Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Климов, Топологические характеристики многозначных отображений и липшицевых функционалов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 4, 97–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/im581>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:03:15

УДК 517.946

В. С. Климов

Топологические характеристики многозначных отображений и липшицевых функционалов

Изучено операторное включение $0 \in F(x) + N_Q(x)$, где F – многозначное отображение монотонного типа из рефлексивного пространства V в сопряженное к нему V^* , N_Q – нормальный конус к замкнутому и, вообще говоря, невыпуклому множеству Q . Для оценки числа решений рассматриваемого включения введены топологические характеристики многозначных отображений и липшицевых функционалов, обладающие свойствами аддитивности и гомотопической инвариантности. Доказаны бесконечномерные версии теоремы Пуанкаре–Хопфа.

Библиография: 25 наименований.

Введение

В работе изучается операторное включение

$$0 \in F(x) + N_Q(x). \quad (1)$$

Основные результаты относятся к случаю, когда F – ограниченное выпуклозначное отображение монотонного типа из рефлексивного пространства V в сопряженное к нему V^* , N_Q – нормальный конус к замкнутому множеству $Q \subset V$. В большинстве исследований, посвященных изучению включения (1), Q является выпуклым множеством. Отказ от этого неестественного для приложений к аналитической статике и экстремальным задачам условия представляется наиболее существенным в настоящей статье. Для оценки числа решений включения (1) вводятся топологические характеристики многозначных отображений, обладающие свойствами аддитивности и гомотопической инвариантности. Устанавливаются бесконечномерные варианты теоремы Пуанкаре–Хопфа для многозначных отображений. Изучаются топологические характеристики лебеговых множеств функционалов, определенных на замкнутых и, вообще говоря, невыпуклых подмножествах рефлексивного пространства. Приводятся условия корректности задачи минимизации функционала f на множестве Q ; при достаточно необременительных относительно f , Q предположениях доказывается, что топологический индекс множества $\arg \min_Q f$ совпадает с эйлеровой характеристикой этого множества.

Основные утверждения новы и для однозначных отображений. Существенную роль в работе играют конечномерные остроугольные аппроксимации многозначных отображений. Используются идеи теории монотонных операторов [1]–[5], методы нелинейного анализа [6]–[11], результаты работ [12]–[15].

Введем следующие обозначения: $\overline{\mathfrak{M}}$ ($\mathfrak{M}$, $\partial\mathfrak{M}$) – замыкание (внутренность, граница) подмножества $\mathfrak{M}$ метрического пространства $(\mathfrak{X}, \rho)$; $d_{\mathfrak{X}}(x, \mathfrak{M}) =$

$\inf\{\rho(x, y), y \in \mathfrak{M}\}$ – расстояние в метрике ρ пространства $\mathfrak{R}$ от элемента x до множества $\mathfrak{M}$; $\theta_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) = \sup\{d_{\mathfrak{R}}(x, \mathfrak{M}), x \in \mathfrak{N}\}$ – уклонение множества $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{R}$ от множества $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$; метрика ρ в банаховом пространстве X с нормой $\|\cdot\|$ вводится равенством $\rho(x, y) = \|x - y\|$; X^* – сопряженное к X пространство; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – каноническая билинейная форма на $X \times X^*$; $s(x^*, \mathscr{D}) = \sup\{\langle x, x^* \rangle, x \in \mathscr{D}\}$ – опорная функция множества $\mathscr{D} \subset X$; $\text{Cv}(X)$ – совокупность всех непустых выпуклых замкнутых подмножеств пространства X ; $\mathscr{B}_X = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}$ – единичный шар пространства X . Все банаховы пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Через $\Lambda(\mathscr{D}, Y)$ обозначаются совокупность отображений множества $\mathscr{D} \subset X$ в банахово пространство Y , удовлетворяющих локальному условию Липшица, т.е. $h \in \Lambda(\mathscr{D}, Y)$, если для каждой точки x из $\mathscr{D}$ найдутся ее относительная окрестность O и константа L такие, что

$$\|h(x_1) - h(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in O;$$

полагаем $\Lambda(\mathscr{D}, \mathbb{R}) = \Lambda(\mathscr{D})$. Если $h \in \Lambda(\mathscr{D})$, $x \in \overset{\circ}{\mathscr{D}}$, v – произвольный элемент из X , то число

$$h^\circ(x; v) = \overline{\lim}_{y \rightarrow x, t \rightarrow +0} \frac{h(y + tv) - h(y)}{t}$$

конечно. Множество $\partial h(x) = \{x^* \in X^*, \langle v, x^* \rangle \leq h^\circ(x; v) \forall v \in X\}$ называют *субдифференциалом Кларка функционала h в точке x* , оно принадлежит классу $\text{Cv}(X^*)$. Справедливо равенство

$$h^\circ(x; v) = \max\{\langle v, x^* \rangle, x^* \in \partial h(x)\}.$$

Функционал h называют *регулярным в точке x* , если для каждого v существует обычная производная $h'(x; v)$ по направлению и $h'(x; v) = h^\circ(x; v)$.

Мнозначное отображение множества $\mathscr{D}_1$ во множество $\mathscr{D}_2$ – это оператор, сопоставляющий элементу x из $\mathscr{D}_1$ некоторое множество $F(x) \subset \mathscr{D}_2$; если $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}_1$, то $F(\mathscr{D}) = \bigcup_{x \in \mathscr{D}} F(x)$ – область значений отображения F на множестве $\mathscr{D}$; множества

$$F_+^{-1}(\mathscr{D}_0) = \{x \in \mathscr{D}_1, F(x) \subset \mathscr{D}_0\}, \quad F_-^{-1}(\mathscr{D}_0) = \{x \in \mathscr{D}_1, F(x) \cap \mathscr{D}_0 \neq \emptyset\}$$

– малый и полный прообразы множества $\mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}_2$; $\text{Gr } F = \{(x_1, x_2) \in \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2, x_1 \in \mathscr{D}_1, x_2 \in F(x_1)\}$ – график отображения F . Мнозначное отображение F топологического пространства $\mathscr{D}_1$ в топологическое пространство $\mathscr{D}_2$ полунепрерывно сверху (снизу), если для любого открытого множества $\mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}_2$ его малый прообраз $F_+^{-1}(\mathscr{D}_0)$ (соответственно, полный прообраз $F_-^{-1}(\mathscr{D}_0)$) есть открытое множество в $\mathscr{D}_1$. Отображение $F: \mathscr{D}_1 \rightarrow \mathscr{D}_2$ (где $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ – подмножества банаховых пространств X, Y) ограничено, если для каждого ограниченного множества $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}_1 \subset X$ область значений $F(\mathscr{D})$ есть ограниченное подмножество пространства Y ; если $F(x) \in \text{Cv}(Y)$ для любого $x \in \mathscr{D}_1$, то пишут $F: \mathscr{D}_1 \rightarrow \text{Cv}(Y)$. Оператор тождественного преобразования обозначается I .

§ 1. Многозначные псевдомонотонные отображения

Ниже V – сепарабельное рефлексивное банахово пространство, $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ – нормы в V и сопряженном к нему V^* , через $\rightharpoonup$ и $\rightarrow$ обозначены слабая и сильная сходимости соответственно, $\Gamma(V)$ – совокупность конечномерных подпространств пространства V . Многозначное отображение $A: V \rightarrow \text{Cv}(V^*)$ назовем *псевдомонотонным*, если оно ограничено и удовлетворяет следующему условию:

(α_0) для произвольной последовательности $x_n \in V$, обладающей свойствами

$$x_n \rightharpoonup x, \quad \varliminf_{n \rightarrow \infty} s(x - x_n, A(x_n)) \geq 0, \quad (2)$$

справедливо соотношение

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} s(v - x_n, A(x_n)) \leq s(v - x, A(x)) \quad \forall v \in V. \quad (3)$$

Для однозначных отображений это понятие хорошо известно (см. [1]–[5]). Псевдомонотонный однозначный оператор $A: V \rightarrow V^*$ непрерывен из V (с сильной топологией) в V^* (со слабой топологией); для монотонного оператора A указанное условие непрерывности эквивалентно его псевдомонотонности (см. [3, п. 2.4]).

Примеры псевдомонотонных многозначных отображений можно найти в [12]–[15]. Для конечномерного пространства V псевдомонотонность многозначного отображения $A: V \rightarrow \text{Cv}(V^*)$ эквивалентна его ограниченности и полунепрерывности сверху. В случае $\dim V = \infty$ ситуация значительно сложнее. Ради краткости последовательность x_n , обладающую свойствами (2), будем называть *A-сходящейся* и записывать $x_n \xrightarrow{A} x$. Сходимость $x_n \xrightarrow{A} x$ равносильна существованию последовательности $(x_n, x_n^*) \in \text{Gr } A$, для которой

$$x_n \rightharpoonup x, \quad \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, x_n^* \rangle \leq 0.$$

Очевидно, что если $x_n \rightarrow x$, то $x_n \xrightarrow{A} x$ (сильная сходимость влечет за собой A -сходимость). В § 2 выделен класс многозначных отображений $A: V \rightarrow \text{Cv}(V^*)$, для которых A -сходимость влечет за собой сильную сходимость.

Напомним, что многозначное отображение F топологического пространства X в банахово пространство Y называют (см. [11, гл. 3]) *хеминепрерывным сверху*, если для любого $p \in Y^*$ функция $x \rightarrow s(p, F(x))$ полунепрерывна сверху в каждой точке пространства X . Псевдомонотонное многозначное отображение хеминепрерывно сверху. Справедливо более сильное утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $A: V \rightarrow \text{Cv}(V^*)$ – псевдомонотонное многозначное отображение, $x_n \xrightarrow{A} x$, $v_n \rightarrow v$. Тогда:

- 1) $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} s(v_n, A(x_n)) \leq s(v, A(x))$;
- 2) если $x_n^* \in A(x_n)$, $x_n^* \rightharpoonup x^*$, то $x^* \in A(x)$ и

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x_n^* \rangle \geq \langle x, x^* \rangle. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3) при любых v из V и λ из $\mathbb{R}$ имеет место оценка

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} s(\lambda v - x_n, A(x_n)) \leq s(\lambda v - x, A(x)).$$

Устремляя λ к ∞ , приходим к неравенству

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} s(v, A(x_n)) \leq s(v, A(x)) \quad \forall v \in V.$$

Справедливы оценки

$$\begin{aligned} s(v_n, A(x_n)) - s(v, A(x)) &= s(v_n, A(x_n)) - s(v, A(x_n)) + s(v, A(x_n)) - s(v, A(x)) \\ &\leq K\|v_n - v\| + s(v, A(x_n)) - s(v, A(x)), \end{aligned}$$

где K – постоянная, не зависящая от n . Поскольку $v_n \rightarrow v$, то первое утверждение леммы доказано.

