Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Вещественные алгебраические многообразия и кобордизмы, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 3, 141–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/im583>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:56:56

УДК 512.7

В. А. Краснов

Вещественные алгебраические многообразия и кобордизмы

Рассмотрены два класса неориентированных кобордизмов, которые получаются из проективного морфизма гладких вещественных квази-проективных алгебраических многообразий. Первый класс кобордизмов индуцирован отображением комплексных точек многообразий, а второй класс кобордизмов индуцирован отображением вещественных точек. Найдены и доказаны соотношения между этими двумя классами кобордизмов. В частности, показано какие ограничения на первый класс кобордизмов накладывает равенство нулю второго класса кобордизмов.

Библиография: 22 наименования.

Введение

Далее через K обозначается или поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, или поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Через $\mathbf{Var}_K$ будем обозначать категорию гладких квазипроективных K -схем, все компоненты которых имеют одинаковые размерности. Объекты категории $\mathbf{Var}_K$ будем называть *гладкими вещественными (комплексными) алгебраическими многообразиями*, если $K = \mathbb{R}$ ($K = \mathbb{C}$). Заметим, что в отличие от обычного определения алгебраического многообразия (см., например, [1]) мы не требуем неприводимости схемы. Для этого имеются две причины. Во-первых, неприводимая $\mathbb{R}$ -схема после комплексификации может стать приводимой. Во-вторых, в теории кобордизмов неприводимость становится неудобным ограничением, так как приходится производить операцию несвязного объединения многообразий.

Пусть $X \in \mathbf{Var}_{\mathbb{R}}$, т.е. X – гладкое вещественное алгебраическое многообразие. Тогда определены комплексные ($\mathbb{C}$ -рациональные) и вещественные ($\mathbb{R}$ -рациональные) точки многообразия X . Напомним, что $\mathbb{C}$ -рациональная точка многообразия X – это морфизм $\mathbb{R}$ -схем $\mathrm{Spec} \mathbb{C} \rightarrow X$, а $\mathbb{R}$ -рациональная точка многообразия X – это морфизм $\mathbb{R}$ -схем $\mathrm{Spec} \mathbb{R} \rightarrow X$. Если $\dim_{\mathbb{R}} X = n$, то множество комплексных точек $X(\mathbb{C})$ многообразия X является n -мерным комплексно-аналитическим многообразием, а множество вещественных точек $X(\mathbb{R})$ является n -мерным вещественно-аналитическим многообразием или пустым множеством. Морфизм $\mathrm{Spec} \mathbb{C} \rightarrow \mathrm{Spec} \mathbb{R}$ задает вложение $X(\mathbb{R}) \subset X(\mathbb{C})$. Если $G = \{1, g\}$ – группа Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, то она действует на множестве $X(\mathbb{C})$, причем инволюция комплексного сопряжения $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ является антиголоморфной инволюцией. Множество вещественных точек $X(\mathbb{R})$ состоит из неподвижных точек этой инволюции. Пусть $\bar{X} = X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ – комплексификация многообразия X ; тогда проекция $\bar{X} \rightarrow X$ индуцирует биголоморфное

отображение $\overline{X}(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$, поэтому множества $\overline{X}(\mathbb{C})$, $X(\mathbb{C})$ мы не будем различать.

Если $F: Y \rightarrow X$ – проективный морфизм в категории $\mathbf{Var}_{\mathbb{R}}$, то из него получается собственное голоморфное отображение $F(\mathbb{C}): Y(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ комплексно-аналитических многообразий, а также собственное вещественно-аналитическое отображение $F(\mathbb{R}): Y(\mathbb{R}) \rightarrow X(\mathbb{R})$ вещественно-аналитических многообразий. Будем предполагать, что множество $X(\mathbb{R})$ непустое. Согласно геометрическому определению неориентированных кобордизмов дифференцируемого многообразия (см., например, [2], [3], а также п. 1.1) можно рассматривать классы кобордизмов отображений $F(\mathbb{C})$, $F(\mathbb{R})$:

$$[F(\mathbb{C})] \in \mathfrak{N}^{2n-2m}(X(\mathbb{C})), \quad [F(\mathbb{R})] \in \mathfrak{N}^{n-m}(X(\mathbb{R})),$$

где $n = \dim X$, $m = \dim Y$. (Заметим, что если множество $Y(\mathbb{R})$ пустое, то класс кобордизмов $[F(\mathbb{R})] \in \mathfrak{N}^{n-m}(X(\mathbb{R}))$ по определению считается равным нулю.) Настоящая работа посвящена нахождению и доказательству соотношений между этими двумя классами кобордизмов.

Если $X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}$, то $X(\mathbb{C}) = X(\mathbb{R}) = \operatorname{pt}$ – одноточечное пространство. Поэтому имеем равенства $\mathfrak{N}^{2m}(X(\mathbb{C})) = \mathfrak{N}^{2m}$, $\mathfrak{N}^m(X(\mathbb{R})) = \mathfrak{N}^m$, где $\mathfrak{N}^*$ – кольцо неориентированных кобордизмов Тома (см. [4]). Поскольку в $\mathfrak{N}^{2m}$ справедливо равенство (см. [5, теорема 24.4])

$$[Y(\mathbb{C})] = [Y(\mathbb{R}) \times Y(\mathbb{R})],$$

где $[Y(\mathbb{C})] \in \mathfrak{N}^{2m}$, $[Y(\mathbb{R}) \times Y(\mathbb{R})] \in \mathfrak{N}^{2m}$ – классы кобордизмов компактных многообразий $Y(\mathbb{C})$, $Y(\mathbb{R}) \times Y(\mathbb{R})$, то в случае $X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}$ получаем соотношение

$$[F(\mathbb{C})] = [F(\mathbb{R})]^2. \quad (0.1)$$

Чтобы сформулировать обобщение соотношения (0.1) для произвольного гладкого вещественного алгебраического многообразия X , обозначим через $i: X(\mathbb{R}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ отображение вложения, а через

$$i^*: \mathfrak{N}^{2n-2m}(X(\mathbb{C})) \rightarrow \mathfrak{N}^{2n-2m}(X(\mathbb{R}))$$

обозначим соответствующий гомоморфизм обратного образа, который мы будем называть *гомоморфизмом ограничения* на вещественную часть многообразия X . Тогда оказывается, что справедлива

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть $F: Y \rightarrow X$ – проективный морфизм гладких вещественных алгебраических многообразий, где $n = \dim X$, $m = \dim Y$. Тогда в группе $\mathfrak{N}^{2n-2m}(X(\mathbb{R}))$ выполняется соотношение

$$i^*([F(\mathbb{C})]) = [F(\mathbb{R})]^2. \quad (0.2)$$

Заметим, что из равенства (0.2) вытекает утверждение: если класс кобордизмов

$$[F(\mathbb{R})] \in \mathfrak{N}^{n-m}(X(\mathbb{R}))$$

равен нулю, то также равен нулю класс кобордизмов

$$i^*([F(\mathbb{C})]) \in \mathfrak{N}^{2n-2m}(X(\mathbb{R})).$$

Возникает задача о нахождении условий, налагаемых на многообразие X , при выполнении которых из равенства $[F(\mathbb{R})] = 0$ следовало бы равенство $[F(\mathbb{C})] = 0$. В настоящей статье доказывается

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть гладкое вещественное алгебраическое многообразие X является M -многообразием, $F: Y \rightarrow X$ – проективный морфизм в категории $\mathbf{Var}_{\mathbb{R}}$. Тогда из равенства $[F(\mathbb{R})] = 0$ вытекает равенство $[F(\mathbb{C})] = 0$.

Напомним, что вещественное алгебраическое многообразие X называется M -многообразием (максимальным многообразием), если неравенство Гарнака–Смита–Тома

$$\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \leq \dim H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

становится равенством, где $H^*(\cdot, \cdot) = \bigoplus_q H^q(\cdot, \cdot)$, а $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ – поле из двух элементов; здесь и далее рассматриваются когомологии с замкнутыми носителями. Заметим, что M -многообразия играют важную роль в топологии и геометрии вещественных алгебраических многообразий (см., например, обзор [6]).

В работе [7] было введено понятие вещественного алгебраического GM -многообразия (максимального многообразия Галуа), которое является обобщением понятия M -многообразия. Напомним соответствующее определение. Прежде всего заметим, что для произвольного вещественного алгебраического многообразия X выполняется следующее неравенство Бореля–Свана:

$$\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \leq \dim H^1(G, H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)),$$

где $G = \{1, g\}$ – группа Галуа $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. Если неравенство Бореля–Свана становится равенством, то вещественное алгебраическое многообразие X называется GM -многообразием. Отметим, что каждое M -многообразие является GM -многообразием, а соответствующая инволюция

$$g^*: H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

тривиальна. Класс GM -многообразий также играет важную роль в топологии и геометрии вещественных алгебраических многообразий (см., например, работу [8], посвященную изучению таких многообразий). В настоящей статье доказывается следующий аналог теоремы 0.2.

ТЕОРЕМА 0.3. Пусть гладкое вещественное алгебраическое многообразие X является GM -многообразием, $F: Y \rightarrow X$ проективный морфизм в категории $\mathbf{Var}_{\mathbb{R}}$. Тогда из равенства $[F(\mathbb{R})] = 0$ вытекает соотношение

$$[F(\mathbb{C})] \in (1 + g^*)\mathfrak{N}^{2n-2m}(X(\mathbb{C})),$$

где $n = \dim X$, $m = \dim Y$.

Мы доказываем, что для M -многообразия X инволюция

$$g^*: \mathfrak{N}^q(X(\mathbb{C})) \rightarrow \mathfrak{N}^q(X(\mathbb{C}))$$

тривиальна при каждом q . Поэтому из теоремы 0.3 следует теорема 0.2, но мы предлагаем также прямое доказательство теоремы 0.2, так как оно значительно короче.

Пусть $E \rightarrow X$ – векторное расслоение на гладком вещественном алгебраическом многообразии X . Тогда из него получается комплексное векторное расслоение $E(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ и вещественное векторное расслоение $E(\mathbb{R}) \rightarrow X(\mathbb{R})$. Для этих расслоений определены характеристические классы Штифеля–Уитни со значениями в группах неориентированных кобордизмов

$$w_{2q}(E(\mathbb{C})) \in \mathfrak{N}^{2q}(X(\mathbb{C})), \quad w_q(E(\mathbb{R})) \in \mathfrak{N}^q(X(\mathbb{R})).$$

Мы показываем, что справедлива

ТЕОРЕМА 0.4. *Пусть гладкое вещественное алгебраическое многообразие X является GM -многообразием, $E \rightarrow X$ – векторное расслоение в категории $\mathbf{Var}_{\mathbb{R}}$. Тогда из равенства $w_q(E(\mathbb{R})) = 0$ вытекает соотношение*

$$w_{2q}(E(\mathbb{C})) \in (1 + g^*)\mathfrak{N}^{2q}(X(\mathbb{C})).$$

Настоящая статья, кроме введения, содержит три параграфа. В §1 рассмотрены кобордизмы дифференцируемых многообразий и кобордизмы алгебраических многообразий. Здесь приводится достаточный минимум теории неориентированных кобордизмов дифференцируемых многообразий, а также теории алгебраических кобордизмов алгебраических многообразий. При доказательстве теоремы 0.4 также применяются комплексные кобордизмы, но сведения о них в §1 не приводятся. Для более подробного знакомства с теорией кобордизмов предлагается использовать работы [2], [9], [10]. В §1 также рассматриваются эквивариантные неориентированные кобордизмы дифференцируемых многообразий с инволюцией. Определение рассматриваемых в статье эквивариантных кобордизмов основывается на схеме Бореля, благодаря которой эквивариантные кобордизмы G -пространства A определяются через обычные кобордизмы пространства $A_G = A \times_G EG$. Применение этой конструкции к определению эквивариантных когомологий изложено в [11], [12]. Заметим, что в настоящее время рассматриваются и другие эквивариантные кобордизмы, но для наших целей достаточно рассматривать эквивариантные кобордизмы, определенные по схеме Бореля.

В §2 доказаны теоремы 0.1–0.4. При доказательстве теорем 0.1–0.3 мы применяем эквивариантные кобордизмы дифференцируемого многообразия с инволюцией. Заметим, что здесь пришлось доказать несколько вспомогательных утверждений об эквивариантных кобордизмах. Наиболее интересными и важными из них являются предложение 2.2 и лемма 2.5. Для доказательства теоремы 0.4 применяются алгебраические кобордизмы, впрочем, ее можно доказать и с помощью эквивариантных кобордизмов, но доказательство с помощью алгебраических кобордизмов короче. Из существующих теорий алгебраических кобордизмов мы используем теорию, построенную в [10] (см. также [13], [14]). Эта теория алгебраических кобордизмов удовлетворяет условию универсальности. Благодаря свойству универсальности их можно применять при доказательстве теоремы 0.4. С помощью алгебраических кобордизмов $\Omega^*(X)$ многообразия X эта теорема выводится из теоремы 0.3.

