не имеет неподвижных компонент, поскольку линейная система $\mathcal{M}$ не составлена из пучка. Применяя все предыдущие рассуждения к линейной системе $\mathcal{D}$ вместо линейной системы $\mathcal{M}$, получаем, что в теоретико-множественном смысле $D_1 \cap D_2 = Z$ для общих дивизоров D_1 и D_2 в линейной системе $\mathcal{D}$. С другой стороны, по построению $P \in D_1 \cap D_2$ и $P \notin Z$.

Заметим, что в случае неособого многообразия X доказательство теорем 17 и 18 также применимо тогда, когда $n = r + 3 \geq 8$.

§ 6. Тройные квадрики

Пусть $\psi: X \rightarrow Q \subset \mathbb{P}^{2r+2}$ – циклическое тройное накрытие, разветвленное над неприводимым и приведенным дивизором $R \subset Q$, где Q – неособая гиперповерхность степени 2, а r – натуральное число. Тогда $\mathrm{rk} \, \mathrm{Pic}(Q) = 1$ по теореме Лефшеца и

$$-K_X \sim \psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2r+2}}(2k - 2r - 1)|_Q),$$

где $k \in \mathbb{N}$ такое, что $R \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2r+2}}(3k)|_Q$.

Предположим, что особенности R состоят из изолированных двойных точек. Тогда при $k \leq r$ многообразие X является многообразием Фано с терминальными особенностями и выполнены равенства $\mathrm{rk} \, \mathrm{Pic}(X) = \mathrm{rk} \, \mathrm{Cl}(X) = 1$ (см. лемму 5), причем при $k < r$ многообразие X не является бирационально жестким.

В настоящем параграфе докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 19. Пусть $k = r \geq 4$. Тогда X бирационально сверхжестко.

В частности, многообразие X нерационально при $k = r \geq 4$.

Заметим, что бирациональная сверхжесткость многообразия X в случае, когда дивизор ветвления $R \subset Q$ достаточно общий и выполнено $k = r \geq 2$, следует из результатов работы [60].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 19. Предположим, что X не является бирационально жестким, но $k = r \geq 4$. Покажем, что сделанные предположения приводят к противоречию. Из [16, теорема 64] следует существование линейной системы $\mathcal{M}$ на X , не имеющей неподвижных компонент и такой, что особенности логпары $(X, \frac{1}{m}\mathcal{M})$ не являются каноническими, где m – такое натуральное число, что $\mathcal{M} \sim -mK_X$. В частности, множество $\mathbb{CS}(X, \frac{\mu}{m}\mathcal{M})$ содержит подмногообразие $Z \subset X$ для некоторого рационального числа $\mu < 1$. Причем без ограничения общности можно считать, что Z является подмногообразием наибольшей размерности, которое обладает таким свойством. По построению $\dim(Z) \leq \dim(X) - 2 = 2r - 1$.

ЛЕММА 10. *Выполнено неравенство $\dim(Z) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство требуемого утверждения следует из аргументов, использованных в доказательстве леммы 6, при этом необходимо применять следствие 6 вместо следствия 1.

ЛЕММА 11. *Выполнено неравенство $\dim(Z) \geq \dim(X) - 4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim(Z) \leq \dim(X) - 5$, а $H_1, H_2, \dots, H_k$ – общие гиперплоские сечения гиперповерхности Q , где $k = \dim(Z) > 0$. Положим

$$\bar{Q} = \bigcap_{i=1}^k H_i, \quad \bar{X} = \psi^{-1}(\bar{Q}), \quad \bar{\psi} = \psi|_{\bar{X}}: \bar{X} \rightarrow \bar{Q}, \quad \bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}|_{\bar{X}}.$$

Тогда $\bar{Q} \subset \mathbb{P}^{2r+2-k}$ – неособая квадрика, морфизм $\bar{\psi}$ является циклическим тройным накрытием, разветвленным над неособым дивизором $R \cap \bar{Q}$, линейная система $\mathcal{M}$ не имеет базисных компонент, а квадрика $\bar{Q}$ не содержит линейных подпространств в $\mathbb{P}^{2r+2-k}$ размерности $2r - k - 1$ в силу теоремы Лефшеца. Пусть P – любая точка пересечения $Z \cap \bar{X}$. Тогда $P \in \mathbb{CS}(\bar{X}, \frac{1}{m}\bar{\mathcal{M}})$ и из доказательства леммы 10 сразу следует противоречие.