Пусть $x_n^* \in A(x_n)$, $x_n^* \rightarrow x^*$. При любом v из V

$$\langle v, x^* \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v, x_n^* \rangle \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} s(v, A(x_n)) \leq s(v, A(x)),$$

следовательно, $x^* \in A(x)$.

Полагая $v = x$ в (3), получаем $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} s(x - x_n, A(x_n)) \leq 0$. Справедливо соотношение

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle x - x_n, x_n^* \rangle \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} s(x - x_n, A(x_n)) \leq 0,$$

из которого вытекает второе утверждение. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях леммы 1 функция $(x, v) \rightarrow s(v, A(x))$ полунепрерывна сверху по совокупности переменных.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для псевдомонотонности ограниченного многозначного отображения $A: V \rightarrow \text{Cv}(V^*)$ необходимо и достаточно, чтобы для произвольной последовательности $(x_n, x_n^*) \in \text{Gr } A$, обладающей свойствами $x_n \xrightarrow{A} x$, $x_n^* \rightarrow x^*$, имели место включение $x^* \in A(x)$ и неравенство (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 в доказательстве нуждается лишь достаточность. Пусть $x_n \xrightarrow{A} x$, $v \in V$, $x_n^* \in A(x_n)$ и $\langle v - x_n, x_n^* \rangle = s(v - x_n, A(x_n))$. Не нарушая общности, можно считать, что $x_n^* \rightarrow x^*$. Тогда $x^* \in A(x)$ и

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} s(v - x_n, A(x_n)) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle v - x_n, x_n^* \rangle \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle v, x_n^* \rangle + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle -x_n, x_n^* \rangle \\ &\leq \langle v, x^* \rangle - \langle x, x^* \rangle \leq s(v - x, A(x)). \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Если многозначное отображение $A: V \rightarrow \text{Cv}(V^*)$ монотонно и $(x_n, x_n^*) \in \text{Gr } A$, $n = 1, 2, \dots$, $(x, x^*) \in \text{Gr } A$, $x_n \rightarrow x$, $x_n^* \rightarrow x^*$, то справедливо неравенство (4). Действительно, в силу монотонности A последовательно имеем

$$\begin{aligned} \langle x_n - x, x_n^* - x^* \rangle &\geq 0, \quad \langle x_n, x_n^* \rangle \geq \langle x_n, x^* \rangle + \langle x, x_n^* - x^* \rangle, \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x_n^* \rangle &\geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x^* \rangle + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle x, x_n^* - x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle. \end{aligned}$$

Это замечание в сочетании со следствием 2 позволяет сказать, что псевдомонотонность ограниченного монотонного отображения $A: V \rightarrow \text{Cv}(V^*)$ эквивалентна замкнутости его графика в следующем смысле: из условий $(x_n, x_n^*) \in \text{Cv } A$, $x_n \xrightarrow{A} x$, $x_n^* \rightarrow x^*$ вытекает, что $x^* \in A(x)$.

Обозначим через $\Lambda_0(V)$ часть класса $\Lambda(V)$, состоящую из тех функционалов g , для которых многозначное отображение $A(x) = \partial g(x)$, $x \in V$, псевдомонотонно. В этом случае многозначное отображение A назовем *потенциальным*, функционал g – его *потенциалом*. Далее будет использоваться следующий вариант формулы конечных приращений [9, гл. 2]:

$$g(v) - g(u) = \langle v - u, w^* \rangle,$$

где $w^* \in \partial g(w)$, $w = u + \theta(v - u)$, $0 < \theta < 1$.

ЛЕММА 2. *Функционал класса $\Lambda_0(V)$ слабо полунепрерывен снизу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В предположении противного существуют функционал g класса $\Lambda_0(V)$, точка x из V , числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и последовательность $x_n \in V$, обладающие свойствами

$$x_n \rightharpoonup x, \quad g(x_n) < g(x) - 2\varepsilon, \quad g(y) > g(x) - \varepsilon \quad \forall y \in x + \delta B_V;$$

в частности, если $y_n = x + t(y_n)(x_n - x)$, $\|y_n - x\| = \delta$, $0 < t(y_n) < 1$, то $g(y_n) \geq g(x) - \varepsilon > g(x_n) + \varepsilon$, $t(y_n) > \delta_0 > 0$.

В силу формулы конечных приращений имеем

$$\varepsilon > g(x_n) - g(y_n) = \langle x_n - y_n, z_n^* \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} z_n^* &\in A(z_n), \quad z_n = x + t(z_n)(x_n - x), \quad t(y_n) < t(z_n) < 1, \\ x_n - y_n &= (1 - t(y_n))(x_n - x) = \frac{1 - t(y_n)}{t(z_n)}(z_n - x). \end{aligned}$$

Поэтому $\langle z_n - x, z_n^* \rangle < -\varepsilon t(z_n)(1 - t(y_n))^{-1} < -\varepsilon t(z_n) < -\varepsilon \delta_0$. Последовательности z_n , z_n^* обладают свойствами

$$z_n \rightharpoonup x, \quad z_n^* \in A(z_n), \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle z_n - x, z_n^* \rangle \leq -\varepsilon \delta_0;$$

не уменьшая общности, можно считать, что $z_n^* \rightharpoonup z^*$. Таким образом, $z_n \xrightarrow{A} x$ и вместе с тем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle z_n, z_n^* \rangle \leq \langle x, z^* \rangle - \varepsilon \delta_0 < \langle x, z^* \rangle.$$

Последняя оценка противоречит неравенству (4). Лемма доказана.

Менее общие утверждения установлены в [2], [12]. В условиях работы [2] $g': V \rightarrow V^*$ – однозначный псевдомонотонный оператор. Результаты работы [12] относятся к более узкому, чем $\Lambda_0(V)$, классу функционалов $\Lambda_1(V)$. Выделенные в [2], [12] классы содержат невыпуклые и негладкие функционалы.

Ниже рассматривается множество Q , определяемое равенством

$$Q = \{x \in V, g(x) \leq 0\}, \quad (5)$$

где g – функционал класса $\Lambda_0(V)$, удовлетворяющий условиям:

(I_g) множество $\{x \in V, g(x) = 0\}$ непусто, и если $g(x) = 0$, то $0 \notin \partial g(x)$ и $g'(x; v) = g^\circ(x; v)$ для любого $v \in V$ (регулярность нулевого значения функционала $g: V \rightarrow \mathbb{R}$);

(II_g) если $x_n \xrightarrow{\partial g} x$ и $g(x_n) \rightarrow 0$, то $g(x) = 0$.

В указанных предположениях функционал g слабо полунепрерывен снизу на пространстве V , поэтому множество Q слабо замкнуто в V . Справедливы равенства $\overset{\circ}{Q} = \{x \in V, g(x) < 0\}$, $\partial Q = \{x \in V, g(x) = 0\}$. Для каждой точки x из Q определены касательный и нормальный конусы Кларка $T_Q(x)$, $N_Q(x)$; они могут быть заданы соотношениями $T_Q(x) = V$, $N_Q(x) = \{0\}$, если $x \in \overset{\circ}{Q}$, и $T_Q(x) = \{v \in V, g^\circ(x; v) \leq 0\}$, $N_Q(x) = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial g(x)$, если $x \in \partial Q$ (см. [9, гл. 2]). Для дифференцируемых функционалов g близкое к (II_g) условие вводилось в [13]. Из установленных в [13] результатов вытекает, что всякий слабо непрерывный функционал класса $\Lambda(V)$ удовлетворяет условию (II_g); оно выполнено также для выпуклых на V функционалов. Примеры другого рода рассматриваются в § 5.

Пусть $\mathcal{R}(g) = \{x \in V, 0 \notin \partial g(x)\}$, $\Omega_0 = Q \cup \mathcal{R}(g)$. Тогда $\mathcal{R}(g)$, Ω_0 – открытые подмножества пространства V . Определим многозначное отображение $\Pi: \Omega_0 \rightarrow V$ равенствами

$$\Pi(x) = \begin{cases} x + T_Q(x), & \text{при } x \in Q, \\ \{v \in V: g^\circ(x; v - x) \leq -d_V(x, Q)\} & \text{при } x \in \mathcal{R}(g) \setminus Q. \end{cases}$$

Таким образом, $\Pi(x)$ для x из Q – это приставленный к x касательный конус; $\Pi(x) \in \text{Cv}(V)$ для любого $x \in \Omega_0$.

ЛЕММА 3. Многозначное отображение $\Pi: \Omega_0 \rightarrow \text{Cv}(V)$ квазиоткрыто, т. е. $\overset{\circ}{\Pi}(x) \neq \emptyset$ и график многозначного отображения $x \rightarrow \overset{\circ}{\Pi}(x)$ есть открытое подмножество пространства $V \times V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливы равенства

$$\overset{\circ}{\Pi}(x) = \begin{cases} V & \text{при } x \in \overset{\circ}{Q}, \\ \{v: g^\circ(x; v - x) < -d_V(x, Q)\} & \text{при } x \in \Omega_0 \setminus \overset{\circ}{Q}. \end{cases}$$

Теперь утверждение леммы вытекает из следствия 1. Лемма доказана.

Изучим аппроксимационные свойства отображения Π . Последовательность E_n , $n = 1, 2, \dots$, класса $\Gamma(V)$ назовем *исчерпывающей пространство V* , если $E_n \subset E_{n+1}$ для любого n и $\bigcup_n E_n = V$. Поскольку множество $\Pi(x)$ выпукло и телесно, то для любого элемента u из $\Pi(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_V(u, \Pi(x) \cap E_n) = 0.$$

ЛЕММА 4. Пусть $x_n \in Q$, $x_n \rightharpoonup x$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_V(x, \Pi(x_n) \cap E_n) = 0. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x_n \in \overset{\circ}{Q}$ для любого n , то $\Pi(x_n) \cap E_n = E_n$, поэтому $d_V(x, \Pi(x_n) \cap E_n) = d_V(x, E_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Не уменьшая общности, будем считать, что $x_n \in \partial Q$ для любого n и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} g^\circ(x_n; x - x_n) = \delta$.

В случае $\delta < 0$ фиксируем последовательность v_n из E_n , $v_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $g^\circ(x_n; v_n - x_n) \leq g^\circ(x_n; v_n - x) + g^\circ(x_n; x - x_n)$, то $g^\circ(x_n; v_n - x_n) < 0$ при достаточно больших n ; следовательно, $v_n \in \Pi(x_n) \cap E_n$, $n \geq n_0$, и (6) имеет место. Если $\delta \geq 0$, то из включения $g \in \Lambda_0(V)$ вытекает неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} g^\circ(x_n; v - x_n) \leq g^\circ(x; v - x) \quad \forall v \in V.$$

Фиксируем v из E_m , для которого $g^\circ(x; v - x) < 0$. При больших n имеем $g^\circ(x_n; v - x_n) < 0$, т. е. $v \in \Pi(x_n) \cap E_m \subset \Pi(x_n) \cap E_n$. Приходим к оценке

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} d_V(x_n, \Pi(x_n) \cap E_n) \leq \|v - x\|,$$

правая часть которой за счет выбора v может быть сделана сколь угодно малой. Это влечет за собой равенство (6) в рассматриваемом случае. Лемма доказана.