В §3 мы определяем различные алгебраические группы кобордизмов многообразий $X(\mathbb{C})$, $X(\mathbb{R})$, которые являются подгруппами топологических кобордизмов этих многообразий, а затем с помощью теорем 0.1–0.3 находим примеры

соотношений между этими алгебраическими группами кобордизмов. Определение алгебраических групп кобордизмов многообразий $X(\mathbb{C})$, $X(\mathbb{R})$ аналогично определению алгебраических групп когомологий.

Заметим, наконец, что все ранее сформулированные теоремы являются аналогами соответствующих теорем в теории когомологий вещественных алгебраических многообразий, которые доказаны в работах [15]–[17]. Приведенные в настоящей статье доказательства этих аналогов для теории кобордизмов имеют, конечно, похожие элементы, но имеются также отличия (см., например, доказательство леммы 2.5). Впрочем, часть отличий носит технический характер.

§ 1. Дифференцируемые и алгебраические кобордизмы

В этом параграфе мы кратко излагаем понятия и утверждения геометрической теории неориентированных кобордизмов, необходимые для доказательства теорем, сформулированных во введении. Все утверждения являются общеизвестными.

1.1. Неориентированные кобордизмы дифференцируемого многообразия. Напомним сначала гомотопическое определение неориентированных кобордизмов. Пусть A – клеточный комплекс, B – подкомплекс, $MO = \{(MO_p, \sigma_p)\}$ – спектр Тома; тогда группа неориентированных кобордизмов $MO^q(A, B)$ пары (A, B) определяется равенством

$$MO^q(A, B) = \varinjlim_p \{\Sigma^p(A/B) \rightarrow MO_{p+q}\},$$

где $q \in \mathbb{Z}$, A/B – комплекс, полученный из A стягиванием подкомплекса B в точку, которая считается отмеченной точкой в A/B , $\Sigma^p(A/B)$ – надстройка, через $\{\cdot \rightarrow \cdot\}$ обозначено множество гомотопических классов пунктированных непрерывных отображений. Множество $\{\Sigma^p(A/B) \rightarrow MO_{p+q}\}$ является абелевой группой при $p \geq 2$, поэтому множество $MO^q(A, B)$ – также абелева группа.

Группа $MO^q(A)$ по определению равна группе $MO^q(A^+, \text{pt})$, где pt – одноточечное пространство и A^+ представляет собой несвязное объединение пространств A , pt . Далее мы полагаем, что категория пространств без отмеченной точки (т. е. категория свободных пространств) погружена в категорию пространств с отмеченной точкой.

Для неориентированных кобордизмов имеет место спектральная последовательность Атьи–Хирцебруха

$$E_2^{p,q} = H^p(A, B; MO^q(\text{pt})) \implies MO^{p+q}(A, B),$$

которая вырождается.

Если A – дифференцируемое многообразие, то для него определена геометрическая группа неориентированных кобордизмов $\mathfrak{M}^q(A)$ (см., например, [2], [3]). Заметим, что многообразие A может быть несвязным и некомпактным. Далее мы даем определение этой группы.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, которое может быть несвязным и некомпактным. Тогда собственное дифференцируемое отображение

$f: M \rightarrow A$ называется *сингулярным многообразием*. Два сингулярных многообразия

$$f_1: M_1 \rightarrow A, \quad f_2: M_2 \rightarrow A$$

называются *диффеоморфными*, если существует диффеоморфизм $h: M_1 \xrightarrow{\sim} M_2$ такой, что выполняется равенство $f_2 \circ h = f_1$. Далее диффеоморфные сингулярные многообразия не различаются, т.е. мы рассматриваем классы диффеоморфизма. Число $\dim A - \dim M$ будем называть *относительной коразмерностью* сингулярного многообразия $f: M \rightarrow A$. Через $M^q(A)$ обозначим множество классов диффеоморфизма сингулярных многообразий относительной коразмерности q . На множестве $M^q(A)$ определена операция сложения с помощью образования несвязного объединения $f_1 \sqcup f_2$ отображений. Эта операция превращает множество $M^q(A)$ в полугруппу.

На полугруппе $M^q(A)$ вводится отношение эквивалентности $\sim$, называемое *кобордантностью* (см. [2], [3]). Прежде чем определить это отношение эквивалентности, введем следующее обозначение. Пусть $f: M \rightarrow A$ – сингулярное многообразие и $h: B \rightarrow A$ – дифференцируемое отображение, трансверсальное к отображению f . Тогда проекцию расслоенного произведения $M \times_A B \rightarrow B$ будем обозначать через $h^*(f)$. Она задает сингулярное многообразие $h^*(f): M \times_A B \rightarrow B$.

Два сингулярных многообразия $f_1: M_1 \rightarrow A$, $f_2: M_2 \rightarrow A$ называются *кобордантными*, если существует такое собственное дифференцируемое отображение $F: W \rightarrow A \times \mathbb{R}$ дифференцируемых многообразий, что два отображения-вложения $i_k: A \rightarrow A \times \mathbb{R}$, $i_k(a) = (a, k)$, $k = 1, 2$, трансверсальны к отображению F , причем индуцированные сингулярные многообразия $i_k^*(F)$ диффеоморфны первоначальным сингулярным многообразиям f_k , $k = 1, 2$. Например, диффеоморфные сингулярные многообразия кобордантны, поэтому отношение кобордантности определено на полугруппе $M^q(A)$. Далее нам придется заменять собственное дифференцируемое отображение $f: M \rightarrow A$ на собственное дифференцируемое отображение $f': M \rightarrow A$, которое получается из первоначального “малым шевелением” и гомотопно ему. Тогда сингулярные многообразия $f: M \rightarrow A$, $f': M \rightarrow A$ кобордантны.

Фактормножество $M^q(A)/\sim$ с операцией сложения $\sqcup$ является 2-периодической группой, она обозначается через $\mathfrak{N}^q(A)$ и называется *группой геометрических неориентированных кобордизмов многообразия A* . Для обозначения класса кобордизмов сингулярного многообразия $f: M \rightarrow A$ будем применять одно из следующих обозначений:

$$[M \xrightarrow{f} A], \quad [M \rightarrow A], \quad [f].$$

Эквивалентность геометрического определения группы кобордизмов с гомотопическим определением устанавливается с помощью конструкции Понтрягина–Тома. Эта конструкция позволяет определить гомоморфизм групп $\mathfrak{N}^q(A) \rightarrow MO^q(A)$, который оказывается изоморфизмом (см. [2, предложение 1.2]). Далее мы не будем различать группы $\mathfrak{N}^q(A)$, $MO^q(A)$.

Опишем сначала конструкцию Понтрягина–Тома в случае, когда сингулярное многообразие $f: M \rightarrow A$ коразмерности q является вложением, в этом случае мы будем отождествлять многообразие M с его образом $f(M)$. Обозначим через $N \rightarrow M$ нормальное векторное расслоение к подмногообразию M

в многообразии A . Тогда существует такое отображение $h: M \rightarrow BO_q$, что индуцированное расслоение $h^*(EO_q) \rightarrow M$ изоморфно расслоению $N \rightarrow M$, где $EO_q \rightarrow BO_q$ – универсальное векторное расслоение. Если теперь отождествить окрестность подмногообразия M в расслоении N с трубчатой окрестностью U подмногообразия M в многообразии A , то на факторпространстве $A/(A \setminus U)$ будет определено отображение $\hat{h}$ в пространство Тома MO_q универсального расслоения $EO_q \rightarrow BO_q$. Тогда композиция отображений

$$A \rightarrow A/(A \setminus U) \xrightarrow{\hat{h}} MO_q$$

(первое отображение стягивает замкнутое подпространство $A \setminus U$ в точку) определяет элемент группы

$$MO^q(A) = \varinjlim_p \{\Sigma^p(A) \rightarrow MO_{p+q}\}.$$

Если теперь сингулярное многообразие $f: M \rightarrow A$ не является вложением, то рассмотрим композицию отображений

$$M \xrightarrow{f} A = A \times \{0\} \hookrightarrow A \times \mathbb{R}^p,$$

где $p \gg 1$. При больших p это сингулярное многообразие можно заменить на новое сингулярное многообразие $f': M \rightarrow A \times \mathbb{R}^p$, которое получается “малым шевелением” первого и является вложением. Тогда предыдущая конструкция определяет отображение надстройки $\Sigma^p(A)$ в пространство Тома MO_{p+q} . Из этого отображения получается элемент группы $MO^q(A)$.

Опишем теперь геометрически гомоморфизм обратного образа

$$h^*: MO^q(B) \rightarrow MO^q(A),$$

где $h: B \rightarrow A$ – дифференцируемое отображение дифференцируемых многообразий. Если сингулярное многообразие $f: M \rightarrow A$ трансверсально отображению h , то полагаем $h^*([f]) = [h^*(f)]$. В противном случае нужно с помощью “малого шевеления” заменить сингулярное многообразие $f: M \rightarrow A$ на гомотопное ему и трансверсальное к отображению h . В случае, когда отображение h является вложением (открытым или замкнутым), гомоморфизм обратного образа h^* будем называть *гомоморфизмом ограничения*.

Теперь мы можем геометрически определить $\cup$ -умножение на прямой сумме

$$MO^*(A) = \bigoplus_q MO^q(A),$$

полагая

$$[M_1 \xrightarrow{f_1} A] \cup [M_2 \xrightarrow{f_2} A] = \delta^*([M_1 \times M_2 \xrightarrow{f_1 \times f_2} A \times A]),$$

где $\delta: A \rightarrow A \times A$ – диагональное отображение. Заметим также, что отображение $f_1 \times f_2: M_1 \times M_2 \rightarrow A \times A$ определяет $\times$ -произведение $[f_1] \times [f_2] \in MO^*(A \times A)$. Пусть pt – одноточечное многообразие, тогда отображение $p: A \rightarrow \text{pt}$ индуцирует гомоморфизм колец

$$p^*: MO^*(\text{pt}) \rightarrow MO^*(A).$$

Из предыдущего определения следует, что этот гомоморфизм устроен следующим образом. Если класс кобордизмов $c \in MO^*(pt)$ равен $[C]$, где C – компактное дифференцируемое многообразие, то

$$p^*(c) = [C \times A \xrightarrow{p \times id} A].$$

Следовательно, кольцо кобордизмов $MO^*(A)$ является алгеброй над кольцом кобордизмов Тома $MO^* = MO^*(pt)$.

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть A – клеточный комплекс, $B \subset A$ – подкомплекс, но разность $A \setminus B$ является дифференцируемым многообразием. Тогда также можно дать геометрическое определение группы кобордизмов $MO^q(A, B)$. А именно, в качестве сингулярных многообразий пары (A, B) нужно рассматривать такие собственные дифференцируемые отображения $f: M \rightarrow A \setminus B$, чтобы композиция

$$M \xrightarrow{f} A \setminus B \hookrightarrow A$$

также была собственным отображением. Эту композицию будем обозначать через $\bar{f}$, а через $[f]$ обозначим соответствующий класс кобордизмов из группы $MO^*(A, B)$. Геометрические определения $\times$ -произведения и $\cup$ -произведения можно использовать и в этой ситуации.

Изложим теперь геометрическое определение гомоморфизма надстройки

$$\sigma_p: MO^q \rightarrow MO^{p+q}(\Sigma^p(A), *),$$

где A – дифференцируемое многообразие. Для этого будем рассматривать сферу S^p как компактификацию Александрова евклидова пространства $\mathbb{R}^p$. Таким образом, имеем равенство $S^p = \mathbb{R}^p \cup *$. Надстройка $\Sigma^p(A)$ получается из произведения $A \times S^p$ стягиванием подмногообразия $A \times *$ в точку, которая считается отмеченной точкой и обозначается через $*$. Тогда разность $\Sigma^p(A) \setminus \{*\}$ равна дифференцируемому многообразию $A \times \mathbb{R}^p$. Следовательно, определена группа геометрических кобордизмов $MO^{p+q}(\Sigma^p(A), *)$. Каждому сингулярному многообразию $f: M \rightarrow A$ сопоставим новое сингулярное многообразие $f': M \rightarrow A \times \mathbb{R}^p$, которое равно композиции отображений

$$M \xrightarrow{f} A = A \times \{0\} \hookrightarrow A \times \mathbb{R}^p,$$

где второе отображение является каноническим вложением. Это сопоставление индуцирует гомоморфизм

$$\sigma_p: MO^q(A) \rightarrow MO^{p+q}(\Sigma^p(A), *),$$

а именно полагаем $\sigma_p([f]) = [\bar{f}']$, где $\bar{f}'$ – композиция отображений

$$M \xrightarrow{f'} A \times \mathbb{R}^p \hookrightarrow \Sigma^p(A).$$

Полученный гомоморфизм совпадает с гомоморфизмом надстройки в гомотопической теории кобордизмов. Для доказательства этого утверждения нужно применить конструкцию Понтрягина–Тома. В частности, получаем, что построенный гомоморфизм является изоморфизмом.