Таким образом, доказано, что $\dim(Z) \geq 4$.

Пусть S – общий дивизор в $\mathcal{M}$, $\hat{S} = \psi(S \cap R)$, $\hat{Z} = \psi(Z \cap R)$. Тогда

$$\text{mult}_{\hat{Z}}(\hat{S}) > m, \quad \hat{S} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2r+2}}(m)|_R,$$

что противоречит предложению 3, поскольку $\dim(\hat{Z}) \geq 3$.

Итак, теорема 19 доказана. Теперь из доказательства теоремы 18 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 20. *Пусть $k = r \geq 4$. Тогда многообразие X не может быть бирационально перестроено в расслоение на эллиптические кривые.*

Заметим, что в случае неособого многообразия X доказательства теорем 19 и 20 также применимы и тогда, когда $k = r \geq 3$.

§ 7. Двойные пересечения квадрик

Пусть $\psi: X \rightarrow V \subset \mathbb{P}^n$ – двойное накрытие, разветвленное над неособым дивизором $R \subset V$, где V – неособое полное пересечение двух гиперповерхностей степени 2, и $n \geq 5$. Тогда $\text{rk Pic}(V) = 1$ по теореме Лефшеца и

$$-K_X \sim \psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k - n + 3)|_V),$$

где $k \in \mathbb{N}$ такое, что $R \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2k)|_V$.

Пусть $k \leq n - 4$. Тогда X – неособое многообразие Фано с $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X) = 1$, не являющееся бирационально жестким при $k \leq n - 5$.

В настоящем параграфе докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 21. *Если $k = n - 4 \geq 6$, то X бирационально сверхжестко.*

В частности, многообразие X нерационально при $k = n - 4 \geq 6$.

Заметим, что при $k = n - 4$ и $n = 5$ многообразие X является полным пересечением трех квадрик в $\mathbb{P}^6$ и не является бирационально жестким, однако известно, что оно нерационально (см. [11], [23], [12]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 21. Предположим, что X не является бирационально жестким, но $k = n - 4 \geq 6$. Покажем, что сделанные предположения приводят к противоречию.

Из [16, теорема 64] следует существование линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , не имеющей неподвижных компонент, такой, что особенности логпары $(X, \frac{1}{m}\mathcal{M})$ не являются каноническими, где m – такое натуральное число, что $\mathcal{M} \sim -mK_X$.

В частности, множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{m}\mathcal{M})$ содержит неприводимое приведенное подмногообразие $Z \subset X$ такое, что $Z \in \mathbb{CS}(X, \frac{\mu}{m}\mathcal{M})$ для некоторого положительного рационального числа $\mu < 1$. Причем без ограничения общности можно считать, что Z является подмногообразием наибольшей размерности, которое обладает таким свойством. По построению $\dim(Z) \leq \dim(X) - 2 = n - 4$.

ЛЕММА 12. *Выполнено неравенство $\dim(Z) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что Z – точка. Пусть S_1 и S_2 – общие дивизоры в линейной системе $\mathcal{M}$, $f: U \rightarrow X$ – раздутие точки Z , а E – исключительный дивизор бирационального морфизма f . Тогда из теоремы 3 следует существование линейного подпространства $\Pi \subset E \cong \mathbb{P}^{n-3}$ размерности $n - 5$ такого, что

$$\mathrm{mult}_Z(S_1 \cdot S_2 \cdot D) > 8m^2$$

для любого дивизора $D \in |-K_X|$ такого, что:

- 1) дивизор D содержит точку Z и неособ в ней;
- 2) дивизор $f^{-1}(D)$ содержит подмногообразие $\Pi \subset U$;
- 3) дивизор D не содержит подмногообразий в X коразмерности 2, принадлежащих базисному множеству линейной системы $\mathcal{M}$.

Рассмотрим линейную подсистему $\mathcal{H} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_V|$ такую, что

$$H \in \mathcal{H} \iff \Pi \subset (\psi \circ f)^{-1}(H).$$

Тогда существует линейное подпространство $\Sigma \subset \mathbb{P}^n$ размерности $n - 4$ такое, что дивизоры в $\mathcal{H}$ высекаются на V гиперплоскостями в $\mathbb{P}^n$, содержащими Σ . В частности,

$$\mathrm{Bs}(\mathcal{H}) = \Sigma \cap V,$$

однако $\Sigma \not\subset V$ по теореме Лефшеца и, следовательно, $\dim(\Sigma \cap V) = n - 5$.