Далее $R > d_V(0, Q)$, множество $Q_R = Q \cap R\mathcal{B}_V$ не пусто. Нам потребуется следующий вариант леммы об остроугольной аппроксимации многозначного отображения [7].

ЛЕММА 5. Для любого числа R из $(d_V(0, Q), \infty)$ найдутся натуральное число k , ограниченное отображение w_1 класса $\Lambda(Q_R, E_k)$ и число $\delta_1 > 0$, зависящие от R и такие, что

$$g^\circ(x; w_1(x) - x) < -\delta_1, \quad x \in \partial Q \cap R\mathcal{B}_V. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\mathfrak{M} = \partial Q \cap R\mathcal{B}_V,$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ x \in V, d_V(x, \mathfrak{M}) \leq \frac{1}{n}, \quad g^\circ(x; v - x) \geq -\frac{1}{n} \quad \forall v \in E_n, \|v\| \leq n \right\}.$$

Докажем, что $\mathfrak{M}_n = \emptyset$ при больших n . В предположении противного $\mathfrak{M}_n \neq \emptyset$ для бесконечного числа индексов n . Не нарушая общности, можно считать, что $\mathfrak{M}_n \neq \emptyset$ для любого n .

Пусть $x_n \in \mathfrak{M}_n$, $n = 1, 2, \dots$, $\mathfrak{B}_n = \{v \in E_n, \|v\| \leq n\}$. Согласно теоремам о минимаксе (см., например, [11, гл. 6, § 2, теоремы 7, 8]) найдется такой элемент x_n^* из $\partial g(x_n)$, что

$$\min_{v \in \mathfrak{B}_n} \langle v - x_n, x_n^* \rangle = \min_{v \in \mathfrak{B}_n} g^\circ(x_n; v - x_n) \geq -\frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\langle x_n, x_n^* \rangle \leq \langle v, x_n^* \rangle + \frac{1}{n}, \quad v \in \mathfrak{B}_n. \quad (8)$$

Последовательности x_n, x_n^* ограничены в пространствах V, V^* . Так как V — рефлексивное пространство, то эти последовательности можно считать слабо сходящимися к элементам x, x^* соответственно. Из (8) следуют соотношения

$$x^* = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, x_n^* \rangle \leq 0, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} g^\circ(x_n; x - x_n) \geq 0.$$

Поскольку $d_V(x_n, \mathfrak{M}) \leq 1/n$, то $g(x_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $x_n \xrightarrow{\partial g} x$, то $0 \in \partial g(x)$, $g(x) = 0$. Это противоречит условию (I_g) , что и доказывает равенство $\mathfrak{M}_n = \emptyset$ при больших n .

Фиксируем натуральное число k такое, что $\mathfrak{M}_k = \emptyset$. Положим $\mathfrak{X} = \{x \in V, d_V(x, \mathfrak{M}) \leq 1/k\}$, $\delta_1 = 1/(2k)$. В силу выбора числа k справедлива оценка

$$\min_{v \in \mathfrak{B}_k} g^\circ(x; v - x) < -\delta_1 \quad \forall x \in \mathfrak{X}. \quad (9)$$

Каждому y из $\mathfrak{X}$ сопоставим вектор v_y из $\mathfrak{B}_k$ такой, что $g^\circ(y; v_y - y) < -\delta_1$. Из следствия 1 и включения $g \in \Lambda_0(V)$ вытекает существование такой окрестности O_y точки y , что $g^\circ(x; v_y - x) < -\delta_1$ для всех $x \in O_y$.

Впишем в покрытие O_y , $y \in \mathfrak{X}$, метрического пространства $\mathfrak{X}$ локально конечное покрытие $\mathscr{D}_j$, $j \in J$. Пусть φ_j , $j \in J$, – разбиение единицы класса $\Lambda(\mathfrak{X})$, подчиненное покрытию $\mathscr{D}_j$. Векторное поле

$$v_0(x) = \sum_{j \in J} \varphi_j(x) v_{y_j}, \quad x \in \mathfrak{X}$$

(элемент y_j подобран так, что $\mathscr{D}_j \subset O_{y_j}$), обладает свойствами

$$v_0(x) \in \mathfrak{B}_k, \quad g^\circ(x; v_0(x) - x) < -\delta_1, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Пусть $\eta(t) = 1$ при $t \leq 1$, $\eta(t) = 2 - t$ при $1 < t < 2$ и $\eta(t) = 0$ при $t \geq 2$. Искомое векторное поле $w_1: Q_R \rightarrow E_k$ определим равенством

$$w_1(x) = \eta(3k d_V(x, \mathfrak{M})) v_0(x).$$

Поскольку $\eta(3k d_V(x, \mathfrak{M})) = 0$ для x из $Q_R \setminus \mathfrak{X}$, то способ продолжения поля v_0 на $Q_R \setminus \mathfrak{X}$ несуществен. Из отмеченных выше свойств векторного поля v_0 вытекает, что отображение $w_1: Q_R \rightarrow E_k$ ограничено, принадлежит классу $\Lambda(Q_R, E_k)$ и удовлетворяет оценке (7) при $\delta_1 = 1/(2k)$. Лемма доказана.

§ 2. Относительный индекс многозначного отображения

Через $S(V)$ обозначим совокупность ограниченных хеминепрерывных сверху многозначных отображений $F: V \rightarrow \text{Cv}(V^*)$, удовлетворяющих следующему условию:

(α) произвольная последовательность x_n , обладающая свойствами

$$x_n \rightarrow x, \quad \varliminf_{n \rightarrow \infty} s(x - x_n, F(x_n)) \geq 0,$$

сильно сходится в пространстве V .

Однозначные отображения близкого вида изучались многими авторами [1]–[5]. Примеры многозначных отображений класса $S(V)$ рассмотрены в [12], [15]. Без труда устанавливаются псевдомонотонность многозначного отображения класса $S(V)$. Если $F \in S(V)$, $A: V \rightarrow \text{Cv}(V^*)$ – псевдомонотонное отображение, то $F + A \in S(V)$.

Если не оговорено противное, далее $F \in S(V)$, а множество Q определено равенством (5). Элемент $x \in Q$ назовем *особой точкой* многозначного отображения F , если справедливо включение (1). С учетом приведенного выше

описания конуса $N_Q(x)$ получаем, что особые точки отображения F совпадают с решениями операторного включения

$$0 \in F(x) + \lambda \partial g(x), \quad \lambda \geq 0, \quad g(x) \leq 0, \quad \lambda g(x) = 0. \quad (10)$$

Множество $\mathfrak{N} \subset Q$ назовем *особым* для многозначного отображения F , если любой элемент x из $\mathfrak{N}$ есть особая точка F . Особое множество изолировано, если в некоторой его окрестности нет других особых точек отображения F .

ЛЕММА 6. *Пересечение множества особых точек многозначного отображения F класса $S(V)$ с любым шаром $R\mathcal{B}_V$ компактно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_n – бесконечная последовательность особых точек отображения F и $x_n \in Q_R = Q \cap R\mathcal{B}_V$. Тогда $0 \in F(x_n) + N_Q(x_n)$; в силу (10) существуют последовательности $x_n^* \in F(x_n)$, $y_n^* \in \partial g(x_n)$, $\lambda_n \geq 0$ такие, что

$$x_n^* + \lambda_n y_n^* = 0, \quad g(x_n) \leq 0, \quad \lambda_n g(x_n) = 0. \quad (11)$$

Будем считать, что $x_n \rightarrow x$, $x_n^* \rightharpoonup x^*$, $y_n^* \rightharpoonup y^*$.

Установим ограниченность последовательности λ_n . Не уменьшая общности, можно считать, что $g(x_n) = 0$ и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n^*\|_* = \beta$. Если $\beta > 0$, то ограниченность последовательности λ_n очевидна, поскольку $|\lambda_n| \|y_n^*\|_* = \|x_n^*\|_*$. В случае $\beta = 0$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, y_n^* \rangle = 0, \quad \varliminf_{n \rightarrow \infty} g^\circ(x_n; x - x_n) \geq 0.$$

Из последнего равенства, включения $g \in \Lambda_0(V)$ и условия (Π_g) вытекают соотношения $g(x) = 0$, $0 \in \partial g(x)$, что невозможно.

Итак, последовательность λ_n ограничена; можно считать, что $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Согласно (11)

$$\langle x_n - x, x_n^* \rangle + \lambda_n \langle x_n - x, y_n^* \rangle = 0.$$

Не уменьшая общности, предполагаем, что последовательности $\langle x_n - x, x_n^* \rangle$, $\langle x_n - x, y_n^* \rangle$ сходятся к числам c , d соответственно; тогда $c + \lambda d = 0$. В силу леммы 1 имеем $d \geq 0$, поэтому $c \leq 0$. Поскольку $F \in S(V)$, то из условия $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, x_n^* \rangle \leq 0$ вытекают сходимость $x_n \rightarrow x$, равенства $c = d = 0$ и соотношения (10), т. е. x – особая точка многозначного отображения F . Приведенное рассуждение влечет за собой требуемый результат. Лемма доказана.

Отображение F назовем *невыврожденным* на множестве $\mathfrak{M} \subset Q$, если $\mathfrak{M}$ не содержит особых точек F .

ЛЕММА 7. *Пусть отображение F не вырождено на замкнутом множестве $\mathfrak{M} \subset Q_R$, $0 < R < \infty$. Тогда существуют E из $\Gamma(V)$, ограниченное отображение w класса $\Lambda(Q_R, V)$ и постоянная $\delta > 0$, обладающие свойствами*

$$w(x) \in \overset{\circ}{\Pi}(x) \cap E \quad \forall x \in Q_R, \quad s(w(x) - x, F(x)) < -\delta \quad \forall x \in \mathfrak{M}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем исчерпывающую пространство V последовательность $E_n \in \Gamma(V)$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть натуральное число k , отображение w_1 класса $\Lambda(Q_R, E_k)$ и число $\delta_1 > 0$ такие же, как и в лемме 5. Положим

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ x \in V, d_V(x, \mathfrak{M}) \leq \frac{1}{n}, s(v - x, F(x)) \geq -\frac{1}{n} \quad \forall v \in n\mathcal{B}_V \cap E_n \cap \Pi(x) \right\}.$$

Установим, что $\mathfrak{M}_n = \emptyset$ при больших n . В предположении противного можно считать, что $\mathfrak{M}_n \neq \emptyset$ для любого n .