1.2. Эquivariantные кобордизмы многообразия с инволюцией.

Пусть A – клеточный комплекс с клеточной инволюцией $g: A \rightarrow A$. Группу второго порядка $\{1, g\}$ обозначим через G , она действует на пространстве A . Пару $(A, g) = (A, G)$ будем называть *вещественным топологическим пространством*.

Эquivariantные неориентированные кобордизмы $MO_G^q(A)$ по схеме Бореля из [11] (см. также [12]) определяются следующим образом. Пусть $S^\infty = \bigcup_k S^k$ – бесконечномерная сфера с антиподальной инволюцией $g: S^\infty \rightarrow S^\infty$; тогда рассмотрим пространство $A_G = A \times_G S^\infty$ и по определению положим $MO_G^q(A) = MO^q(A_G)$. Если A – конечный комплекс или обладает фильтрацией из конечных комплексов, то выполняется равенство (см. [9, следствие III.4.17])

$$MO_G^q(A) = \varprojlim_k MO^q(A \times_G S^k). \quad (1.1)$$

Поскольку имеется естественное вложение $A = A \times_G S^0 \hookrightarrow A \times_G S^\infty$, то определен гомоморфизм

$$\alpha_q: MO_G^q(A) \rightarrow MO^q(A),$$

который называется *гомоморфизмом забывания вещественной структуры*.

Пусть теперь A – дифференцируемое многообразие с дифференцируемой инволюцией $g: A \rightarrow A$. Тогда пару $(A, g) = (A, G)$ будем называть *вещественным дифференцируемым многообразием*. Если X – гладкое вещественное алгебраическое многообразие, $X(\mathbb{C})$ – множество комплексных точек и $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ – инволюция комплексного сопряжения, то пара $(X(\mathbb{C}), g)$ является вещественным дифференцируемым многообразием. Для вещественного дифференцируемого многообразия (A, g) выполняется равенство (1.1).

Далее, если специально не указывается, (A, g) – фиксированное вещественное дифференцируемое многообразие. Эquivariantное собственное дифференцируемое отображение $F: (M, g) \rightarrow (A, g)$, где (M, g) – вещественное дифференцируемое многообразие, будем называть *вещественным сингулярным многообразием*. Пусть дано вещественное сингулярное многообразие $F: (M, g) \rightarrow (A, g)$, которое имеет относительную коразмерность q ; покажем, что оно определяет элемент из группы эquivariantных кобордизмов $MO_G^q(A)$. Этот элемент мы будем обозначать через $[(M, g) \xrightarrow{F} (A, g)]$, или через $[(M, g) \rightarrow (A, g)]$, или через $[F, G]$ и называть *классом эquivariantных кобордизмов* данного вещественного сингулярного многообразия.

Положим $M_k = M \times_G S^k$, $A_k = A \times_G S^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда определены вложения

$$M_k \hookrightarrow M_{k+1}, \quad A_k \hookrightarrow A_{k+1},$$

а из отображений

$$F \times \text{id}: M \times S^k \rightarrow A \times S^k$$

получается последовательность сингулярных многообразий $F_k: M_k \rightarrow A_k$ относительной коразмерности q , для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M_k & \longrightarrow & M_{k+1} \\ \downarrow F_k & & \downarrow F_{k+1} \\ A_k & \longrightarrow & A_{k+1} \end{array}$$

Сингулярное многообразие $F_k: M_k \rightarrow A_k$ определяет класс кобордизмов $[F_k] \in MO^q(A_k)$. При гомоморфизме ограничения

$$MO^q(A_{k+1}) \rightarrow MO^q(A_k)$$

класс кобордизмов $[F_{k+1}]$ переходит в класс кобордизмов $[F_k]$, поэтому определен предельный класс кобордизмов

$$[F_\infty] \in \varprojlim_k MO^q(A_k) = MO_G^q(A).$$

Этот класс эквивариантных кобордизмов по определению равен классу $[F, G] \in MO_G^q(A)$. Заметим, что из определений классов кобордизмов

$$[F, G] \in MO_G^q(A), \quad [F] \in MO^q(A)$$

вытекает равенство

$$\alpha_q([F, G]) = [F], \quad (1.2)$$

где $\alpha_q: MO_G^q(A) \rightarrow MO^q(A)$ – гомоморфизм забывания вещественной структуры.

Для вещественного дифференцируемого многообразия (A, g) можно определить группу геометрических эквивариантных кобордизмов $\mathfrak{N}_G^q(A)$. Это делается с помощью вещественных сингулярных многообразий и эквивариантного отношения кобордантности на них. Тогда предыдущая конструкция задает гомоморфизм

$$\mathfrak{N}_G^q(A) \rightarrow MO_G^q(A).$$

Заметим, что этот гомоморфизм не является изоморфизмом, так как при $q > \dim A$ выполняются соотношения $\mathfrak{N}_G^q(A) = 0$, $MO_G^q(A) \neq 0$.

Относительно $\cup$ -произведения группа

$$MO_G^*(A) = \bigoplus_{q=-\infty}^{+\infty} MO_G^q(A)$$

является кольцом, а также алгеброй над кольцом $MO_G^*(pt)$.

Из определения следует, что кольцо $MO_G^*(pt)$ равно кольцу $MO^*(\mathbb{RP}^\infty)$. Покажем, что $MO^*(\mathbb{RP}^\infty)$ является кольцом степенных рядов $MO^*(pt)[[t]]$, где элемент

$$t \in MO^1(\mathbb{RP}^\infty)$$

определяется следующим образом. Класс кобордизмов канонического вложения $\mathbb{RP}^{k-1} \hookrightarrow \mathbb{RP}^k$ обозначим через $t_k \in MO^1(\mathbb{RP}^k)$. Тогда при гомоморфизме ограничения

$$MO^1(\mathbb{RP}^{k+1}) \rightarrow MO^1(\mathbb{RP}^k)$$

элемент $t_{k+1} \in MO^1(\mathbb{RP}^{k+1})$ отображается в элемент $t_k \in MO^1(\mathbb{RP}^k)$. Поэтому определен предельный элемент

$$t \in \varprojlim_k MO^1(\mathbb{RP}^k) = MO^1(\mathbb{RP}^\infty).$$

Для доказательства соотношения

$$MO^*(\mathbb{RP}^\infty) = MO^*(\text{pt})[[t]]$$

осталось заметить, что при каждом k выполняется равенство

$$MO^*(\mathbb{RP}^k) = MO^*(\text{pt})[t_k]/(t_k)^{k+1} \cdot MO^*(\text{pt})[t_k].$$

Следующее предложение обобщает этот пример.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если инволюция $g: A \rightarrow A$ тривиальная, то выполняется равенство $MO_G^*(A) = MO^*(A)[[t]]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из тривиальности инволюции $g: A \rightarrow A$ получаем равенства

$$A_G = A \times \mathbb{RP}^\infty, \quad A_k = A \times \mathbb{RP}^k.$$

Поэтому имеет место последовательность равенств

$$\begin{aligned} MO_G^*(A) &= \varprojlim_k MO^*(A_k) \\ &= \varprojlim_k MO^*(A)[t]/t^{k+1} \cdot MO^*(A)[t] = MO^*(A)[[t]]. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Следовательно, если инволюция $g: A \rightarrow A$ тривиальная, то при каждом $q \in \mathbb{Z}$ выполняются соотношения

$$MO_G^q(A) = \prod_{p \leq q} t^{q-p} \cdot MO^p(A) = \prod_{p \leq q} MO^p(A).$$

Для эквивариантных кобордизмов существует несколько спектральных последовательностей, сходящихся к ним. Первая спектральная последовательность является спектральной последовательностью Лере для отображения $p: A_G \rightarrow A/G$, которое возникает из проекции $A \times S^\infty \rightarrow A$. Из второй проекции $A \times S^\infty \rightarrow S^\infty$ получается локально тривиальное расслоение $\pi: A_G \rightarrow \mathbb{RP}^\infty$ со слоем A . Оно определяет вторую спектральную последовательность

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, MO^q(A)) \implies MO_G^{p+q}(A).$$

Из предложения 1.1 следует, что если инволюция $g: A \rightarrow A$ тривиальная, то вторая спектральная последовательность вырождается. Впрочем, это утверждение также вытекает из тривиальности расслоения $\pi: A_G \rightarrow \mathbb{RP}^\infty$ в данном случае.

Спектральная последовательность Атьи–Хирцебруха

$$E_2^{p,q} = H^p(A_G, MO^q(\text{pt})) \implies MO^{p+q}(X_G)$$

дает третью спектральную последовательность

$$\Pi_2^{p,q} = H_G^p(A, MO^q(\text{pt})) \implies MO_G^{p+q}(A),$$

где $H_G^p(A, MO^q(\text{pt})) = H_G^p(A, \mathbb{F}_2) \otimes MO^q(\text{pt})$ – группа эквивариантных когомологий. Эта спектральная последовательность вырождается, так как вырождается спектральная последовательность Атьи–Хирцебруха.

Аналогичные определения и утверждения можно использовать для пары вещественных топологических пространств $((A, g), (B, g))$. Эквивариантные кобордизмы пары $MO_G^q(A, B)$ определяются равенством

$$MO_G^q(A, B) = MO^q(A_G, B_G).$$

Если разность $A \setminus B$ является дифференцируемым многообразием, то аналогично определяется класс эквивариантных кобордизмов $[\bar{F}, G] \in MO_G^q(A, B)$, где $F: (M, g) \rightarrow (A \setminus B, g)$ – вещественное сингулярное многообразие, а $\bar{F}$ – композиция отображений $M \xrightarrow{F} A \setminus B \hookrightarrow A$. Напомним, что $\bar{F}: M \rightarrow A$ должно быть собственным отображением.

Определим гомоморфизмы надстройки для эквивариантных кобордизмов

$$\sigma_{r,s}: MO_G^q(A) \rightarrow MO_G^{q+r+s}(\Sigma^{r,s}(A), *),$$

где (A, g) – клеточный комплекс с инволюцией. Для этого через $\mathbb{R}^{r,s}$ обозначим произведение $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$, на котором инволюция g действует по правилу $g(v, w) = (v, -w)$. Через $(S^{r,s}, g)$ будем обозначать компактификацию Александрова вещественного топологического пространства $(\mathbb{R}^{r,s}, g)$. Таким образом, выполняется равенство $(S^{r,s}, g) = (\mathbb{R}^{r,s} \cup *, g)$. Надстройка $(\Sigma^{r,s}(A), g)$ получается из произведения $(A \times S^{r,s}, g)$ стягиванием подпространства $(A \times *, g)$ в точку, которая считается отмеченной точкой и обозначается через $*$. Пространство $\Sigma^{r,s}(A)_G = \Sigma^{r,s}(A) \times_G S^\infty$ является пространством Тома векторного расслоения $(A \times \mathbb{R}^{r,s})_G \rightarrow A_G$ со слоем $\mathbb{R}^{r+s}$. Поэтому определен изоморфизм Тома

$$MO^q(A_G) \rightarrow MO^{q+r+s}(\Sigma^{r,s}(A)_G, *).$$

По определению он равен гомоморфизму надстройки $\sigma_{r,s}$.

Пусть теперь снова (A, g) – вещественное дифференцируемое многообразие и класс эквивариантных кобордизмов $c \in MO_G^q(A)$ представлен вещественным сингулярным многообразием $F: (M, g) \rightarrow (A, g)$. Тогда рассмотрим новое вещественное сингулярное многообразие $F': (M, g) \rightarrow (A \times \mathbb{R}^{r,s}, g)$, которое равно композиции отображений

$$(M, g) \xrightarrow{F} (A, g) = (A \times 0, g) \hookrightarrow (A \times \mathbb{R}^{r,s}, g).$$

Тогда выполняется равенство

$$\sigma_{r,s}(c) = [\bar{F'}, G] \in MO_G^{q+r+s}(\Sigma^{r,s}(A), *),$$

где $\bar{F'}$ – композиция отображений

$$(M, g) \xrightarrow{F'} (A \times \mathbb{R}^{r,s}, g) \hookrightarrow (\Sigma^{r,s}(A), *).$$

Для доказательства этого равенства нужно применить конструкцию Понтрягина–Тома к отображению $F'_k: M \times_G S^k \rightarrow (A \times \mathbb{R}^{r,s}) \times_G S^k$, а затем перейти к пределу.