Пусть H – общий дивизор в $\mathcal{H}$ и $D = \psi^{-1}(H) \in |-K_X|$. Тогда:

- 1) дивизор D содержит точку Z и неособ в ней;
- 2) дивизор $f^{-1}(D)$ содержит подмногообразие $\Pi \subset U$.

Предположим, что дивизор D содержит подмногообразие $\Gamma \subset X$ коразмерности 2, принадлежащее базисному множеству $\mathcal{M}$. Тогда

$$\dim(\psi(\Gamma)) = n - 4,$$

но $\psi(\Gamma) \subset \Sigma \cap V$ и $\dim(\Sigma \cap V) = n - 5$. Противоречие.

Таким образом, D не содержит подмногообразий в X коразмерности 2, которые принадлежат базисному множеству $\mathcal{M}$. Пусть $H_1, H_2, \dots, H_k$ – достаточно общие дивизоры в линейной системе $|-K_X|$, которые содержат Z , где $k = \dim(Z) - 3$. Тогда

$$8m^2 = H_1 \cdot \dots \cdot H_k \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot D \geq \text{mult}_Z(S_1 \cdot S_2 \cdot D) > 8m^2,$$

что является противоречием.

ЛЕММА 13. *Выполнено неравенство $\dim(Z) \geq \dim(X) - 4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim(Z) \leq \dim(X) - 5$, а $H_1, H_2, \dots, H_k$ – общие гиперплоские сечения многообразия V , где $k = \dim(Z) > 0$. Положим

$$\bar{V} = \bigcap_{i=1}^k H_i, \quad \bar{X} = \psi^{-1}(\bar{V}), \quad \bar{\psi} = \psi|_{\bar{X}}: \bar{X} \rightarrow \bar{V}, \quad \bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}|_{\bar{X}}.$$

Тогда $\bar{V} \subset \mathbb{P}^{n-k}$ – неособое полное пересечение двух квадрик, морфизм $\bar{\psi}$ является двойным накрытием, разветвленным над неособым дивизором $R \cap \bar{V}$, а линейная система $\bar{\mathcal{M}}$ не имеет базисных компонент. Неособое полное пересечение двух квадрик $\bar{V}$ не содержит линейных подпространств в $\mathbb{P}^{n-k}$ размерности $n - k - 4$ по теореме Лефшеца, поскольку $n - k \geq 7$. Пусть P – любая точка пересечения $Z \cap \bar{X}$; тогда $P \in \mathbb{CS}(\bar{X}, \frac{1}{m} \bar{\mathcal{M}})$ и из доказательства леммы 12 следует противоречие.

Таким образом, доказано, что $\dim(Z) \geq 4$.

Пусть S – общий дивизор в $\mathcal{M}$, $\hat{S} = \psi(S \cap R)$, $\hat{Z} = \psi(Z \cap R)$. Тогда

$$\text{mult}_{\hat{Z}}(\hat{S}) > m, \quad \hat{S} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)|_R,$$

что противоречит предложению 3, поскольку $\dim(\hat{Z}) \geq 3$.

Итак, теорема 21 доказана, что завершает доказательство теоремы 5. Теперь из доказательства теоремы 18 вытекает следующий результат, который завершает доказательство теоремы 6.

ТЕОРЕМА 22. *Пусть $k = n - 4 \geq 6$. Тогда многообразие X не может быть бирационально перестроено в расслоение на эллиптические кривые.*

Автор признателен М. М. Гриненко, В. А. Исковских, С. А. Кудрявцеву, Дж. Парку, Ю. Г. Прохорову, А. В. Пухликову и В. В. Шокурову за плодотворные беседы.

Список литературы

1. Гриненко М. М., “О послынных перестройках расслоений на поверхности дель Пеццо степени 2”, *УМН*, **56:4** (2001), 145–146.
2. Гриненко М. М., “О расслоениях на поверхности дель Пеццо”, *Матем. заметки*, **69:4** (2001), 550–565.