Пусть $x_n \in \mathfrak{M}_n$, $\mathfrak{B}_n = n\mathcal{B}_V \cap E_n \cap \Pi(x_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Согласно теоремам о минимаксе [11, гл. 6, § 2, теоремы 7, 8] найдется такой элемент x_n^* из $F(x_n)$, что

$$\min_{v \in \mathfrak{B}_n} \langle v - x_n, x_n^* \rangle = \min_{v \in \mathfrak{B}_n} s(v - x_n, F(x_n)) \geq -\frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\langle x_n, x_n^* \rangle \leq \langle v, x_n^* \rangle + \frac{1}{n} \quad \forall v \in \mathfrak{B}_n. \quad (13)$$

Последовательности x_n, x_n^* ограничены в пространствах V, V^* соответственно. Так как V – рефлексивное пространство, то можно считать, что $x_n \rightharpoonup x$, $x_n^* \rightharpoonup x^*$. Очевидно, что $x \in Q_R$. Оценка (13) влечет за собой неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x_n^* \rangle \leq \langle v, x^* \rangle \quad \forall v \in \mathfrak{B} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_n. \quad (14)$$

Здесь $\mathfrak{B}$ – верхний топологический предел последовательности множеств $\mathfrak{B}_n$, $n = 1, 2, \dots$, состоящий из тех элементов v , каждая окрестность которых пересекается с бесконечным числом множеств $\mathfrak{B}_n$.

В силу леммы 4 имеем $d_V(x, \Pi(x_n) \cap E_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует включение $x \in \mathfrak{B}$. Полагая $v = x$ в (13), получаем, что $x_n \xrightarrow{F} x$, поэтому $x_n \rightarrow x$, $x \in \mathfrak{M}$, $x^* \in F(x)$. Используя сильную сходимость последовательности x_n к x , нетрудно установить равенство $\mathfrak{B} = \Pi(x)$.

Неравенство (14) влечет за собой оценку $\langle x, x^* \rangle \leq \langle v, x^* \rangle$ для любого $v \in \Pi(x)$. Отсюда последовательно получаем

$$\langle w, x^* \rangle \geq 0 \quad \forall w \in T_Q(x), \quad -x^* \in N_Q(x), \quad 0 \in F(x) + N_Q(x).$$

Таким образом, $x \in \mathfrak{M}$, $0 \in F(x) + N_Q(x)$, но это противоречит невырожденности отображения F на множестве $\mathfrak{M}$.

Фиксируем натуральное число $n > k$ такое, что $\mathfrak{M}_n = \emptyset$. Положим

$$\mathfrak{R} = \left\{ x \in Q_R, \quad d_V(x, \mathfrak{M}) \leq \frac{1}{n} \right\}, \quad \delta = \frac{1}{2n}.$$

При подобном выборе числа n справедливы соотношения

$$\inf_{v \in n\mathcal{B}_V \cap E_n \cap \overset{\circ}{\Pi}(x)} s(v - x, F(x)) = \min_{v \in n\mathcal{B}_V \cap E_n \cap \Pi(x)} s(v - x, F(x)) < -\delta \quad \forall x \in \mathfrak{R}. \quad (15)$$

Оценка (15) аналогична оценке (9). Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 5, можно построить векторное поле w_0 класса $\Lambda(\mathfrak{R}, V)$, обладающее свойствами

$$w_0(x) \in n\mathcal{B}_V \cap E_n \cap \overset{\circ}{\Pi}(x), \quad s(w_0(x) - x, F(x)) < -\delta \quad \forall x \in \mathfrak{R}. \quad (16)$$

Пусть $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, определенная при доказательстве леммы 5. Введем векторное поле $w: Q_R \rightarrow V$, полагая

$$w(x) = \eta(3n d_V(x, \mathfrak{M})) w_0(x) + (1 - \eta(3n d_V(x, \mathfrak{M}))) w_1(x).$$

Поскольку $\eta(3n d_V(x, \mathfrak{M})) = 0$ для x из $Q_R \setminus \mathfrak{R}$, то способ продолжения поля w_0 на $Q_R \setminus \mathfrak{R}$ несуществен. Из отмеченных выше свойств векторных полей w_0, w_1 вытекает, что отображение w принадлежит классу $\Lambda(Q_R, V)$, ограничено и обладает свойствами (12) при $E = E_n, \delta = 1/(2n)$. Лемма доказана.

В множестве Q стандартным образом вводятся метрика $\rho(x, y) = \|x - y\|$ и относительная топология. Далее $\omega(Q)$ – совокупность ограниченных открытых (в относительной топологии) подмножеств Q ; $\text{int}_Q \mathcal{K}$ и $\partial_Q \mathcal{K}$ – относительные внутренность и граница множества $\mathcal{K} \subset Q$. Через $\omega(V)$ обозначим совокупность ограниченных открытых подмножеств пространства V .

ЛЕММА 8. Пусть $\Omega \in \omega(Q)$, G – окрестность множества Q . Тогда существует такое множество Ω' класса $\omega(V)$, что

$$\overline{\Omega'} \subset G, \quad \Omega' \cap Q = \Omega, \quad \partial \Omega' \cap Q = \partial_Q \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем в невырожденном случае, когда $\emptyset \neq \Omega \neq Q$. Пусть Ω_1 – окрестность множества Q , $\Omega_1 \subset G$, $W(z) = \{y \in \Omega_1, \|y - z\| \leq \frac{1}{2} d_V(z, Q \setminus \Omega)\}$. Нетрудно проверить (см. [10, § 33]), что объединение множеств $W(z), z \in \Omega$, можно взять в качестве искомого множества Ω' . В невырожденном случае лемма доказана; в остальных случаях построение упрощается. Лемма доказана.

Пусть $\Omega \subset \omega(Q)$ и отображение F класса $S(V)$ невырождено на $\partial_Q \Omega$. Пусть $\overline{\Omega} \subset Q_R$ при некотором $R < \infty$; согласно лемме 7 существуют E из $\Gamma(V)$ и ограниченное отображение w класса $\Lambda(Q_R, V)$ такие, что

$$w(x) \in \overset{\circ}{\Pi}(x) \cap E \quad \forall x \in Q_R, \quad \langle x - w(x), x^* \rangle > 0 \quad \forall x \in \partial_Q \Omega, \quad x^* \in F(x). \quad (17)$$

В силу (17) векторное поле $I - w: Q_R \rightarrow V$ конечномерно и образует острый угол с отображением F в каждой точке x из $\partial_Q \Omega$, т.е. $I - w$ – конечномерная остроугольная аппроксимация F . Следуя лемме 8, введем множество Ω' класса $\omega(V)$, для которого

$$\Omega' \cap Q = \Omega, \quad \partial \Omega' \cap Q = \partial_Q \Omega; \quad (18)$$

будем считать также, что

$$\overset{\circ}{\Pi}(x) \cap E \neq \emptyset \quad \forall x \in \Omega'. \quad (19)$$

Выполнения предположения (19) можно добиться, используя условие $\overset{\circ}{\Pi}(x) \cap E \neq \emptyset$ для любого $x \in Q_R$ и лемму 8. Из (19) вытекает [8] полунепрерывность снизу отображения $x \rightarrow \Pi(x) \cap E, x \in \overline{\Omega'}$. Это позволяет (см. [8], [16, гл. 4]) продолжить отображение w до непрерывного сечения многозначного отображения $\Pi(x) \cap E, x \in \overline{\Omega'}$.

Векторное поле $\Phi(x) = x - w(x), x \in \overline{\Omega'}$, непрерывно и конечномерно ($w(x) \in E \forall x \in \overline{\Omega'}$). Оно невырождено на границе $\partial \Omega'$ области Ω' . Действительно, для x из $\partial \Omega' \cap Q = \partial_Q \Omega$ это следует из (17); если же $x \in \partial \Omega' \setminus Q$, то $w(x) \in \Pi(x)$, а $x \notin \Pi(x)$. Поэтому определено вращение $\gamma(\Phi, \Omega')$ поля $\Phi = I - w$

на $\partial\Omega'$ [10]. Число $\gamma(\Phi, \Omega')$ не зависит от произвола в способе выбора пространства E , отображения w и области Ω' , подчиненных требованиям (17)–(19); это стандартным образом вытекает из свойств конечномерных векторных полей (см., например, [10, § 33]).

Число $\gamma(\Phi, \Omega')$ назовем *относительным индексом многозначного отображения F* и обозначим через $\text{ind}_Q(F, \Omega)$. Если Q – ограниченное подмножество пространства V , то нуждается в особом рассмотрении случай $\Omega = Q$. В данной ситуации $\partial_Q \Omega$ есть пустое множество; условие (17) сводится к предположению $w(x) \in \overset{\circ}{\Pi}(x) \cap E$ для любого $x \in Q_R$, в качестве Ω' можно взять некоторую окрестность множества Q ; число $\text{ind}_Q(F, Q)$ не зависит от выбора отображения F . В § 3 устанавливается, что $\text{ind}_Q(F, Q)$ совпадает с эйлеровой характеристикой множества Q .

Отметим некоторые свойства относительного индекса.

ТЕОРЕМА 1. *Если многозначное отображение F невырождено на замыкании $\bar{\Omega}$ области Ω класса $\omega(Q)$, то $\text{ind}_Q(F, \Omega) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 7 существует конечномерное векторное поле $\Phi = I - w$, образующее острый угол с отображением F на множестве $\bar{\Omega}$, в частности, $w(x) \neq x$ для любого $x \in \bar{\Omega}$. Продолжим поле w с сохранением непрерывности на множество $\bar{\Omega}'$, подчиненное требованиям (18), (19), так, чтобы $w(x) \in \Pi(x)$, $x \in \bar{\Omega}'$. Поле $I - w$ невырождено на $\bar{\Omega}'$, следовательно, $\text{ind}_Q(F, \Omega) = \gamma(\Phi, \Omega') = 0$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает принцип ненулевого индекса: если $\Omega \in \omega(Q)$ и $\text{ind}_Q(F, \Omega) \neq 0$, то существует принадлежащее Ω решение включения (1).