Множество неподвижных точек инволюции $g: A \rightarrow A$ обозначим через $\mathbb{R}A$, на нем инволюция $g: \mathbb{R}A \rightarrow \mathbb{R}A$ тривиальна. Тогда рассмотрим гомоморфизм ограничения

$$\beta_q: MO_G^q(A) \rightarrow MO_G^q(\mathbb{R}A) = \bigoplus_{i \leq q} MO^i(\mathbb{R}A).$$

Поскольку множество неподвижных точек инволюции $g: \Sigma^{r,s}(A) \rightarrow \Sigma^{r,s}(A)$ равно $\Sigma^r(\mathbb{R}A)$, то определен аналогичный гомоморфизм ограничения

$$\beta_q: MO_G^q(\Sigma^{r,s}(A), *) \rightarrow MO_G^q(\Sigma^r(\mathbb{R}A), *) = \bigoplus_{i \leq q} MO^i(\Sigma^r(\mathbb{R}A), *).$$

Каждая компонента связности множества $\mathbb{R}A$ является дифференцируемым подмногообразием многообразия A (см. [5]), но компоненты могут иметь разную размерность. Далее предполагаем, что размерности компонент связности множества $\mathbb{R}A$ одинаковые. Заметим, что из приведенных выше определений и рассуждений вытекает равенство

$$\beta_{q+r+s}(\sigma_{r,s}([F, G])) = \sigma_r(\beta_q([F, G])), \quad (1.3)$$

где $F: (M, g) \rightarrow (A, g)$ – вещественное сингулярное многообразие относительной коразмерности q .

1.3. Квадраты Стинрода в кобордизмах. С помощью эквивариантных кобордизмов мы определим квадраты Стинрода для геометрических неориентированных кобордизмов дифференцируемого многообразия. Соответствующее определение является переформулировкой определения из [18].

Построим сначала внешнюю операцию Стинрода

$$SQ: MO^k(A) \rightarrow MO_G^{2k}(A \times A),$$

где A – дифференцируемое многообразие, $G = \{1, g\}$, а инволюция $g: A \times A \rightarrow A \times A$ переставляет сомножители, т. е. $g(a_1, a_2) = (a_2, a_1)$.

Пусть класс кобордизмов $c \in MO^k(A)$ представлен собственным дифференцируемым отображением $C: M \rightarrow A$ относительной коразмерности k . Тогда это отображение индуцирует эквивариантное собственное дифференцируемое отображение

$$C \times C: M \times M \rightarrow A \times A,$$

если на произведениях $M \times M$, $A \times A$ рассматривать инволюцию g , переставляющую сомножители. Поэтому определен класс эквивариантных кобордизмов

$$[(M \times M, g) \rightarrow (A \times A, g)] \in MO_G^{2k}(A \times A).$$

Этот элемент по определению равен $SQ(c)$.

Заметим, что из определения внешнего квадрата Стинрода SQ и равенства (1.2) вытекает следующее соотношение:

$$\alpha_{2k}(SQ(c)) = c \times c \in MO^{2k}(A \times A), \quad (1.4)$$

где $c \in MO^k(A)$.

Рассмотрим теперь диагональное отображение $\delta: A \rightarrow A \times A$, оно задает гомоморфизм обратного образа для эквивариантных кобордизмов

$$\delta^*: MO_G^{2k}(A \times A) \rightarrow MO_G^{2k}(A),$$

где инволюция $g: A \rightarrow A$ тривиальна. Теперь мы можем взять композицию

$$\delta^* \circ SQ: MO^k(A) \rightarrow MO_G^{2k}(A) = \prod_{i \leq 2k} MO^i(A).$$

Это отображение дает полный внутренний квадрат Стиррода

$$Sq = \prod_{i=-\infty}^{+\infty} Sq^i: MO^k(A) \rightarrow \prod_{i \leq k} MO^{k+i}(A).$$

Из определения квадратов Стиррода SQ , Sq и соотношения (1.4) получаем, что для класса кобордизмов $c \in MO^k(A)$ выполняется равенство

$$Sq^k(c) = c^2. \quad (1.5)$$

Отметим еще, что гомоморфизм $Sq^i: MO^k(A) \rightarrow MO^{k+i}(A)$ равен нулю при $i > k$.

Аналогично определяются внешняя и внутренняя операции Стиррода для кобордизмов пары пространств (A, B) , когда разность $A \setminus B$ является дифференцируемым многообразием. Тогда предыдущая конструкция приводит к отображениям

$$SQ: MO^k(A, B) \rightarrow MO_G^{2k}(A \times A, A \times B \cup B \times A),$$

$$Sq = \prod_{i=-\infty}^{+\infty} Sq^i: MO^k(A, B) \rightarrow \prod_{i \leq 2k} MO^i(A, B).$$

Заметим, наконец, что из геометрических определений видно, что квадрат Стиррода Sq коммутирует с гомоморфизмами надстройки σ_p .

1.4. Алгебраические кобордизмы. При доказательстве теоремы 0.4 мы будем использовать теорию алгебраических кобордизмов, построенную в статье [10] (см. также [13], [14]). Здесь мы изложим только фрагмент этой теории.

Фиксируем базисное поле k характеристики 0. Через $\mathbf{Sm}_k$ обозначается категория гладких квазипроjektивных k -схем. Отличие категории $\mathbf{Sm}_k$ от категории $\mathbf{Var}_k$ состоит в том, что объекты категории $\mathbf{Sm}_k$ могут иметь компоненты разной размерности. В работе [10] вводится понятие ориентированной теории когомологий на категории $\mathbf{Sm}_k$. Это функтор $A^*: (\mathbf{Sm}_k)^\circ \rightarrow \mathbf{R}^*$ в категорию коммутативных градуированных колец $\mathbf{R}^*$, удовлетворяющий свойствам, аналогичным свойствам комплексной ориентированной теории когомологий в [2]. В частности, для каждого проективного морфизма $F: Y \rightarrow X$ в категории $\mathbf{Sm}_k$ коразмерности q определен гомоморфизм прямого образа

$$F_*: A^*(Y) \rightarrow A^{*+q}(X).$$

Следующая теорема является одним из главных результатов работы [10].

ТЕОРЕМА 1.2. На категории $\mathbf{Sm}_k$ существует универсальная ориентированная теория когомологий $X \mapsto \Omega^*(X)$.

Эта универсальная ориентированная теория когомологий Ω^* называется теорией *алгебраических кобордизмов*. Заметим, что ее универсальность означает, что для каждой ориентированной теории когомологий A^* на категории $\mathbf{Sm}_k$ существует и единствен морфизм $\vartheta: \Omega^* \rightarrow A^*$ ориентированных теорий когомологий. В частности, для категории $\mathbf{Sm}_{\mathbb{C}}$ существует и единствен морфизм ориентированных теорий когомологий $\vartheta: \Omega^*(X) \rightarrow MU^{2*}(X(\mathbb{C}))$, где функтор $X \mapsto MU^{2*}(X(\mathbb{C}))$ – теория комплексных кобордизмов. Далее этот морфизм мы будем обозначать через $\text{cl}_{\mathbb{C}}^{MU}$ или $\text{cl}_{\mathbb{C}}$ и называть *отображением комплексных кобордизмов*. (Заметим, что это обозначение и название мы ввели по аналогии с отображением цикла кольца Чжоу $CH^*(X)$ в кольцо обыкновенных когомологий $H^{2*}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ (см., например, [19, гл. 19]).)

Если использовать геометрическое определение комплексных кобордизмов $MU^*(X(\mathbb{C}))$ (см. [2]), то гомоморфизм $\text{cl}_{\mathbb{C}}^{MU}$ устроен очень просто. Для каждого проективного морфизма $F: Y \rightarrow X$ относительной коразмерности q в категории $\mathbf{Sm}_k$ определен класс алгебраических кобордизмов $[Y \rightarrow X] \in \Omega^q(X)$, который по определению равен $F_*(1_Y)$, где $1_Y \in \Omega^0(Y)$. Классы таких алгебраических кобордизмов $[Y \rightarrow X]$ порождают аддитивную группу $\Omega^q(X)$. Если теперь $k = \mathbb{C}$, то выполняется равенство

$$\text{cl}_{\mathbb{C}}^{MU}([Y \rightarrow X]) = [Y(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})],$$

где $[Y(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})] \in MU^{2q}(X(\mathbb{C}))$ – класс комплексных геометрических кобордизмов, который получается из голоморфного отображения $Y(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ (см. [2]).

Для категории $\mathbf{Sm}_{\mathbb{R}}$ существует и единствен морфизм ориентированных теорий когомологий $\vartheta: \Omega^*(X) \rightarrow MO^*(X(\mathbb{R}))$, где функтор $X \mapsto MO^*(X(\mathbb{R}))$ – теория неориентированных кобордизмов. Далее этот морфизм мы будем обозначать через $\text{cl}_{\mathbb{R}}^{MO}$ или $\text{cl}_{\mathbb{R}}$ и называть *отображением неориентированных кобордизмов*. Для этого морфизма выполняется равенство

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}^{MO}([Y \rightarrow X]) = [Y(\mathbb{R}) \rightarrow X(\mathbb{R})].$$

Заметим, что для категории $\mathbf{Sm}_{\mathbb{R}}$ также определен морфизм

$$\text{cl}_{\mathbb{C}}^{MU}: \Omega^*(X) \rightarrow MU^{2*}(X(\mathbb{C})).$$

Из ориентированности теории алгебраических кобордизмов следует, что для векторного расслоения $E \rightarrow X$ в категории $\mathbf{Sm}_k$ определены характеристические классы Чженя $c_k(E) \in \Omega^k(X)$, а из универсальности теории алгебраических кобордизмов вытекают следующие утверждения. Если морфизм $E \rightarrow X$ является векторным расслоением в категории $\mathbf{Sm}_{\mathbb{C}}$, то выполняется равенство $\text{cl}_{\mathbb{C}}(c_k(E)) = c_k(E(\mathbb{C}))$, где $c_k(E(\mathbb{C})) \in MU^{2k}(X(\mathbb{C}))$ – класс Чженя комплексного векторного расслоения $E(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$. Аналогично, если морфизм $E \rightarrow X$ является векторным расслоением в категории $\mathbf{Sm}_{\mathbb{R}}$, то кроме равенства $\text{cl}_{\mathbb{C}}(c_k(E)) = c_k(E(\mathbb{C}))$ выполняется равенство $\text{cl}_{\mathbb{R}}(c_k(E)) = w_k(E(\mathbb{R}))$, где $w_k(E(\mathbb{R})) \in MO^k(X(\mathbb{R}))$ – класс Штифеля–Уитни вещественного векторного расслоения $E(\mathbb{R}) \rightarrow X(\mathbb{R})$.

§ 2. Доказательства теорем

Прежде чем непосредственно доказывать теорему 0.1, мы установим несколько вспомогательных утверждений об эквивариантных кобордизмах. Множества неподвижных точек инволюций $g: A \rightarrow A$, $g: M \rightarrow M$ будем обозначать через $\mathbb{R}A$, $\mathbb{R}M$. Компоненты связности этих множеств являются многообразиями. Ранее мы предполагали, что все компоненты множества $\mathbb{R}A$ имеют одинаковые размерности, а теперь будем предполагать, что множество $\mathbb{R}M$ также удовлетворяет этому условию. Тогда из вещественного сингулярного многообразия $F: (M, g) \rightarrow (A, g)$ получается сингулярное многообразие $\mathbb{R}F: \mathbb{R}M \rightarrow \mathbb{R}A$, где $\mathbb{R}F$ – ограничение отображения F на подмногообразие $\mathbb{R}M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $F: (M, g) \rightarrow (A, g)$ – вещественное сингулярное многообразие относительной коразмерности q , причем множество $\mathbb{R}M$ пустое. Тогда класс эквивариантных кобордизмов

$$\beta_q([F, G]) \in MO_G^q(\mathbb{R}A) = \prod_{i \leq q} MO^i(\mathbb{R}A)$$

равен нулю, где β_q – гомоморфизм ограничения $MO_G^q(A) \rightarrow MO_G^q(\mathbb{R}A)$. Следовательно, выполняется соотношение $\beta_q([F, G]) = Sq([\mathbb{R}F])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда отображение $F: M \rightarrow A$ является вложением. Будем отождествлять образ $F(M)$ с многообразием M . Тогда пересечение $M \cap \mathbb{R}A$ пустое. Следовательно, многообразие M не пересекается с малой трубчатой окрестностью подмногообразия $\mathbb{R}A$. Ограничение класса кобордизмов $[F, G]$ на эту окрестность равно нулю, следовательно, класс кобордизмов $\beta_q([F, G])$ также равен нулю. Если отображение $F: M \rightarrow A$ не является вложением, то сначала заменим его на отображение $F': M \rightarrow A \times \mathbb{R}^{p,p}$, которое равно композиции отображений

$$M \xrightarrow{F} A = A \times \{0\} \hookrightarrow A \times \mathbb{R}^{p,p}.$$

При $p \gg 1$ отображение F' можно эквивариантно “пошевелить”, чтобы получилось эквивариантное вложение $F'': M \rightarrow A \times \mathbb{R}^{p,p}$, кобордантное вещественному сингулярному многообразию $F': (M, g) \rightarrow (A \times \mathbb{R}^{p,p}, g)$. Предыдущее рассуждение показывает, что класс эквивариантных кобордизмов

$$\beta_{q+2p}([\overline{F''}, G]) \in MO_G^{q+2p}(\Sigma^p(\mathbb{R}A), *)$$

равен нулю. Применим теперь соотношение (1.3); тогда получим равенства

$$\sigma_p(\beta_q([F, G])) = \beta_{q+2p}(\sigma_{p,p}([F, G])) = \beta_{q+2p}([\overline{F''}, G]) = 0.$$

Осталось заметить, что гомоморфизм надстройки является изоморфизмом. Предложение доказано.