3. Долгачёв И. В., “О рациональных поверхностях с пучком эллиптических кривых”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **30**:5 (1966), 1073–1100.
4. Исковских В. А., “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий”, *Совер. проблемы математики*, **12** (1979), 159–236.
5. Исковских В. А., Манин Ю. И., “Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота”, *Матем. сб.*, **86**:1 (1971), 140–166.
6. Пухликов А. В., “Бирациональные автоморфизмы трехмерной квартики с простейшей особенностью”, *Матем. сб.*, **135**:4 (1988), 472–496.
7. Пухликов А. В., “Замечание о теореме В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерной квартике”, *Тр. МИАН*, **208** (1995), 278–289.
8. Пухликов А. В., “Послойные бирациональные соответствия”, *Матем. заметки*, **68**:1 (2000), 120–130.
9. Пухликов А. В., “Бирационально жесткие двойные гиперповерхности Фано”, *Матем. сб.*, **191**:6 (2000), 101–126.
10. Пухликов А. В., “Бирационально жесткие гиперповерхности Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:6 (2002), 159–186.
11. Тюрин А. Н., “О пересечении квадрик”, *УМН*, **30**:6 (1975), 51–99.
12. Тюрин А. Н., “Промежуточный якобиан трехмерных многообразий”, *Совер. проблемы математики*, **12** (1979), 5–57.
13. Чельцов И. А., “О гладкой четырехмерной квинтике”, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 139–162.
14. Чельцов И. А., “Логканонические пороги на гиперповерхностях”, *Матем. сб.*, **192**:8 (2001), 155–172.
15. Чельцов И. А., “Нерациональность четырехмерного гладкого полного пересечения квадрики и квартики, не содержащего плоскости”, *Матем. сб.*, **194**:11 (2003), 95–116.
16. Чельцов И. А., “Бирационально сверхжесткие циклические тройные пространства”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:6 (2004), 157–208.
17. Чельцов И. А., Парк Дж., “Глобальные логканонические пороги и обобщенные точки Эккарда”, *Матем. сб.*, **193**:5 (2002), 149–160.
18. Шокуров В. В., “Трехмерные логперестройки”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **56**:1 (1992), 105–203.
19. Alexeev V., “General elephants of $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds”, *Comp. Math.*, **91** (1994), 91–116.
20. Ambro F., “Ladders on Fano varieties”, *J. Math. Sci.*, **94** (1999), 1126–1135.
21. Andreotti A., Frankel T., “The Lefschetz theorem on hyperplane sections”, *Ann. Math.*, **69** (1959), 713–717.
22. Artin M., “Some numerical criteria of contractability of curves on algebraic surfaces”, *Amer. J. Math.*, **84** (1962), 485–496.
23. Beauville A., “Varieties de Prym et jacobiniennes intermediaires”, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **10** (1977), 309–391.
24. Bertini E., “Ricerche sulle trasformazioni univoche involutori del piano”, *Ann. Mat. Ser. II*, **8** (1877), 224–286.
25. Bogomolov F., Tschinkel Yu., “On the density of rational points on elliptic fibrations”, *J. Reine Angew. Math.*, **511** (1999), 87–93.
26. Bogomolov F., Tschinkel Yu., “Density of rational points on elliptic K3 surfaces”, *Asian J. Math.*, **4** (2000), 351–368.
27. Bott R., “On a theorem of Lefschetz”, *Mich. Math. J.*, **6** (1959), 211–216.
28. Call F., Lyubeznik G., “A simple proof of Grothendieck’s theorem on the parafactoriality of local rings”, *Contemp. Math.*, **159** (1994), 15–18.
29. Cheltsov I., “Log pairs on birationally rigid varieties”, *J. Math. Sciences*, **102** (2000), 3843–3875.
30. Cheltsov I., “On factoriality of nodal threefolds”, *J. Alg. Geometry*, **14**:3 (2005), 663–690.