ТЕОРЕМА 2 (свойство аддитивности индекса). *Пусть Ω , Ω_i , $i = 1, \dots, m$, – области класса $\omega(Q)$, $\Omega_i \subset \Omega$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и отображение F невырожденно на $\bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$. Тогда*

$$\text{ind}_Q(F, \Omega) = \text{ind}_Q(F, \Omega_1) + \dots + \text{ind}_Q(F, \Omega_m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathfrak{M} = \bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$. Множество Ω принадлежит Q_R с некоторым $R > 0$, отображение F невырождено на $\mathfrak{M}$. Фиксируем E из $\Gamma(V)$ и ограниченное отображение w класса $\Lambda(Q_R, V)$ так, что справедливы соотношения (17). Сохраним обозначение w для непрерывного продолжения отображения w на множество $\bar{\Omega}'$ класса $\omega(V)$, $w(x) \in \Pi(x) \cap E$. Введем области Ω'_i , $i = 1, \dots, m$, подчиненные аналогичным (18), (19) требованиям

$$\Omega'_i \cap Q = \Omega_i, \quad \partial\Omega'_i \cap Q = \partial_Q \Omega_i, \quad \bar{\Omega}'_i \subset \bar{\Omega}', \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{ind}_Q(F, \Omega) &= \gamma(I - w, \Omega'), & \text{ind}_Q(F, \Omega_i) &= \gamma(I - w, \Omega'_i), \\ \text{ind}_Q(F, \Omega) &= \gamma(I - w, \Omega') = \sum_{i=1}^m \gamma(I - w, \Omega'_i) = \sum_{i=1}^m \text{ind}_Q(F, \Omega_i). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Если $\mathfrak{N}$ – ограниченное изолированное особое множество многозначного отображения F , то для ограниченных окрестностей O множества $\mathfrak{N}$ таких, что F невырождено на $O \setminus \mathfrak{N}$, $\text{ind}_Q(F, O)$ одинаковы. Такой индекс называется *индексом особого множества $\mathfrak{N}$ отображения F* и обозначается через $\text{ind}_Q(F, \mathfrak{N})$. Из леммы 6 и теоремы 2 вытекает

ТЕОРЕМА 3 (об алгебраическом числе особых множеств). *Пусть многозначное отображение F невырождено на границе $\partial_Q \Omega$ области Ω класса $\omega(Q)$, $\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_m$ – изолированные особые множества отображения F , принадлежащие области Ω . Тогда*

$$\text{ind}_Q(F, Q) = \text{ind}_Q(F, \mathfrak{N}_1) + \dots + \text{ind}_Q(F, \mathfrak{N}_m).$$

Теоремы 1–3 могут быть использованы для оценок сверху и снизу числа особых множеств отображения F . Основная возникающая здесь трудность связана с вычислением индексов $\text{ind}_Q(F, \Omega)$, $\text{ind}_Q(F, \mathfrak{N})$. В ряде ситуаций удобен переход от многозначного отображения F к более простому, основанный на свойстве гомотопической инвариантности индекса. Приведем формулировку этого свойства.

Обозначим через $S'(V)$ совокупность ограниченных хеминепрерывных отображений $F: V \times [0, 1] \rightarrow \text{Cv}(V^*)$, удовлетворяющих следующему условию:

(α') для каждой сходящейся последовательности t_n из $[0, 1]$, для произвольной последовательности x_n , слабо сходящейся к x , и из соотношения $\lim_{n \rightarrow \infty} s(x - x_n, F(x_n, t_n)) \geq 0$ следует сильная сходимость x_n к x .

Очевидно, что при каждом t из $[0, 1]$ отображение $F_t = F(\cdot, t): V \rightarrow \text{Cv}(V^*)$ принадлежит классу $S(V)$; в этом случае говорят, что семейство многозначных отображений F_t , $0 \leq t \leq 1$, соединяет многозначные отображения F_0, F_1 .

Назовем два многозначных отображения F_0, F_1 класса $S(V)$ *гомотопными на множестве $M \subset V$* , если существует соединяющее их семейство многозначных отображений F_t , $0 \leq t \leq 1$, такое, что F_t невырождено на M при любом t из отрезка $[0, 1]$.

ТЕОРЕМА 4 (гомотопическая инвариантность индекса). *Пусть многозначные отображения F_0, F_1 класса $S(V)$ гомотопны на относительной границе $\partial_Q \Omega$ области Ω класса $\omega(Q)$. Тогда*

$$\text{ind}_Q(F_0, \Omega) = \text{ind}_Q(F_1, \Omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на параметрическом варианте леммы 7 и свойстве гомотопической инвариантности вращения конечномерных векторных полей; схема рассуждений аналогична схеме, использованной в [3], [5], [7], [10].

§ 3. Бесконечномерная версия теоремы Пуанкаре–Хопфа

Напомним некоторые понятия алгебраической топологии [17], [18] и негладкого анализа [9], [11]. Пусть $(\mathfrak{X}, \rho)$ – метрическое пространство, $H_l(\mathfrak{X})$, $l = 0, 1, \dots$, – группы целочисленных гомологий с компактными носителями (см. [17, гл. 9], [18, гл. 10]), $b_l(\mathfrak{X})$ – ранг группы $H_l(\mathfrak{X})$, называемый *l -м числом Бетти* пространства $\mathfrak{X}$. Если $b_l(\mathfrak{X}) < \infty$ для любого l и $b_l(\mathfrak{X}) = 0$ при $l \geq l_0$, то число

$$\chi(\mathfrak{X}) = b_0(\mathfrak{X}) - b_1(\mathfrak{X}) + \dots + (-1)^l b_l(\mathfrak{X}) + \dots$$

называют *эйлеровой характеристикой* пространства $\mathfrak{R}$.

Семейство отображений $U_t: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$, образует непрерывную полугруппу, если $U_0 = I$, $U_t U_s = U_{t+s}$ при $t, s \in \mathbb{R}_+$ (полугрупповое свойство) и отображение $(x, t) \in U_t x$ непрерывно из $\mathfrak{R} \times \mathbb{R}_+$ в $\mathfrak{R}$ (свойство непрерывности). Множество $\mathcal{B}_0 \subset \mathfrak{R}$ притягивает [19] множество $\mathcal{B}_1 \subset \mathfrak{R}$, если $\theta_{\mathfrak{R}}(U_t \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [15]. Пусть $U_t: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$, – непрерывная полугруппа, удовлетворяющая условиям:

- 1) при каждом $t \geq 0$ отображение U_t есть инъекция;
- 2) множество $\mathfrak{U} = \bigcap_{t \geq 0} U_t \mathfrak{R}$ есть непустой компакт, притягивающий каждый непустой компакт $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{R}$.

Тогда группы гомологий пространств $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ изоморфны:

$$H_l(\mathfrak{R}) \simeq H_l(\mathfrak{U}), \quad l = 0, 1, \dots$$

Далее предложение 1 применяется в случае, когда $\mathfrak{R}$ – замкнутое подмножество банахова пространства, а непрерывная полугруппа $U_t: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ есть семейство операторов сдвига по траекториям дифференциального уравнения типа $x' = v(x)$, где векторное поле v направлено “внутрь” множества $\mathfrak{R}$. Существенную роль здесь играет понятие конуса гиперкасательных.

Пусть $\mathcal{D}$ – подмножество банахова пространства X . Элемент v из $X \setminus \{0\}$ называют *гиперкасательной к множеству $\mathcal{D}$ в точке $x \in \mathcal{D}$* , если существует такое $\varepsilon > 0$, что $y + tw \in \mathcal{D}$ для всех y из $(x + \varepsilon \mathcal{B}_X) \cap \mathcal{D}$, $w \in v + \varepsilon \mathcal{B}_X$, $0 < t < \varepsilon$. Множество $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}(x)$ всех таких гиперкасательных есть выпуклый открытый конус в пространстве X (см. [9, гл. 2]).

Очевидно, что $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}(x) = X$ для x из $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, поэтому интересен случай, когда x – граничная точка множества $\mathcal{D}$. Различные способы описания конуса $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}(x)$ рассмотрены в [9]. Если, например, $\varphi \in \Lambda(X)$, $\mathcal{D} = \{x \in X, \varphi(x) \leq 0\}$, $0 \notin \partial\varphi(x)$ при условии $\varphi(x) = 0$, то $\{v \in X, \varphi^0(x; v) < 0\} \subset \mathcal{K}_{\mathcal{D}}(x)$ для x из $\partial\mathcal{D} = \{x \in X, \varphi(x) = 0\}$; если же функционал φ регулярен в точке x , то $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}(x) = \{v \in X, \varphi^0(x; v) < 0\}$.

Множество $\mathcal{D} \subset X$ назовем *сильно липшицевым*, если $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}(x) \neq \emptyset$ для любого $x \in \mathcal{D}$. Например, множество Q , определенное равенством (5), есть сильно липшицево подмножество пространства V , и $\mathcal{K}_Q(x) = V$ при $x \in \overset{\circ}{Q}$, $\mathcal{K}_Q(x) = \{v \in V, g^0(x; v) < 0\}$ при $x \in \partial Q$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [14]. Пусть $\mathcal{D}$ – сильно липшицево компактное подмножество конечномерного евклидова пространства H , $v \in \Lambda(\mathcal{D}, H)$ и $v(x) \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}(x)$ для любого $x \in \mathcal{D}$. Тогда:

1) при любом z из $\mathcal{D}$ задача Коши $x' = v(x)$, $x(0) = z$ имеет единственное решение $x(t; z)$; это решение определено на всем луче $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$;

2) определяемое равенством $U_t z = x(t; z)$ семейство операторов сдвига $U_t: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, $t \in \mathbb{R}_+$, образует непрерывную полугруппу;

3) вращение $\gamma(-v, \overset{\circ}{\mathcal{D}})$ поля $-v$ на границе $\partial\mathcal{D}$ множества $\mathcal{D}$ совпадает с эйлеровой характеристикой множества $\mathcal{D}$: $\gamma(-v, \overset{\circ}{\mathcal{D}}) = X(\mathcal{D})$.

Применим предложения 1, 2 к вычислению индекса $\text{ind}_Q(F, Q)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть множество Q ограничено. Тогда:

1) существует такое пространство E из $\Gamma(V)$, что если $Y \in \Gamma(V)$ и $E \subset Y$, то группы гомологий пространств Q и $Q \cap Y$ изоморфны: $H_l(Q) = H_l(Q, Y)$, $l = 0, 1, \dots$;

2) имеет смысл эйлерова характеристика $X(Q)$ пространства Q и для любого многозначного отображения F класса $S(V)$ выполнено $\text{ind}_Q(F, Q) = X(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta_V(Q, 0) < R < \infty$. Согласно лемме 5 найдется пространство $E \in \Gamma(V)$, ограниченное отображение w_1 класса $\Lambda(Q, E)$ и число $\delta_1 > 0$ такие, что

$$g^\circ(x; w_1(x) - x) < -\delta_1, \quad x \in \partial Q. \quad (20)$$

Установим справедливость первого утверждения теоремы при подобном выборе пространства E .

Рассмотрим задачу Коши

$$x' = w_1(x) - x, \quad x(0) = z. \quad (21)$$

Фиксируем z из Q и положим $H = \text{Lin}\{E, z\}$, $\mathcal{D} = Q \cap H$, $v(x) = w_1(x) - x$, $x \in \mathcal{D}$. Считаем, что H наделено евклидовой структурой. Из (20) вытекает, что множество $\mathcal{D}$ и векторное поле v удовлетворяют условиям предложения 2. Отсюда следует существование единственного решения $x(t; z)$, $t \in \mathbb{R}_+$, задачи Коши (21), при этом $x(t; z) \in \mathcal{D}$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Ограниченность отображения w_1 и включение $w_1 \in \Lambda(Q, E)$ влекут непрерывность $x(t; z)$ по совокупности переменных $t \in \mathbb{R}_+$, $z \in Q$. Равенство $U_t z = x(t; z)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $z \in Q$, определяет непрерывную группу преобразований $U_t: Q \rightarrow Q$, оставляющую инвариантным не только множество Q , но и его сечения вида $Q \cap Y$, $Y \in \Gamma(V)$, $E \subset Y$.