Далее мы предполагаем, что множество $\mathbb{R}M$ непустое. Если вещественное сингулярное многообразие $F: (M, g) \rightarrow (A, g)$ получается из проективного морфизма гладких вещественных алгебраических многообразий $X \rightarrow Y$, то выполняются следующие условия. На касательных расслоениях TM , TA определена

квазикомплексная структура $J: TM \rightarrow TM$, $J: TA \rightarrow TA$, а дифференциал dF отображения F сохраняет эту структуру, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{J} & TM \\ \downarrow dF & & \downarrow dF \\ TA & \xrightarrow{J} & TA \end{array}$$

Напомним, что эндоморфизм $J: TA \rightarrow TA$ называется *квазикомплексной структурой*, если он удовлетворяет условию $J^2 = -1$.

Обозначим через $T_{\mathbb{R}A}$ ограничение касательного расслоения TA на подмногообразии $\mathbb{R}A$. Заметим, что $T(\mathbb{R}A) \subset T_{\mathbb{R}A}$, но равенство имеет место только в случае, когда $\mathbb{R}A = A$. Далее мы будем предполагать, что на расслоении $T_{\mathbb{R}A}$ введена квазикомплексная структура $J: T_{\mathbb{R}A} \rightarrow T_{\mathbb{R}A}$, причем выполняется равенство $J \circ dg = -dg \circ J$. В этом случае вещественное дифференцируемое многообразие (A, g) будем называть *вещественным дифференцируемым J -многообразием*. Заметим, что в этом определении квазикомплексная структура J определена не на всем многообразии A , а только в точках вещественной части $\mathbb{R}A$. Тогда выполняется равенство $\dim A = 2 \dim \mathbb{R}A$. Отметим также, что эта J -структура преобразует вещественное векторное расслоение $T_{\mathbb{R}A} \rightarrow A$ в комплексное векторное расслоение, если действие оператора J рассматривать как умножение на мнимую единицу i . Поэтому образ касательного расслоения $T(\mathbb{R}A)$ при отображении $J: T_{\mathbb{R}A} \rightarrow T_{\mathbb{R}A}$ является нормальным расслоением к подмногообразию $\mathbb{R}A \subset A$, т. е. выполнено равенство

$$J(T(\mathbb{R}A)) = N(\mathbb{R}A/A).$$

Пусть дано вещественное сингулярное многообразие $F: (M, g) \rightarrow (A, g)$. Предположим, что многообразия (M, g) , (A, g) являются вещественными дифференцируемыми J -многообразиями, причем дифференциал dF отображения F сохраняет эту структуру, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathbb{R}M} & \xrightarrow{J} & T_{\mathbb{R}M} \\ \downarrow dF & & \downarrow dF \\ T_{\mathbb{R}A} & \xrightarrow{J} & T_{\mathbb{R}A} \end{array}$$

В этом случае вещественное сингулярное многообразие $F: (M, g) \rightarrow (A, g)$ будем называть *вещественным сингулярным J -многообразием*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть дано вещественное сингулярное J -многообразие

$$F: (M, g) \rightarrow (A, g).$$

Тогда выполняется соотношение

$$\beta_{2k}([F, G]) = Sq([\mathbb{R}F]),$$

где k — относительная коразмерность сингулярного многообразия $\mathbb{R}F: \mathbb{R}M \rightarrow \mathbb{R}A$, а β_{2k} — гомоморфизм ограничения

$$MO_G^{2k}(A) \rightarrow MO_G^{2k}(\mathbb{R}A) = \prod_{i \leq 2k} MO^i(\mathbb{R}A).$$

Сначала мы докажем одну лемму, но для ее формулировки потребуются дополнительные обозначения и предположения. Пусть имеется вещественное топологическое пространство $(\bar{V}, g)$ с отмеченной точкой $*$ $\in \bar{V}$, которая неподвижна относительно инволюции. Далее все отмеченные точки обозначаются через $*$. Разность $\bar{V} \setminus \{*\}$ обозначим через V и будем предполагать, что пара (V, g) является вещественным дифференцируемым J -многообразием. Пусть $F: (M, g) \rightarrow (V, g)$ – вещественное сингулярное J -многообразие, причем отображение F является вложением. Композицию отображений $M \xrightarrow{F} V \hookrightarrow \bar{V}$ обозначим через $\bar{F}$. Будем предполагать, что отображение $\bar{F}$ собственное. Тогда определены классы кобордизмов $[\bar{F}, G] \in MO_G^*(\bar{V}, *)$, $[\mathbb{R}\bar{F}] \in MO^*(\mathbb{R}\bar{V}, *)$.

ЛЕММА 2.3. *При сделанных выше предположениях и обозначениях выполняется соотношение*

$$\beta_{2k}([\bar{F}, G]) = Sq([\mathbb{R}\bar{F}]),$$

где k – относительная коразмерность сингулярного многообразия $\mathbb{R}F: \mathbb{R}M \rightarrow \mathbb{R}V$, а β_{2k} – гомоморфизм ограничения

$$MO_G^{2k}(\bar{V}, *) \rightarrow MO_G^{2k}(\mathbb{R}\bar{V}, *) = \prod_{i \leq 2k} MO^i(\mathbb{R}\bar{V}, *).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим приведенное произведение

$$\mathbb{R}\bar{V} \wedge \mathbb{R}\bar{V} = (\mathbb{R}\bar{V} \times \mathbb{R}\bar{V}) / (\mathbb{R}\bar{V} \times * \cup * \times \mathbb{R}\bar{V}).$$

Оно является пространством с отмеченной точкой $*$, причем разность $(\mathbb{R}\bar{V} \wedge \mathbb{R}\bar{V}) \setminus \{*\}$ равна обыкновенному произведению $\mathbb{R}V \times \mathbb{R}V$.

На произведении $\mathbb{R}\bar{V} \wedge \mathbb{R}\bar{V}$ имеется инволюция $g: \mathbb{R}\bar{V} \wedge \mathbb{R}\bar{V} \rightarrow \mathbb{R}\bar{V} \wedge \mathbb{R}\bar{V}$, переставляющая сомножители, а на произведении $\mathbb{R}V \times \mathbb{R}V$ существует каноническая J -структура, которая вводится следующим образом. Множеством неподвижных точек инволюции g на $\mathbb{R}V \times \mathbb{R}V$ является диагональ Δ . В точке $(p, p) \in \Delta$ касательное пространство $T_{(p,p)}$ к многообразию $\mathbb{R}V \times \mathbb{R}V$ имеет разложение: $T_{(p,p)} = T_p \oplus T_p$, где T_p – касательное пространство в точке $p \in \mathbb{R}V$ к многообразию $\mathbb{R}V$. Поэтому полагаем $J(v, w) = (-w, v)$, где $v, w \in T_p$. Многообразие M будем отождествлять с его образом $F(M)$. Тогда в произведении $\mathbb{R}V \times \mathbb{R}V$ расположено подмногообразие $\mathbb{R}M \times \mathbb{R}M$.

Класс эквивариантных кобордизмов

$$[\mathbb{R}M \times \mathbb{R}M \xrightarrow{\mathbb{R}F \times \mathbb{R}F} \mathbb{R}\bar{V} \wedge \mathbb{R}\bar{V}, G] \in MO_G^{2k}(\mathbb{R}\bar{V} \wedge \mathbb{R}\bar{V}, *)$$

обозначим через $[\mathbb{R}\bar{F} \times \mathbb{R}\bar{F}, G]$, а через β_{2k} обозначим гомоморфизм ограничения

$$MO_G^{2k}(\mathbb{R}\bar{V} \wedge \mathbb{R}\bar{V}, *) \rightarrow MO_G^{2k}(\bar{\Delta}, *) = \prod_{i \leq 2k} MO^i(\bar{\Delta}, *),$$

где $\bar{\Delta} = \Delta \cup \{*\}$ – множество неподвижных точек инволюции $g: \mathbb{R}\bar{V} \wedge \mathbb{R}\bar{V} \rightarrow \mathbb{R}\bar{V} \wedge \mathbb{R}\bar{V}$.

Рассмотрим теперь диагональное отображение $\delta: \mathbb{R}\bar{V} \rightarrow \bar{\Delta}$. Тогда из определения квадратов Стиррода (см. п. 1.3) вытекает равенство

$$\delta^*(\beta_{2k}([\mathbb{R}\bar{F} \times \mathbb{R}\bar{F}, G])) = Sq([\mathbb{R}\bar{F}]). \quad (2.1)$$

Дифференциал $d\delta: T(\mathbb{R}V) \rightarrow T\Delta$ диагонального диффеоморфизма $\delta: \mathbb{R}V \rightarrow \Delta$ продолжается единственным способом до изоморфизма комплексных векторных расслоений

$$\widetilde{d\delta}: T_{\mathbb{R}V} \rightarrow T_{\Delta}.$$

Если Δ_1 – диагональ в произведении $\mathbb{R}M \times \mathbb{R}M$, а $\delta_1: \mathbb{R}M \rightarrow \Delta_1$ – диагональный диффеоморфизм, то получаем аналогичный изоморфизм комплексных векторных расслоений $\widetilde{d\delta_1}: T_{\mathbb{R}M} \rightarrow T_{\Delta_1}$, причем коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathbb{R}M} & \xrightarrow{\widetilde{d\delta_1}} & T_{\Delta_1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_{\mathbb{R}V} & \xrightarrow{\widetilde{d\delta}} & T_{\Delta} \end{array} \quad (2.2)$$

из комплексных векторных расслоений, в которой вертикальные морфизмы являются вложениями.

Диаграмма (2.2) является расширением коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} T(\mathbb{R}M) & \xrightarrow{d\delta_1} & T(\Delta_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(\mathbb{R}V) & \xrightarrow{d\delta} & T(\Delta) \end{array} \quad (2.3)$$

из вещественных касательных расслоений. Применим к диаграмме (2.3) оператор J и получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} N(\mathbb{R}M/M) & \xrightarrow{\widetilde{d\delta_1}} & N(\Delta_1/M \times M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ N(\mathbb{R}V/V) & \xrightarrow{\widetilde{d\delta}} & N(\Delta/V \times V) \end{array}$$

из нормальных векторных расслоений. Поэтому диагональный диффеоморфизм $\delta: \mathbb{R}V \rightarrow \Delta$ эквивариантно продолжается до диффеоморфизма $\widetilde{\delta}$ окрестности $U(\mathbb{R}V)$ подмногообразия $\mathbb{R}V \subset V$ на окрестность $U(\Delta)$ подмногообразия $\Delta \subset \mathbb{R}V \times \mathbb{R}V$, причем существует такое продолжение, что при этом диффеоморфизме подмногообразие $M \cap U(\mathbb{R}V)$ будет отображаться на подмногообразие $(\mathbb{R}M \times \mathbb{R}M) \cap U(\Delta)$.

Обозначим топологические подпространства

$$U(\mathbb{R}V) \cup \{*\} \subset \overline{V}, \quad U(\Delta) \cup \{*\} \subset \mathbb{R}\overline{V} \wedge \mathbb{R}\overline{V}$$

через $U(\mathbb{R}\overline{V})$, $U(\overline{\Delta})$. Диффеоморфизм $\widetilde{\delta}: U(\mathbb{R}V) \rightarrow U(\Delta)$ продолжается до гомеоморфизма $\widetilde{\delta}: U(\mathbb{R}\overline{V}) \rightarrow U(\overline{\Delta})$. Тогда имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\overline{V} & \longrightarrow & U(\mathbb{R}\overline{V}) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \widetilde{\delta} \\ \overline{\Delta} & \longrightarrow & \overline{V} \wedge \overline{V} \end{array}$$

в которой горизонтальные отображения являются вложениями и образ $\tilde{\delta}(M \cap U(\mathbb{R}V))$ содержится в произведении $\mathbb{R}M \times \mathbb{R}M$. Из этой коммутативной диаграммы получаем коммутативную диаграмму для групп кобордизмов:

$$\begin{array}{ccc} MO_G^{2k}(\bar{V} \wedge \bar{V}, *) & \xrightarrow{\beta_{2k}} & MO_G^{2k}(\bar{\Delta}, *) \\ \downarrow \tilde{\delta}^* & & \approx \downarrow \delta^* \\ MO_G^{2k}(U(\mathbb{R}\bar{V}), *) & \xrightarrow{\beta_{2k}} & MO_G^{2k}(\mathbb{R}\bar{V}, *) \end{array}$$

причем выполняется равенство

$$\beta_{2k}(\tilde{\delta}^*([\mathbb{R}\bar{F} \times \mathbb{R}\bar{F}, G])) = \beta_{2k}([\bar{F}, G]),$$

так как при отображении $\tilde{\delta}$ подмногообразие $M \cap U(\mathbb{R}V)$ отображается на пересечение $(\mathbb{R}M \times \mathbb{R}M) \cap U(\Delta)$. Применим наконец соотношение (2.1), тогда из коммутативной диаграммы для кобордизмов получим соотношение $\beta_{2k}([\bar{F}, G]) = Sq([\mathbb{R}\bar{F}])$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.2. Для произвольного вещественного дифференцируемого J -многообразия (A, g) произведение $(A \times \mathbb{R}^{p,p}, g)$ также является вещественным дифференцируемым J -многообразием, так как мы можем отождествить пространство $\mathbb{R}^{p,p}$ с комплексным пространством $\mathbb{C}^p$. Рассмотрим композицию отображений

$$M \xrightarrow{F} A \hookrightarrow A \times \mathbb{R}^{p,p}.$$

Она определяет вещественное сингулярное J -многообразие

$$F': (M, g) \rightarrow (A \times \mathbb{R}^{p,p}, g)$$

при каждом $p \geq 0$. При достаточно большом p можно так эквивариантно “пошевелить” отображение F' , что получим новое вещественное сингулярное J -многообразие

$$F'': (M, g) \rightarrow (A \times \mathbb{R}^{p,p}, g),$$

которое станет вложением, а композиция отображений

$$M \xrightarrow{F''} A \times \mathbb{R}^{p,p} \hookrightarrow \Sigma^{p,p}(A)$$

будет собственным отображением. В отличие от доказательства предложения 2.1, нужно обосновать существование такого “шевеления”, так как приходится учитывать J -структуру. Приведем соответствующие рассуждения.