31. Corti A., “Factorizing birational maps of threefolds after Sarkisov”, *J. Alg. Geometry*, **4** (1995), 223–254.
32. Corti A., “Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry”, *L.M.S. Lect. Not. Ser.*, **281** (2000), 259–312.
33. Corti A., Pukhlikov A., Reid M., “Fano 3-fold hypersurfaces”, *L.M.S. Lect. Not. Ser.*, **281** (2000), 175–258.
34. Dolgachev I., “Weighted projective varieties”, *Lect. Not. in Math.*, **956** (1982), 34–71.
35. Faltings G., “Endlichkeitssatz für abelsche Varietäten über Zahlkörpern”, *Invent. Math.*, **73** (1983), 349–366.
36. Faltings G., “Diophantine approximation on abelian varieties”, *Ann. Math.*, **133**:2 (1991), 549–576.
37. De Fernex T., Ein L., Mustata M., “Multiplicities and log-canonical thresholds”, *J. Alg. Geom.*, **13** (2004), 603–615.
38. De Fernex T., Ein L., Mustata M., “Bounds for log canonical thresholds with applications to birational rigidity”, *Math. Res. Letters*, **10** (2003), 219–236.
39. Grothendieck A. et al., *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*, IHES, Paris, 1965.
40. Harris J., Tschinkel Yu., “Rational points on quartics”, *Duke Math. J.*, **104** (2000), 477–500.
41. Hartshorne R., “Stable reflexive sheaves”, *Math. Ann.*, **254**:2 (1980), 121–176.
42. Hironaka H., “Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero”, *Ann. Math.*, **79**:1 (1964), 109–326.
43. Iano-Fletcher A.R., “Working with weighted complete intersections”, *L.M.S. Lect. Not. Ser.*, **281** (2000), 101–173.
44. Iskovskikh V., Prokhorov Yu., “Fano varieties”, *Encyclopaedia Math. Sci.*, **47**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
45. Iskovskikh V., Pukhlikov A., “Birational automorphisms of multidimensional algebraic manifolds”, *J. Math. Sci.*, **82**:4 (1996), 3528–3613.
46. Kawakita M., “Divisorial contractions in dimension 3 which contract divisors to smooth points”, *Invent. Math.*, **145**:1 (2001), 105–119.
47. Kawamata Yu., “A generalization of Kodaira–Ramanujam’s vanishing theorem”, *Math. Ann.*, **261**:1 (1982), 43–46.
48. Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K., “Introduction to the minimal model problem”, *Adv. Stud. Pure Math.*, **10** (1987), 283–360.
49. Kollár J., “Nonrational hypersurfaces”, *J. AMS*, **8**:1 (1995), 241–249.
50. Kollár J., *Rational curves on algebraic varieties*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
51. Kollár J., “Singularities of pairs”, *Algebraic geometry. Proc. Summer Research Institute, Santa Cruz, CA, USA. July 9–29, 1995*, Amer. Math. Soc., Providence, 1997, 221–287.
52. Kollár J., “Low degree polynomial equations: arithmetic, geometry and topology”, *Prog. Math.*, **168** (1998), 255–288.
53. *Flips and abundance for algebraic threefolds.*, Asterisque, **211**, eds. Kollár J. et al., 1992.
54. Kollár J., Miyaoka Y., Mori S., “Rational curves on Fano varieties”, *Lect. Not. Math.*, **1515** (1992), 100–105.
55. Kollár J., Miyaoka Y., Mori S., “Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds”, *J. Diff. Geom.*, **36**:3 (1992), 765–779.
56. Kollár J., Miyaoka Y., Mori S., “Rationally connected varieties”, *J. Alg. Geom.*, **1**:3 (1992), 429–448.
57. Mella M., “Birational geometry of quartic 3-folds II: the importance of being $\mathbb{Q}$ -factorial”, *Math. Ann.*, **330**:1 (2004), 107–126.
58. Park J., “Birational maps of del Pezzo fibrations”, *J. Reine Angew. Math.*, **538** (2001), 213–221.

- 59. Pukhlikov A., “Essentials of the method of maximal singularities”, *L.M.S. Lect. Not. Ser.*, **281** (2000), 73–100.
- 60. Pukhlikov A., *Birationally rigid Fano cyclic covers*,
[arXiv:math.AG/0411198](#).
- 61. Reid M., “Chapters on algebraic surfaces”, *Complex algebraic geometry*, Lect. notes from a summer program held in Park City, Utah, in 1993, ed. J. Kollár, AMS, Providence, 1997, 5–159.
- 62. Viehweg V., “Vanishing theorems”, *J. Reine Angew. Math.*, **335** (1982), 1–8.
- 63. Zariski O., “Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques–Severi”, *Ann. Math.*, **55**:3 (1952), 552–592.
- 64. Zhang Q., *Rational connectedness of log $\mathbb{Q}$ -Fano varieties*,
[arXiv:math.AG/0408301](#).

И. А. ЧЕЛЬЦОВ (I. A. CHELTSOV)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: cheltsov@yahoo.com

Поступило в редакцию
25.01.2005