Как и в [14], доказывается, что $\mathfrak{U} = \bigcap_{t \geq 0} U_t(Q \cap E)$ есть непустой компакт в пространстве E , $\mathfrak{U}$ – минимальный глобальный аттрактор [19] полугруппы $U_t: Q \rightarrow Q$ и ее сужения на $Q \cap Y$, $Y \in \Gamma(V)$, $E \subset Y$. В частности, компакт $\mathfrak{U}$ удовлетворяет условиям предложения 1 с $\mathfrak{X} = Q$ и $\mathfrak{X} = Q \cap Y$, поэтому $H_l(Q) \simeq H_l(\mathfrak{U}) \simeq H_l(Q \cap Y)$, $l = 0, 1, \dots$. Утверждение 1) теоремы доказано.

Поскольку $H_l(Q) \simeq H_l(Q \cap E)$, $l = 0, 1, \dots$, то определены и совпадают эйлеровы характеристики пространств Q и $\mathcal{D} = Q \cap E$. Согласно предложению 2 имеем

$$X(\mathcal{D}) = \gamma(-v, \overset{\circ}{\mathcal{D}}) = \gamma(I - w_1, \overset{\circ}{\mathcal{D}}),$$

но $\gamma(I - w_1, \overset{\circ}{\mathcal{D}}) = \text{ind}_Q(F, Q)$ в силу определения $\text{ind}_Q(F, Q)$ (см. § 2). Итак, имеют место равенства

$$X(Q) = X(\mathcal{D}) = \gamma(-v, \overset{\circ}{\mathcal{D}}) = \gamma(I - w_1, \overset{\circ}{\mathcal{D}}) = \text{ind}_Q(F, Q).$$

Теорема доказана.

В условиях теоремы 5 относительная граница $\partial_Q Q$ есть пустое множество. Аналог теоремы 5 верен и для области Ω с непустой относительной границей $\partial_Q \Omega$ для специальных многозначных отображений F . Вначале введем соответствующие понятия в конечномерном случае.

Пусть H – конечномерное евклидово пространство, C – замкнутое сильно липшицево подмножество пространства H , $\mathcal{D}$ – компактное подмножество множества C . Скажем, что отображение $\mathcal{F}_0: \partial_C \mathcal{D} \rightarrow \text{Cv}(H)$ удовлетворяет условию (N), если из соотношений $x \in \partial_C \mathcal{D}$, $u \in \mathcal{K}_C(x)$, $s(u, \mathcal{F}_0(x)) < 0$ вытекает включение $u \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}(x)$.

ЛЕММА 9. Пусть $v \in \Lambda(\mathcal{D}, H)$ и $v(x) \in \mathcal{K}_C(x)$ для любого $x \in \mathcal{D}$, $s(v(x), \mathcal{F}_0(x)) < 0$ для любого $x \in \partial_C \mathcal{D}$, где $\mathcal{F}_0: \partial_C \mathcal{D} \rightarrow \text{Cv}(H)$ – отображение, удовлетворяющее условию (N). Тогда множество $\mathcal{D}$ сильно липшицево и $v(x) \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}(x)$ для любого $x \in \mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in \partial_C \mathcal{D}$, то из предположений $v(x) \in \mathcal{K}_C(x)$, $x \in \mathcal{D}$, $s(v(x), \mathcal{F}_0(x)) < 0$ для любого $x \in \partial_C \mathcal{D}$ вытекает включение $v(x) \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}(x)$. Для x из $\partial \mathcal{D} \setminus \partial_C \mathcal{D}$ выполнено $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}(x) = \mathcal{K}_C(x)$, следовательно, $v(x) \in \mathcal{K}_C(x) = \mathcal{K}_{\mathcal{D}}(x)$.

Итак, $v(x) \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}(x)$ для любого x из $\partial \mathcal{D}$. Отсюда следует нужный результат. Лемма доказана.

Введем бесконечномерный вариант условия (N). Пусть $\Omega \in \omega(Q)$, $\Omega \subset Q_R$ при некотором $R < \infty$. Фиксируем пространство $E = E_k$, где E_k – пространство, фигурирующее в лемме 5. Если $Y \in \Gamma(V)$, $E \subset Y$, то множество $C = Q \cap Y$ замкнуто, а множество $\mathcal{D} = \bar{\Omega} \cap Y$ компактно. Наделим пространство Y евклидовой структурой; пусть $j_Y: Y \rightarrow V$ – оператор вложения пространства Y в пространство V , $j_Y^*: V^* \rightarrow Y$ – сопряженный к нему. В силу выбора пространства E конус $\mathcal{K}_C(x) \subset Y$ гиперкасательных к множеству C в каждой точке множества $\mathcal{D}$ непуст. Отображение F назовем *конормальным* области Ω , если F невырождено на $\partial_Q \Omega$ и для любого пространства $Y \in \Gamma(V)$, $Y \supset E$, отображение $F_Y = j_Y^* F j_Y$ и множества $C = Q \cap Y$, $\mathcal{D} = \bar{\Omega} \cap Y$ удовлетворяют условию (N). Так как $\partial_{Q \cap Y}(\bar{\Omega} \cap Y) \subset \partial_Q \Omega \cap Y \subset \partial_Q \Omega$, то условие конормальности относится лишь к точкам из $\partial_Q \Omega$. Оно автоматически выполнено, если $\partial_Q \Omega = \emptyset$. Условие конормальности естественно для потенциальных отображений; этот частный случай анализируется в § 4.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\Omega \in \omega(Q)$ и отображение F конормально области Ω . Тогда:

- 1) существует такое пространство E из $\Gamma(V)$, что если $Y \in \Gamma(V)$, $E \subset Y$, то группы гомологий пространств $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Omega} \cap Y$ изоморфны: $H_l(\bar{\Omega}) \simeq H_l(\bar{\Omega} \cap Y)$, $l = 0, 1, \dots$;
- 2) имеет смысл эйлерова характеристика $X(\bar{\Omega})$ пространства $\bar{\Omega}$ и $\text{ind}_Q(F, \Omega) = X(\bar{\Omega})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В вырожденном случае ($\Omega = Q \in \omega(Q)$) теорема следует из теоремы 5, поэтому можно считать, что $\partial_Q \Omega \neq \emptyset$. Так как отображение F невырождено на $\partial_Q \Omega$, то согласно лемме 7 существуют ограниченное отображение w класса $\Lambda(Q_R, V)$, $\bar{\Omega} \subset Q_R$, пространство $E \in \Gamma(V)$ и число $\delta > 0$ такие, что имеют место соотношения (12) с $\mathfrak{M} = \partial_Q \Omega$.

Рассмотрим задачу Коши

$$x' = w(x) - x, \quad x(0) = z. \quad (22)$$

Положим $H = \text{Lin}\{E, z\}$, $\mathcal{D} = \bar{\Omega} \cap H$, $v(x) = w(x) - x$, $x \in \mathcal{D}$. Из (12), (14) вытекает существование решения $x(t; z)$ задачи Коши (22), не выходящего за

пределы множества $\mathcal{D}$. Равенство $U_t z = x(t; z)$ определяет непрерывную подгруппу преобразований U_t , оставляющую инвариантным не только множество $\bar{\Omega}$, но и его конечномерные сечения вида $\bar{\Omega} \cap Y$, $Y \in \Gamma(V)$, $E \subset Y$. Для завершения доказательства следует повторить рассуждения, примененные при доказательстве теоремы 5 (с заменой Q на $\bar{\Omega}$). Это и приводит к требуемому утверждению. Теорема доказана.

Теоремы 5, 6 представляют бесконечномерные относительные многозначные варианты теоремы Пуанкаре–Хопфа (см., например, [20]). Они новы и для однозначных отображений конечномерных пространств.

§ 4. Гомологические характеристики липшицевых функционалов

Через $\Lambda_1(V)$ далее обозначаем часть класса $\Lambda(V)$, состоящую из тех функционалов f , для которых многозначное отображение $F(x) = \partial f(x)$, $x \in V$, принадлежит классу $S(V)$. Функционал f назовем *потенциалом отображения* F , особые точки F – *критическими точками* функционала f , неособые точки F – *регулярными точками* f . Таким образом, x – критическая точка функционала f , если найдется такое число λ , что

$$0 \in \partial f(x) + \lambda \partial g(x), \quad \lambda \geq 0, \quad g(x) \leq 0, \quad \lambda g(x) = 0.$$

Каждая точка локального минимума функционала f на множестве Q является критической [9, гл. 6], поэтому любая окрестность регулярной точки z содержит точку y из Q , для которой $f(y) < f(z)$. Если K_f – множество критических точек функционала f , то числа из $f(K_f)$ называются *критическими значениями* f , а числа из $\mathbb{R} \setminus f(K_f)$ – *регулярными значениями* f . Очевидно включение $\Lambda_1(V) \subset \Lambda_0(V)$.

В настоящем параграфе f – функционал класса $\Lambda_1(V)$,

$$M_b = \{x \in Q, f(x) \leq b\}, \quad M_{a,b} = f^{-1}([a, b]) = \{x \in Q, a \leq f(x) \leq b\},$$

аналогичным образом определяются множества $f^{-1}((a, b))$, $f^{-1}(c)$ и т. д. Если b – регулярное значение функционала f и $f(x) = b$ для некоторого x из Q , то найдется такой элемент v из $\mathcal{K}_Q(x)$, что $s(v, \partial f(x)) = f^0(x; v) < 0$. Отсюда следует [9, гл. 2], что $v \in \mathcal{K}_{\bar{\Omega}}(x)$, где $\Omega = \{x \in Q, f(x) < b\}$. Отображение $F = \partial f$ конормально области Ω . Отметим равенства $\bar{\Omega} = M_b$, $\Omega = \text{int}_Q M_b$. Из проведенных рассуждений и теоремы 6 вытекает

ТЕОРЕМА 7. Пусть b – регулярное значение функционала f , $M_b \neq \emptyset$ и множество M_b ограничено. Тогда:

- 1) существует такое пространство E класса $\Gamma(V)$, что если $Y \in \Gamma(V)$, $E \subset Y$, то $H_l(M_b) \simeq H_l(M_b \cap Y)$, $l = 0, 1, \dots$;
- 2) имеет смысл эйлерова характеристика $X(M_b)$ пространства M_b и $\text{ind}_Q(\partial f, \Omega) = X(M_b)$.

Теорема 7 означает совпадение гомологических характеристик функционала f и его сужений на конечномерные пространства. Она аналогична теоремам о стабилизации характеристик Морса при конечномерных аппроксимациях функционала [4, гл. 5].