Обозначим через $D \subset \mathbb{C}$ диск, заданный неравенством $|z| < 1$. Покажем, что при больших p существует эквивариантное вложение $H: (M, g) \rightarrow (D^p, g)$, при котором сохраняется J -структура на многообразии (M, g) . Сначала построим отображение H на эквивариантной окрестности U подмногообразия $\mathbb{R}M$. Для этого возьмем какое-нибудь дифференцируемое вложение $h: \mathbb{R}M \rightarrow \mathbb{R}D^p$. Дифференциал этого отображения

$$dh: T(\mathbb{R}M) \rightarrow T(\mathbb{R}D^p) \tag{2.4}$$

однозначно продолжается до морфизма комплексных векторных расслоений

$$\widetilde{dh}: T_{\mathbb{R}M} \rightarrow T_{\mathbb{R}D^p}.$$

Применим к морфизму (2.4) эндоморфизм J и получим морфизм нормальных расслоений

$$\widetilde{dh}: N(\mathbb{R}M/M) \rightarrow N(\mathbb{R}D^p/D^p),$$

который является вложением. Теперь мы можем продолжить отображение h до эквивариантного вложения

$$H: (U, g) \rightarrow (D^p, g),$$

для которого дифференциал $dH: T_{\mathbb{R}M} \rightarrow T_{\mathbb{R}D^p}$ совпадает с морфизмом $\widetilde{dh}$. Затем, уменьшив окрестность U , мы можем продолжить вложение $H: U \rightarrow D^p$ до эквивариантного вложения всего многообразия M . После того как построено требуемое эквивариантное вложение $H: (M, g) \rightarrow (D^p, g)$, можно определить отображение

$$F'': (M, g) \rightarrow (A \times \mathbb{R}^{p,p}, g) = (A \times \mathbb{C}^p, g)$$

с помощью равенства $F'' = F \times \varepsilon H$, где ε – малое число.

Композицию отображений $(M, g) \xrightarrow{F''} (A \times \mathbb{R}^{p,p}, g) \hookrightarrow \Sigma^{p,p}(A)$ обозначим через $\overline{F''}$ и применим теперь лемму 2.3 к классу кобордизмов

$$[\overline{F''}, G] \in MO_G^{2k+2p}(\Sigma^{p,p}(A), *).$$

Тогда получим равенство

$$\beta_{2k+2p}([\overline{F''}, G]) = Sq([\mathbb{R}\overline{F''}]), \quad (2.5)$$

где $[\mathbb{R}\overline{F''}] \in MO^{k+p}(\Sigma^p(\mathbb{R}A), *)$.

Вычислим теперь обе части равенства (2.5) по отдельности. Применив соотношение (1.3), получим равенства

$$\beta_{2k+2p}([\overline{F''}, G]) = \beta_{2k+2p}(\sigma_{p,p}([F, G])) = \sigma_p(\beta_{2k}([\mathbb{R}F, G])).$$

С другой стороны, имеем равенства

$$Sq([\mathbb{R}\overline{F''}]) = Sq(\sigma_p([\mathbb{R}F])) = \sigma_p(Sq([\mathbb{R}F])).$$

Осталось заметить, что гомоморфизм надстройки σ_p является изоморфизмом. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1. Применим предложения 2.1, 2.2 и получим равенство

$$\beta_{2n-2m}([F(\mathbb{C}), G]) = Sq([F(\mathbb{R})]).$$

Поэтому выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} i^*(\alpha_{2n-2m}([F(\mathbb{C}), G])) &= \alpha_{2n-2m}(i^*([F(\mathbb{C}), G])) \\ &= \alpha_{2n-2m}(\beta_{2n-2m}([F(\mathbb{C}), G])) = \alpha_{2n-2m}(Sq([F(\mathbb{R})])). \end{aligned}$$

Из соотношений (1.2), (1.5) получаем равенства

$$\begin{aligned} i^*(\alpha_{2n-2m}([F(\mathbb{C}), G])) &= i^*([F(\mathbb{C})]), \\ \alpha_{2n-2m}(Sq([F(\mathbb{R})])) &= Sq^{n-m}([F(\mathbb{R})]) = [F(\mathbb{R})]^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.2. Сначала покажем, что справедлива

ЛЕММА 2.4. *Если гладкое вещественное алгебраическое многообразие X является M -многообразием, то гомоморфизм ограничения*

$$\beta_q: MO_G^q(X(\mathbb{C})) \rightarrow MO_G^q(X(\mathbb{R}))$$

является мономорфизмом при каждом q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомоморфизм ограничения третьих спектральных последовательностей

$$\Pi_2^{p,q}(X(\mathbb{C})) = H_G^p(X(\mathbb{C}); MO^q(\text{pt})) \rightarrow \Pi_2^{p,q}(X(\mathbb{R})) = H_G^p(X(\mathbb{R}); MO^q(\text{pt})).$$

Поскольку для M -многообразия гомоморфизм ограничения

$$H_G^p(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H_G^p(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$$

является мономорфизмом при каждом p (см. [15]), то гомоморфизм

$$\begin{aligned} H_G^p(X(\mathbb{C}); MO^q(\text{pt})) &= H_G^p(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2) \otimes MO^q(\text{pt}) \\ &\rightarrow H_G^p(X(\mathbb{R}); MO^q(\text{pt})) = H_G^p(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \otimes MO^q(\text{pt}) \end{aligned}$$

также будет мономорфизмом. Следовательно, гомоморфизм

$$\beta_q: MO_G^q(X(\mathbb{C})) \rightarrow MO_G^q(X(\mathbb{R}))$$

будет мономорфизмом при каждом q . Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Используя предложения 2.1, 2.2 и лемму 2.4, из равенств

$$[F(\mathbb{R})] = 0, \quad \beta_{2n-2m}([F(\mathbb{C}), G]) = Sq([F(\mathbb{R})]) = 0$$

получим равенства

$$[F(\mathbb{C}), G] = 0, \quad \alpha_{2n-2m}([F(\mathbb{C}), G]) = [F(\mathbb{C})] = 0,$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.3. Прежде чем доказать теорему, покажем, что справедлива

ЛЕММА 2.5. *Если гладкое вещественное алгебраическое многообразие X является GM -многообразием и класс эквивариантных кобордизмов $c \in MO_G^q(X(\mathbb{C}))$ принадлежит ядру гомоморфизма ограничения*

$$\beta_q: MO_G^q(X(\mathbb{C})) \rightarrow MO_G^q(X(\mathbb{R})),$$

то класс кобордизмов $\alpha_q(c) \in MO^q(X(\mathbb{C}))$ принадлежит подгруппе

$$(1 + g^*)MO^q(X(\mathbb{C})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогичная лемма для когомологий GM -многообразия доказана в работе [16], но нельзя сказать, что доказательство настоящей леммы аналогично рассуждению, использованному в [16] для когомологий. Покажем сначала, что при каждом q образ гомоморфизма забывания вещественной структуры

$$\alpha_q: MO_G^q(X(\mathbb{C})) \rightarrow MO^q(X(\mathbb{C}))$$

равен подгруппе $MO^q(X(\mathbb{C}))^G$, состоящей из инвариантных относительно инволюции g^* классов кобордизмов.

Группа $MO^q(X(\mathbb{C}))$ является конечномерным векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2$. Будем оценивать размерность образа гомоморфизма забывания вещественной структуры $\alpha_q(MO_G^q(X(\mathbb{C})))$. Из второй спектральной последовательности

$$\Pi_2^{q+k, -k} = H^{q+k}(G, MO^{-k}(X(\mathbb{C}))) \implies MO_G^q(X(\mathbb{C}))$$

следует, что всегда имеет место вложение

$$\alpha_q(MO_G^q(X(\mathbb{C}))) \subset MO^q(X(\mathbb{C}))^G,$$

так как

$$H^0(G, MO^q(X(\mathbb{C}))) = MO^q(X(\mathbb{C}))^G,$$

а α_q – краевой гомоморфизм этой спектральной последовательности. Следовательно, для любого гладкого вещественного алгебраического многообразия X выполняется неравенство

$$\dim \alpha_q(MO_G^q(X(\mathbb{C}))) \leq \dim MO^q(X(\mathbb{C}))^G.$$

Покажем, что для GM -многообразия выполняется также противоположное неравенство.

Заметим сначала, что гомоморфизм забывания вещественной структуры для когомологий

$$\alpha_q: H_G^q(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$$

в случае GM -многообразия имеет образ, равный $H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$, так как тогда вторая спектральная последовательность

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)) \implies H_G^{p+q}(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$$

вырождается, а гомоморфизм

$$\alpha_q: H_G^q(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$$

равен краевому гомоморфизму этой спектральной последовательности (см., например, [7]). Следовательно, образ гомоморфизма

$$\alpha_q: H_G^{q+k}(X(\mathbb{C}); MO^{-k}(\text{pt})) \rightarrow H^{q+k}(X(\mathbb{C}); MO^{-k}(\text{pt}))$$

равен

$$H^{q+k}(X(\mathbb{C}), MO^{-k}(\text{pt}))^G = H^{q+k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G \otimes MO^{-k}(\text{pt})$$

при любом $k \geq 0$. Поскольку третья спектральная последовательность

$$\Pi_2^{q+k, -k} = H_G^{q+k}(X(\mathbb{C}); MO^{-k}(\text{pt})) \implies MO_G^q(X(\mathbb{C}))$$

вырождается, то выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \dim \alpha_q(MO_G^q(X(\mathbb{C}))) &\geq \sum_k \dim \alpha_q(H_G^{q+k}(X(\mathbb{C}); MO^{-k}(\text{pt}))) \\ &= \sum_k \dim H^{q+k}(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)^G \otimes MO^{-k}(\text{pt}). \end{aligned}$$

Из спектральной последовательности Атьи–Хирцебруха

$$E_2^{q+k, -k} = H^{q+k}(X(\mathbb{C}); MO^{-k}(\text{pt})) \implies MO^q(X(\mathbb{C}))$$

получаем неравенство

$$\sum_k \dim H^{q+k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G \otimes MO^{-k}(\text{pt}) \geq \dim MO^q(X(\mathbb{C}))^G.$$

В итоге получаем требуемое неравенство

$$\dim \alpha_q(MO_G^q(X(\mathbb{C}))) \geq \dim MO^q(X(\mathbb{C}))^G.$$

Таким образом, доказана эпиморфность краевого гомоморфизма

$$\alpha_q: MO_G^q(X(\mathbb{C})) \rightarrow MO^q(X(\mathbb{C}))^G$$

при каждом q . Она означает, что равны нулю дифференциалы $d_r^{0,q}$ во второй спектральной последовательности

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, MO^q(X(\mathbb{C}))) \implies MO_G^{p+q}(X(\mathbb{C})). \quad (2.6)$$

Заметим, что вторая спектральная последовательность для эквивариантных кобордизмов точки $MO_G^*(\text{pt}) = MO^*(\mathbb{RP}^\infty)$ вырождается. С помощью умножения на степени элемента $t \in MO_G^1(\text{pt}) = MO^1(\mathbb{RP}^\infty)$ мы будем устанавливать, что все дифференциалы спектральной последовательности (2.6) равны нулю. Спектральная последовательность (2.6) определяет убывающую фильтрацию

$$\begin{aligned} MO_G^q(X(\mathbb{C})) &= F_0 MO_G^q(X(\mathbb{C})) \supset F_1 MO_G^q(X(\mathbb{C})) \supset \dots \\ &\dots \supset F_{q-1} MO_G^q(X(\mathbb{C})) \supset F_q MO_G^q(X(\mathbb{C})) \supset \dots \end{aligned}$$

Группа $F_1 MO_G^q(X(\mathbb{C}))$ равна ядру гомоморфизма забывания вещественной структуры

$$\alpha_q: MO_G^q(X(\mathbb{C})) \rightarrow MO^q(X(\mathbb{C})).$$

Поэтому группа $F_1 MO_G^1(\text{pt})$ равна группе $MO_G^1(\text{pt})$, так как группа $MO^1(\text{pt})$ равна нулю. Таким образом, элемент $t \in MO_G^1(\text{pt})$ принадлежит группе $F_1 MO_G^1(\text{pt})$. Он определяет элемент

$$\tilde{t} \in \Pi_\infty^{1,0}(\text{pt}) = H^1(G, MO^0(\text{pt})),$$

который равен образу элемента t при проекции

$$F_1 MO_G^1(\text{pt}) \rightarrow F_1 MO_G^1(\text{pt})/F_2 MO_G^1(\text{pt}) = \Pi_\infty^{1,0}(\text{pt}).$$

Если использовать равенства

$$\Pi_\infty^{1,0}(\text{pt}) = H^1(G, MO^0(\text{pt})) = MO^0(\text{pt}),$$

то элемент $\tilde{t}$ совпадает с $1 \in MO^0(\text{pt})$.