Для изучения топологических характеристик функционала f будут использоваться непрерывные деформации, при конструировании которых полезно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $E \in \Gamma(V)$, поле w принадлежит классу $\Lambda(M_{a,b}, E)$ и удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} w(x) - x &\in \mathcal{K}_Q(x), & x &\in f^{-1}((a, b)), \\ f^0(x; w(x) - x) &< -\delta, & x &\in M_{a,b}, \end{aligned}$$

где $-\infty < a < b < +\infty$, $\delta > 0$. Тогда:

1) при любом z из $f^{-1}((a, b))$ задача Коши (22) имеет единственное решение $x(t; z)$, $0 \leq t \leq \tau(z)$, функция $f(x(t; z))$ строго убывает на отрезке $[0, \tau(z)]$ и $f(x(\tau(z); z)) = a$;

2) функции $\tau(z)$ и $x(t; z)$ могут быть продолжены по непрерывности на множества $M_{a,b}$ и $\{(t, z) : z \in M_{a,b}, 0 \leq t \leq \tau(z)\}$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 7 работы [15].

ТЕОРЕМА 8. Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, множество $M_{a,b}$ непусто и ограничено, $M_{a,b} \cap K_f = \emptyset$. Тогда:

- 1) множество M_a есть деформационный ретракт множества M_b ;
- 2) группы гомологий пространств M_a, M_b изоморфны:

$$H_l(M_a) \simeq H_l(M_b), \quad l = 0, 1, \dots; \quad (23)$$

- 3) если при любом $b > a$ множество $M_{a,b}$ ограничено и $M_{a,b} \cap K_f = \emptyset$, то

$$H_l(M_a) \simeq H_l(Q), \quad l = 0, 1, \dots. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы отображение ∂f невырождено на ограниченном замкнутом множестве $M_{a,b}$. В силу леммы 7 существуют E из $\Gamma(V)$, ограниченное отображение w класса $\Lambda(M_{a,b}, E)$ и постоянная $\delta > 0$ такие, что выполнены условия предложения 3. Согласно предложению 3 существуют функции $\tau(z)$, $x(t; z)$, обладающие свойствами 1) и 2). Определим на $M_b \times [0, 1]$ отображение $\psi: M_b \times [0, 1] \rightarrow Q$ равенством

$$\psi(z, \lambda) = \begin{cases} x(\lambda\tau(z); z) & \text{при } z \in M_{a,b}, \\ z & \text{при } z \in M_a. \end{cases}$$

Отображение ψ непрерывно; $\psi(z, 0) = z$ для любого $z \in M_b$; $\psi(z, \lambda) = z$ для любого $z \in M_a$, $0 \leq \lambda \leq 1$; $\psi(z, 1) \in M_a$ для любого $z \in M_b$. Эти соотношения без труда выводятся из предложения 3. Они означают, что M_a есть деформационный ретракт M_b . Утверждение 1) теоремы доказано.

Соотношение (23) следует из утверждения 1). Для доказательства (24) фиксируем целое число $l \geq 0$. Если $a \leq s \leq t < \infty$, то в силу уже доказанного множество M_s есть деформационный ретракт множества M_t . Порождаемый вложением $i_s^t: M_s \rightarrow M_t$ гомоморфизм $(i_s^t)_*: H_l(M_s) \rightarrow H_l(M_t)$ является изоморфизмом. Система $\{H_l(M_s), (i_s^t)_*\}$ образует прямой спектр на луче $[a, \infty)$. Из определения групп гомологий с компактными носителями [17], [18] вытекает изоморфизм (24). Теорема доказана.

Ниже используется следующее дополнение к лемме 7.

ЛЕММА 10. Пусть $\mathfrak{N}$ – множество особых точек отображения F класса $S(V)$, $\mathfrak{N}_R = \mathfrak{N} \cap Q_R$, $0 < R < \infty$. Тогда существуют последовательности E_n из $\Gamma(V)$, $\delta_n > 0$ и отображение w класса $\Lambda(Q_R \setminus \mathfrak{N}_R, V)$, обладающие свойствами

$$w(x) \in \overset{\circ}{\Pi}(x) \cap E_n, \quad s(w(x) - x, F(x)) < -\delta_n, \quad x \in Q_R, \quad \theta_V(x, \mathfrak{N}_R) \geq \frac{1}{n}. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_0(x) = \theta_V(x, \mathfrak{N}_R) / \theta_V(Q_R, \mathfrak{N}_R)$, $x \in Q_R$. Очевидно, что $f_0 \in \Lambda(Q_R)$, $0 \leq f_0(x) \leq 1$, $x \in Q_R$, $\mathfrak{N}_R = \{x \in Q_R, f_0(x) = 0\}$. Пусть $\alpha_n = 2^{-n}$, $\beta_n = 3\alpha_n$, $n = 1, 2, \dots$. Построим систему функций φ_n класса $\Lambda(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $\varphi_n(t) \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) = 1$, $0 < t \leq 1$;
- 2) $\{t: \varphi_n(t) > 0\} = (p_n, q_n)$, $\alpha_n < p_n < q_n < \beta_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Система интервалов (p_n, q_n) , $n = 1, 2, \dots$, образует открытое покрытие промежутка $(0, 1]$ кратности 2.

Положим $\mathfrak{M}_n = \{x \in Q_R, \alpha_n \leq f_0(x) \leq \beta_n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Множество $\mathfrak{M}_n$ ограничено, замкнуто и не содержит особых точек отображения F . Согласно лемме 7 существуют E'_n из $\Gamma(V)$, поле w_n класса $\Lambda(Q_R, V)$ и постоянная $\delta'_n > 0$ такие, что

$$w_n(x) \in \overset{\circ}{\Pi}(x) \cap E'_n \quad \forall x \in Q_R, \quad s(w_n(x) - x, F(x)) < -\delta'_n \quad \forall x \in \mathfrak{M}_n. \quad (26)$$

Рассмотрим поле

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(f_0(x)) w_n(x), \quad x \in Q_R.$$

Его сужение на $Q_R \setminus \mathfrak{N}_R$ принадлежит классу $\Lambda(Q_R \setminus \mathfrak{N}_R, V)$. Соотношения (26) влекут за собой выполнение свойств (25) при подходящем выборе последовательностей E_n , δ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Лемма доказана.

Задачу минимизации

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in Q \quad (27)$$

называют [21] *корректной*, если:

- 1) $a = \inf\{f(x), x \in Q\} > -\infty$ и $M_a \neq \emptyset$;
- 2) любая минимизирующая функционал f последовательность сходится ко множеству M_a , т. е. если $x_n \in Q$, $f(x_n) \rightarrow a$, то $d_V(x_n, M_a) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Корректность задачи (27) влечет равенство

$$\lim_{t \rightarrow a+0} \theta_V(M_t, M_a) = 0. \quad (28)$$

ТЕОРЕМА 9. Пусть при некотором $b > \inf\{f(x), x \in Q\}$ множество M_b ограничено. Тогда задача (27) корректна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество M_b есть непустой компакт в слабой топологии пространства V . Конечность числа $a = \inf\{f(x), x \in Q\}$ и непустота множества M_a вытекают из теоремы Вейерштрасса (см., например, [6], [21]).

Пусть $x_n \in Q$ и $f(x_n) \rightarrow a$. Без ограничения общности можно считать, что $a < f(x_n) < b$ и $x_n \rightarrow x$. Так как функционал f слабо полунепрерывен снизу, то $f(x) \leq a$, следовательно, $f(x) = a$, $x \in M_a$. Последовательность $(x_n + x)/2$ также слабо сходится к x , поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x_n + x}{2}\right) \geq a = f(x).$$

В силу формулы конечных приращений [9, гл. 2] справедливо равенство

$$f(x_n) - f\left(\frac{x_n + x}{2}\right) = 2^{-1} \langle x_n - x, z_n^* \rangle,$$

где $z_n^* \in \partial f(z_n)$, $z_n = x + \theta_n(x_n - x)$, $1/2 < \theta_n < 1$.

Объединяя полученные соотношения, приходим к неравенствам

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle z_n - x, z_n^* \rangle \leq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^0(z_n; x - z_n) \geq 0.$$

Поскольку $f \in \Lambda_1(V)$, то последнее неравенство влечет сильную сходимость последовательностей x_n, z_n к x . Очевидно, что $d_V(x_n, M_a) \leq \|x_n - x\|$, следовательно, $d_V(x_n, M_a) \rightarrow 0$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 10. Пусть выполнены условия теоремы 9 и промежуток $(a, b]$ не содержит критических значений функционала f . Тогда справедливо соотношение (23) и $\text{ind}_Q(\partial f, M_a) = X(M_a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем число $R > \theta_V(M_b, 0)$ и положим, что $\mathfrak{N}_R = K_f \cap Q_R$, $c = (a + b)/2$. Следуя лемме 10, построим отображение w класса $\Lambda(Q_R \setminus \mathfrak{N}_R, V)$, обладающее свойствами (25) с $F = \partial f$. Из (25) вытекает оценка

$$f^0(x; w(x) - x) \leq -h(f(x)), \quad x \in M_c \setminus M_a, \quad (29)$$

где h – возрастающая и положительная на $(a, c]$ функция.

Векторное поле $v_0(x)$, совпадающее с $w(x) - x$ на $M_c \setminus M_a$ и равное нулю на M_a , может не входить в класс $\Lambda(M_c, V)$. Однако, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3 работы [14], можно убедиться в том, что при любом z из M_c задача Коши

$$x' = v_0(x), \quad x(0) = z \quad (30)$$

имеет единственное решение $x(t; z)$, существующее при всех $t \geq 0$; определяемое равенством $U_t z = x(t; z)$ семейство отображений $U_t: M_c \rightarrow M_c$ образует непрерывную полугруппу, оставляющую инвариантными множества M_d , $a \leq d \leq c$.

При любом z из $M_c \setminus M_a$ верхняя правая производная функции $f(U_t z)$ удовлетворяет вытекающему из (29), (30) неравенству $(f(U_t z))'_t \leq -h(U_t z)$, непосредственным следствием которого является равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(U_t z) = a, \quad (31)$$

равномерное относительно z из $M_c \setminus M_a$. Объединяя (28), (31), получаем соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_V(U_t(M_c), M_a) = 0,$$

означающее, что M_a есть минимальный глобальный аттрактор непрерывной полугруппы $U_t: M_c \rightarrow M_c$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Компакт $\mathfrak{U} = M_a$ и пространство $\mathfrak{R} = M_c$ удовлетворяют условиям предложения 1. Теперь изоморфизм (23) следует из соотношения $H_l(M_b) \simeq H_l(M_c) \simeq H_l(M_a)$, $l = 0, 1, \dots$. В частности, определены и равны между собой эйлеровы характеристики $X(M_a)$, $X(M_b)$ множеств M_a , M_b . Так как отображение ∂f невырождено на $M_b \setminus M_a$, то

$$\text{ind}_Q(\partial f, M_a) = \text{ind}_Q(\partial f, M_b) = X(M_b) = X(M_a).$$

Теорема доказана.