Равенство нулю дифференциалов $d_r^{p,q}$ при $p > 0$ и $r = 2, 3, \dots$ для спектральной последовательности (2.6) вытекает тогда из последовательного рассмотрения коммутативных диаграмм

$$\begin{array}{ccc} \Pi_r^{0,q}(X(\mathbb{C})) & \xrightarrow{d_r^{0,q}} & \Pi_r^{r,q-r+1}(X(\mathbb{C})) \\ \cup \tilde{t}^p \downarrow & & \downarrow \cup \tilde{t}^p \\ \Pi_r^{p,q}(X(\mathbb{C})) & \xrightarrow{d_r^{p,q}} & \Pi_r^{p+r,q-r+1}(X(\mathbb{C})) \end{array}$$

при $r = 2, 3, \dots$, так как левый гомоморфизм $\cup \tilde{t}^p$ в них является эпиморфизмом.

Таким образом, для GM -многообразия вторая спектральная последовательность вырождается.

Доказательство леммы вытекает из вырождения второй спектральной последовательности. Соответствующее рассуждение для когомологий проведено в [15]. Доказательство для кобордизмов аналогично, но предварительно требуется доказать утверждения, аналоги которых для когомологий были доказаны в [7]. Поэтому мы проведем полное рассуждение.

Прежде всего заметим, что справедливо следующее утверждение. *При $N > 2n$ гомоморфизм*

$$\cup t: MO_G^N(X(\mathbb{C})) \rightarrow MO_G^{N+1}(X(\mathbb{C}))$$

является изоморфизмом. Оно вытекает из равенств $MO^q(X(\mathbb{C})) = 0$ при $q > 2n$ после применения второй спектральной последовательности. Таким образом, если рассмотреть мультипликативную систему $S = \{t^k \mid k \geq 0\} \subset MO_G^*(\text{pt})$, то канонический гомоморфизм

$$MO_G^N(X(\mathbb{C})) \rightarrow S^{-1} MO_G^*(X(\mathbb{C}))$$

при $N > 2n$ является изоморфизмом. Из общей локализационной теоремы вытекает, что гомоморфизм ограничения

$$\beta_*: S^{-1} MO_G^*(X(\mathbb{C})) \rightarrow S^{-1} MO_G^*(X(\mathbb{R}))$$

является изоморфизмом (см., например, [20]). Следовательно, *гомоморфизм ограничения*

$$\beta_N: MO_G^N(X(\mathbb{C})) \rightarrow MO_G^N(X(\mathbb{R}))$$

является изоморфизмом при $N > 2n$. Из этих двух утверждений следует, что ядро гомоморфизма ограничения

$$\beta_q: MO_G^q(X(\mathbb{C})) \rightarrow MO_G^q(X(\mathbb{R}))$$

совпадает с ядром гомоморфизма умножения на большую степень элемента t ,

$$\cup t^N: MO_G^q(X(\mathbb{C})) \rightarrow MO_G^{q+N}(X(\mathbb{C})).$$

Это умножение индуцирует гомоморфизм $\cup \tilde{t}^N: \Pi_\infty^{0,q}(X(\mathbb{C})) \rightarrow \Pi_\infty^{N,q}(X(\mathbb{C}))$. Поскольку вторая спектральная последовательность для X вырождается, то этот гомоморфизм совпадает с проекцией

$$MO^q(X(\mathbb{C}))^G \rightarrow MO^q(X(\mathbb{C}))^G / (1 + g^*)MO^q(X(\mathbb{C})).$$

Поэтому ядро гомоморфизма $\cup \tilde{t}^N$ равно группе $(1 + g^*)MO^q(X)$. Пусть элемент $a \in MO_G^q(X(\mathbb{C}))$ принадлежит ядру гомоморфизма $\cup t^N$. Тогда элемент $\alpha_q(a) \in MO^q(X(\mathbb{C}))$ принадлежит ядру гомоморфизма $\cup \tilde{t}^N$, т. е. группе $(1 + g^*)MO^q(X(\mathbb{C}))$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 0.3 Используя предложения 2.1, 2.2 и лемму 2.5, из равенств

$$[F(\mathbb{R})] = 0, \quad \beta_{2n-2m}([F(\mathbb{C}), G]) = Sq([F(\mathbb{R})]) = 0$$

получим соотношение

$$[F(\mathbb{C})] = \alpha_{2n-2m}([F(\mathbb{C}), G]) \in (1 + g^*)MO^{2n-2m}(X(\mathbb{C})),$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Покажем теперь, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Если гладкое вещественное алгебраическое многообразие X является M -многообразием, то инволюция*

$$g^*: MO^q(X(\mathbb{C})) \rightarrow MO^q(X(\mathbb{C}))$$

тривиальна при каждом q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует класс кобордизмов $c \in MO^q(X(\mathbb{C}))$ такой, что $g^*(c) \neq c$. Пусть $f: M \rightarrow X(\mathbb{C})$ – сингулярное многообразие, класс кобордизмов которого равен c . Тогда сингулярное многообразие $g \circ f: M \rightarrow X(\mathbb{C})$ представляет класс кобордизмов $g^*(c)$, а сингулярное многообразие

$$f \sqcup g \circ f: M \sqcup M \rightarrow X(\mathbb{C})$$

представляет класс кобордизмов $c + g^*(c)$.

На многообразии $M \sqcup M$ рассмотрим инволюцию $g: M \sqcup M \rightarrow M \sqcup M$, которая переставляет экземпляры многообразия M . Тогда получим вещественное сингулярное многообразие

$$f \sqcup g \circ f: (M \sqcup M, g) \rightarrow (X(\mathbb{C}), g).$$

Класс эквивариантных кобордизмов этого вещественного сингулярного многообразия обозначим через C . Тогда выполняется равенство $\alpha_q(C) = c + g^*(c)$. Следовательно, из нашего предположения вытекает неравенство $C \neq 0$. Используя лемму 2.4, получим дополнительное неравенство $\beta_q(C) \neq 0$. Но из предложения 2.1 следует, что на самом деле выполняется равенство $\beta_q(C) = 0$. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.4. Для доказательства будем применять теорию алгебраических кобордизмов, построенную в работе [10]. Если $Y \rightarrow X$ – проективный морфизм в категории $\mathbf{Sm}_{\mathbb{R}}$ относительной коразмерности q на каждой компоненте многообразия Y , то элемент $\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}([Y \rightarrow X])$ равен классу комплексных кобордизмов $[Y(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})] \in MU^{2q}(X(\mathbb{C}))$, а класс $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}([Y \rightarrow X])$ равен классу неориентированных кобордизмов $[Y(\mathbb{R}) \rightarrow X(\mathbb{R})] \in MO^q(X(\mathbb{C}))$.

Обозначим через

$$\varphi: MU^{2k}(X(\mathbb{C})) \rightarrow MO^{2k}(X(\mathbb{C}))$$

гомоморфизм забывания комплексной структуры. Тогда теорему 0.3 можно сформулировать следующим образом: *пусть гладкое вещественное алгебраическое многообразие X является GM -многообразием, $c \in \Omega^q(X)$; тогда из равенства $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(c) = 0$ вытекает соотношение $\varphi(\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}(c)) \in (1 + g^*)MO^{2q}(X(\mathbb{C}))$* . Действительно, класс кобордизмов $c \in \Omega^q(X)$ представляется линейной комбинацией с целыми коэффициентами:

$$c = k_1[F_1] + \dots + k_l[F_l],$$

где $F_1, \dots, F_l$ – проективные морфизмы в многообразие X относительной коразмерности q на каждой компоненте. Заметим теперь, что классы кобордизмов

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(c) \in MO^q(X(\mathbb{R})), \quad \varphi(\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}(c)) \in MO^{2q}(X(\mathbb{C}))$$

не изменятся, если заменить четные коэффициенты $k_1, \dots, k_l$ на 0, а нечетные на 1. Следовательно, можно считать, что класс кобордизмов $c \in \Omega^q(X)$ представляется одним проективным морфизмом $Y \rightarrow X$, а тогда мы находимся в условиях теоремы 0.3.

Заметим, что если $E \rightarrow X$ – векторное расслоение в категории $\mathbf{Var}_{\mathbb{R}}$, то класс Штифеля–Уитни $w_{2k}(E(\mathbb{C})) \in MO^{2k}(X(\mathbb{C}))$ равен классу кобордизмов $\varphi(c_k(E(\mathbb{C})))$, где $c_k(E(\mathbb{C})) \in MU^{2k}(X(\mathbb{C}))$ – класс Чжэня комплексного расслоения $E(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$. Наконец, так как выполняются равенства

$$w_k(E(\mathbb{R})) = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(c_k(E)), \quad c_k(E(\mathbb{C})) = \mathrm{cl}_{\mathbb{C}}(c_k(E)),$$

то теорема вытекает из предыдущей переформулировки теоремы 0.3.

§ 3. Различные алгебраические кобордизмы: примеры и замечания

Для гладкого вещественного алгебраического многообразия X определены следующие гомоморфизмы колец:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{cl}}_{\mathbb{C}}^{MO}: \Omega^*(\overline{X}) &\rightarrow MO^{2*}(\overline{X}(\mathbb{C})) = MO^{2*}(X(\mathbb{C})), & \overline{X} &= X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \\ \mathrm{cl}_{\mathbb{C}}^{MO}: \Omega^*(X) &\rightarrow MO^{2*}(X(\mathbb{C})), & \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}^{MO}: \Omega^*(X) &\rightarrow MO^*(X(\mathbb{R})). \end{aligned}$$

Эти гомоморфизмы устроены следующим образом. Если $Y \rightarrow \overline{X}$ – проективный морфизм в категории $\mathbf{Var}_{\mathbb{C}}$, то по определению

$$\overline{\mathrm{cl}}_{\mathbb{C}}^{MO}([Y \rightarrow \overline{X}]) = [Y(\mathbb{C}) \rightarrow \overline{X}(\mathbb{C})],$$

а если $Y \rightarrow X$ – проективный морфизм в категории $\mathbf{Var}_{\mathbb{R}}$, то по определению

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}^{MO}([Y \rightarrow X]) = [Y(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})], \quad \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}^{MO}([Y \rightarrow X]) = [Y(\mathbb{R}) \rightarrow X(\mathbb{R})].$$

Образы определенных таким образом гомоморфизмов будем обозначать через

$$MO_{\mathbb{C}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C})), \quad MO_{\mathbb{R}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C})), \quad MO_{\text{alg}}^*(X(\mathbb{R}))$$

и называть *неориентированными алгебраическими кобордизмами*.

Теорему 0.2 можно переформулировать следующим образом: *пусть гладкое вещественное алгебраическое многообразие X является M -многообразием, $c \in \Omega^q(X)$; тогда из равенства $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}^{MO}(c) = 0$ вытекает равенство $\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}^{MO}(c) = 0$. Из этой переформулировки получаем*

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Если гладкое вещественное алгебраическое многообразие X является M -многообразием, то корректно определен гомоморфизм колец*

$$\mu: MO_{\text{alg}}^*(X(\mathbb{R})) \rightarrow MO_{\mathbb{R}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C})), \quad (3.1)$$

который классу кобордизмов $[Z(\mathbb{R}) \rightarrow X(\mathbb{R})] \in MO_{\text{alg}}^(X(\mathbb{R}))$ сопоставляет класс кобордизмов $[Z(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})] \in MO_{\mathbb{R}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C}))$, где $Z \rightarrow X$ – произвольный проективный морфизм в категории $\mathbf{Var}_{\mathbb{R}}$.*

Пусть $X = \mathrm{Spec} \mathbb{R}$, тогда выполняются равенства (см., например, [21])

$$MO_{\text{alg}}^*(X(\mathbb{R})) = \mathfrak{N}^*, \quad MO_{\mathbb{C}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C})) = MO_{\mathbb{R}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C})) = (\mathfrak{N}^*)^2,$$

где кольцо $(\mathfrak{N}^*)^2$ равно образу гомоморфизма возведения в квадрат $(\cdot)^2: \mathfrak{N}^* \rightarrow \mathfrak{N}^{2*}$, а гомоморфизм возведения в квадрат совпадает с гомоморфизмом μ (см. [5, теорема 24.4]).