§ 5. Следствия и замечания

Включение (1) возникает в аналитической статике (принцип виртуальных мощностей), в экстремальных задачах (необходимые условия минимума), теории игр и математической экономике. Предложенная выше схема позволяет полнее исследовать точки покоя механических систем с односторонними связями; большое число задач, относящихся к “многозначной механике”, рассмотрено в [22]. Топологические характеристики экстремалей полезны для оценок числа решений вариационных и краевых задач, возникающих в нелинейной теории оболочек, химической кинетике и теории свехпроводимости Гинзбурга–Ландау (см., например, [5, гл. 5], [23], [24]). Для приложений существенно, что интегральные функционалы на пространствах Соболева в естественных условиях удовлетворяют предположениям из § 4; соответствующие примеры можно найти в [1]–[6], [22]–[25]. В сочетании с установленными выше результатами это дает возможность получить информацию о топологическом индексе экстремалей вариационных задач с негладкими интегрантами, исследовать вопрос о характере точек экстремума и т. п.

Рассмотрим два примера иллюстративного характера. Пусть $\mathfrak{N}$ – компакт в пространстве V , $f_1(x) = d_V^2(x, \mathfrak{N})$, $x \in V$. Если V и V^* – локально равномерно выпуклые пространства, то $f_1 \in \Lambda_1(V)$ [12]. Легко указать компакт $\mathfrak{N}$, для которого соответствующий функционал f_1 не является ни гладким, ни выпуклым.

В качестве второго примера рассмотрим на гильбертовом пространстве V функционал $f_2(x) = d_V^2(x, \mathcal{B}_V) = (\|x\| - 1)_+^2$. Как нетрудно видеть, $f_2: V \rightarrow \mathbb{R}$ – выпуклый функционал, оператор $f'_2: V \rightarrow V^* = V$ непрерывен и монотонен, в частности, $f_2 \in \Lambda_0(V)$. Множество критических точек функционала f_2 совпадает с шаром $\mathcal{B}_V$. Включение $f_2 \in \Lambda_1(V)$ влечет [12] компактность шара $\mathcal{B}_V$, а следовательно, конечномерность пространства V . Приведенный пример показывает, что для бесконечномерного пространства V включение $\Lambda_1(V) \subset \Lambda_0(V)$ является строгим.

Приведем некоторые следствия полученных выше результатов.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть Q – ограниченное подмножество пространства V и $X(Q) \neq 0$. Тогда для любого отображения F класса $S(V)$ включение (1) имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно теореме 5 $\text{ind}_Q(F, Q) = X(Q)$; требуемый результат вытекает из принципа ненулевого индекса.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть отображение F класса $S(V)$ конормально области $\Omega \in \omega(Q)$. Если $X(\bar{\Omega}) \neq 0$, то включение (1) имеет принадлежащее Ω решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить принцип ненулевого индекса и теорему 6.

Столь же просто из теорем 3, 6 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $F \in S(V)$ и F конормально области Ω класса $\omega(Q)$, $\mathfrak{N}$ – изолированное особое множество отображения F , $\mathfrak{N} \subset \Omega$ и $\text{ind}_Q(F, \mathfrak{N}) \neq X(Q)$. Тогда включение (1) имеет принадлежащее $\Omega \setminus \mathfrak{N}$ решение.

В следствиях 3–5 потенциальность отображения F не предполагается. Перейдем теперь к следствиям теорем 7–10; ниже $f \in \Lambda_1(V)$, $M_t = \{x \in Q, f(x) \leq t\}$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть при некотором $b > a = \inf\{f(x), x \in Q\}$ множество M_b ограничено. Тогда:

- 1) включение (1) имеет решение, реализующее абсолютный минимум функционала f на множестве Q ;
- 2) если группы $H_l(M_a)$ и $H_l(M_b)$ неизоморфны при некотором l , то промежуток $(a, b]$ содержит критическое значение функционала f ;
- 3) если эйлерова характеристика множества M_a не определена, то найдется последовательность c_n критических значений функционала f , $a < c_n \leq b$, $c_n \rightarrow a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на теоремах 9, 10.

Функционал f назовем *растущим*, если при любом $t < \infty$ множество M_t ограничено.

СЛЕДСТВИЕ 7. Если f – растущий функционал и множество K_f его критических точек ограничено, то $\text{ind}_Q(\partial f, \overset{\circ}{Q}_R) = X(Q)$ при достаточно больших R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на теореме 8.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть f – растущий функционал. Тогда:

- 1) если группы $H_l(M_c)$ и $H_l(Q)$ неизоморфны при некоторых $c \in \mathbb{R}$, $l = 0, 1, \dots$, то луч $[c, \infty)$ содержит критическое значение функционала f ;
- 2) если эйлерова характеристика множества Q не определена, то найдется бесконечно большая последовательность критических значений функционала f ; в частности, существует неограниченная в пространстве V последовательность решений включения (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на теореме 8.

Наметим пути развития предшествующих результатов. Основные утверждения сохраняются для многозначного отображения F , определенного лишь на множестве Q . Более перспективным представляется перенос ряда положений теории Морса на негладкие функционалы; применительно к функционалам на конечно-дефектных многообразиях соответствующая версия теории Морса развита в [25].

Сформулируем вкратце элементы новизны работы. Во-первых, это отказ от требования выпуклости множества Q ; во-вторых, введение новой характеристики многозначных отображений; в-третьих, принципиальная возможность оценки числа решений включения (1); заслуживает упоминания вариант теоремы Пуанкаре–Хопфа и результаты о стабилизации гомологических характеристик функционалов при конечномерных аппроксимациях.

В заключение автор выражает благодарность рецензенту за ряд замечаний, способствующих улучшению первоначального варианта статьи.

Список литературы

1. С. И. Похожаев, “О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами”, *Функц. анализ и его прил.*, **1:3** (1967), 66–73; англ. пер.: S. I. Pokhozhaev, “Solvability of nonlinear equations with odd operators”, *Funct. Anal. Appl.*, **1:3** (1967), 227–233.
2. F. E. Browder, “Pseudo-monotone operators and the direct method of the calculus of variations”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **38:4** (1970), 268–277.
3. Ж. Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с франц.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
4. И. В. Скрышник, *Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка*, Наукова думка, Киев, 1973.
5. Н. А. Бобылев, С. В. Емельянов, С. Г. Коровин, *Геометрические методы в вариационных задачах*, Магистр, М., 1998.
6. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1974.
7. Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, “Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений”, *УМН*, **35:1** (1980), 59–126; англ. пер.: Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii, “Topological methods in the fixed-point theory of multi-valued maps”, *Russian Math. Surveys*, **35:1** (1980), 65–143.
8. Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений*, Изд-во Воронежского ун-та, Воронеж, 1986.
9. Ф. Кларк, *Оптимизация и негладкий анализ*, Наука, М., 1988; пер. с англ.: F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, Wiley, New York, 1983.
10. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, *Геометрические методы нелинейного анализа*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1975.
11. Ж. П. Обен, И. Экланд, *Прикладной нелинейный анализ*, Мир, М., 1988; пер. с англ.: J.-P. Aubin, I. Ekeland, *Applied nonlinear analysis*, Pure and Applied Mathematics, Wiley, New York, 1984.
12. В. С. Климов, Н. В. Сенчакова, “Об относительном вращении многозначных потенциальных векторных полей”, *Матем. сб.*, **182:10** (1991), 1393–1407; англ. пер.: V. S. Klimov, N. V. Senchakova, “On the relative rotation of multivalued potential vector fields”, *Math. USSR-Sb.*, **74:1** (1993), 131–144.
13. В. С. Климов, “Нетривиальные решения уравнений с потенциальными операторами”, *Сиб. матем. журн.*, **21:6** (1980), 28–45; англ. пер.: V. S. Klimov, “Nontrivial solutions of equations with potential operators”, *Siberian Math. J.*, **21:6** (1981), 773–786.
14. В. С. Климов, “О топологических характеристиках негладких функционалов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62:5** (1998), 117–134; англ. пер.: V. S. Klimov, “Topological characteristics of non-smooth functionals”, *Izv. Math.*, **62:5** (1998), 969–984.

15. В. С. Климов, “Бесконечномерный вариант теоремы Пуанкаре–Хопфа и гомологические характеристики функционалов”, *Матем. сб.*, **192**:1 (2001), 51–66; англ. пер.: V. S. Klimov, “Infinite-dimensional version of the Poincaré–Hopf theorem and homological characteristics of functionals”, *Sb. Math.*, **192** (2001), 49–64.
16. В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, Учебное пособие, Изд-во МГУ, М., 1988.
17. У. Масси, *Теория гомологий и когомологий. Подход, основанный на применении коцепей Александера–Спеньера*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: W. S. Massey, *Homology and cohomology theory. An approach based on Alexander–Spanier cochains*, Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **46**, Marcel Dekker, New York–Basel, 1978.
18. Н. Стинрод, С. Эйленберг, *Основания алгебраической топологии*, ИЛ, М., 1958; пер. с англ.: S. Eilenberg, N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton Mathematical Series, **15**, Princeton University Press, Princeton, 1952.
19. О. А. Ладыженская, “О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными”, *УМН*, **42**:6 (1987), 26–60; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, “On the determination of minimal global attractors for the Navier–Stokes and other partial differential equations”, *Russian Math. Surveys*, **42**:6 (1987), 27–73.
20. В. В. Прасолов, *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, Изд-во МЦНМО, М., 2004.
21. Ф. П. Васильев, *Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация*, Наука, М., 1981.
22. П. Панагиотопулос, *Неравенства в механике и их приложениях. Выпуклые и невыпуклые функции энергии*, Мир, М., 1989; пер. с англ.: P. D. Panagiotopoulos, *Inequality problems in mechanics and applications. Convex and nonconvex energy functions*, Birkhäuser, Boston, MA, 1985.
23. В. С. Климов, “Об оценках снизу числа решений некоторых краевых и вариационных задач”, *Дифф. уравн.*, **20**:3 (1984), 481–489; англ. пер.: V. S. Klimov, “Lower bounds for the number of solutions of some boundary-value problems”, *Differ. Equ.*, **20**:3 (1984), 373–379.
24. В. С. Климов, “О числе решений краевых и вариационных задач нелинейной теории оболочек”, *Докл. АН СССР*, **247**:1 (1979), 57–60; англ. пер.: V. S. Klimov, “The number of solutions to boundary value problems of the nonlinear theory of shells”, *Soviet Phys. Dokl.*, **24**:7 (1979), 580–582.
25. В. С. Климов, “Бесконечномерная версия теории Морса для липшицевых функционалов”, *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 105–122; англ. пер.: V. S. Klimov, “Infinite-dimensional version of Morse theory for Lipschitz functionals”, *Sb. Math.*, **193**:6 (2002), 889–906.

В. С. Климов (V. S. Klimov)
 Ярославский государственный университет
 им. П. Г. Демидова
E-mail: klimov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию
 14.04.2005
 29.12.2006