Таким образом, если $X = \mathrm{Spec} \mathbb{R}$, то гомоморфизм (3.1) является изоморфизмом. Будет ли справедливо это утверждение для произвольного M -многообразия? Очевидно, что гомоморфизм (3.1) является эпиморфизмом, поэтому необходимо только проверять его мономорфность. Возьмем в качестве примера гладкую проективную M -кривую рода $p > 0$. Тогда выполняются равенства

$$MO_{\text{alg}}^1(X(\mathbb{R})) = (\mathbb{Z}/2)^{p+1}, \quad MO_{\mathbb{R}\text{-alg}}^2(X(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}/2.$$

Поэтому уже для кривых поставленный вопрос имеет отрицательный ответ.

В статье [22] было введено понятие *вещественного алгебраически максимального многообразия* (вещественного AM -многообразия). Это такое вещественное алгебраическое многообразие X , для которого эпиморфно отображение цикла кольца Чжоу в кольцо когомологий

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}^H: CH^*(X) \rightarrow H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

Многообразие X , обладающее клеточным разложением (в смысле алгебраической геометрии; см., например, [19]), является AM -многообразием, но существуют AM -многообразия, которые не обладают клеточным разложением (см. [22]). Каждое вещественное AM -многообразие является M -многообразием.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Если вещественное алгебраическое многообразие X является AM -многообразием, то гомоморфизм (3.1) будет изоморфизмом, а также выполняются равенства

$$MO_{\text{alg}}^*(X(\mathbb{R})) = \mathfrak{N}^*(X(\mathbb{R})), \quad MO_{\mathbb{C}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C})) = MO_{\mathbb{R}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения AM -многообразия следует, что для него выполняется равенство

$$H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = H^{2*}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

В статье [22] показано, что для AM -многообразия X однозначно определен гомоморфизм колец когомологий

$$\nu: H^{2*}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

для которого выполняется соотношение $\nu \circ \text{cl}_{\mathbb{C}}^H = \text{cl}_{\mathbb{R}}^H$, где

$$\text{cl}_{\mathbb{C}}^H: CH^*(X) \rightarrow H^{2*}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2), \quad \text{cl}_{\mathbb{R}}^H: CH^*(X) \rightarrow H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

– отображения цикла. Кроме того, в статье [22] доказано, что гомоморфизм ν является изоморфизмом. Обратный гомоморфизм является аналогом гомоморфизма (3.1), поэтому мы обозначим его через

$$\mu^H: H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{2*}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2). \quad (3.2)$$

Поскольку гомоморфизм $\Omega^*(X) \rightarrow CH^*(X)$ является эпиморфизмом, то из условия предложения следует, что сквозной гомоморфизм

$$\Omega^*(X) \rightarrow CH^*(X) \xrightarrow{\text{cl}_{\mathbb{C}}^H} H^{2*}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

также является эпиморфизмом. Этот сквозной гомоморфизм мы также будем обозначать через $\text{cl}_{\mathbb{C}}^H$. Пусть $c_1, \dots, c_N$ – такие элементы кольца $\Omega^*(X)$, что их образы

$$\text{cl}_{\mathbb{C}}^H(c_1), \dots, \text{cl}_{\mathbb{C}}^H(c_N) \in H^{2*}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

составляют базис $\mathbb{F}_2$ -пространства $H^{2*}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$. Тогда получаем разложение в прямую сумму:

$$MO^*(X(\mathbb{C})) = \mathfrak{N}^* \cdot \text{cl}_{\mathbb{C}}^{MO}(c_1) + \dots + \mathfrak{N}^* \cdot \text{cl}_{\mathbb{C}}^{MO}(c_N). \quad (3.3)$$

Поскольку гомоморфизм (3.2) является изоморфизмом и выполняются равенства

$$\mu^H(\text{cl}_{\mathbb{R}}^H(c_i)) = \text{cl}_{\mathbb{C}}^H(c_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

то классы когомологий

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}^H(c_1), \dots, \text{cl}_{\mathbb{R}}^H(c_N) \in H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

составляют базис $\mathbb{F}_2$ -пространства $H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$. Поэтому получаем разложение в прямую сумму:

$$MO^*(X(\mathbb{R})) = \mathfrak{N}^* \cdot \text{cl}_{\mathbb{R}}^{MO}(c_1) + \dots + \mathfrak{N}^* \cdot \text{cl}_{\mathbb{R}}^{MO}(c_N). \quad (3.4)$$

Гомоморфизм (3.1) отображает разложение (3.4) в разложение (3.3), причем произведение $a \cdot \text{cl}_{\mathbb{R}}^{MO}(c_i)$ переходит в произведение $a^2 \cdot \text{cl}_{\mathbb{C}}^{MO}(c_i)$, где $a \in \mathfrak{N}^*$, $i = 1, \dots, N$. Следовательно, гомоморфизм (3.1) является мономорфизмом, а поэтому он обязан быть изоморфизмом.

Заметим, наконец, что из разложений (3.4), (3.3) получаются равенства

$$MO_{\text{alg}}^*(X(\mathbb{R})) = \mathfrak{N}^*(X(\mathbb{R})), \quad MO_{\mathbb{C}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C})) = MO_{\mathbb{R}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C})).$$

Предложение доказано.

Мы можем также рассмотреть кольца комплексных алгебраических кобордизмов

$$MU_{\mathbb{C}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C})), \quad MU_{\mathbb{R}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C}))$$

гладкого вещественного алгебраического многообразия X , которые по определению равны образам гомоморфизмов

$$\begin{aligned} \overline{\text{cl}}_{\mathbb{C}}^{MU} : \mathfrak{N}^*(\overline{X}) &\rightarrow MU^{2*}(\overline{X}(\mathbb{C})) = MU^{2*}(X(\mathbb{C})), \\ \text{cl}_{\mathbb{C}}^{MU} : \mathfrak{N}^*(X) &\rightarrow MU^{2*}(X(\mathbb{C})). \end{aligned}$$

Заметим, что если $X = \text{Spec } \mathbb{R}$, то выполняются равенства

$$MU_{\mathbb{R}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C})) = MU_{\mathbb{C}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C})) = \Omega_U^{2*},$$

где Ω_U^{2*} – кольцо комплексных кобордизмов Тома (см., например, [21]).

Из предложения 3.2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть гладкое вещественное алгебраическое многообразие X является АМ-многообразием. Тогда корректно определен гомоморфизм колец

$$\nu : MU_{\mathbb{R}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C})) \rightarrow MO^*(X(\mathbb{R})),$$

который классу кобордизмов $[Z(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})] \in MU_{\mathbb{R}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C}))$ сопоставляет класс кобордизмов $[Z(\mathbb{R}) \rightarrow X(\mathbb{R})] \in MO^*(X(\mathbb{R}))$, где $Z \rightarrow X$ – произвольный проективный морфизм в категории $\mathbf{Var}_{\mathbb{R}}$. Этот гомоморфизм является эпиморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо рассмотреть композицию гомоморфизмов

$$MU_{\mathbb{R}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C})) \xrightarrow{\varphi} MO_{\mathbb{R}\text{-alg}}^{2*}(X(\mathbb{C})) \xrightarrow{\mu^{-1}} MO_{\text{alg}}^*(X(\mathbb{R})),$$

где φ – гомоморфизм забывания комплексной структуры. Эта композиция задает искомый гомоморфизм ν .

Заметим, наконец, что если Y – гладкое вещественное проективное алгебраическое многообразие, то выполняются равенства

$$w_{i_1 \dots i_k}(Y(\mathbb{R})) = c_{i_1 \dots i_k}(Y(\mathbb{C})) \pmod{2},$$

где $\{w_{i_1 \dots i_k}(Y(\mathbb{R}))\}$ – числа Штифеля–Уитни многообразия $Y(\mathbb{R})$, а $\{c_{i_1 \dots i_k}(Y(\mathbb{C}))\}$ – числа Чжэня многообразия $Y(\mathbb{C})$. Поэтому следствие 3.3 в случае $X = \text{Spec } \mathbb{R}$ является переформулировкой следующего известного

результата (см., например, [21]): соотношения для чисел Штифеля–Уитни $\{w_{i_1 \dots i_k}\}$ компактных дифференцируемых многообразий (соотношения Ву) получаются из соотношений для чисел Чженя $\{c_{i_1 \dots i_k}\}$ компактных комплексных многообразий с помощью редукции по mod 2.

Список литературы

1. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1977.
2. D. Quillen, “Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations”, *Adv. Math.*, **7**:1 (1971), 29–56.
3. A. Dold, “Geometric cobordism and fixed point transfer”, *Algebraic topology*, Lecture Notes in Math., **673**, Springer, Berlin, 1978, 32–87.
4. Р. Том, “Некоторые свойства “в целом” дифференцируемых многообразий”, *Расслоенные пространства и их приложения*, Сб. переводов, ИЛ, М., 1958, 293–351; пер. с франц.: R. Thom, “Quelques propriétés globales des variétés différentiables”, *Comm. Math. Helv.*, **28** (1954), 17–68.
5. П. Коннер, Э. Флойд, *Гладкие периодические отображения*, Мир, М., 1969; пер. с англ.: P. E. Conner, E. E. Floyd, *Differentiable periodic maps*, Acad. Press, New York; Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1964.
6. А. И. Дегтярев, В. М. Харламов, “Топологические свойства вещественных алгебраических многообразий: du côté de chez Rokhlin”, *УМН*, **55**:4 (2000), 129–212; англ. пер.: A. I. Degtyarev, V. M. Kharlamov, “Topological properties of real algebraic varieties: du côté de chez Rokhlin”, *Russian Math. Surveys*, **55**:4 (2000), 735–814.
7. В. А. Краснов, “Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:2 (1983), 268–297; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Harnack–Thom inequalities for mappings of real algebraic varieties”, *Math. USSR-Izv.*, **22**:2 (1984), 247–275.
8. В. А. Краснов, “Вещественные алгебраические GM-многообразия”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 39–66; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Real algebraic GM-varieties”, *Izv. Math.*, **62**:3 (1998), 465–491.
9. Y. B. Rudyak, *On Thom spectra, orientability, and cobordism*, Springer Monogr. Math., Berlin, 1998.
10. M. Levine, F. Morel, “Cobordisme algébrique I, II”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **332**:8 (2001), 723–728; № 9, 815–820.
11. A. Borel, *Seminar on transformation groups*, Ann. of Math. Stud., **48**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1960.
12. У-И Сян, *Когомологическая теория топологических групп преобразований*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: Wu-yi Hsiang, *Cohomology theory of topological transformation groups*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975.
13. M. Levine, F. Morel, *Algebraic cobordism. I*, Preprint, 2002; <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0547/index.html>.
14. M. Levine, *Algebraic cobordism. II*, Preprint, 2002; <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0577/index.html>.
15. В. А. Краснов, “Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:4 (1991), 716–746; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Characteristic classes of vector bundles on a real algebraic variety”, *Math. USSR-Izv.*, **39**:1 (1992), 703–730.
16. В. А. Краснов, “Алгебраические циклы на вещественном алгебраическом GM-многообразии и их приложения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:4 (1993), 153–173;

- англ. пер.: V. A. Krasnov, “Algebraic cycles on a real algebraic GM-manifold and their applications”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **43**:1 (1994), 141–160.
17. В. А. Краснов, “Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:3 (1994), 36–52; англ. пер.: V. A. Krasnov, “On equivariant Grothendieck cohomology of a real algebraic variety, and its applications”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **44**:3 (1995), 461–477.
 18. Т. том Диек, “Steenrod-Operationen in Kobordismen-Theorien”, *Math. Z.*, **107**:5 (1968), 380–401.
 19. У. Фултон, *Теория пересечений*, Мир, М., 1989; пер. с англ.: W. Fulton, *Intersection theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
 20. Т. том Дик, *Группы преобразований и теория представлений*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: T. tom Dieck, *Transformation groups and representation theory*, *Lecture Notes in Math.*, **766**, Springer, Berlin, 1979.
 21. Р. Стонг, *Заметки по теории кобордизмов*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: R. E. Stong, *Notes on cobordism theory*, *Math. Notes*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1968.
 22. В. А. Краснов, “Вещественные алгебраически максимальные многообразия”, *Матем. заметки*, **73**:6 (2003), 853–860; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Real algebraically maximal varieties”, *Math. Notes*, **73**:6 (2003), 806–812.

В. А. КРАСНОВ (V. A. KRASNOV)
Ярославский государственный университет
E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию
27.09.2000
07.12.2005